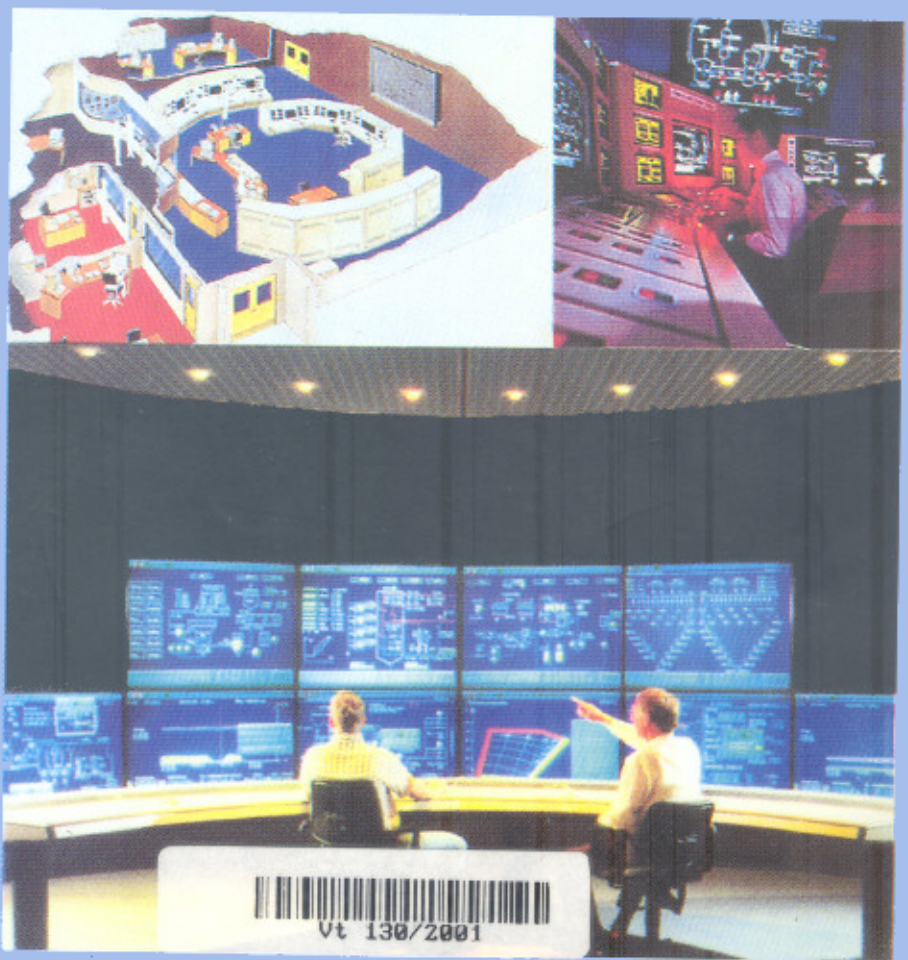
ĐỖ XUÂN KHÔI

TÍNH TOÁN PHÂN TÍCH HỆ THỐNG ĐIỆN



Vt 130/2001

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

Ts. ĐỖ XUÂN KHÔI

Tính toán phân tích
HỆ THỐNG ĐIỆN

In lần thứ hai có sửa chữa và bổ sung

NHA XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2001

Lời giới thiệu

Tính toán phân tích hệ thống điện là phần kiến thức rất quan trọng của một kỹ sư điện. Những hiểu biết về Tính toán phân tích hệ thống điện được sử dụng thường xuyên trong quá trình quy hoạch, thiết kế, lựa chọn trang thiết bị, quản lý vận hành và tính toán các chỉ tiêu kinh tế kỹ thuật của hệ thống điện.

Tính toán phân tích hệ thống điện bao gồm nhiều bài toán quen thuộc: tính toán chế độ xác lập của lưới điện, đánh giá trạng thái của hệ thống, tính toán ngắn mạch và phân tích sự cố, tối ưu hóa chế độ làm việc và trào lưu công suất ...

Mỗi bài toán này tự nó có những ý nghĩa khoa học và thực tiễn riêng.

Chúng tôi hân hạnh được giới thiệu cùng bạn đọc tập sách "TÍNH TOÁN PHÂN TÍCH HỆ THỐNG ĐIỆN" *của Tiến sĩ Đỗ Xuân Khôi với nội dung khá phong phú, hiện đại, đề cập đến những vấn đề cốt lõi của giải tích hệ thống điện.*

Những nội dung chuyên môn được trình bày mạch lạc, có hệ thống, súc tích và sáng sủa.

Chúng tôi hy vọng quyển sách này sẽ được bạn đọc tiếp nhận và đánh giá tốt. Sách có thể được sử dụng như một tài liệu giáo khoa để giảng dạy môn lưới điện cho chuyên ngành hệ thống điện ở bậc đại học. Sách cũng có thể dùng làm tài liệu tham khảo rất hữu ích cho các ngành học và bậc học khác, cho nghiên cứu sinh, kỹ sư, cán bộ nghiên cứu và quản lý hoạt động trong lĩnh vực hệ thống điện.

VS.GSTSKH Trần Đình Long

Chủ nhiệm Bộ môn Hệ thống điện - ĐHBK Hà Nội

Mục lục

Lời nói đầu 9

1 Hệ phương trình tuyến tính ứng dụng trong phân tích hệ thống điện 11

1.1 Phương pháp khử biến và khai triển tam giác 12
1.1.1 Phương pháp khử Gauss 13
1.1.2 Phương pháp khai triển tam giác 16
1.1.3 Phương pháp khai triển Cholesky 20
1.2 Phương pháp khai triển trực giao 21
1.3 Nghịch đảo ma trận 25
1.3.1 Phương pháp Gauss- Jordan 25
1.3.2 Nghịch đảo bởi khai triển tam giác 27
1.3.3 Công thức Sherman- Morrison 27
1.4 Phương pháp lặp 29
1.4.1 Phương pháp lặp Jacobi 30
1.4.2 Phương pháp lặp Gauss- Seidel 30

2 Mô hình nút của lưới điện 31

2.1 Hệ phương trình nút 31
2.2 Ma trận tổng dẫn nút 37
2.2.1 Ma trận tổng dẫn nút của phần tử lưới 37
2.2.2 Trường hợp nhánh có hỗ cảm 38
2.2.3 Lưới tương đương của các nhánh hỗ cảm 41
2.2.4 Thí dụ 41
2.2.5 Biểu diễn ma trận tổng dẫn nút của lưới dùng ma trận nối dây nút- nhánh 44
2.3 Tính chất thưa của ma trận tổng dẫn nút và phương pháp khai triển theo thứ tự tối ưu khi giải hệ phương trình tuyến tính thưa 48
2.4 Cập nhật khai triển tam giác của Y khi đóng (cắt) một nhánh 52
2.5 Khử nút và biến đổi tương đương trong lưới điện 53
2.6 Ma trận tổng trở nút 56
2.6.1 Một định nghĩa của tổng dẫn nút và tổng trở nút 56
2.6.2 Ma trận Z và tổng trở Thevenin 58

2.6.3 Sự thay đổi trong ma trận Z khi đóng (cắt) một nhánh 6
2.6.4 Trường hợp đóng cắt nhánh có hỗ cảm 70
2.6.5 Tính toán các phần tử của Z dùng khai triển tam giác của Y 72
2.6.6 Thay đổi trong ma trận Z khi dịch chuyển nút cơ sở -cân bằng 75

3 Tính toán ngắn mạch 77

3.1 Nhập đề 77
3.2 Tính toán ngắn mạch đối xứng 79
3.2.1 Công thức tính toán 79
3.2.2 Sử dụng mạch tương đương Thevenin 81
3.2.3 Thí dụ 83
3.3 Phân tích chế độ không đối xứng bằng phương pháp các thành phần đối xứng 85
3.4 Lưới điện của các thành phần đối xứng 88
3.4.1 Mạch điện thành phần đối xứng của đường dây 89
3.4.2 Mạch điện thành phần đối xứng của máy biến áp và máy điện đồng bộ 92
3.5 Tính toán hư hỏng không đối xứng 95
3.5.1 Ngắn mạch một pha 96
3.5.2 Ngắn mạch hai pha chạm đất 97
3.5.3 Ngắn mạch hai pha 99
3.5.4 Thí dụ 100
3.5.5 Hở mạch không đối xứng 103

4 Giải tích chế độ xác lập 109

4.1 Định nghĩa bài toán 109
4.2 Phương pháp lặp Gauss- Seidel giải tích lưới điện 114
4.3 Phương pháp lặp Newton- Raphson 115
4.3.1 Phương trình lặp Newton- Raphson 115
4.3.2 Jacobian của các phương trình chế độ xác lập 116
4.3.3 Đặc điểm phương pháp và áp dụng cho bài toán giải tích lưới điện 120
4.4 Thí dụ 123
4.5 Phương pháp bậc hai 126
4.6 Thay đổi trong công thức Newton- Raphson. Phương pháp tách biến 127
4.7. Tính toán công suất nhánh 131
4.8 Giải tích chế độ có điều chỉnh và các bài toán giải tích đặc biệt 132

5 Đánh giá trạng thái 134

5.1 Nhập đề 134
5.2 Tiêu chuẩn xác suất cực đại 135
5.3 Đánh giá bình phương cực tiểu trọng số 139
5.3.1 Phương trình chuẩn 139
5.3.2 Thí dụ 141
5.3.3 Jacobian 143
5.4 Tính quan sát được của hệ thống và số đo giả 145
5.5 Phân tích sai số của đánh giá WLS 146
5.6 Dữ liệu xấu 149
5.7 Thí dụ 152
5.8 Giải bài toán WLS 157
5.9 Phương pháp WLS với ràng buộc 159
5.10 Phương pháp tách biến trong đánh giá trạng thái 161
5.11 Mô hình hoá thời thực hệ thống điện 162
5.11.1 Vấn đề mô hình hoá lưới điện ngoài 163
5.11.2 Mô hình tương đương cho lưới ngoài 164
5.11.3 Mô hình đầy đủ của lưới ngoài 166

6 Phân tích sự cố 167

6.1 An toàn cung cấp điện và bài toán phân tích sự cố thời thực 167
6.2 Vài nét về công cụ phân tích sự cố 170
6.2.1 Mô hình cho tính toán sự cố 170
6.2.2 Xếp hạng sự cố nhờ chỉ số nguy hiểm 171
6.3 Mô hình tuyến tính: Phương pháp dòng bù 173
6.4 Mô hình tuyến tính: Hệ số phân bố dòng 177
6.4.1 Hệ số phân bố dòng nút 177
6.4.2 Hệ số phân bố dòng nhánh 178
6.4.3 Hệ số phân bố dòng cho sự cố xếp chồng 179

7 Tối ưu hoá chế độ làm việc 183

7.1 Khái quát về bài toán tối ưu hóa chế độ làm việc 183
7.1.1 Phân loại biến điều khiển 183
7.1.2 Phân loại ràng buộc chế độ 184
7.1.3 Hàm mục tiêu 185
7.2 Xử lí trường hợp không giải được 187
7.3 Tối ưu hoá chế độ với ràng buộc an toàn sự cố 188
7.4 Phân bố tối ưu công suất cho các máy phát điện 190
7.5 Phân bố tối ưu công suất giữa các nhà máy điện 193
7.6 Phương pháp các hệ số tổn thất B 198

7.6.1 Công thức tổn thất công suất 199
7.6.2 Tính toán các hệ số B 200
7.6.3 Sử dụng lưới điện tương đương REI để tính các hệ số B 203
7.7 Thí dụ 206
7.8 Hệ thống tự động điều khiển phát điện (AGC) 212
7.8.1 Đặc tính điều tốc của các máy phát điện 212
7.8.2 Hệ thống AGC 214

Tài liệu tham khảo 217

Lời nói đầu

Kĩ thuật tính toán phân tích hệ thống điện (Power System Analysis) đã có một lịch sử phát triển lâu dài. Động lực và nội dung của quá trình phát triển này một mặt gắn với sự phát triển của bản thân hệ thống điện (HTĐ), với việc sử dụng các công nghệ mới, thiết bị mới, với việc gia tăng không ngừng kích cỡ và độ phức tạp của hệ thống điện, đồng thời tiêu chuẩn cung cấp điện theo đòi hỏi của các hộ dùng điện hiện đại ngày càng cao. Mặt khác quá trình phát triển này gắn liền với sự phát triển của kĩ thuật tính toán và các công cụ tính toán, giám sát và điều khiển hiện đại nhất. Đó là vì mục đích hàng đầu của tính toán phân tích hệ thống là để phục vụ cho việc kiểm soát - điều chỉnh - điều khiển quá trình làm việc của nó, mà HTĐ là một hệ thống công nghiệp phức tạp, có quá trình diễn biến nhanh và có vai trò kinh tế cực kì to lớn.

Trong giai đoạn phát triển hiện nay, tính toán phân tích HTĐ ngày càng chú trọng đến các áp dụng thời gian thực, tức là theo kịp các diễn biến thực trong vận hành hệ thống. Cơ sở cho tính khả thi của việc triển khai các áp dụng này là sự xuất hiện của *hệ thống điều khiển giám sát và thu thập dữ liệu* SCADA (Supervisory Control And Data Acquisition). Như tên gọi của nó, hệ thống này bảo đảm việc thu thập và xử lí dữ liệu thời gian thực từ hệ thống công nghiệp, phục vụ cho khâu tính toán phân tích và lấy quyết định điều khiển. Sau đó cũng chính nó chịu trách nhiệm thi hành tự động có giám sát các điều khiển này trên hệ thống công nghiệp. SCADA có vai trò trong nhiều ngành công nghiệp khác nhau trong đó có HTĐ, và có thể dễ thấy rằng sự xuất hiện và phát triển của nó gắn liền với sự phát triển của công nghệ thông tin - máy tính và điện tử - viễn thông.

Trong bối cảnh như vậy, nội dung lĩnh vực tính toán phân tích HTĐ cũng rất phức tạp và đa dạng, đụng chạm đến nhiều khu vực phát triển cao của toán học cũng như công nghệ. Đồng thời những hiểu biết cơ bản về nó là phần kiến thức không thể thiếu được đối với những người làm việc trong lĩnh vực quản lí vận hành hệ thống điện lớn.

"Tính toán phân tích hệ thống điện" nhằm giới thiệu một số nội dung cơ sở thuộc lĩnh vực này, trong đó có cố gắng cân bằng giữa tính khái quát và tính chi tiết của các vấn đề được trình bày.

Phần cơ bản gồm mô hình toán học của lưới điện ở chế độ xác lập cũng như các công cụ toán học để giải được trình bày khá kĩ để có thể khai thác thuật toán và lập trình ứng dụng. Phần này chú trọng đến các giải thuật có hiệu quả đối với HTĐ lớn.

Từ chương 3 đến chương 7 đi sâu vào một số đề tài quan trọng của bài toàn phân tích hệ thống điện hiện đại.

Bài toán *tính toán ngắn mạch (Short-Circuit Calculation)* ở chương 3 cho phép phát triển và mở rộng kĩ năng tính toán đối với lưới điện ba pha không đối xứng. Phần này đề cập nhiều kiến thức cơ sở quan trọng cho kĩ sư hệ thống điện.

Đề tài *giải tích chế độ xác lập (Power Flow Calculation)* trong chương 4 chú ý đến việc đặt bài toán ở các dạng khác nhau có thể sử dụng trong thực tế tính toán. Phần tiếp theo chủ yếu trình bày phương pháp Newton-Raphson và các cải biên được áp dụng phổ biến trong thực tiễn để giải bài toán này.

Đánh giá trạng thái (State Estimation) là một nội dung cơ bản trong lĩnh vực phân tích thời thực HTĐ. Mô hình toán học bình phương cực tiểu trọng số của bài toán đã được trình bày kỹ trong chương 5. Phần tiếp theo nêu vài phương pháp giải thường dùng có so sánh hiệu quả tính toán. Đặc biệt một số vấn đề cơ bản gắn với bài toán được phân tích kèm các giải pháp thực tế như tính quan sát được, sai số, dữ liệu xấu. Phần cuối của chương khái quát các khâu của quá trình xây dựng một mô hình thời thực của HTĐ dành cho các áp dụng điều khiển.

Hai chương cuối 6 và 7 giới thiệu hai nhiệm vụ thời thực phức tạp nhất và có quan hệ chặt chẽ là bài toán *phân tích sự cố (Contingency Analysis)* và bài toán *tối ưu hóa chế độ làm việc (Optimal Power Flow)*. Ở đây cố gắng mô tả vấn đề một cách tổng quan, còn phần trình bày chi tiết chỉ đề cập đến các công cụ cơ sở và kinh điển dành cho các bài toán phức tạp này.

Cuốn sách có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho kĩ sư ngành HTĐ, cũng như sinh viên và nghiên cứu sinh chuyên ngành này. Người đọc được giả thiết đã có kiến thức cơ sở về kĩ thuật điện và lưới điện cũng như các kĩ năng về đại số ma trận.

Hy vọng rằng cuốn sách sẽ đáp ứng được phần nào nhu cầu về các hiểu biết cơ bản trong lĩnh vực phân tích hệ thống điện hiện đại, khi mà các kĩ thuật này đang bắt đầu được áp dụng vào hệ thống điện Việt Nam.

Nhân dịp này tôi xin chân thành cảm ơn các thày cô giáo và đồng nghiệp ở Bộ môn Hệ thống điện, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội đã động viên, giúp đỡ trong quá trình học tập, công tác tại bộ môn và trong khi biên soạn cuốn sách này. Tôi xin cảm ơn Giáo sư - Tiến sĩ Trần Đình Long đã viết lời giới thiệu cho cuốn sách.

Chúng tôi rất mong nhận được mọi phê bình góp ý tới địa chỉ:

Đỗ Xuân Khôi, 95 Lò Đúc, Hà Nội, ĐT: 821 2761.

Email: khoidxfpt.vn

Tác giả

1

Hệ phương trình tuyến tính ứng dụng trong phân tích hệ thống điện

Giải hệ phương trình (đại số) tuyến tính là nền tảng của việc phân tích hệ thống điện. Vì thế trước khi nghiên cứu các bài toán phân tích hệ thống điện, trong chương này chúng ta sẽ xem xét một số vấn đề liên quan đến lời giải hệ phương trình tuyến tính. Các hệ này thường có kích thước lớn trong các bài toán thực tế, do đó việc nghiên cứu các phương pháp máy tính có hiệu quả cao cho phép giảm *khối lượng tính toán và lưu trữ trung gian* là rất quan trọng, bên cạnh yêu cầu về *tính ổn định và chính xác* của tính toán số.

Điểm đầu tiên về *hiệu quả* của phương pháp tính toán là điều dễ hiểu, còn vấn đề sau - tính ổn định và chính xác của thuật toán, đòi hỏi vài lời giải thích thêm.

Tính ổn định và chính xác là những yếu tố rất đặc trưng cho tính toán trên máy tính, và thường là điều kiện hàng đầu để lựa chọn thuật toán cho các bài toán phức tạp, không riêng gì bài toán giải hệ phương trình tuyến tính lớn. Có thể hiểu sơ lược các yếu tố này như sau.

Chúng ta biết rằng máy tính không thể thực hiện các phép toán số học một cách tuyệt đối chính xác, mà mỗi phép toán sơ cấp đều kéo theo một *sai số qui tròn*, do độ chính xác hạn chế của biểu diễn số thực trên máy. Tiếp theo, độ *chính xác số* của một thuật toán phụ thuộc vào sự *truyền sai số qui tròn* trong quá trình thực hiện thuật toán. Vì yếu tố này mà các thuật toán khác nhau cho cùng một bài toán, mặc dù đều đúng về toán học nhưng lại có thể rất khác nhau về độ chính xác số. Thí dụ đơn giản là một phép tính tổng thực hiện theo hai thuật toán khác nhau $(a+b)+c$ và $a+(b+c)$ có thể cho kết quả khác nhau trong tính toán máy tính. *Một thuật toán được gọi là ổn định (số) nếu nó không nhạy với sự truyền sai số, tức là sai số nhỏ ban đầu không bị khuếch đại lớn ở kết quả.*

Trở lại với bài toán đang quan tâm. Xét hệ n phương trình tuyến tính với n ẩn số viết ở dạng ma trận là $\mathbf{Ax=b}$[1] , và có dạng khai triển sau:

---

[1] Chữ nét đậm chỉ vectơ, ma trận

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Để giải nó, ta có thể nghĩ đến công thức Cramer:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} \qquad (1.2)$$

Theo công thức này, để giải ra tất cả các ẩn, ta phải tính $n+1$ định thức rồi thực hiện n phép chia. Để tính mỗi định thức cần làm $n!n$ phép nhân và $n!-1$ phép cộng, do đó tất cả yêu cầu:

$(n+1)n!\ n$	phép nhân,
$(n+1)(n!-1)$	phép cộng và
n	phép chia

cho tổng số là $T = (n+1)^2 n!-1$ phép toán. Với n=10 ta có T≈400 triệu ! Thực tế gặp số phương trình lớn hơn nhiều và khối lượng tính toán tăng nhanh chóng tới con số khó tưởng tượng. Chẳng hạn chỉ tính một định thức cấp 20, nếu ta sử dụng một máy tính có tốc độ một triệu phép tính/giây thì phải mất 1,5 triệu năm để tính 20!20 phép nhân !

Một ý định khác là tính nghịch đảo của ma trận A theo phương pháp dùng định thức:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}_A^T / |\mathbf{A}| \qquad \text{từ đó} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \qquad (1.3)$$

trong đó $\mathbf{P}_A$ là ma trận cấp n có phần tử là $(-1)^{(i+j)} |\mathbf{A}_{ij}|$ với $\mathbf{A}_{ij}$ là ma trận A xóa bỏ hàng i và cột j (ký hiệu T chỉ ma trận chuyển vị). Rõ ràng phương pháp này cũng có khối lượng tính toán rất lớn do cũng phải tính nhiều định thức. Cả hai phương pháp này không thể là phương pháp thực tế trong việc giải hệ phương trình tuyến tính.

1.1 Phương pháp khử biến và khai triển tam giác

Trong mục này ta sẽ xem xét hai thuật toán rất thông dụng, thuộc vào loại các *phương pháp trực tiếp* để giải hệ tuyến tính. Các phương pháp trực tiếp khác biệt

chủ yếu so với *phương pháp lặp* ở chỗ chúng đi tới lời giải sau một số xác định các phép toán số học.

1.1.1 Phương pháp khử Gauss

Phương pháp khử biến vốn đã rất quen thuộc khi giải tay một hệ phương trình. Để áp dụng trên máy tính, ta cần trình bày nó một cách hình thức hơn. Phương pháp này chuyển hệ phương trình về dạng tam giác tương đương, chẳng hạn dạng tam giác trên:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots & \\
\cdots & \\
a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\
a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned} \qquad (1.4)$$

Sau đó việc giải hệ tam giác là rất đơn giản. Chẳng hạn đối với hệ *tam giác trên*, như cho ở (1.4), ta thu được lời giải bằng một quá trình gọi là *thay thế ngược*: từ phương trình cuối cùng xác định x_n, thay vào phương trình trên nó, rút ra x_{n-1}. Tiếp tục như vậy cho đến cuối cùng xác định x_1. Số phép toán yêu cầu bởi lời giải này là:

n phép chia

$1+2+...+n-1 = n(n-1)/2$ phép nhân và chừng ấy phép cộng,

tổng cộng là $T = n^2$ phép toán sơ cấp.

Trở lại thuật toán khử biến- tức là quá trình chuyển hệ phương trình tới dạng tam giác, ta gọi hệ ban đầu là $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x}=\mathbf{b}^{(1)}$. Giả sử rằng hệ có nghiệm, tức là ma trận $\mathbf{A}^{(1)}$ không suy biến, như vậy sau khi hoán vị các hàng của ma trận nếu cần thiết, ta sẽ có $a_{11}^{(1)}$ khác 0, phần tử này được gọi là *phần tử chốt (pivot)*. Biến tương ứng với nó là x_1 sẽ được khử từ tất cả các phương trình khác, ở đây là các phương trình thứ 2,3,...,n. Để khử x_1 trong phương trình i, ta nhân phương trình 1 với:

$$g_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \qquad (a_{11}^{(1)} \neq 0)$$

và trừ nó vào phương trình i. Sau quá trình khử x_1 ta thu được hệ mới tương đương $\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x}=\mathbf{b}^{(2)}$ với:

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

Nhận xét rằng thuật toán không liên quan đến **x** và được thực hiện trên hàng i của ma trận **A** cũng giống như trên b_i, vì vậy ta có thể coi như thực hiện trên ma trận mở rộng $\overline{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}|\mathbf{b})$ tức là ma trận gồm ma trận **A** và cột **b** ghép vào bên phải.

Như vậy $\overline{\mathbf{A}}^{(2)}$ có các phần tử cho bởi:

- Hàng 1 giống như ở $\overline{\mathbf{A}}^{(1)}$

- Các hàng $i \geq 2$ có phần tử đầu bằng 0 và các phần tử khác là:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - g_{i1}a_{1j}^{(1)} \quad j = 2,\ldots,n+1.$$

Tiếp theo trong giai đoạn 2 (khử x_2) ta có thể lấy phần tử chốt là $a_{22}^{(2)} \neq 0$. Có thể giả thiết phần tử này khác 0 là vì $\mathbf{A}^{(2)}$ phải là không suy biến nên $\left|\mathbf{A}^{(2)}\right| = a_{11}^{(1)}\left|\mathbf{A}_{11}^{(2)}\right| \neq 0$ và vì thế $\mathbf{A}_{11}^{(2)}$ (ma trận $\mathbf{A}^{(2)}$ bỏ hàng 1 cột 1) không suy biến và sau khi hoán vị hàng nếu cần thiết, ta sẽ có phần tử góc trái trên khác 0. Bây giờ khử x_2 ở các phương trình 3,4,...,n theo cách tương tự.

Một cách tổng quát ở bước k ta khử x_k trong các phương trình $k+1,\ldots,n$ của hệ tương đương ứng với ma trận :

$$\overline{\mathbf{A}}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & & & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & & & & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\ & \vdots & 0 & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & \cdots & & a_{k-1,n}^{(k-1)} & b_{k-1}^{(k-1)} \\ & & \vdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

Với giả thiết phần tử chốt thứ k là $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ (hoán vị các hàng từ k tới n nếu cần thiết), ta nhân hàng thứ k của $\overline{\mathbf{A}}^{(k)}$ với $g_{ik} = a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$ và trừ vào hàng i ($i > k$) để khử x_k trong hàng này. Kết quả được ma trận $\overline{\mathbf{A}}^{(k+1)}$ cho bởi:

- k hàng đầu giống như ở $\overline{\mathbf{A}}^{(k)}$,

- Các hàng $i \geq k+1$ có k phần tử đầu bằng 0, còn lại:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - g_{ik} a_{kj}^{(k)} \qquad j = k+1,\ldots,n+1 \tag{1.6}$$

Sau $n-1$ bước ta có hệ tam giác trên.

Nhận xét rằng khi tiến hành quá trình khử biến, không những ta phải chọn phần tử chốt khác 0 mà còn phải tránh phần tử quá bé. Lí do ở đây là tương tự; nếu ta chia cho một số dù khác 0 nhưng quá nhỏ sẽ làm mất ý nghĩa các dữ liệu của phương trình. Nó cũng có nghĩa rằng để tăng tính ổn định cho thuật toán, rất cần thiết phải chọn phần tử chốt lớn, chẳng hạn ở bước k chọn phần tử lớn nhất trong cột k ứng với các hàng từ k tới n.

Ngoài ra trước khi tiến hành giải hệ phương trình, cần tránh tình trạng một vài phương trình có hệ số quá lớn so với các phương trình khác, vì điều này cũng dẫn đến sai số lớn. Ta có thể chia mỗi phương trình cho hệ số lớn nhất trong nó, trước khi bắt đầu quá trình giải. Thủ tục này gọi là *cân (scale)* các phương trình (và tất nhiên không làm thay đổi nghiệm của nó).

Về khối lượng tính toán của phương pháp khử Gauss, nếu giả thiết không phải hoán vị hàng, thì ở bước k phải thực hiện :

$n-k$ phép chia,

$(n-k)(n-k+1)$ phép nhân,

$(n-k)(n-k+1)$ phép trừ,

do đó toàn quá trình khử cần:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1)/2 \quad \text{phép chia}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 + (n-k) = \sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k) = n(n^2-1)/3$$

phép nhân (và chừng ấy phép trừ)

Cộng với tính toán yêu cầu khi giải hệ tam giác, ta có tất cả:

$n(n-1)/2 + n = n(n+1)/2$ phép chia,

$n(n^2-1)/3 + n(n-1)/2 = (2n^3+3n^2-5n)/6$ phép nhân (và chừng ấy phép cộng/trừ),

tổng cộng yêu cầu $T_G = (4n^3+9n^2-7n)/6$ phép toán.

Ví dụ với $n = 10$ thì $T_G = 805$ rất nhỏ so với phương pháp Cramer hay nghịch đảo ma trận dùng định thức (1.3). Với n lớn $T_G \approx 2n^3/3$.

1.1.2 Phương pháp khai triển tam giác

Phương pháp khai triển tam giác chỉ là cách trình bày ma trận của khử Gauss, trong đó ta biểu diễn ma trận không suy biến **A** dưới dạng:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$$

L và **U** lần lượt là ma trận tam giác dưới và tam giác trên, một trong chúng có đường chéo bằng đơn vị. Từ đó hệ phương trình $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ có thể giải qua hai bước:

- Bước *thay thế thuận* giải hệ tam giác dưới:

$$\mathbf{L}\,\mathbf{y} = \mathbf{b} \tag{1.7}$$

- Bước *thay thế ngược* giải hệ tam giác trên:

$$\mathbf{U}\,\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{1.8}$$

Phương pháp khai triển tam giác (còn gọi là *khai triển LU*) có ưu điểm hơn phương pháp Gauss khi cần giải nhiều lần hệ phương trình với vế phải **b** thay đổi. Đây là một thực tế thường gặp, chẳng hạn trong một thuật toán lặp ta phải giải lặp hệ $\mathbf{Ax}^{(k)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k-1)})$ với **f** là một vectơ hàm của $\mathbf{x}^{(k-1)}$ và $\mathbf{x}^{(k)}$ là xấp xỉ thứ k của ẩn phải tìm. Khi đó vì ma trận hệ số **A** không thay đổi trong quá trình giải lặp nên ta chỉ phải khai triển tam giác $\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$ một lần.

Để dẫn ra khai triển LU, ta giả sử có thể thực hiện khử Gauss không cần phải hoán vị hàng. Xét các ma trận sau đây:

$$\mathbf{G}_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -g_{k+1,k}^{(k)} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -g_{nk}^{(k)} & & 1 \end{pmatrix} \qquad k = 1, \ldots, n-1 \tag{1.9}$$

trong đó $g_{ik}^{(k)}$ giống như định nghĩa ở phần trên (phương pháp khử Gauss), nhưng thêm chỉ số trên (k) cho rõ:

$$g_{ik}^{(k)} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \qquad i = k+1, \ldots, n$$

Thế thì ta có thể viết trong phương trình khử biến:

$$\overline{\mathbf{A}}^{(k+1)} = \mathbf{G}_k\,\overline{\mathbf{A}}^{(k)} \tag{1.10}$$

trong đó $\overline{\mathbf{A}}^{(k)}$ và $\overline{\mathbf{A}}^{(k+1)}$ được định nghĩa như ở mục trước (phương pháp khử Gauss). Do đó suy ra:

2. $$\overline{\mathbf{A}}^{(n)} = \mathbf{G}_{n-1}\mathbf{G}_{n-2}\ldots\mathbf{G}_1\overline{\mathbf{A}}^{(1)}$$

Biểu thức cũng có thể viết riêng cho **A** chứ không phải ma trận mở rộng $\overline{\mathbf{A}}$. Từ đó rút ra $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{LU}$ với :

$$\mathbf{L} = (\mathbf{G}_{n-1} \ldots \mathbf{G}_1)^{-1} = \mathbf{G}_1^{-1} \ldots \mathbf{G}_{n-1}^{-1} \qquad (1.11)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{(n)}$$

Như vậy **U** là ma trận tam giác trên như kết quả khử Gauss:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

còn **L** sẽ là một ma trận tam giác dưới với đường chéo đơn vị. Thật vậy ta có thể tính **L** từ (1.11). Mỗi phép biến đổi (1.10) - tức là phép khử biến - cho ta một hệ tương đương, ứng với ma trận biến đổi $\mathbf{G}_k$ không suy biến: Thật vậy với $\mathbf{G}_k$ xác định theo (1.9) ta sẽ có ma trận nghịch đảo:

$$\mathbf{G}_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & g_{k+1,k}^{(k)} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & g_{nk}^{(k)} & & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.12)$$

và dễ dàng xác nhận rằng:

$$\mathbf{L} = \mathbf{G}_1^{-1}\ldots\mathbf{G}_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ g_{21}^{(1)} & 1 & & & \\ g_{31}^{(1)} & g_{32}^{(2)} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ g_{n1}^{(1)} & g_{n2}^{(2)} & \cdots & g_{n,n-1}^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.13)$$

Từ đẳng thức **A** = **LU** ta có thể rút ra n^2 phương trình sau đây cho n^2 ẩn cần xác định l_{ik} và u_{ik}:

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{\min(i,k)} l_{ij} u_{jk} \qquad (l_{ii} = 1) \tag{1.14}$$

Suy ra các công thức sau để tính toán các ma trận **L**, **U**:

$$u_{ik} = a_{ik}^{i} = a_{ik}^{i-1} - g_{i,i-1} a_{i-1,k}^{i-1} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{i-1} g_{im}^{(m)} a_{mk}^{(m)} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{i-1} l_{im} u_{mk} \qquad (i \le k)$$

$$l_{ik} = g_{ik}^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} = \frac{a_{ik}^{(k-1)} - g_{i,k-1}^{k-1} a_{k-1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k)}} = \frac{a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} g_{im}^{(m)} a_{mk}^{(m)}}{a_{kk}^{(k)}} = \tag{1.15}$$

$$= \frac{a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}}{u_{kk}} \qquad (i > k)$$

Chú ý mỗi phần tử a_{ik} chỉ dùng để tính u_{ik} hoặc l_{ik}, nên tính xong đặt u_{ik}, l_{ik} vào luôn vị trí a_{ik}.

Sử dụng các công thức trên ta có thể tính theo trình tự sau: hàng 1 của **U** (bằng hàng 1 của **A**), cột 1 của **L**, hàng 2 của **U**, cột 2 của **L** v.v... Hoặc cũng có thể tính theo từng hàng của ma trận gộp sau đây:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdots \\ \cdots & & & \end{pmatrix}$$

Như đã giả thiết ban đầu, các công thức trên ứng với trường hợp không có hoán vị hàng để chọn phần tử chốt trong quá trình khử. Tuy nhiên như ta đã biết công việc này (pivoting) là rất quan trọng để bảo đảm sự ổn định số của thuật toán.

Sự hoán vị hai hàng của ma trận có thể biểu diễn bởi phép nhân với một *ma trận hoán vị*. Ở bước 1 (khử x_1) ta chọn trong cột 1 phần tử lớn nhất:

$$|a_{r1}| = max_i |a_{i1}|$$

dùng làm phần tử chốt (pivot). Như vậy ta sẽ hoán vị hàng 1 và hàng r trước khi tiến hành khử x_1. Việc này tương đương với nhân trái ma trận mở rộng $\overline{\mathbf{A}}$ ma trận hoán vị sau đây:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow r \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (1.16)$$

$$\uparrow$$
$$r$$

Tóm lại ở bước 1 ta sẽ thực hiện phép biến đổi sau:

$$\overline{\mathbf{A}}^{(2)} = \mathbf{G}_1 \mathbf{P}_1 \overline{\mathbf{A}} \qquad (1.17)$$

Sau bước cuối cùng ta sẽ có:

$$\overline{\mathbf{A}}^{(n)} = \mathbf{G}_{n-1} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{G}_{n-2} \mathbf{P}_{n-2} \ldots \mathbf{G}_1 \mathbf{P}_1 \overline{\mathbf{A}} \qquad (1.18)$$

Ta biết rằng sau bước k−1 ta có ma trận $\overline{\mathbf{A}}^{(k)}$ dạng (1.5). Trong áp dụng máy tính, ta có thể tính toán trên ma trận này, trong đó các vị trí với số 0 ở dưới đường chéo được dùng để chứa các phần tử của $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ ... Chẳng hạn ở bước k các phần tử dưới đường chéo của cột k sẽ bị triệt tiêu. Thay vào đó ta đặt các phần tử $g_{k+1,k}$ ...., g_{nk} của $\mathbf{G}_k$. Ban đầu ta đặt chúng theo thứ tự tự nhiên như ở (1.4), nhưng ở các bước sau mỗi lần có hoán vị hàng, chúng sẽ được hoán vị theo. Như vậy ở bước k ta làm việc trên ma trận dạng:

$$\mathbf{T}^{(k)} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,k-1} & u_{1k} & \cdots & u_{1n} & b_1^{(1)} \\ \gamma_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,k-1} & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \vdots & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & & u_{k-1,k-1} & u_{k-1,k} & \cdots & u_{k-1,n} & b_{k-1}^{(k-1)} \\ \hline & & & \gamma_{k,k-1} & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{n,k-1} & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{array}\right) \qquad (1.19)$$

trong đó các cột γ là các cột g nhưng đã bị hoán vị một số lần; các phần tử u và $b_1^{(1)}$ ..., $b_{k-1}^{(k-1)}$ sẽ không bị thay đổi nữa trong các bước sau.

Kết thúc $n-1$ bước ma trận **T** sẽ có dạng ghép hai ma trận :

$$\mathbf{T}^{(n)} = (\mathbf{L} \mid \mathbf{U}) \tag{1.20}$$

trong đó **L** là ma trận tam giác gồm các phần tử *dưới* đường chéo, **U** là tam giác trên bao gồm đường chéo, và chúng chính là các ma trận trong khai triển tam giác của **PA** với:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{n-1} \ldots \mathbf{P}_1 \tag{1.21}$$

là tích của tất cả các hoán vị đã thực hiện. Tức là ta có:

$$\mathbf{L}\,\mathbf{U} = \mathbf{P}\,\mathbf{A} \tag{1.22}$$

Ta không chứng minh kết quả này.

Phương pháp khai triển tam giác là tương đương với phương pháp khử Gauss, tuy nhiên ít phải lưu trữ kết quả trung gian. Ngoài vai trò quan trọng trong việc giải hệ phương trình tuyến tính, chúng cũng được dùng để tính định thức của ma trận. Quả thật, từ (1.22), biết $\det(\mathbf{P}) = \pm 1$, $\det(\mathbf{L}) = 1$ do đó:

$$\det(\mathbf{A}) = \pm\det(\mathbf{U}) = \pm u_{11}\, u_{22} \ldots u_{nn}$$

tức là không kể dấu, định thức của **A** bằng tích các phần tử chốt (pivot) đã sử dụng trong quá trình khử biến.

1.1.3 Phương pháp khai triển Cholesky

Trường hợp đặc biệt của khai triển **LU** là khai triển Cholesky: khi **A** đối xứng thì ta có (khai triển Cholesky):

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \tag{1.23}$$

với **L** là ma trận tam giác dưới. Từ (1.23) ta có các phương trình :

$$\begin{aligned} a_{kk} &= l_{k1}^2 + l_{k2}^2 + \cdots + l_{kk}^2 \\ a_{ik} &= l_{i1}l_{k1} + l_{i2}l_{k2} + \cdots + l_{ik}l_{kk} \qquad i \geq k+1. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Suy ra ma trận **L** có thể tính từng cột theo công thức sau:

- Cột 1:

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ l_{i1} &= a_{i1} / l_{11} \qquad i = 2, \cdots, n \end{aligned}$$

- Cột k:

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km}^2}$$
$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} l_{km}}{l_{kk}} \qquad i = k+1, \cdots, n \tag{1.25}$$

Khai triển Cholesky cũng thường viết ở dạng:

$$\mathbf{A} = \mathcal{L}\,\mathcal{D}\,\mathcal{L}^{\mathrm{T}} \tag{1.26}$$

trong đó $\mathcal{L}$ là ma trận tam giác dưới với đường chéo bằng đơn vị (gồm các số 1), còn $\mathcal{D}$ là ma trận đường chéo. Ta có thể biểu diễn $\mathcal{D} = \mathbf{D}^2$ với $\mathbf{D}$ là ma trận đường chéo bằng đường chéo của $\mathbf{L}$, còn $\mathcal{L} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{-1}$ sẽ chính là ma trận $\mathbf{L}$ với đường chéo đơn vị. Khai triển dạng (1.26) không yêu cầu tính căn bậc hai như trong công thức (1.25).

Có thể chỉ ra [8] [1] [1] rằng nếu $\mathbf{A}$ là một ma trận *xác định dương* thì khai triển Cholesky hoàn toàn ổn định số, không cần pivoting. Chú ý rằng nếu $\mathbf{A}$ là ma trận phức thì tính chất xác định dương được xét trên cơ sở $\mathbf{A}$ là ma trận Hermit, tức là $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ (với $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ là chuyển vị liên hợp của $\mathbf{A}$), đồng thời khai triển Cholesky là $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathrm{H}}$, với $\mathbf{L}$ cũng là ma trận phức. Tuy nhiên chúng ta thường giải hệ phương trình thực trong phân tích lưới điện, ma trận của nó có thể là (đối xứng) xác định dương, khi đó có ưu điểm rất lớn về ổn định số như nói trên, đồng thời giảm khối lượng tính toán do sử dụng phương pháp Cholesky như nhận xét sau đây.

Khối lượng phép tính sơ cấp phải làm để giải hệ phương trình đối xứng bằng phương pháp khai triển Cholesky (kể cả việc giải hai hệ tam giác) là $T_C = (2n^3 + 15n^2 + n) / 6$. Với n lớn $T_C \approx n^3/3$ xấp xỉ một nửa khối lượng tính toán của phương pháp Gauss (hay LU).

1.2 Phương pháp khai triển trực giao

Trong phương pháp này ta khai triển ma trận $\mathbf{A}$ thành tích của một ma trận trực giao và một ma trận tam giác.

---

[1] Số đặt trong ngoặc vuông chỉ đến một tài liệu tham khảo cho ở cuối sách

Nhắc lại rằng một ma trận không suy biến (thực) **Q** được gọi là *trực giao* nếu $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{T}$. Ma trận **A** được khai triển thành:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\ \mathbf{R} \tag{1.27}$$

trong đó **R** là ma trận tam giác trên. Nhân trái $\mathbf{Q}^{T} = \mathbf{Q}^{-1}$ ta có:

$$\mathbf{Q}^{T}\ \mathbf{A} = \mathbf{R} \tag{1.28}$$

do đó hệ phương trình $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ được chuyển tới dạng tam giác:

$$\mathbf{R}\,\mathbf{x} = \mathbf{Q}^{T}\,\mathbf{b}$$

Có nhiều phương pháp khai triển trực giao một ma trận (hay còn gọi là *khai triển QR*), mỗi phương pháp áp dụng có lợi vào một số loại bài toán nào đó. Trong mục này trình bày vắn tắt *phương pháp Householder*, là phương pháp hay dùng để giải hệ phương trình tuyến tính.

Phương pháp này áp dụng nhiều lần *biến đổi Householder* trên ma trận thực **A** để đưa về dạng (1.28), mỗi bước biến đổi đưa các phần tử 0 vào một cột của **A** để nó trở thành một cột của ma trận tam giác trên **R**. Biến đổi nói trên sử dụng *ma trận biến đổi Householder* là một ma trận đối xứng và trực giao có dạng:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{1}{r}\mathbf{W}\mathbf{W}^{T} \tag{1.29}$$

trong đó **I** là ma trận đơn vị, còn số r và vectơ **W** xác định sao cho khi nhân **H** với một vector $\mathbf{v} \neq 0$ nào đó sẽ được một vector chỉ có phần tử đầu tiên khác 0, tức là:

$$\mathbf{H}\,\mathbf{v} = \alpha\mathbf{e}_1$$

với α là một số và $\mathbf{e}_1$ là cột 1 của ma trận đơn vị. Ta có thể xác định **H** theo (1.29) và các công thức sau:

$$\begin{aligned} \alpha &= -sign(v_1)\,\|\mathbf{v}\| \\ r &= \alpha\,(\alpha - v_1) \\ \mathbf{w} &= \mathbf{v} - \alpha\,\mathbf{e}_1 = (v_1 - \alpha, v_2, \ldots, v_n) \end{aligned} \tag{1.30}$$

trong đó $sign\,(v_1)$ chỉ dấu của phần tử đầu tiên v_1 của **v**, còn:

$$\|\mathbf{v}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{1/2}$$

là chuẩn hay độ dài của vector **v** (có n phần tử).

Bây giờ giả sử chọn ma trận biến đổi $\mathbf{H}_1$ theo các công thức trên với **v** là cột 1 của **A**.. Ta có thể biểu diễn tích ma trận:

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{A} = (\mathbf{H}_1\mathbf{A}_1 \ \mathbf{H}_1\mathbf{A}_2 \ \ldots\ \mathbf{H}_1\mathbf{A}_n) \tag{1.31}$$

trong đó $\mathbf{A}_i$ là cột i của **A**, còn $\mathbf{H}_1\mathbf{A}_i$ sẽ là cột i của $\mathbf{H}_1\mathbf{A}$. Như vậy phép biến đổi thứ nhất này đã đưa **A** trở thành ma trận có cột đầu tiên có dạng cột ma trận tam giác trên, tức là mọi phần tử dưới phần tử đường chéo bằng 0.

Giả sử sau $k-1$ biến đổi ta có ma trận $\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{H}_{k-1} \ldots \mathbf{H}_1 \mathbf{A}$ với $k-1$ cột đầu tiên có dạng cột của ma trận tam giác (sau 1 biến đổi (1.30) ta đã được ma trận dạng như vậy với $k=2$) . Chia khối:

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(k)} & \mathbf{A}_{12}^{(k)} \\ 0 & \mathbf{A}_{22}^{(k)} \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

trong đó $\mathbf{A}_{11}^{(k)}$ là ma trận tam giác trên cấp $k-1$. Tại bước k ta sẽ tìm ma trận Householder $\overline{\mathbf{H}}_k$ cho cột thứ nhất của $\mathbf{A}_{22}^{(k)}$, từ đó $\overline{\mathbf{H}}_k\mathbf{A}_{22}^{(k)}$ sẽ có cột 1 bị khử tất cả các phần tử trừ phần tử đầu tiên. Ma trận biến đổi cho toàn bộ ma trận $\mathbf{A}^{(k)}$ ở bước này sẽ lấy là:

$$\mathbf{H}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{k-1} & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{H}}_k \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

trong đó $\mathbf{I}_{k-1}$ là ma trận đơn vị cấp $k-1$, và ta có:

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{H}_k\mathbf{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(k)} & \mathbf{A}_{12}^{(k)} \\ 0 & \overline{\mathbf{H}}_k\mathbf{A}_{22}^{(k)} \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

Như vậy $k-1$ hàng và cột đầu tiên của $\mathbf{A}^{(k)}$ không bị thay đổi khi chuyển sang $\mathbf{A}^{(k+1)}$ và ma trận mới này có k cột đầu tiên có dạng cột của ma trận tam giác.

Trong khi thực hiện phép nhân dạng (1.31), ta phải tính tích của một ma trận Householder (1.29) với một vector **c** nào đó; tính toán nên thực hiện theo trình tự sau:

$$q = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}$$

$$p = q / r$$

$$\mathbf{H}\,\mathbf{c} = \mathbf{c} - p\,\mathbf{w} \tag{1.35}$$

Công thức này cũng dùng khi tính cột số hạng tự do ở bước k:

$$\mathbf{b}^{(k+1)} = \mathbf{H}_k \mathbf{b}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{(k)} \\ \overline{\mathbf{H}_k \mathbf{d}^{(k)}} \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

trong đó $\mathbf{c}^{(k)}$ gồm $k-1$ phần tử đầu tiên của $\mathbf{b}^{(k)}$, không bị thay đổi khi chuyển sang $\mathbf{b}^{(k+1)}$, còn $\mathbf{d}^{(k)}$ gồm các phần tử còn lại sẽ bị thay đổi.

Kết thúc n−1 bước biến đổi ta chuyển tới ma trận tam giác trên $\mathbf{A}^{(n)}$ ứng với hệ tương đương $\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}$. Liên hệ với công thức (1.27), (1.28) ta có thể viết:

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{H}_{n-1} \ldots \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1$$

Vì $\mathbf{H}_i$ đối xứng nên ta có:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \ldots \mathbf{H}_{n-1}$$

$\mathbf{H}_i$ là trực giao do đó $\mathbf{Q}$ cũng là trực giao.

Có thể tính được tổng số phép tính sơ cấp cần thực hiện để giải hệ phương trình tuyến tính cấp n bằng phương pháp Householder (kể cả giải hệ tam giác) là $T_H = 4n^3/3 + 4n^2 + 14n/3 - 9$. Như vậy khối lượng tính toán nhiều hơn so với phương pháp Gauss (khai triển LU) đồng thời không được đơn giản hóa đáng kể khi A là đối xứng. Tuy nhiên phương pháp này tốt hơn về tính chất ổn định.

Phương pháp biến đổi trực giao thường được sử dụng để giải xấp xỉ một hệ với số phương trình nhiều hơn số ẩn bằng phương pháp bình phương cực tiểu- như ta sẽ gặp khi nghiên cứu bài toán *đánh giá trạng thái của lưới điện:* Nếu $\mathbf{A}$ là một ma trận kích thước $m \times n$ với m>n và $\mathbf{b}$ là vector m phần tử, thì hệ phương trình $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ chỉ có thể có nghiệm xấp xỉ. Một phương pháp xấp xỉ nghiệm là *phương pháp bình phương cực tiểu*, nó tìm $\mathbf{x}$ làm cực tiểu chuẩn vector Euclide:

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| = \left[(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})\right]^{1/2} \to \min \tag{1.37}$$

Chú ý biểu thức trong ngoặc vuông là tích vô hướng của vectơ $\mathbf{Ax-b}$ với chính nó, bởi vậy là một số.

Bằng phương pháp biến đổi trực giao, ta xây dựng một ma trận $\mathbf{Q}$ cấp m trực giao sao cho:

$$\mathbf{QA} = \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{T}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

Dạng này là do **A** là ma trận chữ nhật với số hàng nhiều hơn số cột, $\widetilde{T}$ là ma trận tam giác trên cấp n, còn **0** là ma trận zero cấp $m-n$. Vì $\mathbf{Q}^T=\mathbf{Q}^{-1}$ nên ta có thể viết từ công thức (1.37):

$$\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\| = \left[(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})\right]^{1/2}$$
$$= \left\{\left[\mathbf{Q}(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})\right]^T\left[\mathbf{Q}(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})\right]\right\}^{1/2} = \|\mathbf{QAx}-\mathbf{Qb}\|$$

Đặt $\mathbf{Qb} = \begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{c}}\\ \mathbf{c}\end{pmatrix}$ với $\widetilde{\mathbf{c}}$ là vector con cấp n, thì:

$$\|\mathbf{QAx}-\mathbf{Qb}\|^2 = \|\widetilde{\mathbf{T}}\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{c}}\|^2 + \mathbf{c}^T\mathbf{c}$$

Thay cho tìm cực tiểu $\|\mathbf{Ax-b}\|$, ta tìm cực tiểu của đại lượng bằng nó là $\|\mathbf{QA\,x - Qb}\|$ hoặc tìm cực tiểu của bình phương của đại lượng này, theo công thức trên. Rõ ràng cực tiểu sẽ đạt được khi:

$$\widetilde{\mathbf{T}}\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{c}} \qquad (1.39)$$

Từ đây dễ dàng suy ra nghiệm **x**, vì ma trận của hệ là tam giác. Đó là lời giải xấp xỉ của hệ ban đầu.

1.3 Nghịch đảo ma trận

Yêu cầu tìm ma trận nghịch đảo ít khi gặp trong thực tế. Tuy nhiên trong mục này chúng ta nhắc đến một vài vấn đề liên quan tới nghịch đảo ma trận gặp trong bài toán phân tích HTĐ.

Công thức kinh điển cho ma trận nghịch đảo sử dụng các định thức, và cũng như trường hợp công thức Cramer giải hệ phương trình tuyến tính, phương pháp này hoàn toàn không có hiệu quả. Ta cũng dễ suy đoán là các phương pháp nghịch đảo ma trận có quan hệ gần gũi với phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính.

1.3.1 Phương pháp Gauss- Jordan

Phương pháp này rất gần với phương pháp khử Gauss giải hệ phương trình tuyến tính. Xét ma trận vuông không suy biến **A**. Ma trận nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1}$ thu được nếu ta "chuyển đổi vị trí" hai vector **x** và **y=Ax**,tức là nếu ta viết được **x=By** thì **B** chính là nghịch đảo của **A**. Xét hệ thống:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ &\cdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = y_n \end{aligned} \tag{1.40}$$

Bước 1, biến x_1 sẽ được tráo đổi với biến y_1 trong phương trình thứ nhất. Ta giả thiết ở đây phần tử chốt $a_{11} \neq 0$. Trái lại cần tiến hành hoán vị phương trình thứ nhất với phương trình thứ r nào đó có $a_{r1} \neq 0$ và sau đó sẽ tráo đổi vị trí biến x_1 và biến y_r trong phương trình mới (thủ tục pivoting giống như ở phương pháp khử Gauss giải hệ phương trình).

Như vậy bây giờ ta có thể giả thiết $a_{11} \neq 0$. Giải x_1 từ phương trình thứ nhất và thay vào các phương trình còn lại, ta thu được hệ:

$$\begin{aligned} &a'_{11}y_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = x_1 \\ &a'_{21}y_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = y_2 \\ &\cdots \\ &a'_{n1}y_1 + a'_{n2}x_2 + \cdots a'_{nn}x_n = y_n \end{aligned} \tag{1.41}$$

với:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \frac{1}{a_{11}} \qquad & a'_{1k} &= \frac{a_{1k}}{a_{11}} \\ a'_{i1} &= \frac{a_{i1}}{a_{11}} \qquad & a'_{ik} &= a_{ik} - \frac{a_{i1}a_{ik}}{a_{11}} \quad cho\ \ i,k = 2,3,\ldots,n \end{aligned} \tag{1.42}$$

Bước tiếp theo, biến x_2 được tráo đổi với biến y_2 (hoặc một trong các biến $y_3, .., y_n$ nếu cần pivoting). Tiếp tục quá trình này ta thu được dãy ma trận :

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{A}^{(n)}$$

và ta có:

$$\mathbf{A}^{(n)}\ \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{x} \tag{1.43}$$

với $\bar{y}$ là một hoán vị nào đó của các biến của vector ban đầu $\mathbf{y}$ (đó là do pivoting), tức là $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{Py}$ với $\mathbf{P}$ là ma trận hoán vị thu được sau quá trình biến đổi nói trên (xem mục trước). Do đó ta có:

$$(\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{P})\ \mathbf{y} = \mathbf{x}$$

và vì $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ nên suy ra:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{(n)}\ \mathbf{P} \tag{1.44}$$

1.3.2 Nghịch đảo bởi khai triển tam giác

Trước hết ta nhận xét rằng mỗi cột của ma trận $\mathbf{A}^{-1}$ có thể thu được như lời giải của một hệ phương trình tuyến tính với ma trận hệ số là **A**. Thật vậy vì:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

với **I** là ma trận đơn vị, do đó nếu gọi $\mathbf{x}_k$ là cột thứ k của $\mathbf{A}^{-1}$ thì ta có:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k \qquad (1.45)$$

Vế phải là cột thứ k của **I**, có phần tử 1 ở vị trí k, các vị trí khác bằng 0.

Như vậy giải hệ (1.45) cho ta cột k của $\mathbf{A}^{-1}$. Ta đã biết rằng nếu ma trận hệ số của hệ phương trình là ma trận tam giác thì lời giải tìm được dễ dàng bởi một quá trình thay thế thuận hoặc ngược. Vì thế nếu ta đã có khai triển tam giác của **A** dạng (1.22):

$$\mathbf{L}\,\mathbf{U} = \mathbf{P}\,\mathbf{A}$$

thì cột k của ma trận nghịch đảo $\mathbf{x}_k$ có thể thu được dễ dàng từ hệ:

$$\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{x}_k = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k \qquad (1.46)$$

Khối lượng tính toán của phương pháp này cũng tương đương với phương pháp Gauss-Jordan [8].

1.3.3 Công thức Sherman- Morrison

Nhiều trường hợp chúng ta gặp một thay đổi nhỏ trong ma trận đang xét. Hỏi rằng ma trận nghịch đảo hay khai triển tam giác v.v.. của nó có thể được suy ra một cách đơn giản từ các kết quả cũ (trước khi có thay đổi) hay không ?

Câu trả lời là khẳng định. Dưới đây nêu một công thức rất có ích để *cập nhật* ma trận nghịch đảo.

Giả sử một thay đổi trên ma trận **A** có thể biểu diễn bởi $\mathbf{A} + \mathbf{v}\,\mathbf{w}^T$ trong đó **v** và **w** là hai vector (cột) nào đó. Vậy thì nghịch đảo của ma trận mới có thể tính theo nghịch đảo của ma trận **A** theo công thức Sherman-Morrison sau đây:

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{v}\mathbf{w}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{w}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{w}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}} \qquad (1.47)$$

Chú ý rằng mẫu số là một đại lượng vô hướng. Công thức có thể được chứng minh bằng cách nhân hai vế với $(\mathbf{A} + \mathbf{v}\mathbf{w}^T)$.

Chúng ta lấy ví dụ trường hợp đơn giản nhất chỉ có một phần tử của A bị thay đổi, chẳng hạn a_{ij} thay đổi tới $a_{ij} + e$. Ta có thể lấy trong trường hợp này:

$$\mathbf{v} = (0,\cdots,0,\underbrace{1}_{i},0,\cdots,0)^T$$

$$\mathbf{w} = (0,\cdots,0,\underbrace{e}_{j},0,\cdots,0)^T$$

Dễ thấy $\mathbf{v}\mathbf{w}^T$ là một ma trận cùng cấp với **A** với chỉ một phần tử khác 0 và bằng *e* ở vị trí *ij*.

Công thức tổng quát hơn (1.47), đôi khi được biết dưới tên *công thức Woodbury*, được cho dưới đây:

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{V}\mathbf{B}\mathbf{W}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}\left(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{W}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}\right)^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{A}^{-1} \qquad (1.48)$$

trong đó **V, B, W** là các ma trận có kích thước sao cho biểu thức có nghĩa.

Ngoài thí dụ đơn giản trên khi **A** chỉ thay đổi một phần tử, ta thường gặp trường hợp ma trận **A** thay đổi nhỏ tới $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, trong đó **B** có hạng *r* nhỏ: $r < n$ với *n* là cấp (và hạng) của **A**. Khi đó ta luôn biểu diễn được **B** ở dạng $\mathbf{B} = \mathbf{v}\,\mathbf{w}^T$ với **v** và **w** là các ma trận kích thước *nxr*. Vậy thì theo công thức trên ta có:

$$\mathbf{A}'^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{v}\mathbf{w}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{I} + \mathbf{w}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v})^{-1}\mathbf{w}^T\mathbf{A}^{-1} \qquad (1.49)$$

Tính toán đơn giản vì chỉ cần tìm nghịch đảo của một ma trận $(\mathbf{I} + \mathbf{w}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v})$ có cấp *r* nhỏ.

1.4 Phương pháp lặp

Các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính được nghiên cứu ở các mục trước có thể gọi là phương pháp *trực tiếp* để phân biệt với nhóm các phương pháp *lặp (iterative)* được giới thiệu ở mục này. Trong phương pháp lặp, quá trình giải hệ phương trình $\mathbf{Ax=b}$ là quá trình xây dựng một dãy các vectơ $\mathbf{x}^{(k)}$ sao cho dãy này có giới hạn là lời giải của hệ, tức là:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \qquad (1.50)$$

Một phương pháp lặp được gọi là *hội tụ* nếu giới hạn nói trên của $\mathbf{x}^{(k)}$ tồn tại và bằng lời giải của hệ phương trình. Khi tính toán theo phương pháp lặp, chúng ta sẽ sử dụng một *tiêu chuẩn dừng;* quá trình lặp sẽ dừng sau bước k nào đó thoả mãn:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon \qquad \text{hay} \qquad \max_i \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon \qquad (1.51)$$

trong đó ε là một số nhỏ đo độ chính xác của lời giải được lấy là $\mathbf{x}^{(k)}$.

Xuất phát từ một *xấp xỉ đầu* $\mathbf{x}^{(0)}$, mỗi *bước lặp* k sẽ xây dựng một xấp xỉ $\mathbf{x}^{(k)}$, k = 1,2,... . Các sơ đồ lặp thường xác định $\mathbf{x}^{(k+1)}$ dựa theo $\mathbf{x}^{(k)}$ theo dạng sau:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} \qquad (1.52)$$

trong đó $\mathbf{B}$ và $\mathbf{c}$ tương ứng là một ma trận và một vectơ. Để dãy xấp xỉ có thể tiến tới nghiệm của hệ (nếu hội tụ), dễ thấy rằng phải có $\mathbf{c} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Điều kiện cần và đủ để dãy này hội tụ là [11]:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{B}^k = 0 \qquad (1.53)$$

Để xây dựng sơ đồ lặp dạng (1.52), thường phân tách ma trận $\mathbf{A}$ ở dạng $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ với $\mathbf{M}$ là ma trận nghịch đảo được. Thế thì từ quan hệ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ta có thể viết dạng (1.52):

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{N}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{b} \qquad (1.54)$$

Sau đây là hai sơ đồ lặp kinh điển sử dụng dạng phân tách đơn giản của $\mathbf{A}$ đồng thời cho sự hội tụ nhanh. Ta viết:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$$

trong đó $\mathbf{D}$ là ma trận đường chéo chứa các phần tử đường chéo của $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ và $\mathbf{F}$ lần lượt là các ma trận tam giác dưới và tam giác trên chứa các phần tử dưới đường chéo và trên đường chéo của $\mathbf{A}$ (với dấu ngược lại).

1.4.1 Phương pháp lặp Jacobi

Trong sơ đồ lặp này, còn gọi là *lặp đơn*, ta viết **A = M - N** với **M = D** và **N = E + F**. Nếu mọi phần tử trên đường chéo của **A** khác 0 thì **D** khả nghịch và ta sử dụng sơ đồ lặp sau:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F})\ \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \qquad (1.56)$$

Nghịch đảo ma trận **D** rất đơn giản và dạng khai triển của sơ đồ lặp này như sau:

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad (1.57)$$

Phương pháp Jacobi hội tụ khi ma trận **A** là trội đường chéo [11]:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (1.58)$$

1.4.2 Phương pháp lặp Gauss-Seidel

Trong sơ đồ lặp này chúng ta lấy **A = M - N** với **M = D - E** và **N = F**. Ma trận **D–E** khả nghịch nếu $a_{ii} \neq 0\ \forall i$ và ta có sơ đồ lặp:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{F}\ \mathbf{x}^{(k)} + (\mathbf{D} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{b} \qquad (1.59)$$

Ma trận **D–E** cũng dễ nghịch đảo và ta có công thức khai triển của sơ đồ lặp Gauss-Seidel như sau:

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (1.60)$$

Ta có thể nhận xét rằng phương pháp này chỉ khác phương pháp lặp Jacobi là ở đây khi tính phần tử thứ i của xấp xỉ mới ta sử dụng $i-1$ phần tử đầu tiên của chính xấp xỉ mới này- giả thiết đã được tính trước đó, có nghĩa rằng mỗi giá trị biến mới được tính ra sẽ được sử dụng ngay. Điều này có thể làm tăng tốc độ hội tụ, hơn nữa lại đơn giản hơn khi lập trình: mỗi giá trị mới của biến sau khi tính được đặt ngay vào ô nhớ của biến, như vậy cần giữ trong bộ nhớ chỉ một vectơ **x**.

Phương pháp Gauss-Seidel cũng hội tụ khi ma trận **A** trội đường chéo.

2

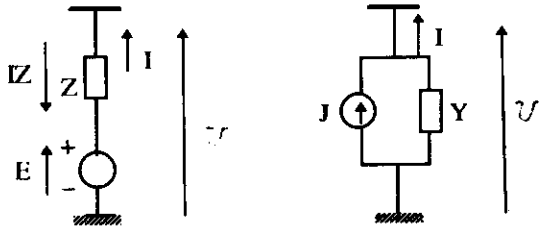
Mô hình nút của lưới điện

Trong chương này ta sẽ xây dựng hệ phương trình đại số tuyến tính mô tả chế độ xác lập của hệ thống điện. Nó sẽ là mô hình toán học cơ bản cho các bài toán phân tích chế độ của hệ thống.

2.1 Hệ phương trình nút

Như ta đã biết trong lí thuyết mạch điện, việc sử dụng phép biến đổi các thành phần đối xứng cho phép nghiên cứu lưới điện ba pha *cân bằng (balanced)*[1] trên ba lưới điện một pha. Nếu chế độ làm việc là *đối xứng* ba pha, thì ta chỉ cần nghiên cứu trên một lưới điện một pha, đó là lưới điện của *thành phần thứ tự thuận*, cấu hình của nó giống như cấu hình một pha của lưới điện thực tế[2]. Chúng ta sẽ xây dựng mô hình chế độ xác lập cho trường hợp thường gặp này của lưới điện.

Để phân tích các lưới điện này, nhất là khi áp dụng máy tính, thì mô hình nút là mô hình cơ bản và tiện lợi. Mô hình này mô tả quan hệ giữa các đại lượng điện ở các nút của lưới: *điện áp nút và dòng điện nút*. Điện áp nút là một đại lượng quen thuộc, còn dòng nút hiểu là dòng điện trong nguồn điện hoặc phụ tải điện nối vào nút (phần tử ngoài lưới). Dòng này có thể là biểu diễn tương đương của nguồn áp đặt vào một nút hoặc đặt giữa hai nút của lưới. Biểu diễn này áp dụng định lí tương đương của Norton: nguồn áp đặt giữa hai nút có thể chuyển thành nguồn dòng tương đương nối giữa hai nút này. Trường hợp thường gặp nguồn áp đặt giữa



(a) (b)

Hình 2.1

---

[1] Lưới điện trong đó coi các pha là hoàn toàn giống nhau về tính chất điện. Một cách chặt chẽ, lưới điện không bao giờ là cân bằng, vì chẳng hạn vị trí khác nhau của các pha của đường dây trên không làm cho chúng có tổng trở riêng và tương hỗ khác nhau. Tuy nhiên đường dây được chuyển vị pha có thể xem là có 3 pha hoàn toàn cân bằng.

[2] Xem thêm chương 3.

một nút và điểm trung tính như trên hình 2.1, ta có thể tính toán nguồn dòng tương đương ở hình 2.1b như sau:

Từ sơ đồ nguồn áp nối tiếp với tổng trở (chẳng hạn là tổng trở trong của nguồn) ta có $E = IZ + U$, còn từ sơ đồ nguồn dòng nối song song với tổng dẫn Y ta có $J = I + U Y$. Hai nguồn là tương đương (cho cùng giá trị U và I) nếu:

$$J = E / Z \qquad Y = 1 / Z \tag{2.1}$$

Trường hợp nguồn áp đặt giữa hai nút lưới chỉ khác là trong sơ đồ trên nút đầu dưới của nhánh không phải có điện áp bằng 0 mà có điện áp U_0 nào đó. Kết quả tính toán trên giữ nguyên, chỉ thay $U = U_1 - U_0$ trong các công thức (với U_1 là điện áp nút đầu trên của nhánh). Để cho tổng quát ta có thể coi điểm *đất* nếu có (hay điểm trung tính của lưới) là một nút như mọi nút khác, đánh số 0 và có điện áp U_0 (bằng 0 nếu được đo so với điện thế của chính điểm đó). Nguồn dòng J sẽ tách tương đương ra hai nguồn dòng $J_1 = -J_0 = J$ với J_1 là nguồn đi vào nút 1, J_0 là nguồn đi ra khỏi nút 0. Chúng đều là *dòng nút*, chỉ khác dấu. Các nguồn dòng này được xem là nguồn ngoài đặt vào một lưới chỉ bao gồm các phần tử thụ động (biểu diễn bởi các nhánh tổng trở hay tổng dẫn, bao gồm cả tổng dẫn nguồn như phần tử Y trên hình 2.1b).

Quan hệ giữa dòng và áp nút có thể rút ra từ các luật Kirchhoff và Ohm cho mạch điện. Không mất tính tổng quát, chúng ta giả thiết lưới điện có 4 nút, đánh số từ 0 tới 3. Luật dòng điện của Kirchhoff viết cho một nút sẽ biểu diễn cân bằng dòng tại nút này. Chẳng hạn đối với nút 1 ta có:

$$i_{10} + i_{12} + i_{13} = i_1 \tag{2.2}$$

trong đó vế trái biểu diễn tổng các dòng điện trong các nhánh của lưới nối tới nút 1, chẳng hạn i_{10} là *dòng nhánh* 1–0. Nếu trong lưới không tồn tại nhánh nối trực tiếp nút 1 và nút 0 thì coi $i_{10} = 0$. Còn i_1 là *dòng nút* ở nút 1, và ta qui ước *dòng mang dấu dương nếu đi vào lưới* (tức là nguồn điện), dấu âm nếu là dòng phụ tải đi ra khỏi lưới. Qui ước này đối với dòng nút dẫn đến xác định dấu dòng nhánh: chẳng hạn dòng nhánh i_{10} *dương nếu đi từ 1 tới 0*.

Bây giờ ta biểu diễn các dòng nhánh trong phương trình theo điện áp hai nút đầu nhánh (áp dụng luật Ohm). Phương trình (2.2) trở thành:

$$\dot{y}_{10}(\dot{u}_1 - \dot{u}_0) + \dot{y}_{12}(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + \dot{y}_{13}(\dot{u}_1 - \dot{u}_3) = i_1 \tag{2.3}$$

trong đó u kí hiệu điện áp và $\dot{y}_{10}$ là tổng dẫn của nhánh 1–0, tức là bằng nghịch đảo của tổng trở nhánh này. Tương tự $\dot{y}_{12}$ và $\dot{y}_{13}$ kí hiệu tổng dẫn của các nhánh 1–2 và 1–3 [1]. Chú ý rằng các đại lượng trong cả hai phương trình trên đều là số

[1] Đừng nhầm với đại lượng tổng dẫn ngang của đường dây truyền tải điện, cũng thường được gọi tắt là tổng dẫn của nhánh đường dây đó. Tổng dẫn ngang như thế, nếu có thì đã coi là một nhánh riêng (nối với nút đất)- như giả thiết ở trên.

phức (kí hiệu với *dấu chấm ở trên*, biểu diễn các đại lượng ở chế độ xác lập)[1] Trong (2.3) qui ước tổng dẫn nhánh bằng 0 nếu không tồn tại nhánh đó.

Nếu nhóm lại các số hạng theo điện áp, ta có:

$$-y_{10}u_0 + (y_{10} + y_{12} + y_{13})u_1 - y_{12}u_2 - y_{13}u_3 = i_1 \qquad (2.4)$$

Phương trình này cho ta quan hệ giữa dòng nút 1 và điện áp các nút trong lưới. Mỗi số hạng ứng với một điện áp nút; hệ số của chúng là một đại lượng có thứ nguyên tổng dẫn, được gọi là *tổng dẫn nút (của nút tương ứng)*. Cụ thể trong phương trình (2.4), ta gọi:

- *Tổng dẫn riêng (self-admittance) của nút 1:*

$$\dot{Y}_{11} = \dot{y}_{10} + \dot{y}_{12} + \dot{y}_{13} \qquad (2.5)$$

- Các *tổng dẫn tương hỗ (mutual admittances) giữa nút 1 và các nút khác:*

$$\dot{Y}_{10} = -\dot{y}_{10} \qquad \dot{Y}_{12} = -\dot{y}_{12} \qquad \dot{Y}_{13} = -\dot{y}_{13} \qquad (2.6)$$

Với các đại lượng tổng dẫn nút mới định nghĩa này, ta có *phương trình nút* (cho nút 1) sau đây:

$$Y_{10}u_0 + Y_{11}u_1 + Y_{12}u_2 + Y_{13}u_3 = i_1 \qquad (2.7)$$

Đây là phương trình nút của nút 1 trong lưới điện 4 nút 0,1,2,3 bất kì, cho quan hệ giữa các điện áp nút và dòng nút 1. Các phương trình tương tự có thể viết cho nút 0, nút 2 và nút 3. Quan sát dạng phương trình cho nút 1, ta có thể viết ngay phương trình cho các nút khác một cách hoàn toàn đối xứng. Chúng lập thành *hệ phương trình nút*, viết ở dạng ma trận sẽ là:

$$\begin{pmatrix} Y_{00} & Y_{01} & Y_{02} & Y_{03} \\ Y_{10} & Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{20} & Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{30} & Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính. Ma trận của hệ được gọi là *ma trận tổng dẫn nút (Bus Admittance Matrix)*, kí hiệu là **Y**. Nếu cũng kí hiệu **u** và **i** là các *vectơ áp nút và dòng nút*, thì ta có thể viết gọn (2.8):

---

[1] Để đơn giản kí hiệu ta sẽ bỏ qua các dấu chấm chỉ số phức, trừ một số trường hợp

$$\mathbf{Y}\,\mathbf{u} = \mathbf{i} \tag{2.9}$$

Chú ý rằng dạng của hệ phương trình nút hoàn toàn không phụ thuộc cấu hình cụ thể của lưới điện, đó cũng là điều kiện cần thiết cho một mô hình tổng quát để nghiên cứu hệ thống.

Bây giờ chúng ta có thể khái quát hoá qui tắc xác định tổng dẫn nút cho một lưới điện bất kì. Lưu ý rằng ở đây giả thiết không có hỗ cảm từ giữa các nhánh. Trường hợp trái lại sẽ xét ở phần sau.

- *Tổng dẫn riêng của nút k* nào đó bằng tổng tất cả các tổng dẫn nhánh nối trực tiếp tới nút *k*:

$$\dot{Y}_{kk} = \sum_{m \neq k} \dot{y}_{km} \tag{2.10}$$

Nếu nhánh nối trực tiếp k–m không tồn tại thì $y_{km} = 0$. Kí hiệu $\sum_{m \neq k}$ chỉ tổng lấy theo mọi nút m, $m \neq k$. Nhận xét rằng đại lượng tổng dẫn riêng của một nút trong lưới bao giờ cũng khác 0.

- *Tổng dẫn tương hỗ giữa nút k và nút m* bằng giá trị âm của tổng dẫn nhánh k–m (bằng 0 nếu không tồn tại nhánh này):

$$\dot{Y}_{km} = -\dot{y}_{km} \tag{2.11}$$

Dễ thấy sự khái quát hoá này là đúng nếu ta dẫn lại hệ phương trình nút như làm ở trên nhưng với giả thiết lưới điện có số nút bất kì. Phương trình thu được có dạng tổng quát như ở (2.9). Như vậy ta thấy rằng ma trận **Y** xác định khá dễ dàng từ thông số nhánh. Đó là một *ma trận đối xứng*, vì dễ thấy rằng $Y_{km} = Y_{mk}$.

Một nhận xét khác rút ra từ định nghĩa các tổng dẫn nút là nếu lấy tổng các phần tử của một hàng (hoặc một cột) của ma trận, ta sẽ được số 0. Nói cách khác ma trận có một hàng (một cột) phụ thuộc các hàng (cột) khác. Ma trận như vậy là suy biến (không tồn tại ma trận nghịch đảo). Đồng thời ta cũng nhận xét rằng tổng các phần tử của vectơ dòng nút **i** ở vế phải của (2.8) cũng bằng 0 theo luật cân bằng dòng vào-ra của toàn lưới điện (thụ động):

$$\sum i = 0 \tag{2.12}$$

(điều này thấy rõ khi ta coi nút trung tính (đất) nếu có cũng như một nút).

Như vậy một phương trình trong hệ (2.8) là phụ thuộc; nó bằng tổng của các phương trình khác. Về toán học hệ phương trình như vậy có nghiệm không duy nhất, tức là với vectơ **i** đã cho, có nhiều nghiệm điện áp nút thoả mãn hệ phương trình ! Điều này sẽ thấy rõ hơn khi quan sát phương trình nút ở dạng ban đầu (2.3): Trong phương trình này vì điện áp chỉ xuất hiện dưới dạng hiệu hai điện áp nên phương trình thoả mãn với vô số điện áp có giá trị khác nhau cùng một hằng số

cộng. Điều dẫn xuất từ mô hình toán học mô tả chế độ xác lập của lưới điện cũng phải biểu hiện qui luật vật lí (điện) của lưới. Thật vậy, nếu điện áp được đo so với một nút qui chiếu thuộc lưới thì chúng chỉ có một giá trị xác định. Thường ta lấy nút qui chiếu là nút đất- nút số 0 có điện áp $u_0 = 0$. Thay giá trị xác định này vào hệ phương trình, đồng thời bỏ đi phương trình ứng với nút 0 có dòng nút i_0 phụ thuộc vào các dòng nút khác, thì hệ còn lại trở nên hoàn toàn xác định (nghiệm duy nhất).

Ta cũng có thể phát biểu điều này dưới dạng sau đây: *điện áp của lưới chỉ xác định khi cho trước trị số của nó ở một nút nào đó trong lưới*. Nút này gọi là *nút cơ sở điện áp của lưới*, nó ấn định một "mặt bằng điện áp" cho lưới.

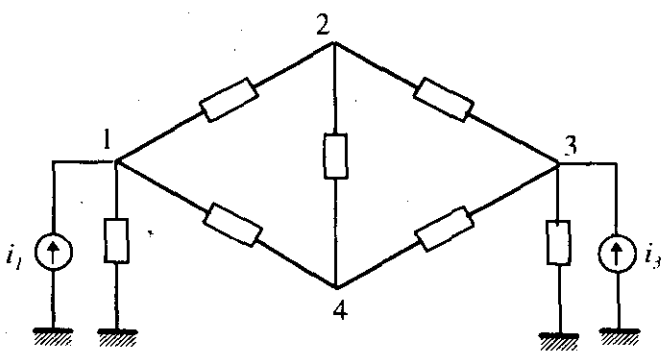
Từ đây ta sẽ giả thiết nút số 0 là nút cơ sở điện áp, có điện áp phức $\dot{u}_0$ đã cho, còn dòng nút i_0 của nó phụ thuộc vào dòng các nút khác theo điều kiện cân bằng dòng (2.12). Bỏ phương trình (phụ thuộc) ứng với nút cơ sở điện áp, ta sẽ xét hệ 3 phương trình *độc lập* đối với lưới điện 4 nút 0,1,2,3; từ (2.8) rút ra:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 + y_{10}u_0 \\ i_2 + y_{20}u_0 \\ i_3 + y_{30}u_0 \end{pmatrix} \qquad (2.13)$$

trong đó y_{k0} là tổng dẫn nhánh nối nút k với nút cơ sở; nếu không tồn tại nhánh này thì $y_{k0} = 0$.

Bây giờ trong các phương trình trên, điện áp nút coi như được đo so với bất kì một điểm qui chiếu nào. Ta có thể sử dụng giá trị điện áp pha, tức là điện áp so với đất hay điểm trung tính của máy điện 3 pha. Nút đất- nút 0 như đã qui ước- liên hệ với các nút lưới thông qua nhánh điện dung của đường dây, nhánh từ hoá của máy biến áp, nhánh thiết bị bù v.v.. Nút đất có điện áp "pha" bằng 0 và ta có thể lấy nó làm nút cơ sở điện áp. Phương trình nút với điện áp pha khi đó có dạng (2.13) trong đó $u_0 = 0$. Lưu ý rằng dù trong hệ này không còn phương trình đối với nút đất nhưng các *nhánh ngang* (nối đất) trong lưới vẫn tham gia vào phương trình khác trong các đại lượng tổng dẫn riêng của nút (Y_{kk}).

Chúng ta sẽ thường sử dụng dạng này của phương trình nút.



Hình 2-2

Để minh hoạ cụ thể ta xét lưới

điện trên hình 2-2. Lưới gồm 5 nút kể cả nút đất trong đó nguồn dòng (máy phát điện hoặc phụ tải) được nối vào nút 1 và 3. Hệ phương trình nút viết cho điện áp pha đối với nút cơ sở điện áp là đất có dạng:

$$\begin{aligned} Y_{11}u_1 &+ Y_{12}u_2 & &+ Y_{14}u_4 &= i_1 \\ Y_{21}u_1 &+ Y_{22}u_2 &+ Y_{23}u_3 &+ Y_{24}u_4 &= 0 \\ &+ Y_{32}u_2 &+ Y_{33}u_3 &+ Y_{34}u_4 &= i_3 \\ Y_{41}u_1 &+ Y_{42}u_2 &+ Y_{43}u_3 &+ Y_{44}u_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (2.14)$$

trong đó ma trận hệ số là ma trận tổng dẫn nút cấp 4, viết theo tổng dẫn nhánh như sau:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} (y_{10} + y_{12} + y_{14}) & -y_{12} & 0 & -y_{14} \\ -y_{21} & (y_{21} + y_{23} + y_{24}) & -y_{23} & -y_{24} \\ 0 & -y_{23} & (y_{30} + y_{32} + y_{34}) & -y_{34} \\ -y_{41} & -y_{42} & -y_{43} & (y_{41} + y_{42} + y_{43}) \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

Chú ý ma trận là đối xứng vì $y_{12} = y_{21}$ ...

Tóm lại, *đối với lưới điện n+1 nút, ta sẽ có n phương trình nút độc lập* (2.13). Nếu đã cho vectơ dòng nút **i**, thì điện áp nút xác định bởi hệ phương trình này, tức là:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{i} := \mathbf{Z}\mathbf{i} \qquad (2.16)$$

trong đó ta gọi **Z**, nghịch đảo của **Y**, là *ma trận tổng trở nút*.

Trong thực tế đối với bài toán tính toán chế độ xác lập, thường không cho trước dòng nút, mà cho trước *công suất nút* (công suất nguồn điện hay phụ tải điện). Hơn nữa công suất được cho ở đầu cực máy điện (máy phát hay phụ tải). Khi đó tổng dẫn của nguồn (xem hình 2.1b) không được bao gồm trong sơ đồ lưới nữa, và ta sẽ sử dụng phương trình (2.13) trong đó thay dòng nút bởi *công suất nút (phức)* $p+jq$ và điện áp nút, theo công thức sau:

$$i_k = \frac{p_k - jq_k}{u_k^*} \qquad (2.17)$$

(dấu sao chỉ số phức liên hợp, $j^2 = -1$).

Ta nhận xét rằng hệ (2.13) với nút cơ sở đất có $u_0 = 0$ và dòng nút thay bởi (2.17) trong đó công suất nút đã cho, lại trở nên không xác định đối với ẩn *điện áp phức*. Rõ ràng nếu ta quay tất cả các vectơ (số phức) điện áp nút đi cùng một góc bất kì, thì các phương trình vẫn thỏa mãn. Đó là vì *chế độ điện chỉ phụ thuộc vào*

góc tương đối giữa các điện áp nút, và ta có thể chọn gốc qui chiếu bất kỳ cho số đo góc pha điện áp trong lưới.

Ta sẽ xem xét chi tiết bài toán tính toán chế độ xác lập trong chương 4.

2.2 Ma trận tổng dẫn nút

2.2.1 *Ma trận tổng dẫn nút của phần tử lưới*

Trong mục này chúng ta sẽ chỉ ra một cách tiếp cận khác để xây dựng ma trận tổng dẫn nút **Y** của lưới điện. Phương pháp này dựa trên việc *xếp chồng các ma trận tổng dẫn của mỗi phần tử (nhánh) của lưới*. Cách tiếp cận này cho phép lượng hóa sự tham gia của mỗi nhánh của lưới trong ma trận. Nó cũng mô tả dễ dàng *hỗ cảm* nếu có giữa các phần tử lưới.

Quan sát ma trận (2.15) của lưới điện hình 2-2 và để ý đến một nhánh nào đó của lưới, chẳng hạn nhánh 2–4, ta thấy rằng tổng dẫn nhánh này (y_{24}) tham gia vào 4 phần tử của ma trận, đó là các phần tử 22, 24, 42 và 44. Nếu bỏ đi y_{24} từ 4 phần tử này thì ta thu được ma trận của lưới đã bỏ đi nhánh 2–4. Nói cách khác, việc đóng thêm nhánh nối hai nút 2, 4 vào lưới sẽ tương đương với việc xếp chồng lên ma trận **Y** ma trận sau đây:

$$\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & y_{24} & 0 & -y_{24}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -y_{24} & 0 & y_{24}\end{pmatrix} \quad \text{hay viết gọn} \quad \begin{matrix}\\2\\4\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}2 & 4\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\end{matrix} y_{24} \qquad (2.18)$$

Tiếp theo chúng ta nhận xét rằng ma trận dạng viết gọn trong (2.18) chính là ma trận tổng dẫn nút của "lưới" chỉ gồm một nhánh y_{24} nối giữa hai nút 2 và 4. Ta sẽ gọi tắt đó là *ma trận tổng dẫn nút của nhánh 2-4*.

Như vậy chúng ta có thể xây dựng ma trận **Y** của lưới bằng cách xếp chồng các ma trận (tổng dẫn nút) của từng nhánh. Nhánh với tổng dẫn y nối hai nút m, n có ma trận tổng dẫn nút là:

$$\begin{matrix}\\m\\n\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}m & n\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}y & -y\\ -y & y\end{pmatrix}\end{matrix} = \begin{matrix}\\m\\n\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}m & n\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\end{matrix} y \qquad (2.19)$$

trong đó ma trận 2×2 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ được gọi là *ma trận cấu thành nhánh*. Khi xếp

chồng lên ma trận **Y** của lưới, ta cộng các phần tử của ma trận nhánh vào các phần tử cùng tên (hàng-cột) của ma trận của lưới. Nếu một nút của nhánh chưa tồn tại trong lưới, thì thêm một hàng một cột vào ma trận của lưới. Nhận xét rằng phép cộng nói trên ứng với việc cộng thêm dòng nhánh mới vào tổng các dòng nhánh nối tới nút liên quan, để cân bằng với dòng nút theo luật dòng điện của Kirchhoff.

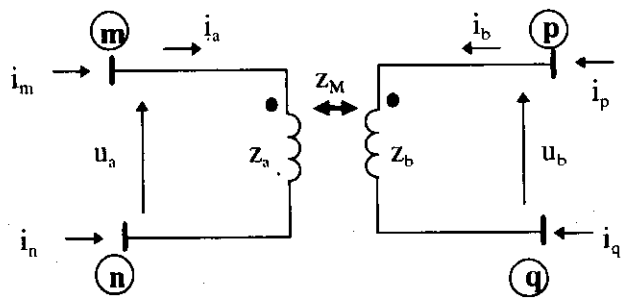
Trường hợp một nút của nhánh đang xét là nút cơ sở thì sẽ không đưa vào **Y** hàng cột ứng với nút này, do đó ma trận của nhánh xếp chồng suy biến thành một giá trị, bằng tổng dẫn của nhánh đó.

2.2.2 *Trường hợp nhánh có hỗ cảm*

Xét hai nhánh a và b nối giữa các nút m–n và p–q có hỗ cảm với nhau. Quan hệ dòng áp giữa chúng có thể biểu diễn đơn giản qua tổng trở của mỗi nhánh và tổng trở tương hỗ giữa các nhánh. Gọi tổng trở của hai nhánh tương ứng là z_a và z_b, còn tổng trở tương hỗ là z_M, ta có quan hệ giữa điện áp nhánh và dòng nhánh:

$$\begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_a & z_M \\ z_M & z_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Ma trận hệ số trong phương trình trên được gọi là *ma trận tổng trở nhánh* của hai nhánh này, đó là ma trận đối xứng. Dấu của tổng trở tương hỗ (do hỗ cảm giữa hai nhánh) rõ ràng phải phụ thuộc vào chiều dòng điện chạy trong nhánh. Trên sơ đồ hình 2-3 qui ước đánh dấu cực tính của mỗi nhánh bởi một dấu chấm ở một đầu của nó; nếu cả hai dòng nhánh đều đi vào đầu đánh dấu thì z_M là dương.



Hình 2-3

Từ (2.20) rút ra phương trình dạng dòng điện:

$$\begin{pmatrix} y_a & y_M \\ y_M & y_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

trong đó ma trận hệ số là *ma trận tổng dẫn nhánh* của hai nhánh hỗ cảm, nghịch đảo của ma trận tổng trở nhánh. Ta có:

$$\begin{pmatrix} y_a & y_M \\ y_M & y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_a & z_M \\ z_M & z_b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{z_a z_b - z_M^2} \begin{pmatrix} z_b & -z_M \\ -z_M & z_a \end{pmatrix} \qquad (2.22)$$

Bây giờ ta chuyển các đại lượng nhánh trong (2.21) thành các đại lượng nút. Quan hệ giữa áp nhánh và áp nút biểu diễn nhờ một ma trận gọi là *ma trận nối dây* **A** (về ma trận này chúng ta còn trở lại trong mục sau):

$$\begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_m - u_n \\ u_p - u_q \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} m & n & p & q \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} u_m \\ u_n \\ u_p \\ u_q \end{pmatrix} := \mathbf{A} \begin{pmatrix} u_m \\ u_n \\ u_p \\ u_q \end{pmatrix} \qquad (2.23)$$

Đối với dòng điện, ta có quan hệ giữa dòng nhánh và dòng nút như sau:

$$\begin{pmatrix} i_m \\ i_n \\ i_p \\ i_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} \qquad (2.24)$$

Kí hiệu T chỉ ma trận chuyển vị. Thay áp nhánh trong (2.21) bởi (2.23) và nhân trái hai vế biểu thức này với $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ để xuất hiện dòng nút theo (2.24), ta thu được:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} y_a & y_M \\ y_M & y_b \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} u_m \\ u_n \\ u_p \\ u_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_m \\ i_n \\ i_p \\ i_q \end{pmatrix} \qquad (2.25)$$

Theo định nghĩa đây chính là phương trình tổng dẫn nút của hai nhánh hỗ cảm. Thực hiện phép nhân với ma trận **A**, phương trình trên trở thành:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} y_a & -y_a & y_M & -y_M \\ -y_a & y_a & -y_M & y_M \\ \hline y_M & -y_M & y_b & -y_b \\ -y_M & y_M & -y_b & y_b \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_m \\ u_n \\ u_p \\ u_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_m \\ i_n \\ i_p \\ i_q \end{pmatrix} \qquad (2.26)$$

Quan sát phương trình trên, nhận thấy rằng ta lại có thể biểu diễn ma trận tổng dẫn nút của hai nhánh hỗ cảm dùng ma trận cấu thành nhánh (như ở mục trước):

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y_a \end{array} & \begin{array}{cc} & \begin{matrix} p & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y_M \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y_M \end{array} & \begin{array}{cc} & \begin{matrix} p & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y_b \end{array} \end{array}\right) \qquad (2.27)$$

Nhận xét rằng ở đây ta cần *nhân ma trận cấu thành nhánh với mỗi phần tử của ma trận tổng dẫn nhánh của hai nhánh hỗ cảm*. Tên của các hàng và cột trong ma trận 4×4 này gán theo qui tắc bắt đầu đi từ nút có dấu chấm trước rồi đến nút không có dấu chấm của mỗi nhánh.

Trường hợp một nút nào đó trong 4 nút là nút cơ sở, ta bỏ đi hàng và cột tương ứng. Một tình trạng cũng thường xảy ra là hai nhánh hỗ cảm có một nút chung. Giả sử n và q là cùng một nút, thì trong hệ (2.26) các cột n và q có thể cộng lại, vì $u_n = u_q$, đồng thời ta cũng cộng hai hàng n và q với nhau, vì i_n và i_q bây giờ cùng thuộc về một dòng nút chung.

Cuối cùng hai nhánh hỗ cảm sẽ được ghép vào lưới bằng cách xếp chồng ma trận nút (2.27) của chúng vào ma trận **Y** của lưới, mỗi phần tử được cộng vào phần tử cùng tên trong **Y**.

Như vậy ta đã thành lập ma trận tổng dẫn nút của hai nhánh hỗ cảm. Cách thành lập ma trận này cũng hoàn toàn tương tự đối với trường hợp xét 3 hay nhiều hơn các nhánh hỗ cảm lẫn nhau. Cụ thể ta theo các bước sau:

1. Lập ma trận tổng trở nhánh của các nhánh hỗ cảm. Nếu có 3 nhánh hỗ cảm lẫn nhau thì ta có ma trận cấp 3. Phần tử trên đường chéo là tổng trở riêng của mỗi nhánh, phần tử ngoài đường chéo là tổng trở tương hỗ giữa hai nhánh do hỗ cảm (có thể bằng 0 nếu chúng không hỗ cảm trực tiếp với nhau)
2. Nghịch đảo ma trận để thu được ma trận tổng dẫn nhánh. Chú ý cặp phần tử ngoài đường chéo bằng 0 trong ma trận tổng trở có thể trở nên khác 0 trong ma trận tổng dẫn. Điều đó có nghĩa rằng mặc dù dòng trong nhánh a không tác động đến áp nhánh b, nhưng ngược lại áp nhánh b lại ảnh hưởng đến dòng nhánh a, đó là do ghép gián tiếp qua một nhánh khác thuộc nhóm các nhánh đang xét.
3. Nhân mỗi phần tử của ma trận tổng dẫn nhánh thu được với ma trận cấu thành nhánh 2×2.
4. Đánh tên nút cho hàng và cột ma trận thu được theo cách sau: Trước tiên gán tên hai hàng hai cột của mỗi khối 2×2 trên đường chéo; bắt đầu bằng tên nút có đánh dấu rồi đến nút không đánh dấu của nhánh tương ứng với khối. Sau đó tên hàng cột của các khối ngoài đường chéo gán phù hợp với tên trên khối đường chéo.

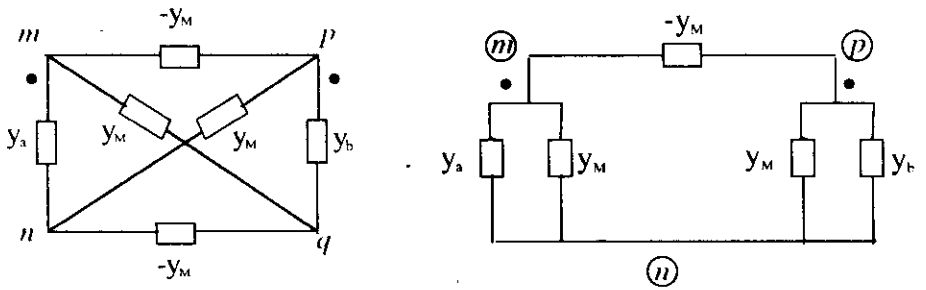
Cuối cùng ta được ma trận tổng dẫn nút của các nhánh xét, sẵn sàng xếp chồng lên ma trận của lưới.

2.2.3 *Lưới tương đương của các nhánh hỗ cảm*

Các nhánh có hỗ cảm từ có thể được biểu diễn bởi một mạch điện tương đương trong đó không có liên hệ từ giữa các nhánh (tức là không còn hỗ cảm).

Chẳng hạn xét hai nhánh m–n và p–q có hỗ cảm, phương trình nút của chúng cho ở (2.26). Dễ thấy rằng đây cũng là phương trình nút của lưới tổng dẫn cho trên *hình 2-4a* trong đó không có hỗ cảm.

Chúng ta có thể kiểm tra lại kết luận trên bằng cách lập ma trận **Y** của lưới trên hình 2-4a. Lưới này bởi vậy có thể dùng để biểu diễn tương đương cho hai nhánh có hỗ cảm m–n và p–q.



a) *b)*

Hình 2-4

Trường hợp hai nhánh có một nút chung, chẳng hạn n-q, thì lưới tương đương trở thành như *hình 2-4b* sau khi hợp nhất hai nút n và q.

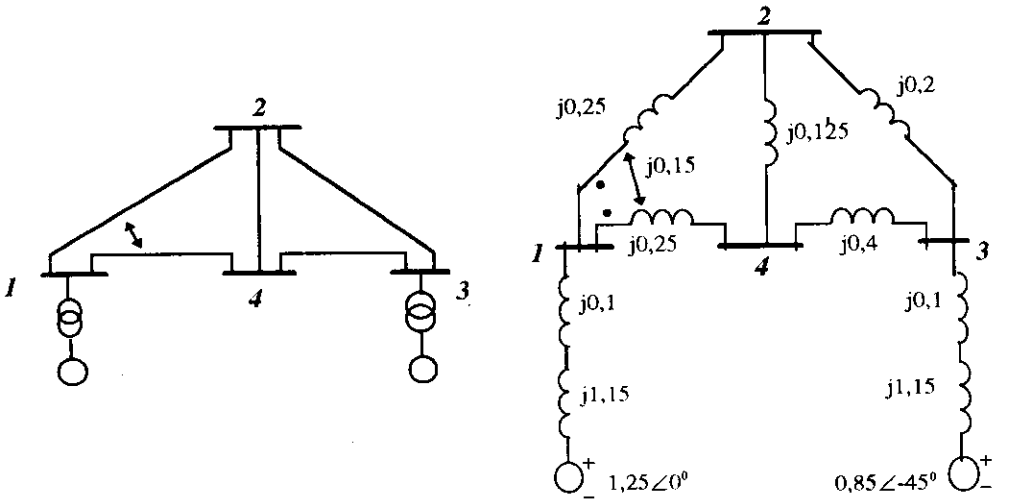
2.2.4 *Thí dụ*[1]

Xét lưới điện trên *hình 2-5a*, sơ đồ điện kháng trong đơn vị tương đối [2] biểu diễn ở *hình 2-5b*, trong đó hai nhánh 1–2 và 1–4 có hỗ cảm với điện kháng hỗ cảm bằng 0,15. Nhánh máy phát nối vào nút 1 và động cơ điện nối vào nút 3. Các nhánh này được thay thế bởi điện kháng của máy phát (động cơ) và điện kháng của máy biến áp, giá trị cho trên sơ đồ. Sức điện động của máy phát điện bằng $1{,}25\angle 0^0$ trong đơn vị tương đối và điện áp trong của động cơ điện bằng $0{,}85\ \angle -45^0$.

---

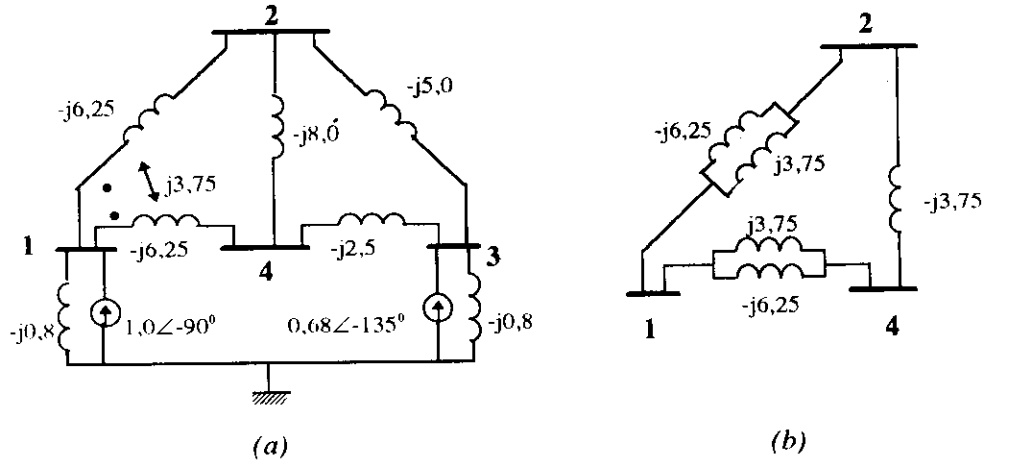
[1] Thí dụ này dựa theo [6]

[2] Với điện áp cơ sở ở mỗi phía của máy biến áp tỉ lệ với hệ số biến áp và sơ đồ không bao gồm máy biến áp lí tưởng nữa.



(a) *(b)*

Hình 2-5



(a) *(b)*

Hình 2-6

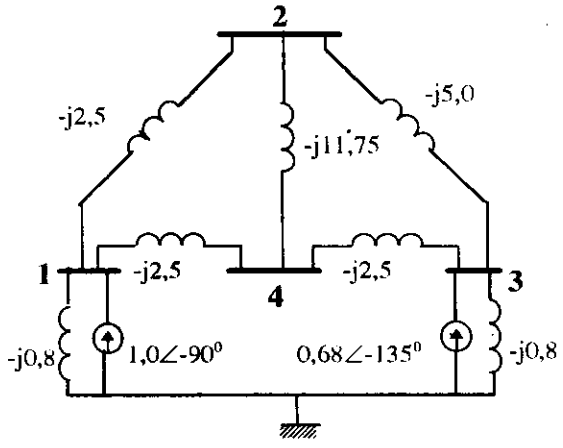
Để sử dụng phương trình dòng nút, sau khi ghép nối tiếp điện kháng máy phát và động cơ với điện kháng máy biến áp, ta thay thế nguồn áp đã cho ở nút 1 và 3 bằng nguồn dòng tương đương và tổng dẫn sun theo công thức (2.1). Tiếp theo xác định tổng dẫn các nhánh đường dây bằng cách nghịch đảo tổng trở nhánh. Riêng đối với hai nhánh có hỗ cảm, cần nghịch đảo ma trận tổng trở nhánh theo công thức (2.22).

Sử dụng công thức này, tính nghịch đảo của ma trận tổng trở nhánh, ta được ma trận tổng dẫn nhánh của hai nhánh hỗ cảm 1–2 và 1–4:

$$\begin{pmatrix} j0,25 & j0,15 \\ j0,15 & j0,25 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -j6,25 & j3,75 \\ j3,75 & -j6,25 \end{pmatrix} \qquad (2.28)$$

Kết quả được sơ đồ tổng dẫn cho trên hình 2-6a. Hai nhánh hỗ cảm sẽ được thay thế bởi sơ đồ tương đương không hỗ cảm vẽ trên hình 2-6b. Chú ý cực tính nhánh hỗ cảm trước khi vẽ sơ đồ này.

Thay sơ đồ này vào vị trí hai nhánh 1–2 và 1–4 trong hình 2-6a và ghép các tổng dẫn song song, ta thu được sơ đồ hình 2-7. Bây giờ từ sơ đồ này (không còn hỗ cảm) ta dẫn ra phương trình nút sau đây (vì ma trận của phương trình là đối xứng nên ta chỉ viết phần tam giác trên):



Hình 2-7

$$\begin{pmatrix} -j5,80 & j2,50 & 0 & j2,50 \\ & -j19,25 & j5,00 & j11,75 \\ & & -j8,30 & j2,50 \\ & & & -j16,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,00\angle -90^0 \\ 0 \\ 0,68\angle -135^0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.29)$$

Khi tính toán trên máy tính, có thể có lợi hơn nếu sử dụng phương pháp xếp chồng ma trận tổng dẫn nút của các phần tử lưới như trình bày trong mục 2.2.1 và 2.2.2. Khi đó đối với hai nhánh hỗ cảm, ta có ma trận dạng (2.27); lưu ý thứ tự nút trong mỗi khối (từ trên xuống và từ trái qua phải) bắt đầu từ nút có đánh dấu cực tính:

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 4\end{matrix} \\ 1 & \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}(-j6{,}25) \\ 4 & \end{array} & \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2\end{matrix} \\ & \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}(j3{,}75) \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & \\ 1 & \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}(j3{,}75) \\ 2 & \end{array} & \begin{array}{cc} & \\ & \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}(-j6{,}25) \end{array} \end{array}\right) \qquad (2.30)$$

Vì hai nhánh có nút chung là nút 1, ta cộng các hàng 1 và cột 1 trong ma trận trên, kết quả được ma trận tổng dẫn của hai nhánh này (ma trận đối xứng):

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2(-j6{,}25)+2(j3{,}75) & -j3{,}765+j6{,}25 & j6{,}25-j3{,}75 \\ & -j6{,}25 & j3{,}75 \\ & & -j6{,}25 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (2.31)$$

Ma trận này chính là ma trận tổng dẫn nút của sơ đồ hình 2-6b.

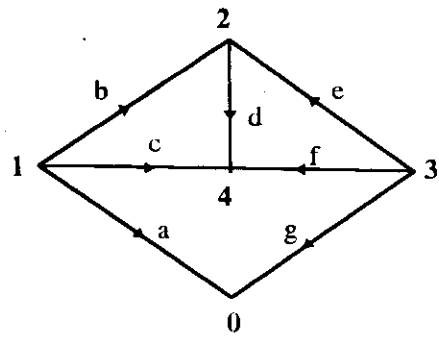
Phương pháp xếp chồng các ma trận của phần tử cũng có ích trong việc thay đổi cập nhật ma trận **Y** khi có một vài thay đổi trong lưới. Theo phương pháp này, khi đóng thêm một nhánh vào lưới điện, ta chỉ cần cộng ma trận của nhánh vào ma trận của lưới. Ngược lại khi cắt bỏ một nhánh, ta trừ ma trận của nhánh này vào **Y**. Ta cũng có thể thay đổi giá trị tổng dẫn của một nhánh trong lưới bằng cách ghép thêm một nhánh mới song song, sao cho tổng của hai tổng dẫn song song cho giá trị mong muốn. Tnh toán trên ma trận, ta cũng đơn giản xếp chồng ma trận của nhánh song song mới lên ma trận **Y** của lưới sẵn có theo những qui tắc thiết lập trong mục 2.2.1 và 2.2.2. Các qui tắc này cũng áp dụng đối với nhánh có hỗ cảm. Chúng ta cũng có thể suy ra các hiệu chỉnh cần làm trên ma trận tổng dẫn nút của lưới đối với các thay đổi đặc biệt. Chẳng hạn để cắt chỉ một trong hai nhánh hỗ cảm, ta có thể trước tiên cắt cả hai nhánh (trừ đi ma trận dạng (2.27)), rồi đóng lại một nhánh (cộng vào ma trận dạng (2.19)).

2.2.5 Biểu diễn ma trận tổng dẫn nút của lưới dùng ma trận nối dây nút-nhánh

Trong mục 2.2.2, để xây dựng phương trình nút cho hai nhánh (hỗ cảm), chúng ta đã xuất phát từ phương trình nhánh (2.20), (2.21) mô tả quan hệ giữa dòng nhánh và áp nhánh. Thủ tục đó sẽ được tổng quát hoá trong mục này để xây dựng phương trình nút cho lưới điện bất kì.

Xét lưới điện có B nhánh và N+1 nút. Để cho cụ thể ta lấy thí dụ lưới điện hình 2-5, với B=7 và N=4, được vẽ lại trên hình 2-8 dạng graph nút nhánh.

Từ số liệu về tổng trở của mỗi nhánh và tổng trở tương hỗ giữa các nhánh (nếu có), ta định nghĩa *ma trận tổng trở nhánh* $\mathbf{Z}_l$ của lưới. Ma trận này có kích thước B×B: trên đường chéo chính đặt các tổng trở riêng của mỗi nhánh, ngoài đường chéo là số 0 hoặc tổng trở tương hỗ giữa hai nhánh. Đặt tên 7 nhánh của lưới đang xét bởi các chữ cái từ *a* đến *g*, hai nhánh b và c có hỗ cảm đặt tên liền nhau, ta có:



Hình 2-8

$$\mathbf{Z}_l = \begin{pmatrix} z_a & & & & & & \\ & z_b & z_M & & & & \\ & z_M & z_c & & & & \\ & & & z_d & & & \\ & & & & z_e & & \\ & & & & & z_f & \\ & & & & & & z_g \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

Ma trận này là kết quả của việc ghép các phương trình nhánh dạng $u_a = Z_a i_a$ hoặc dạng (2.20). Gọi $\boldsymbol{u}_l$ và $\boldsymbol{i}_l$ là vectơ áp và dòng nhánh, ta có phương trình:

$$\mathbf{Z}_l \mathbf{i}_l = \mathbf{u}_l \tag{2.33}$$

Nghịch đảo $\mathbf{Z}_l$ bằng cách nghịch đảo các phần tử trên đường chéo hoặc ma trận con trên đường chéo, suy ra:

$$\mathbf{Y}_l \mathbf{u}_l = \mathbf{i}_l \tag{2.34}$$

trong đó *ma trận tổng dẫn nhánh*:

$$\mathbf{Y}_l = \mathbf{Z}_l^{-1} = \begin{pmatrix} y_a & & & & & & \\ & Y_b & Y_M & & & & \\ & Y_M & Y_c & & & & \\ & & & y_d & & & \\ & & & & y_e & & \\ & & & & & y_f & \\ & & & & & & y_g \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

Các phần tử Y_b, Y_c được viết bằng chữ hoa để hiểu rằng chúng không phải bằng nghịch đảo của tổng trở riêng của nhánh b và c, mà được tính theo (2.22).

Bây giờ giống như đã làm ở mục 2.2.2 ta sẽ chuyển phương trình nhánh (2.35) sang phương trình nút. Muốn thế ta phải biết cấu hình của lưới, tức là cấu trúc nối nút - nhánh của lưới. Thật vậy hệ phương trình nút của lưới phụ thuộc vào cách chắp nối các nhánh và nút để tạo thành lưới điện, trong khi hệ phương trình nhánh không phụ thuộc vào điều đó. Vì thế thường gọi các phương trình nhánh và ma trận tổng trở hay tổng dẫn nhánh, cũng như các phần tử của chúng là các đại lượng *nguyên thuỷ, sơ cấp (primitive).*

Cấu hình (topology) của lưới điện được mô tả bởi *graph* của lưới (hình 2-8) trong đó mỗi nhánh được qui ước một chiều dương của dòng điện. Trên graph có thể định nghĩa một *cây*, là một *graph con* gồm một số nhánh nối tất cả các nút nhưng không tạo ra *vòng kín*. Ta có thể chọn các cây khác nhau, chẳng hạn (hình 2-8) gồm các nhánh b,c,f,a hay b,d,f,g v.v.. Sau khi xác định cây, các nhánh còn lại gọi là *bù cây*, đóng mỗi nhánh này vào cây sẽ tạo nên một vòng kín. Một graph N+1 nút và B nhánh sẽ có N nhánh cây và B-N nhánh bù cây (bằng số *vòng kín độc lập).*

Một graph có thể được mô tả bởi *ma trận nối nút-nhánh (branch- to- node incidence matrix)* **A**, kích thước B×N, tức là có hàng ứng với nhánh và cột ứng với nút (thường không mô tả nút cơ sở). Phần tử a_{ij} của **A** là các số 0 hoặc ±1 và theo qui tắc sau đây:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu nhánh i không nối trực tiếp tới nút j} \\ 1 & \text{nếu nhánh i nối với nút j và có chiều ra khỏi nút j} \\ -1 & \text{nếu nhánh i nối với nút j và có chiều tới nút j} \end{cases} \qquad (2.36)$$

Đối với graph trên hình 2-8 ta có:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (2.37)$$

Như vậy ta đã tổng quát hoá một ma trận nối dây nút-nhánh, như đã gặp trong phương trình (2.23).

Nhận xét rằng mỗi hàng của **A** - ứng với một nhánh- chỉ có hai phần tử khác 0 và là +1 và -1; trừ hàng ứng với nhánh nối tới nút cơ sở chỉ có một phần tử khác 0.

Sau khi đã mô tả cấu hình của lưới bằng ma trận nối nút-nhánh, ta có thể viết quan hệ giữa biến nhánh và biến nút như sau:

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{A}\,\mathbf{u} \tag{2.38}$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{A}^T\,\mathbf{i}_l \tag{2.39}$$

trong đó $\mathbf{A}^T$ là ma trận chuyển vị. Có thể dễ dàng kiểm tra lại các phương trình này trên thí dụ lưới điện ở hình 2-8. Mỗi phương trình trong (2.38) biểu diễn một điện áp nhánh như là hiệu của hai điện áp nút của nhánh đó. Để ý rằng vì ta không đưa cột ứng với nút cơ sở vào **A** nên điện áp các nhánh nối với nút này tính theo (2.38) bằng chính điện áp nút ở đầu kia của nhánh. Điều đó có nghĩa rằng điện áp nút được tính tương đối so với nút cơ sở. Còn mỗi phương trình trong hệ (2.39) biểu diễn một dòng nút như là tổng (đại số) của các dòng nhánh nối tới nút đó, đây chính là phương trình biểu diễn luật dòng điện của Kirchhoff (luật Kirchhoff 1). Đối với nút cơ sở, cũng là nút cân bằng dòng, không viết phương trình này. Theo qui ước dấu phần tử của **A**, dòng nhánh đi ra khỏi nút sẽ tham gia vào phương trình với dấu dương, do đó ta phải lấy dấu dương cho dòng nút khi nó đi vào lưới (trường hợp nguồn điện) để thoả mãn điều kiện cân bằng dòng ở nút. Chú ý ma trận **A** không vuông, ứng với số phần tử của vectơ biến (dòng, áp) nút và nhánh là khác nhau (do đó ta không thể suy ra áp nút và dòng nhánh từ các phương trình này). (2.38) và (2.39) là dạng tổng quát của các phương trình (2.23) và (2.24).

Nhờ các phương trình này bây giờ ta có thể chuyển quan hệ nguyên thuỷ dòng-áp nhánh tới quan hệ dòng-áp nút, với cấu hình lưới **A** đã cho. Thay $\mathbf{u}_l$ trong phương trình (2.34) $\mathbf{Y}_l\mathbf{u}_l = \mathbf{i}_l$ theo (2.38) và nhân trái (2.34) với $\mathbf{A}^T$ ta có:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Y}_l\mathbf{A}\,\mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{i}_l \tag{2.40}$$

Vế phải chính bằng vectơ dòng nút *i*, tức là:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{Y}_l\mathbf{A})\;\mathbf{u} = \mathbf{i} \tag{2.41}$$

Rõ ràng đây là phương trình nút, ma trận hệ số chính là ma trận tổng dẫn nút. Vậy ta có công thức sau cho ma trận này:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T\,\mathbf{Y}_l\,\mathbf{A} \tag{2.42}$$

Trong tích ma trận ở vế phải, các ma trận $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{Y}_l$ và **A** lần lượt có kích thước N×B, B×B và B×N, do đó **Y** có kích thước N×N đúng như ta chờ đợi. Đây là công thức ma trận biểu diễn **Y** theo ma trận nhánh (nguyên thuỷ). Từ công thức này ta lại thấy **Y** là *vuông và đối xứng*; thật vậy lấy chuyển vị thì vế phải công thức trên không thay đổi vì $\mathbf{Y}_l$ đối xứng.

Chúng ta có thể kiểm tra lại công thức, dùng các ma trận **Y**, **A** và $\mathbf{Y}_l$ của lưới điện ở thí dụ trên.

2.3 Tính chất thưa của ma trận tổng dẫn nút và phương pháp khai triển theo thứ tự tối ưu khi giải hệ phương trình tuyến tính thưa

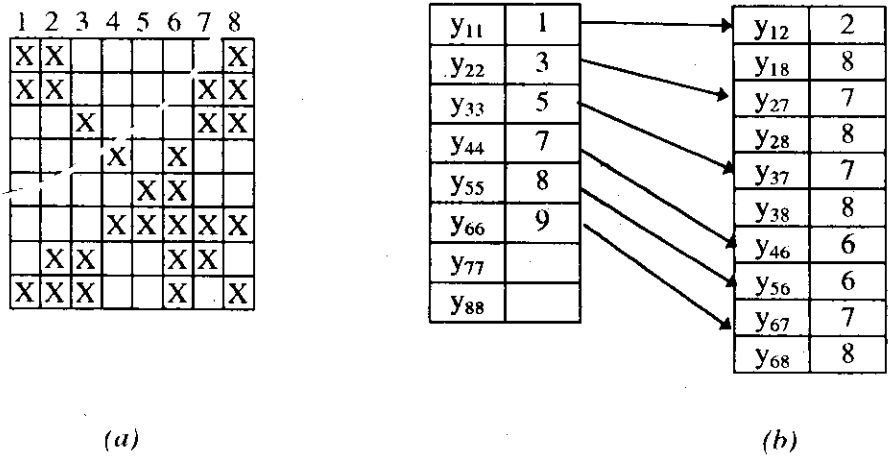
Mô hình nút với ma trận tổng dẫn nút **Y** sẽ cho phép mô tả và khảo sát nhiều bài toán phân tích hệ thống điện. Đây là một ma trận phức, đối xứng và có kích thước lớn đối với các lưới điện thực tế. Quả thật số hàng (cột) của **Y**, bằng số nút của lưới điện, đạt đến hàng trăm hoặc hàng nghìn. Đó chẳng hạn sẽ là số phương trình nút phải giải để xác định phân bố điện áp trong lưới. Hai thách thức lớn gặp phải khi giải bài toán lớn như vậy- dù sử dụng công cụ tính toán hiện đại- là *thời gian tính toán và yêu cầu lưu trữ* khối lượng lớn dữ liệu cũng như các kết quả tính toán trung gian phục vụ cho quá trình giải. Ngoài ra độ tin cậy thu được lời giải và độ chính xác của nó cũng bị ảnh hưởng nhiều khi khối lượng tính toán tăng lên.

Việc đòi hỏi giảm thiểu thời gian tính toán phân tích hệ thống còn được đặt ra bởi yêu cầu kiểm soát và điều khiển nhanh HTĐ.

Trong mục này chúng ta đề cập đến một đặc điểm rất quan trọng của ma trận **Y**, cho phép giảm nhẹ khối lượng tính toán và lưu trữ khi giải phương trình điện áp nút cũng như các hệ phương trình dẫn xuất từ hệ này. Đó là việc ma trận **Y** thực tế có đa số các phần tử bằng 0. Thật vậy ta biết rằng tổng dẫn tương hỗ giữa hai nút sẽ bằng 0 nếu không tồn tại nhánh nối trực tiếp hai nút đó (ngoại trừ trường hợp tồn tại hỗ cảm giữa các nhánh nối tới chúng). Trong lưới điện thực tế, trung bình chỉ có 3 đường dây nối vào một nút, vậy thì mỗi hàng (cột) của **Y** trung bình chỉ có 4 phần tử khác 0 (3 tổng dẫn tương hỗ và 1 tổng dẫn riêng trên đường chéo chính). Nếu lưới điện có 100 nút thì 96 phần tử còn lại của mỗi hàng sẽ bằng 0 (nếu không có hỗ cảm). Như vậy số phần tử khác 0 chỉ chiếm 4 %. Nếu lưới có 1000 nút, thì con số này chỉ là bốn phần nghìn. *Ta nói rằng ma trận **Y** rất thưa (sparse).* Thực tế này dẫn tới các *kĩ thuật xử lí ma trận thưa* nhằm các mục tiêu sau:

- Loại trừ việc lưu trữ và tính toán với các phần tử 0
- Hạn chế việc điền thêm các phần tử khác 0 vào **Y** trong quá trình tính toán trên ma trận này.

Trước tiên chúng ta có thể chỉ lưu trữ các phần tử khác 0 của ma trận ban đầu. Nếu ma trận đối xứng thì chỉ lưu trữ chẳng hạn phần tam giác trên. Hình 2-9 minh hoạ phương pháp lưu trữ theo hàng. Các phần tử khác 0 (đánh dấu bởi X) trong tam giác trên của ma trận hình 2-9a được đặt trong hai vectơ.

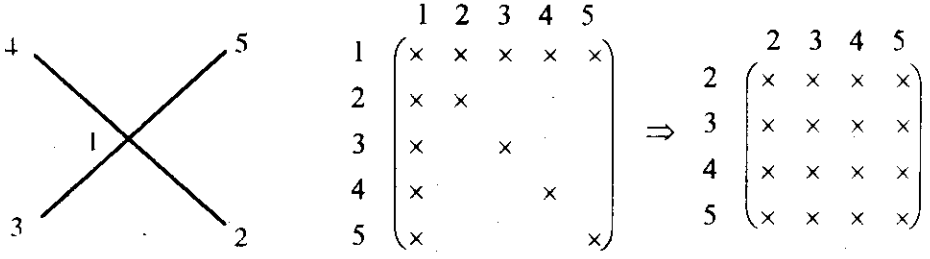


Hình 2-9

Vectơ thứ nhất chứa các phần tử đường chéo (thường là khác 0). Kèm theo có một vectơ *con trỏ* cho biết các phần tử ngoài đường chéo của hàng tương ứng được xếp từ vị trí nào trong vectơ thứ hai. Vectơ thứ hai này cũng đi kèm với một vectơ con trỏ chỉ rõ vị trí cột của phần tử tương ứng.

Như vậy ngoài số ô nhớ dùng để cất giữ các phần tử khác 0 của ma trận, ta cần một số lượng tương đương ô nhớ (nhưng kích thước bé hơn) để cất giữ các thông tin con trỏ cho biết vị trí của mỗi phần tử. Giá phải trả cho sự tiết kiệm bộ nhớ là việc đòi hỏi một thuật toán dành cho trường hợp phải thực hiện hoán vị hàng và cột. Việc xuất hiện các phần tử khác 0 khác trong quá trình tính toán cũng gây khó khăn.

Để minh hoạ hiện tượng điền thêm (các phần tử khác 0) trong quá trình khử Gauss hoặc khai triển tam giác, ta xét lưới điện và ma trận **Y** của nó trên hình 2.10.



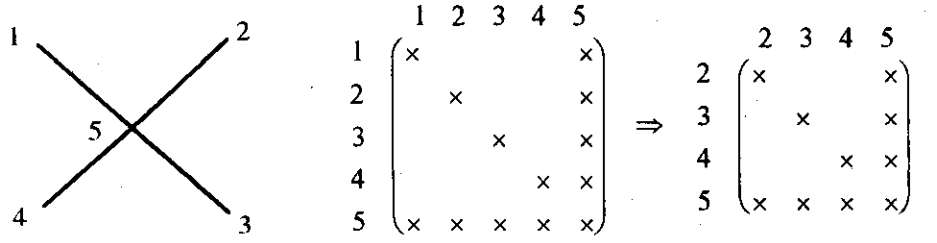
Hình 2.10

Các phần tử khác 0 trong Y biểu diễn bởi dấu "X". Bước thứ nhất khử x_1 ta tính lại các phần tử từ hàng 2 của ma trận theo công thức:

$$Y_{ij}^{\text{mới}} = Y_{ij} - \frac{Y_{i1}Y_{1j}}{Y_{11}}$$

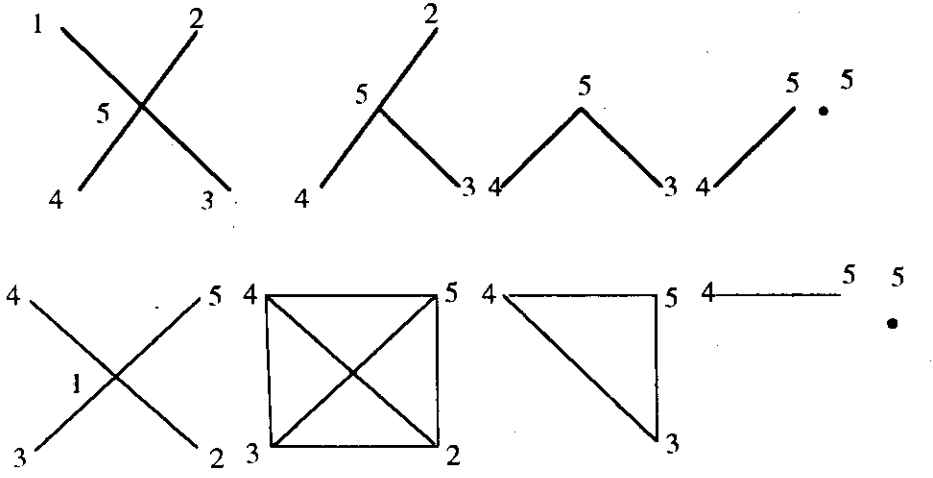
Dù phần tử cũ $Y_{ij} = 0$, phần tử mới có thể khác 0 nếu $Y_{i1} \neq 0$ và $Y_{j1} \neq 0$, có nghĩa là tồn tại nhánh nối các nút i và j với nút bị khử 1. Sau khi khử nút 1 ta được ma trận cấp 4 như trên hình 2.10 (bỏ hàng cột 1). So với ma trận ban đầu, tất cả các vị trí 0 (các phần tử ngoài đường chéo) đã bị điền đầy.

Bây giờ nếu ta đánh số lại các nút của lưới như trên hình 2.11, thì ma trận không bị điền thêm sau khi khử x_1.



Hình 2.11

Khử biến cũng tương đương với khử nút trên graph lưới điện bằng biến đổi sao-tam giác. Ta có thể mô tả quá trình khử nút ứng với hai cách đánh số nút nêu trên như ở hình 2.12.



Hình 2.12

Như đã nhận xét ở trên, khi khử một nút k lưới điện sẽ thay đổi như sau:

- Bỏ nút k và các nhánh nối tới nút này
- Thêm nhánh mới nối hai nút i, j nếu hai nút này được nối trực tiếp đến k (nếu nhánh i–j đã tồn tại thì chỉ thay đổi tổng dẫn của nó).

Do đó để hạn chế điền thêm phần tử khác 0 vào ma trận sau khi khử, ứng với việc xuất hiện nhánh mới trong lưới, ta nên khử nút được nối hình tia, hoặc nếu không thì được nối với ít nhánh nhất. Một cách chính xác hơn, ta nên khử nút có số lượng cặp nút nối với nó nhưng không nối với nhau là ít nhất.

Nguyên tắc *khử tối ưu* như vậy khá đơn giản tuy nhiên việc lập trình nó hoàn toàn không đơn giản; độ phức tạp phụ thuộc vào thuật toán logic phải thực hiện trên graph, đồng thời phụ thuộc phương pháp lưu trữ đã lựa chọn.

Nhìn chung việc giải hệ tuyến tính thưa bằng phương pháp khai triển tam giác (khử Gauss) có thể bắt đầu bởi một giai đoạn gọi là *khai triển logic* bao gồm *đánh số tối ưu* phương trình và ẩn (tương ứng với đánh số nút của lưới) - tức là tìm một *thứ tự khử tối ưu*, cũng như dự trù các vị trí nhớ cần thiết cho cấu trúc của các ma trận **L** và **U**.

Trong thực tế các thuật toán máy tính *khai triển theo thứ tự tối ưu (OOF: Optimally Ordered Factorization)*, với một công sức tính toán chấp nhận được, thường chỉ cho một kết quả gần tối ưu. Nhiều chương trình máy tính đã sử dụng sơ đồ khử tối ưu của Tinney [37] trong đó gợi ý 3 tiêu chuẩn sau xếp theo mức độ phức tạp và hiệu quả tăng lên:

1. Trước khi tiến hành khử, đánh số các hàng của ma trận theo số các phần tử khác 0 tăng dần. Việc khử sau đó sẽ thực hiện theo thứ tự này.
2. *Chiến lược động:* ở mỗi bước khử chọn hàng có ít phần tử khác 0 nhất. Như vậy phải tính đến sự điền thêm xảy ra sau mỗi lần khử biến.
3. Dùng chiến lược động nhưng chọn hàng ở mỗi bước theo tiêu chuẩn điền thêm ít nhất.

Liên quan đến việc sử dụng thuật toán OOF chúng ta phải nhấn mạnh ý nghĩa của các hệ *xác định dương*. Thật vậy nếu ma trận của hệ không phải là xác định dương thì để bảo đảm ổn định số cho quá trình khai triển LU, ta cần phải lựa chọn phần tử chốt (pivoting). Như vậy ta không còn tự do chọn thứ tự khử tối ưu. Ngược lại với ma trận xác định dương, vấn đề ổn định không còn phải đặt ra khi khai triển LL^T và ta không cần thực hiện pivoting. Thuật toán OOF có thể thực hiện giai đoạn *khai triển logic* độc lập với giai đoạn *khai triển số* (tính toán số). Như đã nhận xét ở trên, trong giai đoạn khai triển logic, bằng các thuật toán trên graph [1] ta có thể lựa chọn thứ tự "tối ưu" theo các chiến lược của OOF đồng thời với việc *dự báo các vị trí điền thêm*. Do đó khử dự trù các vị trí nhớ để chứa các phần tử khác 0 của ma trận thưa (cũng dùng để chứa ma trận **L** về sau), ta có thể dành sẵn vị trí cho các phần tử sẽ được điền thêm. Như vậy sẽ tránh được việc sau này phải "chèn" thêm phần tử mới vào bảng, kéo theo nó phải dịch chuyển vị trí tất cả các phần tử đứng sau rất phức tạp. Nói tóm lại các hệ xác định dương và thưa (như ta sẽ gặp khi

nghiên cứu bài toán giải tích lưới điện) cho phép áp dụng các phương pháp giải có hiệu quả cao về nhiều mặt.

2.4 Cập nhật khai triển tam giác của Y khi đóng (cắt) một nhánh

Khi đóng cắt một nhánh nào đó trong lưới điện, ma trận tổng dẫn nút **Y** chỉ thay đổi nhỏ và ta có thể cập nhật khai triển tam giác của nó theo sự thay đổi này mà không cần tiến hành khai triển lại.

Sự thay đổi nhỏ trong **Y** khi đóng thêm một nhánh có tổng dẫn y vào giữa hai nút p-q như đã trình bày ở mục 2.2 có thể biểu diễn như sau:

$$\mathbf{Y'} = \mathbf{Y} + c\,\mathbf{a}\,\mathbf{a}^T \tag{2.43}$$

trong đó **Y'** là ma trận tổng dẫn nút mới, $c = 2y$, vectơ cột **a** có các phần tử 0 ngoại trừ $a_p = 1/\sqrt{2}$ và $a_q = -1/\sqrt{2}$ (chọn như vậy **a** sẽ có độ dài bằng 1).

Giả sử đã cho khai triển Cholesky $\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$. Ta tính toán vectơ **b** thoả mãn:

$$\mathbf{L}\,\mathbf{b} = \mathbf{a} \tag{2.44}$$

Bây giờ có thể viết:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y'} &= \mathbf{L}\,\mathbf{D}\,\mathbf{L}^T + c\,\mathbf{L}\,\mathbf{b}\;\mathbf{b}^T\mathbf{L}^T \\ &= \mathbf{L}\,(\mathbf{D} + c\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}^T)\,\mathbf{L}^T\end{aligned} \tag{2.45}$$

Gọi ma trận trong ngoặc là **E** và giả sử có khai triển:

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} + c\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}^T = \mathbf{L'}\,\mathbf{D'}\,\mathbf{L'}^T \tag{2.46}$$

thay vào (2.45) ta rút ra khai triển mới của **Y'**:

$$\mathbf{Y'} = (\mathbf{L}\,\mathbf{L'})\,\mathbf{D'}\,(\mathbf{L'}^T\,\mathbf{L}^T) := \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{D'}\,\mathbf{\Lambda}^T \tag{2.47}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{L}\,\mathbf{L'}$$

Việc tính toán **L'**, **D'** trở nên đơn giản nhờ sử dụng các công thức sau đây. Gọi d_j, d_j', b_j tương ứng là phần tử của ma trận đường chéo **D**, **D'** và vectơ **b**, ta định nghĩa thêm hai đại lượng:

$$h_j = \sum_{k=1}^{j-1} d'_k c_k^2$$
$$c_j = b_j (c - h_j) / d'_j \qquad (2.48)$$

Bây giờ có thể chứng minh được các công thức sau:

$$L_{ij}' = b_j c_j$$
$$d_i' = d_j + b_j^2 (c - h_j) \qquad (2.49)$$
$$h_j = h_{j-1} + d'_{j-1} c_{j-1}^2$$

Tính toán bắt đầu từ $j=1$, tính h_1 , c_1 , d'_1 , L'_{i1} v.v.. Các phần tử của ma trận $\mathbf{A} = \mathbf{LL}'$ cũng có thể tính toán phối hợp theo một trình tự đặc biệt để giảm bớt số phép tính [1].

2.5 Khử nút và biến đổi tương đương trong lưới điện

Như đã nhận xét, khử Gauss trên hệ phương trình nút đồng nhất với khử nút trong lưới điện. Chúng ta sẽ nhìn nó không chỉ như một thủ thuật giải hệ phương trình này, mà rộng hơn như một phương pháp biến đổi tương đương lưới điện.

Biến đổi tương đương lưới điện là một yêu cầu đặt ra trong nhiều bài toán phân tích HTĐ. Đơn giản nhất khi tiến hành khử một số nút trung gian tại đó không có nguồn (máy phát hoặc phụ tải) và tại đó ta không quan tâm đến điện áp. Có thể khử lần lượt từng nút như trong thuật toán khử Gauss, hoặc khử đồng thời nhiều nút. Giả sử hệ phương trình nút được phân khối như sau:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \qquad (2.50)$$

trong đó $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{I}_2$ là các vectơ con ứng với các nút không được quan tâm ($\mathbf{I}_2$ có thể bằng 0), còn ma trận $\mathbf{Y}$ được phân làm 4 ma trận con ứng với hai loại nút 1 và 2. Điện áp lấy giá trị tương đối so với nút cơ sở 0 do đó các thành phần với u_0 trong (2.13) bị triệt tiêu.

Nếu $\mathbf{Y}_4$ (ma trận vuông) là khả nghịch thì ta có thể khử $\mathbf{U}_2$ bằng cách rút $\mathbf{U}_2$ từ phương trình thứ hai và thay vào phương trình thứ nhất. Cụ thể từ phương trình thứ hai:

$$\mathbf{Y}_3 \mathbf{U}_1 + \mathbf{Y}_4 \mathbf{U}_2 = \mathbf{I}_2$$

ta có nếu $\mathbf{Y}_4$ khả nghịch:

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{Y}_4^{-1}\mathbf{I}_2 - \mathbf{Y}_4^{-1}\mathbf{Y}_3\mathbf{U}_1$$

Thay vào phương trình thứ nhất ta có:

$$\mathbf{Y}_1\mathbf{U}_1 + \mathbf{Y}_2(\mathbf{Y}_4^{-1}\mathbf{I}_2 - \mathbf{Y}_4^{-1}\mathbf{Y}_3\mathbf{U}_1) = \mathbf{I}_1$$

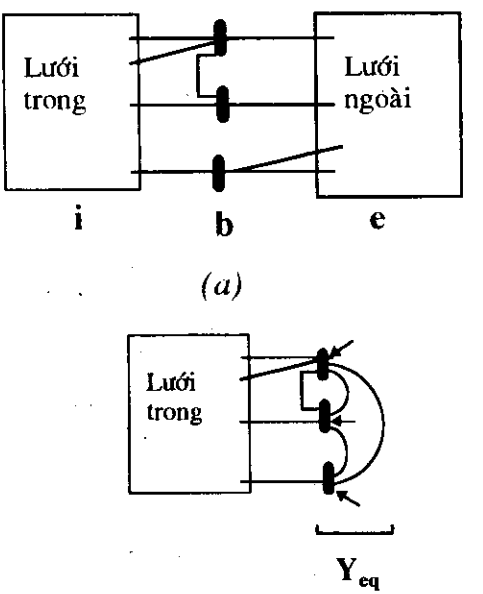
hay

$$\left(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_4^{-1}\mathbf{Y}_3\right)\mathbf{U}_1 = \mathbf{I}_1 - \mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_4^{-1}\mathbf{I}_2 \qquad (2.51)$$

Đó là hệ mới đã khử $\mathbf{U}_2$. Nó có dạng phương trình nút của riêng các nút có chỉ số 1. Ma trận $\left(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_4^{-1}\mathbf{Y}_3\right)$ là ma trận tổng dẫn nút của lưới tương đương chỉ gồm các nút số 1, ta kí hiệu là $\mathbf{Y}_{eq}$:

$$\mathbf{Y}_{eq} = \left(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_4^{-1}\mathbf{Y}_3\right) \qquad (2.52)$$

Vì $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_4$ là đối xứng và $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_3^T$ do đó dễ thấy $\mathbf{Y}_{eq}^T = \mathbf{Y}_{eq}$ tức $\mathbf{Y}_{eq}$ cũng là ma trận đối xứng. Ta cũng nhận xét rằng dòng ở các nút bị khử $\mathbf{I}_2$ (nếu có) vẫn tham gia vào lưới tương đương (lưới rút gọn) *như một thành phần mới của dòng ở các nút số 1*.



Hình 2-13

Phương pháp rút gọn tương đương lưới điện này được gọi là *rút gọn Kron* hoặc *tương đương Ward* [38] là một trong các phương pháp tương đương hoá được sử dụng từ lâu trong phân tích lưới điện. Ngày nay khi xuất hiện các hệ thống điện hợp nhất kích thước lớn thì phương pháp này lại có nhiều ứng dụng không những trong các bài toán tĩnh (như giải tích lưới điện), mà đặc biệt trong các áp dụng giám sát và điều khiển hệ thống. Một phương pháp rút gọn tương đương khác cũng được sử dụng song song với phương pháp này là phương pháp REI (xem mục 7.6.3).

Hệ thống điện lớn trong thực tế thường được quản lí phân tán, chẳng hạn một công ti điện lực chỉ quản lí một phần của lưới điện hợp nhất, được gọi là *lưới điện*

trong. Phần còn lại gọi là *lưới ngoài*, chỉ được quan tâm trên phương diện những ảnh hưởng của nó tới lưới trong mà thôi. Trên hình 2.13a lưới trong bao gồm các nút *i* và các nút biên *b*, lưới ngoài gồm các nút *e*.

Phương trình nút được phân khối như sau:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{Y}_{ii} & \mathbf{Y}_{ib} & \\ \mathbf{Y}_{bi} & (\mathbf{Y}^{i}_{bb} & + \quad \mathbf{Y}^{e}_{bb}) \quad \mathbf{Y}_{be} \\ & & \mathbf{Y}_{ei} \quad \mathbf{Y}_{ee} \end{array}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{U}_i\\ \mathbf{U}_b\\ \mathbf{U}_e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{I}_i\\ \mathbf{I}_b\\ \mathbf{I}_e\end{pmatrix} \qquad (2.53)$$

trong đó $\mathbf{Y}^{e}_{bb}$ là ma trận đường chéo, mỗi phần tử trên đường chéo là tổng các tổng dẫn nối nút biên *b* với các nút ngoài. Như vậy nó là một phần của tổng dẫn riêng của nút biên.

Bây giờ ta sẽ khử các nút ngoài *e* bằng cách rút $\mathbf{U}_e$ từ phương trình cuối cùng và thay vào phương trình thứ hai, dẫn đến hệ rút gọn:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_{ii} & \mathbf{Y}_{ib}\\ \mathbf{Y}_{bi} & \mathbf{Y}^{i}_{bb} + \mathbf{Y}_{eq}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{U}_i\\ \mathbf{U}_b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{I}_i\\ \mathbf{I}_b - \mathbf{I}_{eq}\end{pmatrix} \qquad (2.54)$$

trong đó ma trận tổng dẫn $\mathbf{Y}_{eq}$ ứng với lưới tương đương của lưới ngoài, lưới tương đương này thường là một graph đầy (có nhánh nối trực tiếp giữa mọi nút) liên hệ các nút biên (hình 2-13b). Do đó ma trận $\mathbf{Y}_{eq}$ là đầy:

$$\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}^{e}_{bb} - \mathbf{Y}_{be}\mathbf{Y}^{-1}_{ee}\mathbf{Y}_{eb} \qquad (2.55)$$

còn $\mathbf{I}_{eq}$ là vectơ nguồn tương đương của lưới ngoài, đặt vào các nút *b*:

$$\mathbf{I}_{eq} = \mathbf{Y}_{be}\mathbf{Y}^{-1}_{ee}\mathbf{I}_e \qquad (2.56)$$

Như vậy lưới ngoài được thay thế tương đương bởi một thành phần *thụ động* là $\mathbf{Y}_{eq}$ không đổi và một thành phần *nguồn* dòng nút là $\mathbf{I}_{eq}$ phụ thuộc vào chế độ làm việc của nó (lưới ngoài). Nhận xét rằng tuy số nút được giảm đi trong lưới tương đương nhưng bù lại xuất hiện nhánh nối giữa mọi nút biên.

Công thức rút gọn Kron (2.52), giống như khử Gauss, có thể gặp vấn đề về độ chính xác khi $\mathbf{Y}_4$ có giá trị nhỏ, gây khuếch đại lớn sai số của $\mathbf{Y}_4^{-1}$.

2.6 Ma trận tổng trở nút

Ta đã biết rằng ma trận tổng dẫn nút **Y** của lưới điện trong thực tế là rất thưa và được xây dựng khá dễ dàng. Ngược lại ma trận tổng trở nút $\mathbf{Z}=\mathbf{Y}^{-1}$ thường là đầy và cần nhiều công sức để xác định. Đồng thời ma trận **Z** chứa nhiều thông tin hơn, tức là nó cho nhiều hiểu biết hơn về lưới điện. Vai trò của ma trận **Z** chủ yếu là ở trong bài toán *tính toán sự cố.*

Ma trận **Z** đối xứng như **Y**, phần tử trên đường chéo chính Z_{kk} gọi là *tổng trở riêng (driving- point impedance)* của nút *k*, phần tử ngoài đường chéo Z_{km} gọi là *tổng trở tương hỗ hay truyền (transfering) giữa k và m.*

2.6.1 *Một định nghĩa của tổng dẫn nút và tổng trở nút*

Tổng dẫn và tổng trở nút là các *thông số lưới* không phụ thuộc vào chế độ làm việc. Ngược lại chế độ điện của lưới sẽ phụ thuộc vào các thông số này. Vì thế dựa theo chế độ dòng áp ta cũng có thể suy ra thông số lưới, và đây chính là tiếp cận sẽ được khảo sát trong mục này. Dưới đây ta sẽ viết các công thức đánh giá tổng dẫn và tổng trở nút từ các "thí nghiệm điện" trên lưới.

Xét phương trình nút $\mathbf{Yu} = \mathbf{i}$ trong đó điện áp đo so với nút cơ sở. Dòng nút ở nút *k* nào đó sẽ bằng tích (vô hướng) của hàng *k* của **Y** và vectơ **u**:

$$i_k = Y_{k1}u_1 + Y_{k2}u_2 + \ldots + Y_{kk}u_k + \ldots + Y_{kn}u_n$$

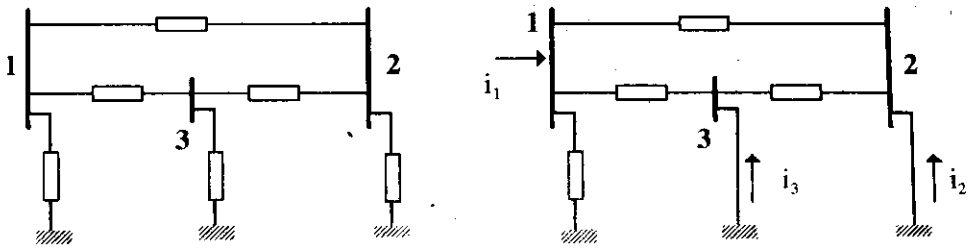
Nếu bây giờ ta nối ngắn tới nút cơ sở (nút cân bằng dòng) tất cả các nút, trừ một nút *m* nào đó, thì tương ứng trong phương trình trên tất cả các số hạng sẽ triệt tiêu vì điện áp bằng 0, trừ số hạng ứng với điện áp u_m. Khi đó ta có thể rút ra giá trị tổng dẫn tương hỗ giữa nút *m* và nút *k* (Y_{km}) dựa theo áp trên nút không bị nối ngắn này và dòng i_k:

$$Y_{km} = \left.\frac{i_k}{u_m}\right|_{u_j=0\ \forall j\neq m} = Y_{mk} \qquad (2.57)$$

còn tổng dẫn riêng của nút:

$$Y_{kk} = \left.\frac{i_k}{u_k}\right|_{u_j=0\ \forall j\neq k} \qquad (2.58)$$

Xét lưới điện hình 2.14, nếu ta nối ngắn các nút 2 và 3 thì ta có:



Hình 2-14

$$\left.\begin{aligned} Y_{11} &= i_1 / u_1 \\ Y_{21} &= i_2 / u_1 \\ Y_{31} &= i_3 / u_1 \end{aligned}\right\} \text{ với } u_2 = u_3 = 0$$

Như vậy từ chế độ điện ở hình 2.14b ta đánh giá được cột 1 của **Y** (cũng là hàng 1).

Rõ ràng dòng i_1 chảy qua 3 nhánh song song 1–0, 1–2 và 1–3 đặt dưới điện áp u_1, do đó Y_{11} chính bằng tổng các tổng dẫn 3 nhánh này, như qui tắc xác định tổng dẫn riêng của nút mà ta đã biết (trường hợp không có hỗ cảm). Về phần mình, dòng i_2 chỉ chạy qua nhánh 1–2, đặt dưới điện áp u_1, do đó Y_{21} chính bằng tổng dẫn nhánh 1–2 nhưng với dấu ngược lại vì thực tế dòng i_2 có chiều đi ra khỏi nút tức là coi $i_2<0$.

Tương tự mỗi cột (hàng) của **Y** sẽ được xác định bởi một "thí nghiệm điện".

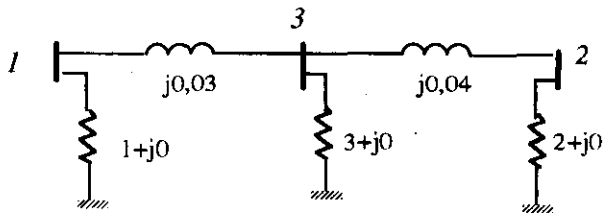
Bây giờ đối với ma trận tổng trở nút, từ phương trình **Zi = u** ta có thể tính:

$$\begin{aligned} Z_{km} &= \left.\frac{u_k}{i_m}\right|_{i_j=0\ \forall j\neq m} = Z_{mk} \\ Z_{kk} &= \left.\frac{u_k}{i_k}\right|_{i_j=0\ \forall j\neq k} \end{aligned} \qquad (2.59)$$

Khác với khi tính **Y**, ta *hở mạch* mọi dòng nút trừ một nút trong lưới. Do đó

các phần tử của **Z** không phải là nghịch đảo phần tử của **Y**[1] và xác định khó hơn, như minh hoạ trên lưới điện đơn giản hình 2.15 (trên các nhánh cho tổng trở)[2] .

Theo công thức trên để xác định cột m (bằng hàng m) của **Z**, ta hở mạch mọi dòng nút, trừ dòng nút m. Cho một giá trị của i_m, chẳng hạn $i_m=1$ thì các phần tử của cột m của **Z** chính bằng giá trị điện áp tại các nút (đo so với nút cân bằng dòng).



Hình 2-15

Ví dụ xác định cột (hàng) 1 của **Z** cho lưới hình 2.15. Đặt $i_1=1$, $i_2=i_3=0$. Điện áp u_1 bằng i_1 nhân với tổng trở vào của lưới nhìn từ nút 1 (tổng trở tương đương của lưới đo giữa nút 1 và nút 0). Do đó ghép song song - nối tiếp, ta có:

$$u_1 = Z_{11} = 1 \parallel \left[j0,03 + 3 \parallel (j0,04 + 2) \right] = 0,5457 + j0,009169$$

Để xác định $u_3=Z_{31}=Z_{13}$ ta tính dòng trên nhánh 1–3:

$$i_{13} = i_1 - i_{10} = 1 - \frac{u_1}{1} = 0,4543 - j0,009169$$

Từ đó:

$$u_3 = Z_{31} = Z_{13} = i_{13} \left[3 \parallel (j0,04 + 2) \right] = 0,5454 - j0,004461$$

Tính tương tự:

$$u_2 = Z_{21} = Z_{12} = i_{32} \times 2 = 0,5451 - j0,01536$$

2.6.2 *Ma trận Z và tổng trở Thevenin*

Trong mục này khi phân tích mối quan hệ giữa tổng trở nút và tổng trở Thevenin, ta sẽ thấy ma trận **Z** cung cấp nhiều thông tin rất quan trọng về lưới điện. Trước hết chúng ta nhắc lại định lí Thevenin về mạch điện tương đương, được

---

[1] Để phân biệt rõ đôi khi dùng thuật ngữ *tổng dẫn nút ngắn mạch* và *tổng trở nút hở mạch*.

[2] Thí dụ lấy từ [1]

phát biểu cho lưới điện trở như sau [11]:

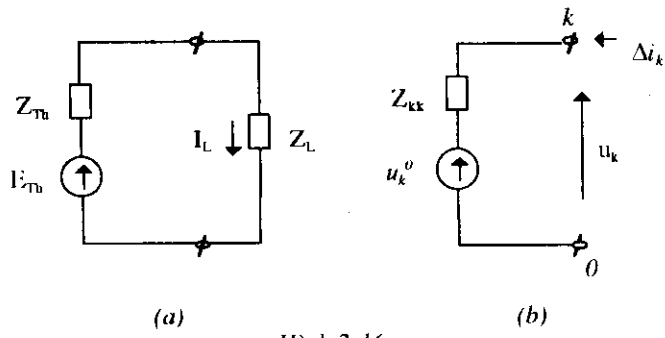
> *Bất kì hai nút của một lưới điện gồm các phần tử tích cực và thụ động tuyến tính có thể được thay thế bởi một nguồn áp tương đương và một điện trở tương đương nối tiếp. Nguồn áp bằng hiệu điện thế giữa hai điểm nút này, gây bởi các phần tử tích cực (nguồn) của lưới khi không có phần tử ngoài nối vào. Điện trở nối tiếp là điện trở tương đương nhìn vào hai điểm nút đó khi loại bỏ tất cả các nguồn.*

Định lí Thevenin rất có ích khi cần xác định nhiều lần điện áp và dòng điện trên cặp nút khi có một *nhánh ngoài- phụ tải thay đổi* nối vào. Toàn bộ lưới phức tạp bất kì nối giữa cặp nút được thay thế tương đương bởi *điện áp Thevenin giữa hai nút này* (bằng điện áp hở mạch (phụ tải) trên đó) và *tổng trở Thevenin* (bằng tổng trở vào của lưới thụ động nhìn từ cặp nút) (hình 2.16a). Sau đó dòng điện qua phụ tải Z_L là:

$$I_L = \frac{E_{Th}}{Z_{Th} + Z_L}$$

và điện áp trên phụ tải:

$U_L = E_{Th} - Z_{Th} I_L$



Hình 2-16

Bây giờ giả sử chế độ ban đầu của lưới đặc trưng bởi vectơ dòng nút $\mathbf{i}^0$ và vectơ áp nút $\mathbf{u}^0$. Nếu ta đặt thêm một "phụ tải" giữa nút *k* và nút cân bằng 0, đặc trưng bởi sự thay đổi dòng nút *k* một giá trị Δi_k, thì điện áp nút *k* sẽ thay đổi từ giá trị ban đầu:

$$u_k^0 = Z_{k1} i_1^0 + \ldots + Z_{kk} i_k^0 + \ldots + Z_{kn} i_n^0$$

tới giá trị:

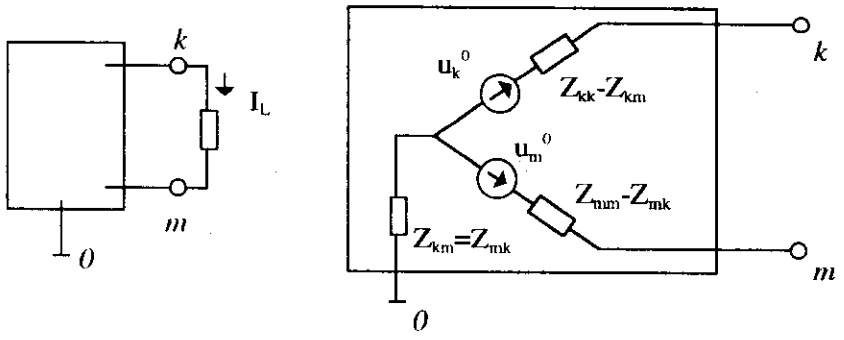
$$u_k = u_k^0 + Z_{kk} \Delta i_k \qquad (2.60)$$

(với điều kiện các dòng nút không thay đổi).

Mạch tương ứng với phương trình này vẽ trên hình 2.16b. Do đó rõ ràng tổng trở Thevenin ở nút *k* (giữa nút *k* và nút cân bằng) chính là phần tử của ma trận tổng trở nút Z_{kk}. Đó là vì *phương trình tổng trở nút biểu diễn áp nút như là xếp chồng*

hiệu quả của các dòng nút.

Như vậy với một nhánh mới có tổng trở Z_L nối giữa *k–0*, ta có thể tính dòng nhánh:



(a) *(b)*

Hình 2-17

$$I_L = u_k / Z_L = u_k^0 / (Z_{kk} + Z_L) \qquad (2.61)$$

Tiếp theo để xét tổng trở Thevenin giữa cặp nút *k–m*, ta đặt thêm một "phụ tải" giữa hai nút này, tương đương với việc thay đổi dòng nút *k* một đại lượng $\Delta i_k = -I_L$ và thay đổi dòng nút *m* một lượng $\Delta i_m = I_L$ (hình 2.17a). Khi đó điện áp nút *k* và nút *m* sẽ thay đổi từ giá trị ban đầu:

$$u_k^0 = Z_{k1} i_1^0 + \ldots + Z_{kk} i_k^0 + \ldots + Z_{km} i_m^0 + \ldots$$

$$u_m^0 = Z_{m1} i_1^0 + \ldots + Z_{mk} i_k^0 + \ldots + Z_{mm} i_m^0 + \ldots$$

tới các giá trị:

$$\begin{aligned} u_k &= u_k^0 + Z_{kk}\Delta i_k + Z_{km}\Delta i_m = u_k^0 - (Z_{kk} - Z_{km}) I_L \\ u_m &= u_m^0 + Z_{mk}\Delta i_k + Z_{mm}\Delta i_m = u_m^0 + (Z_{mm} - Z_{mk}) I_L \end{aligned} \qquad (2.62)$$

Do đó:

$$u_k - u_m = (u_k^0 - u_m^0) - (Z_{kk} + Z_{mm} - 2Z_{km}) I_L \qquad (2.63)$$

Ta có thể vẽ mạch điện ứng với các phương trình (2.62) như trên hình 2.17b, nếu viết lại các phương trình này như sau:

$$u_k = u_k^0 + (Z_{kk} - Z_{km})\Delta i_k + Z_{km}(\Delta i_k + \Delta i_m)$$
$$u_m = u_m^0 + (Z_{mm} - Z_{mk})\Delta i_m + Z_{mk}(\Delta i_m + \Delta i_k)$$

Từ hình 2.17b cũng như từ phương trình (2.63) suy ra tổng trở Thevenin giữa cặp nút k–m là:

$$Z_{Th.km} = Z_{kk} + Z_{mm} - 2Z_{km} \qquad (2.64)$$

Sơ đồ hình 2.17b cũng cho ta mạch điện thay thế Thevenin giữa nút k và nút 0 cũng như giữa m và 0. Chẳng hạn tổng trở Thevenin ở nút k suy từ hình vẽ là $(Z_{kk}-Z_{km})+Z_{km} = Z_{kk}$ và điện áp Thevenin ở nút k bằng điện áp không tải u_k^0.

Bây giờ với một nhánh mới với tổng trở Z_L nối giữa hai nút k–m, ta có thể tính dòng trong nhánh theo công thức:

$$I_L = \frac{u_k - u_m}{Z_L} = \frac{u_k^0 - u_m^0}{Z_{Th.km} + Z_L} \qquad (2.65)$$

Để minh hoạ chúng ta xét lại thí dụ ở mục 2.2.4 với lưới điện ở hình 2.5. Giả sử ta đã xác định được ma trận tổng trở nút, chẳng hạn bằng cách lấy nghịch đảo ma trận **Y** đã tính ở phương trình (2.29). Từ đó đã xác định được điện áp các nút của lưới ở chế độ làm việc đã cho trong thí dụ nói trên.

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} j0{,}69890 & j0{,}60822 & j0{,}55110 & j0{,}61323 \\ & j0{,}71966 & j0{,}64178 & j0{,}69140 \\ & & j0{,}69890 & j0{,}63677 \\ \text{đối xứng} & & & j0{,}73128 \end{pmatrix} \qquad (2.66)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0{,}99964\angle -15{,}3718^0 \\ 0{,}96734\angle -18{,}6028^0 \\ 0{,}94866\angle -20{,}7466^0 \\ 0{,}96903\angle -18{,}4189^0 \end{pmatrix} \qquad (2.67)$$

Bây giờ nếu trên lưới điện hình 2.5 ta mắc thêm một tụ điện bù vào nút phụ tải 3, thì hỏi rằng điện áp các nút thay đổi như thế nào và dòng qua tụ là bao nhiêu ? (với điều kiện các dòng nút không đổi). Giả sử rằng tụ có điện kháng 5,0 p.u (per unit: trong đơn vị tương đối) nối giữa nút 3 và nút cân bằng dòng (đất).

Dựa trên các thông số tổng trở nút và chế độ trước khi có nhánh tụ điện, ta có thể dễ dàng xác định sự thay đổi chế độ làm việc khi đóng thêm nhánh này, dựa vào định lí Thevenin.

Dòng qua tụ tính theo (2.61) với điện áp Thevenin là $u_3^0 = 0{,}94866 \angle -20{,}7466^0$ và tổng trở Thevenin $Z_{33} = j0{,}69890$:

$$I_L = \frac{u_3}{Z_L} = \frac{u_3^0}{Z_{33} + Z_L} = \frac{0{,}94866\angle -20{,}7466}{j0{,}69890 - j5{,}0} = 0{,}22056\angle 69{,}2534^0\ p.u$$

Điện áp mới ở nút 3:

$$u_3 = Z_L I_L = -j5{,}0\ .\ 0{,}22056\angle 69{,}2534^0 = 1{,}10281\angle -20{,}7466^0\ p.u$$

Điện áp ở các nút trong lưới thay đổi một lượng do xếp chồng thêm vào dòng nút 3 giá trị $-I_L$. Từ các phương trình áp nút suy ra:

$$\Delta u_1 = -I_L Z_{13} = -0{,}22056 \angle 69{,}2534^0\ .\ j0{,}55110 = 0{,}12155 \angle -20{,}7466^0$$

$$\Delta u_2 = -I_L Z_{23} = -0{,}22056 \angle 69{,}2534^0\ .\ j0{,}64178 = 0{,}14155 \angle -20{,}7466^0$$

$$\Delta u_3 = -I_L Z_{33} = -0{,}22056 \angle 69{,}2534^0\ .\ j0{,}69890 = 0{,}15415 \angle -20{,}7466^0$$

(cộng Δu_3 với u_3^0 ta được lại giá trị u_3 đã tính ở trên)

$$\Delta u_4 = -I_L Z_{43} = -0{,}22056 \angle 69{,}2534^0\ .\ j0{,}63677 = 0{,}14045 \angle -20{,}7466^0$$

Ghi nhận là ta sử dụng cột 3 của **Z** để tính vectơ điện áp cộng thêm vào các nút do đóng thêm nhánh 3–0. Từ đó tính được điện áp nút mới:

$$u_1 = u_1^0 + \Delta u_1 = 0{,}9964 \angle -15{,}3718 + 0{,}12155 \angle -20{,}7466 = 1{,}12071 \angle -15{,}9539^0$$

$$u_2 = u_2^0 + \Delta u_2 = 0{,}96734 \angle -18{,}6028 + 0{,}14155 \angle -20{,}7466 = 1{,}10880 \angle -18{,}8764^0$$

$$u_3 = u_3^0 + \Delta u_3 = 0{,}94866 \angle -20{,}7466 + 0{,}15415 \angle -20{,}7466 = 1{,}10281 \angle -20{,}7466^0$$

$$u_4 = u_4^0 + \Delta u_4 = 0{,}96903 \angle -18{,}4189 + 0{,}14045 \angle -20{,}7466 = 1{,}10938 \angle -18{,}7135^0$$

(2.68)

2.6.3 *Sự thay đổi trong ma trận Z khi đóng (cắt) một nhánh*

Trong mục trước, sử dụng định lí Thevenin ta có thể xác định sự thay đổi chế độ của lưới khi đóng thêm một nhánh, dựa vào ma trận **Z** của lưới cũ và chế độ làm việc cũ.

Trong mục này chúng ta sẽ phân tích sự thay đổi của chính thông số **Z** của lưới khi đóng thêm một nhánh. Lẽ dĩ nhiên khi biết ma trận **Z** mới, ta cũng tính được chế độ làm việc mới. Tiếp cận này là quan trọng cho các bài toán sử dụng ma trận **Z**.

Khi lưới điện có sự thay đổi như vậy, việc cập nhật ma trận **Z** dựa vào ma trận cũ sẽ đơn giản hơn là thành lập lại từ đầu ma trận của lưới mới. Hơn nữa tiếp cận này cũng có thể được sử dụng để xây dựng từ đầu ma trận **Z** của một lưới điện, như ta sẽ thấy rõ hơn dưới đây. Thực tế nó sẽ là một thuật toán cơ bản cho tính toán ma trận tổng trở nút, trong đó không sử dụng ma trận **Y**.

Chúng ta sẽ xem xét hai trường hợp liên quan đến việc đóng thêm một nhánh mới vào lưới.

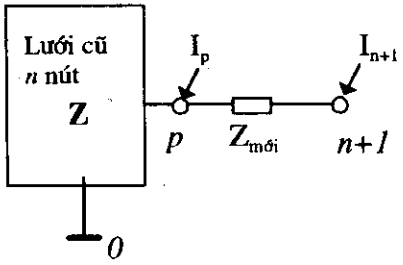
Trường hợp 1: Đóng thêm nhánh làm xuất hiện một nút mới (đóngnhánh cây)

Giả sử nhánh mới có tổng trở $Z_{mới}$ được nối giữa nút p đã tồn tại trong lưới và một nút mới gọi là nút $n+1$, với n bằng số nút cũ có trong lưới (không kể nút cơ sở- cân bằng dòng) (hình 2.18). Ma trận của lưới cũ **Z** cấp n sẽ được bổ sung thêm hàng (cột) $n+1$ ứng với nút mới.

Hàng $n+1$ ứng với phương trình viết cho điện áp u_{n+1}. Đồng thời dễ thấy rằng:

$$u_{n+1} = u_p + Z_{mới}\, i_{n+1}$$

trong đó u_p là điện áp mới (tức là giá trị điện áp ở lưới mới, sau khi đóng thêm nhánh) ở nút p. Giá trị mới này thay đổi như thế nào so với giá trị cũ (khi chưa đóng thêm nhánh) ? Và nói chung điện áp ở các nút của lưới thay đổi như thế nào ?



Hình 2-18

Rõ ràng việc đóng thêm một *nhánh cây* vào nút p chỉ ảnh hưởng đến lưới cũ thông qua chính nút p này; ảnh hưởng đó là do dòng nút mới i_{n+1} gây ra. Vả lại dòng này nếu không đặt ở nút mới mà đặt ngay ở nút p thì cũng chẳng thay đổi gì ảnh hưởng của nó lên lưới cũ. Vì thế chúng ta chỉ cần xem xét bài toán tương đương: *Không thay đổi cấu trúc lưới mà tăng dòng nút p lên một giá trị bằng* i_{n+1} . Thế thì điện áp u_p thay đổi so với giá trị cũ u_p^0 theo biểu thức:

$$u_p = u_p^0 + Z_{pp} i_{n+1} \qquad (2.69)$$

ở đây xuất hiện Z_{pp} là phần tử pp của ma trận **Z** cũ, và phương trình này chính là phương trình điện áp nút viết cho nút p của lưới, khi ta tăng dòng nút p lên một đại lượng bằng i_{n+1}. Viết rõ hơn phương trình này và thay vào biểu thức ở trên cho điện áp nút mới $n+1$, ta có:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_p^0 + Z_{pp} i_{n+1} + Z_{\text{mới}} i_{n+1} \\ &= Z_{p1} i_1 + Z_{p2} i_2 + \cdots + Z_{pp} i_p + \cdots + Z_{pn} i_n + (Z_{pp} + Z_{\text{mới}}) i_{n+1} \end{aligned} \tag{2.70}$$

Phương trình này ứng với hàng mới của ma trận. Do ma trận đối xứng, cột mới cũng bằng hàng mới. Ngoài hàng mới cột mới, các phần tử khác của ma trận **Z** không thay đổi, vì ta có thể viết điện áp các nút cũ tương tự (2.69):

$$\begin{aligned} u_k &= u_k^0 + Z_{kp} i_{n+1} \\ &= Z_{k1} i_1 + Z_{k2} i_2 + \cdots + Z_{kn} i_n + Z_{kp} i_{n+1} \end{aligned} \tag{2.71}$$

Phương trình này ứng với hàng k, quả thật các hệ số không thay đổi, chỉ xuất hiện thêm một số hạng mới ứng với cột mới $n+1$ (số hạng cuối cùng).

Tóm lại ma trận mới **Z'** cấp $n+1$ bằng ma trận cũ **Z** thêm một hàng một cột như sau:

$$\mathbf{Z}' = \left(\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{Z} & & \begin{matrix} Z_{1p} \\ Z_{2p} \\ \vdots \\ Z_{np} \end{matrix} \\ \hline Z_{p1} & Z_{p2} \cdots & Z_{pn} & Z_{pp} + Z_{\text{mới}} \end{array}\right) \tag{2.72}$$

Để ý rằng hàng (cột) mới bằng hàng (cột) ứng với nút p của ma trận cũ (trừ phần tử trên đường chéo).

Trường hợp đặc biệt khi nhánh mới được nối từ nút cơ sở- cân bằng dòng (nút 0, tức là trường hợp $p=0$); khi đó tổng trở tương hỗ giữa một nút k và nút mới $n+1$ (tức là phần tử của hàng/cột mới) rõ ràng bằng 0, vì:

$$Z_{k,n+1} = \left.\frac{u_k}{i_{n+1}}\right|_{i_j = 0 \forall j \neq n+1} = 0$$

Điều này cũng thấy rõ từ phương trình điện áp nút mới:

$$u_{n+1} = Z_{mới}\, i_{n+1}$$

(không phụ thuộc các dòng nút khác !. Chú ý là điện áp nút được đo so với nút cơ sở-cân bằng).

Do đó ma trận mới có dạng:

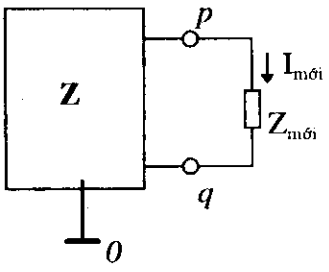
$$\mathbf{Z}' = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \mathbf{Z} & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots\ 0 & Z_{\text{mới}} \end{array}\right) \qquad (2.73)$$

Trường hợp 2: Đóng thêm nhánh nối giữa hai nút sẵn có (nhánh bù cây)

Giả sử nhánh mới có tổng trở $z_{\text{mới}}$ được nối giữa hai nút đã tồn tại p và q (kể cả trường hợp đã sẵn có một nhánh nối p-q) (hình 2.19). Ma trận Z giữ nguyên kích thước cũ, nhưng các phần tử của nó bị thay đổi.

Theo định lí Thevenin, dòng trong nhánh mới xác định theo (2.65):

$$I_{\text{mới}} = \frac{u_p^0 - u_q^0}{Z_{Th.pq} + Z_{\text{mới}}} \qquad (2.74)$$



Hình 2-19

Cũng lập luận như đã làm khi tìm tổng trở Thevenin, coi sự xuất hiện nhánh mới tương đương với cộng thêm các dòng nút $-I_{\text{mới}}$ vào nút p và $+I_{\text{mới}}$ vào nút q. Điện áp các nút k nào đó sẽ thay đổi từ giá trị cũ u_k^0 đến giá trị mới bằng:

$$\begin{aligned} u_k &= u_k^0 + Z_{kp}(-I_{\text{mới}}) + Z_{kq}(I_{\text{mới}}) \\ &= Z_{k1}i_1 + \cdots + Z_{kn}i_n + (Z_{kq} - Z_{kp})I_{\text{mới}} \end{aligned} \qquad (2.75)$$

Chú ý các phần tử của **Z** trong phương trình đều là các giá trị cũ. Phương trình cũng đúng cho điện áp các nút p và q (thay $k=p$ hoặc $k=q$). Bây giờ ta sẽ khử $I_{\text{mới}}$ trong n phương trình trên, sử dụng (2.74) được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} 0 &= u_q^0 - u_p^0 + (Z_{Th.pq} + Z_{\text{mới}})I_{\text{mới}} \\ &= (Z_{q1} - Z_{p1})i_1 + \cdots + (Z_{qn} - Z_{pn})i_n + (Z_{Th.pq} + Z_{\text{mới}})I_{\text{mới}} \end{aligned} \qquad (2.76)$$

Phương trình này và n phương trình (2.75) viết ở dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \\ \vdots \\ u_q \\ \vdots \\ u_n \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & Z_{1q}-Z_{1p} \\ & \mathbf{Z} & & \vdots \\ & & & Z_{pq}-Z_{pp} \\ & & & \vdots \\ & & & Z_{qq}-Z_{qp} \\ & & & \vdots \\ & & & Z_{nq}-Z_{np} \\ \hline (Z_{q1}-Z_{p1}) & \cdots & (Z_{qn}-Z_{pn}) & Z_{Th.pq}+Z_{\text{mới}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_p \\ \vdots \\ i_q \\ \vdots \\ i_n \\ \hline I_{\text{mới}} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Nhận xét rằng cột cuối của ma trận (không kể phần tử cuối cùng) bằng cột q của $\mathbf{Z}$ trừ cột p của $\mathbf{Z}$, và cũng bằng hàng cuối. Viết lại gọn hơn:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z} & -(\mathbf{Z}_{*p}-\mathbf{Z}_{*q}) \\ -(\mathbf{Z}_{*p}-\mathbf{Z}_{*q})^{\mathrm{T}} & Z_{Th.pq}+Z_{\text{mới}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ I_{\text{mới}} \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

trong đó gọi $\mathbf{Z}_{*p}$ và $\mathbf{Z}_{*q}$ lần lượt là cột p và q của $\mathbf{Z}$ (trước khi đóng nhánh mới). Khử $I_{mới}$ dùng công thức rút gọn Kron (2.51) ta có hệ tương đương $\mathbf{u} = \mathbf{Z}'\mathbf{i}$, với:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} - \frac{(\mathbf{Z}_{*p}-\mathbf{Z}_{*q})(\mathbf{Z}_{*p}-\mathbf{Z}_{*q})^{T}}{Z_{Th.pq}+Z_{\text{mới}}} \quad (2.79)$$

(công thức này có dạng công thức 2.52). Hệ này thoả mãn chế độ sau khi đóng nhánh mới do đó $\mathbf{Z}'$ chính là ma trận tổng trở nút mới. Chú ý mẫu số trong công thức trên là một đại lượng vô hướng và nhớ lại rằng:

$$Z_{Th.pq} = Z_{pp} + Z_{qq} - 2Z_{pq}$$

còn tử số là một ma trận (cột nhân hàng).

Từ (2.79) ta có thể viết công thức cho từng phần tử ij của $\mathbf{Z}'$:

$$Z'_{ij} = Z_{ij} - \frac{(Z_{ip}-Z_{iq})(Z_{jp}-Z_{jq})}{Z_{pp}+Z_{qq}-2Z_{pq}+Z_{\text{mới}}} \quad (2.80)$$

Tóm lại (2.79) và (2.80) cho ta công thức tính toán ma trận mới $\mathbf{Z}'$ (phần tử Z'_{ij}) theo ma trận cũ $\mathbf{Z}$ (phần tử Z_{ij}).

Trường hợp đặc biệt khi nhánh mới nối giữa nút p (đã có) và nút cơ sở - cân bằng. Nếu q là nút cơ sở - cân bằng thì rõ ràng $Z_{qq} = 0$ và $Z_{iq} = 0$ với mọi i. Do đó:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} - \frac{\mathbf{Z}_{*p}\mathbf{Z}_{*p}^{T}}{Z_{pp} + Z_{\text{mới}}}$$
$$Z'_{ij} = Z_{ij} - \frac{Z_{ip}Z_{jp}}{Z_{pp} + Z_{\text{mới}}} \qquad (2.81)$$

Để minh hoạ cho công thức cập nhật ma trận **Z** vừa được dẫn ra, ta xét lại bài toán đóng thêm tụ điện bù vào lưới đã nêu ở mục trước. Sử dụng công thức (2.81) ta sẽ tìm được ma trận sau khi đóng nhánh tụ điện có điện kháng 5 p.u giữa các nút 3 và 0.

Công thức này có thể mô tả như gồm hai giai đoạn: Đầu tiên đóng nhánh cây nối nút 3 với nút mới $n+1$, sau đó nối tắt nút này với nút 0 - tức là đặt điện áp của nó bằng 0 và khử biến $n+1$ bằng công thức rút gọn Kron.

Đóng nhánh $3-(n+1)$ ta có ma trận mới trong hệ sau:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} & & \mathbf{Z} & & j0{,}55110 \\ & & & & j0{,}64178 \\ & & & & j0{,}69890 \\ & & & & j0{,}63677 \\ \hline j0{,}55110 & j0{,}64178 & j0{,}69890 & j0{,}63677 & -j4{,}30110 \end{array}\right) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ \hline i_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ghi nhận rằng hàng mới bằng hàng 3, riêng phần tử trên đường chéo bằng $Z_{33}+Z_{mới} = j0{,}69890-j5{,}0 = -j4{,}30110$.

Tiếp theo khử hàng và cột mới theo công thức (2.81) ta có, chẳng hạn:

$$Z'_{11} = Z_{11} - \frac{Z_{13}Z_{13}}{Z_{33} + Z_{\text{mới}}} = j0{,}69890 - \frac{j0{,}55110 \times j0{,}55110}{-j4{,}30110} = j0{,}76951$$
$$Z'_{12} = Z_{12} - \frac{Z_{13}Z_{23}}{Z_{33} + Z_{\text{mới}}} = j0{,}60822 - \frac{j0{,}55110 \times j0{,}64178}{-j4{,}30110} = j0{,}69045$$

Tính toán tương tự cho các phần tử khác, ta được ma trận mới:

$$\mathbf{Z}' = \begin{pmatrix} j0{,}76951 & j0{,}69045 & j0{,}64065 & j0{,}69482 \\ & j0{,}81542 & j0{,}74606 & j0{,}78641 \\ & & j0{,}81247 & j0{,}74024 \\ \text{đối xứng} & & & j0{,}82555 \end{pmatrix}$$

Từ đó có thể tính các điện áp nút sau khi bù, chẳng hạn để tính u_3, lấy hàng 3 của **Z** nhân với vectơ dòng nút (trong đó chỉ có i_1 và i_3 khác 0 và đã cho trên hình 2.6):

$$u_3 = j0{,}64065\ (1{,}0\ \angle -90^0) + j0{,}81247.\ 0{,}68\ \angle -135^0)$$

$$= 1{,}03131 - j0{,}39066 = 1{,}1028\ \angle -20{,}7466^0 \quad \text{(p.u)}$$

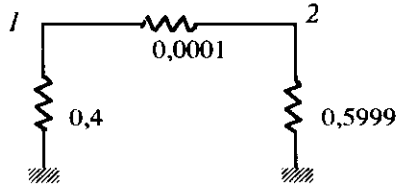
trùng với kết quả đã tính ở mục trước.

Nhận xét:

- Các công thức đã dẫn cũng có thể dùng khi *cắt bớt* một nhánh của lưới đã biết **Z**. Để cắt nhánh cây ta chỉ việc xoá hàng cột tương ứng trong **Z**. Để cắt nhánh bù cây ta *đóng vào* một nhánh song song có tổng trở âm cùng giá trị.
- Các công thức cập nhật **Z** cũng được dùng để xây dựng từ đầu ma trận này cho một lưới điện. Nhánh đóng vào đầu tiên là nhánh *0–1*, tức là một nhánh phải nối với nút cơ sở - cân bằng. Ma trận cho "lưới" một nhánh này suy biến thành giá trị tổng trở nhánh. Các nhánh khác tiếp theo được đóng lần lượt vào lưới. Tất nhiên việc đánh số nút phải theo thứ tự ứng với thứ tự đóng các nhánh. Phương pháp xây dựng ma trận **Z** này thường có hiệu quả hơn phương pháp tính theo thông số chế độ "thí nghiệm" hoặc biến đổi tương đương lưới điện (gợi ý ở các mục 2.6.1, 2.6.2).
- Công thức đóng nhánh bù cây (2.79)-(2.81) sử dụng rút gọn Kron có thể gặp vấn đề độ chính xác khi đại lượng ở mẫu số trong các công thức này quá bé do các số hạng khử lẫn nhau.

Ta minh hoạ tình trạng này bởi một thí dụ lấy từ [1]: Thành lập ma trận **Z** cho lưới điện hình 2.20. Ban đầu đóng nhánh 0–1, 0–2, tiếp theo đóng nhánh bù cây 1–2, ta được ma trận trước khi rút gọn, dạng (2.77)-(2.78):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}4 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}5999 & -0{,}5999 \\ \hline 0{,}4 & -0{,}5999 & 1 \end{array}\right)$$



Hình 2-20

Sử dụng công thức rút gọn Kron ta được ma trận của lưới với các phần tử:

$$Z_{11} = 0{,}4 - 0{,}4^2 = 0{,}24$$

$$Z_{22} = 0{,}5999 - 0{,}5999^2 = 0{,}2400199$$

$$Z_{12} = 0{,}4 \times 0{,}5999 = 0{,}23996$$

Bây giờ nếu lại ngắt bỏ nhánh 1–2 bằng cách dùng công thức đóng nhánh với

nhánh mới 1–2 có tổng trở bằng –0,0001, ta có mẫu số trong (2.79) rất nhỏ:

$$Z_{11}+Z_{22}-2Z_{12}+Z_{mới} = 0,24 + 0,2400199 - 2\times0,23996 - 0,0001 = -1.10^{-7}$$

Ma trận trước khi rút gọn dạng (2.77)-(2.78):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,24 & 0,23996 & 0,00004 \\ 0,23996 & 0,2400199 & -0,0000599 \\ \hline 0,00004 & -0,0000599 & -10^{-7} \end{array}\right)$$

Sử dụng công thức rút gọn khử hàng cột cuối ta có:

$$Z_{11} = 0,24 + 0,00004^2 / 10^{-7} = 0,256$$

$$Z_{22} = 0,2400199 + 0,0000599^2 / 10^{-7} = 0,2759$$

Kết quả sai lớn so với ma trận của lưới chỉ gồm hai nhánh 0 –1, 0 –2, nó bằng:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,5999 \end{pmatrix}$$

Sai số gặp phải trong ví dụ này liên quan đến hiện tượng *khuếch đại lớn sai số tương đối khi thực hiện phép trừ hai đại lượng xấp xỉ nhau (cancellation error).* Sai số tương đối có giá trị lớn đã gặp phải trong kết quả tính mẫu số của (2.80) và sai số này truyền mạnh tới kết quả cuối cùng khi tính các phần tử của **Z**, bởi vì phép chia cho một số nhỏ trong (2.80) sẽ cho một số hạng lớn đáng kể có sai số lớn tham gia vào giá trị của **Z**.

Tóm lại nếu gặp phải giá trị quá nhỏ của mẫu số khi dùng công thức rút gọn Kron, cần phải chuyển sang dùng phương pháp khác.

2.6.4 Trường hợp đóng cắt nhánh có hỗ cảm

Công thức cập nhật ma trận **Z** (2.79)-(2.80) khi đóng nhánh bù cây có thể được giải thích theo công thức cập nhật ma trận nghịch đảo (1.47). Quả thật **Z** là nghịch đảo của ma trận **Y**, và khi đóng thêm một nhánh vào lưới, **Y** được xếp chồng thêm một ma trận **ΔY** đơn giản như đã phân tích ở mục 2.2.

Ma trận xếp chồng thêm **ΔY** có dạng (2.18) có thể biểu diễn theo tổng dẫn nhánh đóng thêm bởi công thức dạng (2.25), (2.42), được viết lại sau đây:

$$\Delta\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{Y}_{\mathrm{l}}\, \mathbf{A}$$

Với *một* nhánh bù cây đóng thêm thì ta có thể viết $\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{A}^T y_l \mathbf{A}$ trong đó y_l là tổng dẫn nhánh mới, **A** là ma trận nối dây cho nhánh mới, gồm một hàng (ứng với nhánh mới) và n cột (ứng với n nút của lưới) xác định theo qui tắc đã cho ở (2.36). Ma trận **Z'** (mới) là nghịch đảo của:

$$\mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{A}^T y_l \mathbf{A} \tag{2.82}$$

và có thể xác định theo ma trận cũ $\mathbf{Z}=\mathbf{Y}^{-1}$ bởi công thức (1.47):

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}' &= (\mathbf{Y} + \mathbf{A}^T y_l \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{Z} - \mathbf{Z}\mathbf{A}^T (y_l^{-1} + \mathbf{A}\mathbf{Z}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{Z} \\ &= \mathbf{Z} - \frac{\mathbf{Z}\mathbf{A}^T \ \mathbf{A}\mathbf{Z}}{z_l + \mathbf{A}\mathbf{Z}\mathbf{A}^T} \end{aligned} \tag{2.83}$$

Chúng ta có thể dễ dàng kiểm tra rằng công thức này đồng nhất với (2.79) nếu để ý rằng:

$$\mathbf{A} = (0 \cdots \underbrace{1}_{p} \cdots 0 \cdots \underbrace{-1}_{q} \cdots 0)$$

p, q là hai nút của nhánh mới.

Tiếp cận này cũng cho phép suy ra công thức cho trường hợp đóng các nhánh có hỗ cảm. Giả sử ta đóng một số nhánh hỗ cảm lẫn nhau vào lưới. Nếu có xuất hiện nút mới thì trước hết đóng các *nhánh giả* không hỗ cảm để đưa vào các nút mới này. Sau đó ta đóng các nhánh *bù cây* có hỗ cảm với nhau hoặc với các nhánh đã tồn tại trong lưới. Bây giờ có thể sử dụng công thức cập nhật ma trận nghịch đảo như sau. Ma trận **Y** thay đổi tới $\mathbf{Y} + \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_l \mathbf{A}$ trong đó $\mathbf{Y}_l$ là ma trận tổng dẫn nhánh của các nhánh hỗ cảm (tính toán như trình bày ở mục 2.2.2) trừ đi các tổng dẫn giả, và **A** là ma trận nối dây cho các nhánh này.

Sử dụng công thức Woodbury (1.47) ta có:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}\mathbf{A}^T (\mathbf{Y}_l^{-1} + \mathbf{A}\mathbf{Z}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{Z} \tag{2.84}$$

Ghi nhận rằng ta phải nghịch đảo hai ma trận nhỏ có cấp bằng số nhánh hỗ cảm lẫn nhau.

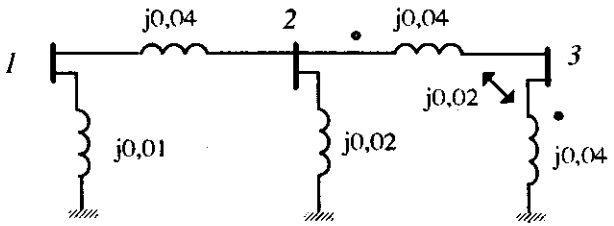
Thí dụ sau đây[1] minh hoạ thuật toán nói trên.

Xây dựng ma trận tổng dẫn nút cho lưới điện hình 2.21. Tổng trở các nhánh và tổng trở tương hỗ giữa nhánh 3-2 và nhánh 3-0 cho trên hình.

---

[1] Lấy từ [2]

Trước tiên đóng hai nhánh cây không hỗ cảm 1–0 và 2–0. Nút 3 được đưa nốt vào lưới bằng cách đóng một nhánh giả không hỗ cảm 3–0 có tổng trở chẳng hạn lấy bằng j0,03. Ta thu được ma trận cho cây của lưới như sau:



Hình 2-21

$$\mathbf{Z}^{(3)} = j\begin{pmatrix} 0{,}01 & & \\ & 0{,}02 & \\ & & 0{,}03 \end{pmatrix}$$

(chỉ số trên của **Z** chỉ số nhánh bao gồm trong ma trận). Nhánh bù cây 1–2 không hỗ cảm được đóng tiếp theo dẫn tới ma trận sau (dùng công thức (2.80) hay (2.83)):

$$\mathbf{Z}^{(4)} = j\begin{pmatrix} 0{,}008571 & 0{,}002857 & 0 \\ 0{,}002857 & 0{,}01429 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}03 \end{pmatrix}$$

Bây giờ xem xét cặp nhánh hỗ cảm 3–0 và 2–3, ma trận tổng dẫn nhánh được tính bằng cách nghịch đảo ma trận tổng trở nhánh:

$$\mathbf{Y}_l = \mathbf{Z}_l^{-1} = j\begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}04 \end{pmatrix}^{-1} = -j\begin{pmatrix} 100/3 & -50/3 \\ -50/3 & 100/3 \end{pmatrix}$$

Vì ta đã đóng nhánh giả 3–0 có tổng dẫn nhánh bằng 1/j0,03 = –j100/3, do đó phải trừ giá trị này vào $\mathbf{Y}_l$. Như vậy ma trận tổng dẫn nhánh mới phải đóng vào lưới lấy bằng:

$$\mathbf{Y}_l = -j\begin{pmatrix} 100/3 & -50/3 \\ -50/3 & 100/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -j100/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = j\begin{pmatrix} 0 & 50/3 \\ 50/3 & -100/3 \end{pmatrix}$$

Ma trận nối dây cho hai nhánh mới có dạng:

$$\mathbf{A} = \begin{matrix}\text{nút}\end{matrix}\begin{matrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\\ 1\ \ 2\ \ 3\end{matrix}\begin{matrix}\leftarrow \text{nhánh } 3-0\\ \leftarrow \text{nhánh } 2-3\end{matrix}$$

Chú ý chiều dương của dòng nhánh đi từ nút đánh dấu cực tính đến nút còn lại. Ma trận mới tính theo (2.84):

$$\mathbf{Z}^{(5)} = \mathbf{Z}^{(4)} - \mathbf{Z}^{(4)}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\left\{\mathbf{Y}_1^{-1} + \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{Z}^{(4)}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{Z}^{(4)}$$

$$= \mathbf{Z}^{(4)} - \mathbf{Z}^{(4)}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\left\{-j\begin{pmatrix}0{,}12 & 0{,}06\\ 0{,}06 & 0\end{pmatrix} + j\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0{,}002857\\ 0 & 0{,}01429\\ -0{,}03 & -0{,}03\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{Z}^{(4)}$$

$$= \mathbf{Z}^{(4)} - \mathbf{Z}^{(4)}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-j0{,}09 & -j0{,}03\\ -j0{,}03 & j0{,}04429\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{Z}^{(4)}$$

$$= \mathbf{Z}^{(4)} - j\begin{pmatrix}1{,}504 & 7{,}520 & -10{,}53\\ 7{,}520 & 37{,}61 & -52{,}64\\ -10{,}53 & -52{,}64 & -26{,}32\end{pmatrix}10^{-4}$$

$$= j\begin{pmatrix}0{,}008421 & 0{,}002105 & 0{,}001053\\ & 0{,}01053 & 0{,}005264\\ \text{đối xứng} & & 0{,}03263\end{pmatrix} \qquad (2.85)$$

2.6.5 Tính toán các phần tử của Z dùng khai triển tam giác của ma trận Y

Mục này giới thiệu một tiếp cận khác cho tính toán ma trận **Z**, có thể khắc phục được các nhược điểm của phương pháp dùng rút gọn Kron (trình bày ở hai mục trước) liên quan đến độ chính xác kém và yêu cầu lưu trữ lớn.

Tiếp cận này cho bài toán xác định tổng trở nút có liên quan đến các phương pháp nghịch đảo ma trận, ở đây là **Y**, như đã khảo sát ở mục 1.3. Đặc biệt khi đã biết khai triển tam giác của **Y** thì ta có thể xác định riêng một cột nào đó của **Z**

bằng cách giải dễ dàng hai hệ tam giác. Giả sử biết khai triển tam giác của **Y**:

$$\mathbf{L\,U} = \mathbf{P\,Y} \tag{2.86}$$

trong đó **P** là một ma trận hoán vị (xem công thức (1.21)), thì như đã biết ở mục 1.3.2, cột k của **Z** kí hiệu $\mathbf{Z_k}$ có thể được tìm như lời giải của hệ:

$$\mathbf{L\,U\,Z_k} = \mathbf{P\,I_k} \tag{2.87}$$

trong đó $\mathbf{I_k}$ là cột k của ma trận đơn vị. Lời giải này thu được dễ dàng bởi vì **L** và **U** là tam giác.

Như vậy khi không cần biết toàn bộ ma trận, ta có thể chỉ tính toán riêng một số cột của **Z** mà ta quan tâm. Ta cũng có thể chỉ quan tâm đến hiệu của hai cột của **Z**, chẳng hạn để tính tổng trở Thevenin giữa hai nút p–q:

$$Z_{Th,pq} = (Z_{pp} - Z_{pq})\,(Z_{qp} - Z_{qq}) \tag{2.88}$$

Hiệu của hai cột p và q của **Z**, kí hiệu $\mathbf{Z_{p-q}}$ có thể tìm trực tiếp từ hệ phương trình :

$$\mathbf{L\,U\,Z}_{p-q} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{2.89}$$

Một thuật toán khác dựa trên khai triển Cholesky (1.26) của ma trận đối xứng **Y**:

$$\mathbf{Y = L\,D\,L^T}$$

trong đó **L** là ma trận tam giác dưới với phần tử đường chéo bằng 1, **D** là ma trận đường chéo. Ta có:

$$\mathbf{I = Y\,Z = L\,D\,L^T\,Z := (L\,D)\,W}$$

trong đó ma trận tam giác dưới:

$$\mathbf{W = L^T\,Z = (L\,D)^{-1} = D^{-1}\,L^{-1}} \tag{2.90}$$

Định nghĩa **U** là ma trận tam giác trên với đường chéo bằng 0:

$$\mathbf{U = I - L^T} \tag{2.91}$$

thì ta viết được:

$$\mathbf{W} + \mathbf{U}\,\mathbf{Z} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{Z} + (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{Z} = \mathbf{Z}$$

dẫn đến một công thức đệ qui cho **Z**:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{W} + \mathbf{U}\,\mathbf{Z} \tag{2.92}$$

Lưu ý rằng **W** là tam giác dưới, còn **U** là tam giác trên với đường chéo bằng 0. Ma trận nghịch đảo **Z** cấp n được tính toán theo công thức này bắt đầu từ cột n:

– Phần tử đường chéo: $Z_{nn} = W_{nn}$

– Phần tử ở phần trên đường chéo: $Z_{in} = \sum_{k=i+1}^{n} U_{ik} Z_{kn}$

$$Z_{n-1,n} = U_{n-1,n} Z_{nn}$$

$$Z_{n-2,n} = U_{n-2,n-1} Z_{n-1,n} + U_{n-2,n} Z_{n}$$

...

$$Z_{in} = \sum_{k=i+1}^{n} U_{ik} Z_{kn}$$

tiếp theo tính toán cột $n-1$, $n-2$.. . theo cách tương tự, tức là đối với cột j ta tính:

– Phần tử đường chéo:

$$Z_{jj} = W_{jj} + \sum_{k=j+1}^{n} U_{jk} Z_{kj} \tag{2.93}$$

trong đó các phần tử Z_{kj} nằm dưới đường chéo đã biết, vì do ma trận **Z** cũng đối xứng như **Y** nên $Z_{kj}=Z_{jk}$ mà Z_{jk} $(k>j)$ đã tính khi tính toán cột k.

– Phần tử ở phần trên đường chéo:

$$Z_{ij} = \sum_{k=i+1}^{n} U_{ik} Z_{kj} \tag{2.94}$$

tính theo trình tự $i=j-1, j-2, \ldots, 1$ phần tử tính trước dùng cho tính phần tử sau.

Như vậy ma trận **W** chỉ cần dùng đến các phần tử đường chéo W_{ii} - các phần tử này rất dễ tính toán. Thật vậy vì **L** là ma trận tam giác với giá trị 1 trên đường

chéo, do đó $\mathbf{L}^{-1}$ cũng là tam giác (dưới) với giá trị 1 trên đường chéo; còn $\mathbf{D}^{-1}$ là ma trận đường chéo với các phần tử bằng $1/D_{ii}$. Dễ thấy:

$$W_{ii} = (\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}^{-1})_{ii} = \frac{1}{D_{ii}}$$

2.6.6 *Thay đổi trong ma trận Z khi dịch chuyển nút cơ sở-cân bằng*

Đôi khi có nhu cầu thay đổi nút chọn làm cơ sở- cân bằng trong lưới, việc này sẽ làm thay đổi ma trận thông số của lưới. Trong mục này chúng ta sẽ chỉ ra rằng với thay đổi như vậy, ma trận tổng trở nút có thể được cập nhật dễ dàng chỉ bằng các thao tác cộng trừ trên ma trận cũ.

Giả sử nút cơ sở - cân bằng sẽ được thay đổi từ nút n tới nút k nào đó trong lưới điện n nút[1]. Trước khi thay đổi, phương trình tổng trở nút $\mathbf{u} = \mathbf{Z}\,\mathbf{i}$ sẽ được viết cho vectơ áp, dòng sau:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 - u_n \\ u_2 - u_n \\ \vdots \\ u_k - u_n \\ \vdots \\ u_{n-1} - u_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.95}$$

trong đó không có phương trình dòng điện nút cơ sở; dòng này được cho bởi điều kiện cân bằng dòng:

$$i_n = ((i_1 + i_2 + \ldots + i_{n-1}) \tag{2.96}$$

Sau khi dịch chuyển nút cơ sở, vectơ dòng nút độc lập mới sẽ bao gồm i_n và loại bỏ i_k ; dòng này bây giờ là phụ thuộc:

$$i_k = -\sum_{m \neq k} i_m \tag{2.97}$$

Ta có thể dùng một ma trận biến đổi **C** như sau:

---

[1] Nút cơ sở có thể lấy là nút đất hoặc nút bất kì đã cho điện áp. Trong trường hợp sau, nút đất được coi là một nút như các nút khác.

$$\mathbf{i} = \mathbf{C}\,\mathbf{i}_{\text{mới}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ -1 & -1 & \cdots & & -1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{k-1} \\ i_n \\ i_{k+1} \\ \vdots \\ i_{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.98}$$

Còn đối với điện áp, để chuyển sang vectơ điện áp mới (qui chiếu tới nút k), ta lấy mỗi phần tử điện áp trong (2.95) trừ đi phần tử thứ k, riêng phần tử thứ k mới sẽ lấy như giá trị đổi dấu của phần tử k cũ:

$$\mathbf{u}_{\text{mới}} = \begin{pmatrix} u_1 - u_k \\ u_2 - u_k \\ \vdots \\ u_{k-1} - u_k \\ u_n - u_k \\ u_{k+1} - u_k \\ \vdots \\ u_{n-1} - u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & -1 & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & -1 & 1 & & \\ & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & -1 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - u_n \\ u_2 - u_n \\ \vdots \\ u_k - u_n \\ \vdots \\ u_{n-1} - u_n \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} \tag{2.99}$$

Như ta có thể nhìn thấy, ma trận biến đổi trong công thức trên chính bằng chuyển vị của **C**.

Bây giờ ta có thể viết phương trình tổng trở nút mới:

$$\mathbf{u}_{\text{mới}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}\,\mathbf{i} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}\,\mathbf{C}\,\mathbf{i}_{\text{mới}} \tag{2.100}$$

Suy ra ma trận tổng trở nút mới chính là:

$$\mathbf{Z}_{\text{mới}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}\,\mathbf{C} \tag{2.101}$$

Việc cập nhật ma trận **Z** theo công thức này rất đơn giản, có thể mô tả như một quá trình hai bước:

1. Nhân trước với $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$: Thực chất là trừ hàng k vào mỗi hàng khác của **Z** và đổi dấu hàng k.
2. Nhân sau với **C** : Trên ma trận thu được, ta trừ cột k vào mỗi cột khác và đổi dấu cột k.

Quá trình này không yêu cầu phép nhân nào cả. Chú ý trong ma trận mới, hàng k và cột k ứng với nút cơ sở cũ (nút n).

3
Tính toán ngắn mạch

3.1 Nhập đề

Trong quá trình vận hành, không thể tránh khỏi xảy ra những *hư hỏng (faults)* trên các phần tử lưới điện. Hư hỏng thường xảy ra nhất trên các đường dây truyền tải điện, và trong số các hư hỏng này, thường gặp nhất là hư hỏng do sét đánh. Ngoài ra các đường dây trên không và thiết bị cột đỡ có thể bị hư hỏng do gió bão, cây đổ v.v.. Hầu hết các sự cố này dẫn đến *ngắn mạch (short-circuit)* trong lưới điện, ảnh hưởng lớn đến sự làm việc của nó.

Tác hại đầu tiên phải kể đến là sự nguy hiểm trực tiếp do dòng ngắn mạch rất lớn chạy trong lưới điện. Dòng này thường lớn hơn nhiều so với dòng phụ tải bình thường và gây hư hỏng các thiết bị điện khác khi nó chạy qua. Yêu cầu của hệ thống bảo vệ cắt nhanh các phần hư hỏng đặt ra vấn đề xác định dòng (áp) ngắn mạch trong lưới. Giá trị của nó tại điểm ngắn mạch và các điểm khác trong lưới, đối với các loại ngắn mạch khác nhau sẽ dùng để kiểm tra sức chịu đựng của các thiết bị lưới, khả năng cắt dòng ngắn mạch của các máy cắt, cũng như để thiết kế, chỉnh định hệ thống rơ le bảo vệ.

Dòng điện ngắn mạch lớn nhất sẽ xảy ra ngay sau thời điểm sự cố (dòng ngắn mạch siêu quá độ), và dòng này thường là giá trị được quan tâm bởi các yêu cầu trên. Điện áp tại các nút trước sự cố là nguồn cung cấp dòng ngắn mạch, và tính toán dòng ngắn mạch tiện dùng hệ phương trình dạng:

$$\mathbf{Z\,i = u} \tag{3.1}$$

do vậy ma trận tổng trở nút **Z** sẽ có vai trò lớn trong bài toán ngắn mạch. Một số điểm đặc biệt khi sử dụng phương trình trên cho bài toán là như sau.

- Ma trận thông số lưới **Z** được xác định trên cơ sở sơ đồ thay thế (siêu) quá độ của các máy điện đồng bộ có trong hệ thống (máy phát điện, động cơ đồng bộ lớn). Hình 3.1 biểu diễn sơ đồ như vậy với E" và X_d" lần lượt là s.đ.đ và điện kháng siêu quá độ của máy điện đồng bộ.

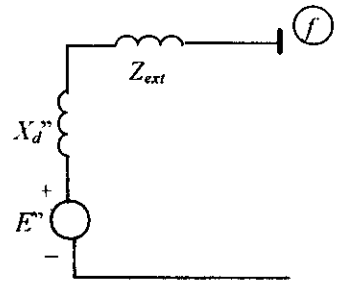
E" được xác định theo chế độ trước sự cố: Giả sử điện áp ở điểm *f* trước sự cố là u_f và dòng phụ tải (dòng trước sự cố) là i_L, thì ta có:

$$E'' = u_f + (Z_{ext} + jX_d'')\, i_L \tag{3.2}$$

Dòng ngắn mạch siêu quá độ tại điểm f là:

$$i_f'' = \frac{E''}{Z_{ext} + jX_d''} = \frac{u_f}{Z_{ext} + jX_d''} + i_L \qquad (3.3)$$

- Ma trận **Z** cũng có thể thay đổi so với ma trận trong chế độ bình thường. Chẳng hạn khi ngắn mạch trên một đường dây, xét thời điểm sau khi máy cắt đầu đường dây gần điểm sự cố đã cắt (máy cắt gần nơi sự cố thường cắt trước). Ma trận **Z** khi đó có thể xác định theo thuật toán cập nhật ma trận khi thay đổi một nhánh trong lưới điện.



Hình 3.1

- Vì thường dòng ngắn mạch (3.3) rất lớn hơn dòng phụ tải i_L nên thường bỏ qua dòng phụ tải khi tính toán ngắn mạch. Điều đó có nghĩa rằng coi điện áp tại mọi điểm trong lưới trước ngắn mạch đều bằng nhau- chẳng hạn bằng u_f. Đồng thời dòng nút trong (3.1) bằng 0, trừ tại điểm ngắn mạch có dòng bằng dòng ngắn mạch.

- Trong các sự cố trong lưới điện thì ngắn mạch một pha (chạm đất) chiếm tuyệt đại đa số các trường hợp. Loại sự cố này (cũng như ngắn mạch hai pha) làm cho hệ thống mất đối xứng. Để nghiên cứu *sự cố không đối xứng (asymmetrical faults)*- cũng như các chế độ không đối xứng khác- chúng ta thường phải phân tích ra 3 thành phần đối xứng, mỗi thành phần này được nghiên cứu với một sơ đồ thông số lưới điện riêng và bởi vậy, một ma trận thông số riêng.

Ngoài những điểm đặc biệt này, việc sử dụng ma trận **Z** yêu cầu nhiều xem xét về hiệu quả tính toán vì đây là một ma trận đầy và khó xác định. Yêu cầu này được đặt ra, một mặt vì lưới điện thực tế là phức tạp (ma trận **Z** do đó rất lớn) và số trường hợp ngắn mạch cần tính toán cũng là rất lớn, mặt khác loại tính toán này lại không đòi hỏi độ chính xác cao.

Liên quan tới điểm sau cùng này, một số đơn giản hoá thường được sử dụng trong tính toán ngắn mạch. Ngoài giả thiết bỏ qua dòng trước sự cố và độ lệch điện áp giữa các nút như đã nêu, các giả thiết khác thường được chấp nhận là:

– Bỏ qua nhánh từ hoá trong sơ đồ thay thế của máy biến áp và đầu phân áp chính xác được đặt của chúng,

– Bỏ qua điện dung của các đường dây,

– Bỏ qua điện trở. Giả thiết này làm đơn giản nhiều tính toán vì lưới điện trở nên thuần kháng, các dòng sự cố đồng pha được phân tích như lưới điện một chiều. Chú ý đôi khi giả thiết này dẫn đến sai số quá lớn.

3.2 Tính toán ngắn mạch đối xứng (Symmetrical faults)

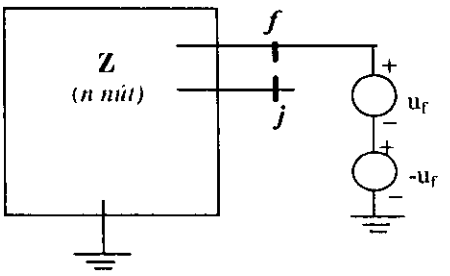
3.2.1 Công thức tính toán

Chúng ta bắt đầu bằng việc chỉ ra các công thức tính dòng áp ngắn mạch dùng tổng trở nút **Z**, áp dụng cho trường hợp *ngắn mạch 3 pha*, tức là đối xứng. Điều này có nghĩa là ta vẫn có thể sử dụng *sơ đồ thay thế một dây* để tính toán, như là khi phân tích chế độ làm việc đối xứng bình thường.

Xét lưới điện tổng quát ở hình 3.2 với nút cơ sở điện áp là đất, ta có phương trình dòng điện nút viết theo điện áp pha:

$$\mathbf{Z}\,\mathbf{i} = \mathbf{u} \qquad (3.4)$$

Để tính toán dòng ngắn mạch (siêu) quá độ, ma trận **Z** sẽ được thiết lập ứng với các nhánh máy điện đồng bộ được thay thế bởi điện kháng (siêu) quá độ.



Hình 3.2

Giả sử ngắn mạch 3 pha xảy ra ở nút f nào đó, điện áp nút này trở nên bằng 0 trong ngắn mạch, và ta biểu diễn bởi việc xếp chồng một nguồn áp $-u_f$ lên điện áp trước sự cố u_f ở nút f. Chính vì quan hệ dòng-áp là tuyến tính nên ta có thể sử dụng phương pháp phân tích xếp chồng. Nếu gọi Δi và Δu là số gia dòng và áp nút nhận được do ngắn mạch tại f, thì ta có:

$$\begin{aligned} \Delta i &= (0,0,\cdots,\underbrace{-i_f''}_{f},0,\cdots,0)^T \\ \Delta u &= (\Delta u_1, \Delta u_2, \cdots, \underbrace{-u_f}_{f}, \cdots, \Delta u_n)^T \end{aligned} \qquad (3.5)$$

trong đó i_f" là dòng ngắn mạch siêu quá độ tại f: đó là dòng tổng cộng 3 pha, biểu diễn như một dòng đi ra khỏi lưới- dòng nút. Vì qui ước dòng đi ra khỏi lưới mang dấu âm nên đặt dấu trừ trước giá trị của nó. Dòng nút tại các nút khác không thay đổi sau sự cố.

Thay vào phương trình (3.4):

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1f} & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & & & & \\ Z_{f1} & \cdots & Z_{ff} & \cdots & Z_{fn} \\ \vdots & & & & \\ Z_{n1} & \cdots & Z_{nf} & \cdots & Z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -i_f'' \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ -u_f \\ \vdots \\ \Delta u_n \end{pmatrix}$$

từ đó ta có:

$$\begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ -u_f \\ \vdots \\ \Delta u_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} Z_{1f} \\ \vdots \\ Z_{ff} \\ \vdots \\ Z_{nf} \end{pmatrix}}_{\text{cột } f \text{ của } \mathbf{Z}} (-i''_f) \tag{3.6}$$

rút ra:

$$\begin{aligned} i''_f &= \frac{u_f}{Z_{ff}} \\ \Delta u_k &= -Z_{kf} i''_f = -\frac{Z_{kf}}{Z_{ff}} u_f \quad (\forall k \neq f) \end{aligned} \tag{3.7}$$

và điện áp tại nút k sau ngắn mạch ở f là:

$$u_k = u_f - \frac{Z_{kf}}{Z_{ff}} u_f = u_f - Z_{kf} i''_f \tag{3.8}$$

trong đó ta lấy gần đúng điện áp trước sự cố ở nút k (cũng như mọi nút trong lưới) đều bằng nhau và bằng u_f - điện áp trước ngắn mạch, như nhận xét đã nêu ở mục 3.1.

Biết điện áp các nút ta có thể tính các dòng nhánh siêu quá độ, chẳng hạn đối với nhánh k-m nào đó có tổng trở z:

$$i''_{km} = \frac{u_k - u_m}{z} = -\left(\frac{Z_{kf} - Z_{mf}}{z}\right) i''_f = -\frac{u_f}{z}\left(\frac{Z_{kf} - Z_{mf}}{Z_{ff}}\right) \tag{3.9}$$

$(k, m \neq f)$

Còn dòng nhánh trong nhánh nối trực tiếp đến nút ngắn mạch (giả sử nhánh có tổng trở z) thì tính theo $i_{kf}''=u_k / z$

Nhận xét rằng để tính toán sự cố ở nút f, chỉ cần biết cột f của ma trận $\mathbf{Z}$. Tuy nhiên ta sẽ cần khảo sát ngắn mạch ở mọi nút trong lưới, do đó cần xác định và lưu trữ toàn bộ ma trận $\mathbf{Z}$ kích thước lớn và đầy (nói chính xác là phần tam giác trên hoặc dưới của ma trận này mà thôi, vì $\mathbf{Z}$ đối xứng). Để tính toán $\mathbf{Z}$ có thể dùng các thuật toán cho ở mục 2.5.

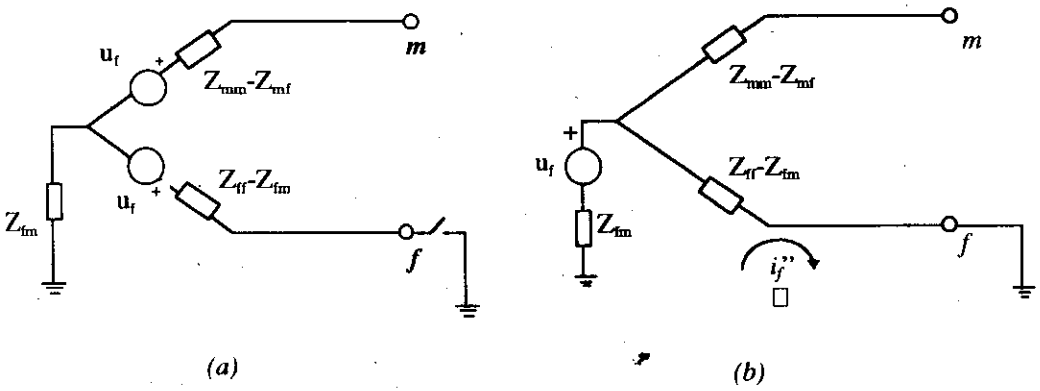
Phần trên chúng ta đã giả thiết ngắn mạch xảy ra ở một nút nào đó của lưới điện. Ta cũng sẽ khảo sát *ngắn mạch tại một điểm trên đường dây truyền tải điện.* Để sử dụng các phương trình trên, điểm này sẽ phải được đưa vào lưới điện và vào ma trận **Z** như là một nút. Để làm việc này, ta sẽ sử dụng các công thức cập nhật **Z** khi thay đổi một nhánh: cắt nhánh cũ ứng với đường dây và đóng vào nhánh mới nối tới nút mới (là điểm ngắn mạch).

Một trường hợp cũng đòi hỏi thay đổi **Z**- như đã nhận xét ở mục 3.1- liên quan đến việc khi ngắn mạch hệ thống bảo vệ có thể cắt các máy cắt không đồng thời. Máy cắt gần điểm sự cố cắt trước, sau đó ngắn mạch vẫn chưa được loại trừ và ta gặp bài toán ngắn mạch 'mới", với ma trận **Z** đã thay đổi do cấu trúc lưới đã thay đổi sau khi máy cắt ở gần cắt. Điển hình cho trường hợp này là khi ngắn mạch ở rất gần một đầu đường dây.

3.2.2 Sử dụng mạch tương đương Thevenin

Trong mục 2.5.2 chúng ta đã khảo sát mạch điện tương đương Thevenin thay thế cho lưới điện giữa một cặp nút bất kì. Từ mạch điện này ta có thể tính toán dòng ngắn mạch xảy ra tại một nút và điện áp tại nút kia trong cặp nút.

Hình 3.3a vẽ lại sơ đồ mạch tương đương đã cho ở hình 2.17 (mục 2.6.2) cho cặp nút *f-m*. Các đại lượng tổng trở cho trên sơ đồ đều là phần tử của ma trận **Z**.



Hình 3.3

Trên sơ đồ, điện áp trước sự cố ở các nút lấy gần đúng bằng điện áp nút sự cố u_f (trường hợp bỏ qua dòng phụ tải). Khi đó ta có thể ghép hai nguồn áp bằng nhau này lại như ở hình 3.3b. Trên hình này cũng biểu diễn đường ngắn mạch và dòng ngắn mạch tại nút *f* (ngắn mạch 3 pha được biểu diễn bởi nối đất (trung tính) trực tiếp điểm ngắn mạch). Lưu ý rằng mạch điện tương đương Thevenin cho phép tính toán dòng trên nhánh đóng thêm vào cặp nút và sự thay đổi áp nút do nhánh này. Nhánh nối đất đóng vào nút *f* biểu diễn sự xếp chồng chế độ ngắn mạch lên chế độ

bình thường và dòng trong nhánh này sẽ biểu diễn dòng ngắn mạch.

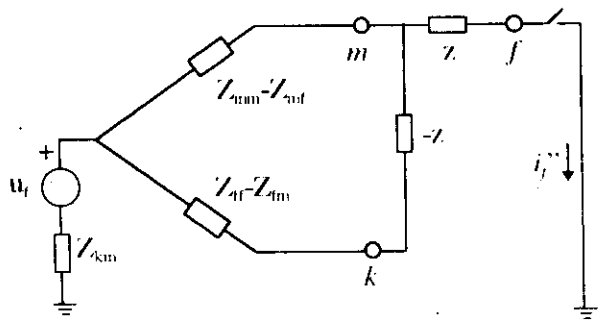
Từ sơ đồ hình 3.3 rõ ràng ta có $i_f'' = u_f / Z_{ff}$. Dòng này gây ra một áp rơi trên tổng trở Z_{fm} bằng $(Z_{fm} / Z_{ff})\, u_f$ do đó làm thay đổi điện áp nút m tới $u_f - (Z_{fm} / Z_{ff})\, u_f$. Các công thức này trùng với các công thức đã dẫn ở phần trên.

Mạch tương đương Thevenin của cặp nút k-m nào đó cũng cho phép tính toán dễ dàng *ngắn mạch trên đường dây k-m*. Giả sử xét ngắn mạch 3 pha ở đầu đường dây phía nút k và xét dòng ngắn mạch sau khi máy cắt đầu đường dây này đã cắt. Tình trạng này biểu diễn bởi việc đóng thêm hai nhánh sau đây vào cặp nút k-m:

– Đóng nhánh mới với tổng trở $-z$ vào cặp nút, trong đó z là tổng trở của đường dây k m (đường dây bị ngắn mạch). Thao tác này tương đương với việc ngắt bỏ nhánh k-m khỏi lưới.

– Đóng nhánh mới với tổng trở z giữa nút m và một nút mới f. Nhánh này sẽ biểu diễn đường dây k-m và điểm ngắn mạch f ở phía nút k nhưng đã cắt rời khỏi nút này.

Mạch tương đương ban đầu và hai nhánh mới đóng vào được vẽ trên hình 3.4. Dòng ngắn mạch ở f được cho bởi $i_f'' = u_f / Z_{ff}$ trong đó Z_{ff} là tổng trở riêng của nút f. Nó cũng là tổng trở Thevenin của nút f (tổng trở của lưới nhìn từ nút f). Do đó ta có thể viết từ sơ đồ:



Hình 3.4

$$\begin{aligned} Z_{ff} &= z + \left[(Z_{mm} - Z_{mk}) // (Z_{kk} - Z_{km} - z)\right] + Z_{km} \\ &= z + \frac{(Z_{mm} - Z_{mk})(Z_{kk} - Z_{km} - z)}{Z_{mm} - Z_{mk} + Z_{kk} - Z_{km} - z} + Z_{km} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Sử dụng đại lượng tổng trở Thevenin giữa k và m là $Z_{Th,km} = Z_{kk} + Z_{mm} - 2Z_{km}$ và chú ý $Z_{mk} = Z_{km}$, ta có thể biểu diễn:

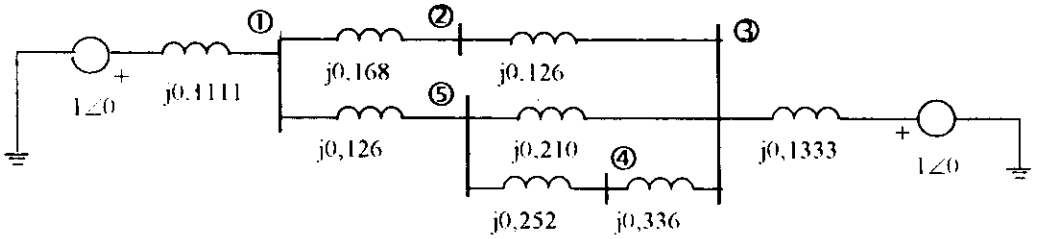
$$\begin{aligned} Z_{ff} &= z + \frac{(Z_{mm} - Z_{mk})\left[(Z_{Th,km} - z) - (Z_{mm} - Z_{mk})\right]}{Z_{Th,km} - z} + Z_{km} \\ &= Z_{mm} + z - \frac{(Z_{mm} - Z_{mk})^2}{Z_{Th,km} - z} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Chúng ta có thể kiểm tra rằng công thức trên trùng với kết quả tính toán tổng trở riêng của nút *f* sau khi đóng hai nhánh nói trên vào lưới (sử dụng công thức cập nhật ma trận **Z**).

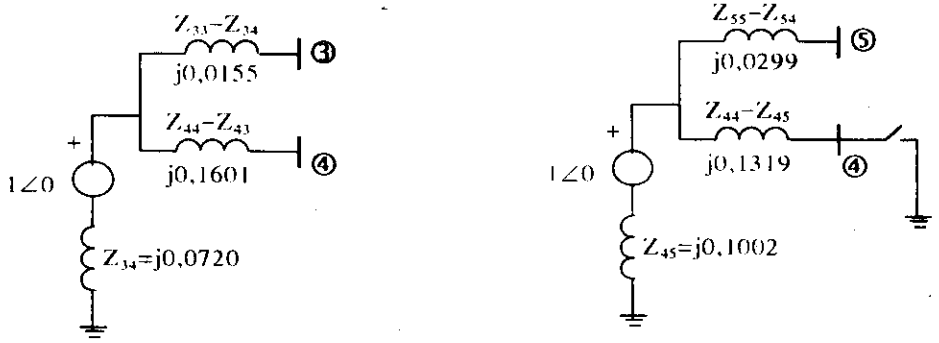
3.2.3 *Thí dụ*

Xét lưới điện 5 nút [1] có sơ đồ thay thế như trên hình 3.5 trong đó tổng trở các đường dây được biểu diễn ở đơn vị tương đối với cơ sở 100 MVA (bỏ qua tổng dẫn). Máy phát điện nối ở nút 1 và 3 có công suất lần lượt là 270 và 225 MVA. Điện kháng siêu quá độ của mỗi máy phát cộng với điện kháng máy biến áp là 0,3 trong đơn vị tương đối cơ sở máy [2].

Tính toán sự cố ngắn mạch 3 pha ở nút 4 và trên đầu đường dây 1-2 ở phía nút 2 (sau khi máy cắt đường dây ở đầu này cắt), coi điện áp trước sự cố ở mọi nút bằng 1.



Hình 3.5



Hình 3.6

[1] Thí dụ này lấy từ [6]

[2] Giả thiết các cơ sở điện áp (cho đơn vị tương đối của lưới và máy phát) có quan hệ đúng theo tỉ số biến áp của máy biến áp

Trên sơ đồ, điện kháng nhánh máy phát - máy biến áp đã được qui về cơ sở lưới 100 MVA:

– Máy phát ở nút 1: $X_d'' = 0,3\ (100/270) = 0,1111$

– Máy phát ở nút 3: $X_d'' = 0,3\ (100/225) = 0,1333$

Ma trận tổng trở nút đã được xác định như sau (theo đánh số nút như trên sơ đồ- ma trận đối xứng):

$$\mathbf{Z} = j\begin{pmatrix} 0,0793 & 0,0558 & 0,0382 & 0,0511 & 0,0608 \\ & 0,1338 & 0,0664 & 0,0630 & 0,0605 \\ & & 0,0875 & 0,0720 & 0,0603 \\ & & & 0,2321 & 0,1002 \\ & & & & 0,1301 \end{pmatrix}$$

Để tính toán dòng ngắn mạch nút 4, các thành phần của nó trên nhánh 3-4 và 5-4 và điện áp ở hai nút kề 3 và 5, chúng ta lập sơ đồ Thevenin cho cặp nút 3-4 và 5-4 như ở hình 3.6. Từ các sơ đồ này:

– Dòng ngắn mạch ở nút 4: $i_f'' = u_4 / j0,2321 = -j4,308$

– Điện áp nút 3 và 5 trong ngắn mạch :

$$u_3 = u_f - Z_{34}\, i_f'' = 1 - j0,0720\ (-j4,308) = 0,6898$$

$$u_5 = u_f - Z_{54}\, i_f'' = 1 - j0,1002\ (-j4,308) = 0,5683$$

– Dòng ngắn mạch đóng góp bởi hai nhánh nối tới nút 4:

$$i_{34} = u_3 / z = 0,6898 / j0,336 = -j2,053$$

$$i_{54} = u_5 / z = 0,5683 / j0,252 = -j2,255$$

Để tính toán ngắn mạch 3 pha trên đường dây 1-2 phía đầu 2 (sau khi máy cắt đầu này đã cắt), chúng ta sử dụng sơ đồ dạng hình 3.4 cho cặp nút 1-2. Theo công thức (3.10) ta có:

$$Z_{11} - Z_{12} = j0,0793 - j0,0558 = j0,0235$$

$$Z_{22} - Z_{21} - z = j0,1338 - j0,0558 - j0,168 = -j0,09$$

$$Z_{22}^{mới} = j0,168 + [\ j0,0235\ //\ (-j0,09)\ ] + j0,0558 = j0,2556$$

Do đó dòng ngắn mạch đang xét là:

$$i_f'' = 1 / j0,2556 = -j3,912$$

3.3 Phân tích chế độ không đối xứng bởi phương pháp các thành phần đối xứng

Ngắn mạch không đối xứng, cũng như mọi chế độ làm việc với 3 pha không đối xứng, không còn cho phép tính toán lưới điện 3 pha trên sơ đồ mạch điện một pha, như chúng ta đã làm từ trước đến nay. Công cụ thường được sử dụng cho bài toán này là phương pháp phân tích hệ thống áp, dòng.. nhiều pha không đối xứng ra các thành phần (nhiều pha) đối xứng, được đề xuất bởi C.L.Fortescue từ 1918.

Xét một hệ thống dòng, áp 3 pha không đối xứng, chẳng hạn hệ điện áp $\mathbf{U}_{abc} = (u_a\ u_b\ u_c)^T$ trong đó mỗi thành phần là một số phức (vectơ) điện áp của một pha của lưới điện 3 pha.

Chúng ta sử dụng một phép biến đổi như sau mà ý nghĩa sẽ thấy ở dưới đây:

$$\mathbf{U}_{abc} = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{U}_{012} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

trong đó ma trận biến đổi T được xác định bởi:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{với } a = e^{j2\pi/3} = 1\angle 120^0 \tag{3.13}$$

là một *toán tử quay* (khi nhân với một số phức-vectơ, nó làm vectơ đó quay đi một góc + 120^0)

Phép đổi biến (3.12) cho phép xác định một hệ vectơ $\mathbf{U}_{012}$ duy nhất đối với một hệ thống $\mathbf{U}_{abc}$ đã cho. Thật vậy ma trận biến đổi T là khả nghịch, với:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Do đó ta có thể xác định $\mathbf{U}_{012} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}_{abc}$.

Khai triển các phương trình ma trận, ta có các công thức biến đổi sau đây:

$$\begin{cases} u_a = u_0 + u_1 + u_2 \\ u_b = u_0 + a^2 u_1 + a u_2 \\ u_c = u_0 + a u_1 + a^2 u_2 \end{cases} \tag{3.15}$$

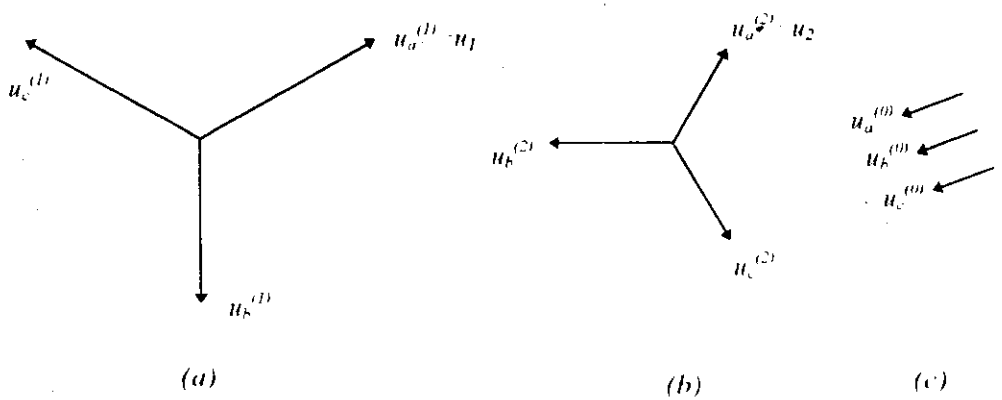
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3}(u_a + u_b + u_c) \\ u_1 = \frac{1}{3}(u_a + au_b + a^2 u_c) \\ u_2 = \frac{1}{3}(u_a + a^2 u_b + au_c \end{cases} \quad (3.16)$$

Bây giờ chúng ta sẽ để ý đến ý nghĩa của phép biến đổi trên. Phương trình (3.15) đã phân tích hệ thống 3 pha ra 3 thành phần:

$$\mathbf{U}_{abc} = \mathbf{U}_{abc}^{(0)} + \mathbf{U}_{abc}^{(1)} + \mathbf{U}_{abc}^{(2)} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{U}_{abc}^{(0)} = \begin{pmatrix} u_a^{(0)} \\ u_b^{(0)} \\ u_c^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \\ u_0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U}_{abc}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_a^{(1)} \\ u_b^{(1)} \\ u_c^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ a^2 u_1 \\ a u_1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U}_{abc}^{(2)} = \begin{pmatrix} u_a^{(2)} \\ u_b^{(2)} \\ u_c^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ a u_2 \\ a^2 u_2 \end{pmatrix}$$

Theo ý nghĩa của toán tử quay a, ta có thể nhận xét rằng thành phần $\mathbf{U}_{abc}^{(1)}$ là một hệ thống điện áp 3 pha đối xứng (gồm 3 vectơ điện áp trên 3 pha, bằng nhau về độ lớn và lệch nhau 120^0 như minh họa trên hình 3.7a.



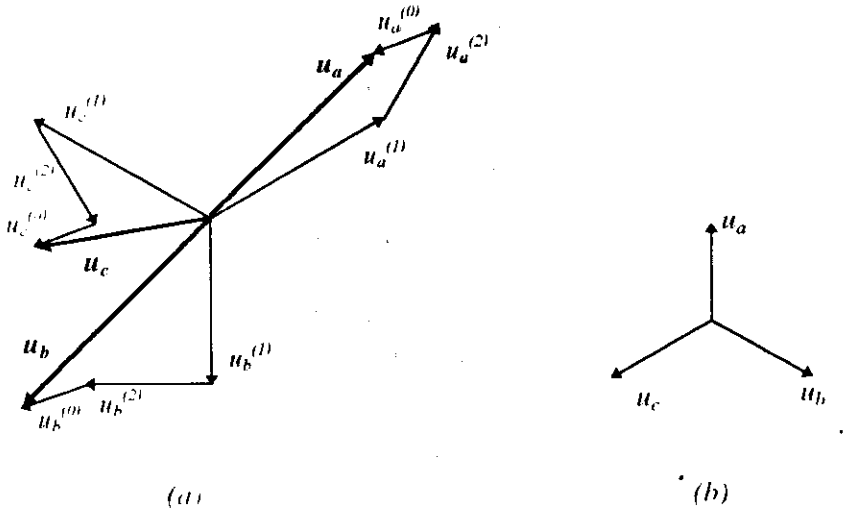
Hình 3.7

Tiếp theo, thành phần $\mathbf{U}_{abc}^{(2)}$ cũng là một hệ thống 3 pha đối xứng, nhưng thứ tự pha ngược với thành phần trước (hình 3.7b). Đối với dòng áp 3 pha ta qui ước đặt tên pha sao cho trên biểu đồ vectơ 3 pha, nếu đi vòng theo chiều kim đồng hồ thì thứ tự pha là abc. Thứ tự qui ước này trùng với thứ tự pha của thành phần $\mathbf{U}_{abc}^{(1)}$, do đó thành phần này được gọi là *thành phần thứ tự thuận (Positive-Sequence Component)*. Cũng vậy thành phần $\mathbf{U}_{abc}^{(2)}$ sẽ được gọi là *thành phần thứ tự nghịch (Negative-Sequence Component)*. Cuối cùng thành phần thứ ba $\mathbf{U}_{abc}^{(0)}$ cũng là một hệ điện áp đối xứng (gồm 3 vectơ áp hoàn toàn trùng nhau trên 3 pha).

Đặc điểm của thành phần này cho nó cái tên *thành phần thứ tự không (Zero-Sequence Component)*. Như vậy hệ thống 3 pha bất kì (không đối xứng) đã được phân tích ra 3 thành phần đối xứng thuận, nghịch và không (đôi khi cũng gọi là thành phần đối xứng 1,2 và 0).

Phân tích trên cũng áp dụng cho dòng điện và cũng cho các công thức có dạng như trên.

Hình 3.8a minh hoạ hệ 3 pha không đối xứng được phân tích ra 3 thành phần như trên hình 3.7.



(a) (b)

Hình 3.8

Chúng ta có một số nhận xét sau đây:

- Nếu hệ thống dòng (áp) là đối xứng, biểu diễn như trên hình 3.8b (chẳng hạn đối với áp) thì theo (3.16) ta sẽ có $u_0 = 0$, $u_1 = u_a$, $u_2 = 0$, có nghĩa là đại lượng 3 pha đối xứng trùng với thành phần thứ tự thuận của nó.

- Trên đường dây nối đến cuộn dây máy biến áp hay phụ tải nối sao hở mạch trung tính hoặc nối tam giác sẽ không thể có dòng điện thứ tự không. Thật vậy ở trường hợp này $i_0 = (i_a+i_b+i_c)/3 = 0$ vì $i_a+i_b+i_c = 0$ đối với các sơ đồ nối dây nói trên, *không phụ thuộc hệ thống dòng có đối xứng hay không.*

- Cũng từ nhận xét trên ta suy ra rằng nếu điểm trung tính của sơ đồ nối sao được nối đất (trực tiếp hay qua một tổng trở) thì dòng điện chạy trên mạch trung tính này (được gọi là *dòng trở về*) sẽ chỉ có thành phần thứ tự không (xuất hiện trong chế độ không đối xứng) và có giá trị bằng $3i_0$ trong đó i_0 là thành phần thứ tự không trên mỗi pha. Nếu trung tính nối đất qua tổng trở z_n

thì xuất hiện điện áp thứ tự không $3i_0z_n$ trên tổng trở đó (không có điện áp rơi thuận hay nghịch).

- Hệ thống điện áp dây cũng luôn luôn *không* chứa thành phần thứ tự không, vì ta luôn có $u_{ab}+u_{bc}+u_{ca} = 0$.

3.4 Lưới điện của các thành phần đối xứng

Trong mục này chúng ta sẽ chỉ ra rằng việc nghiên cứu các chế độ không đối xứng trên các thành phần đối xứng của nó có thể tiến hành trên các *mạch điện riêng rẽ, thay thế cho mỗi thành phần đối xứng*. Như vậy thay cho tính toán thuần tuý dùng các công thức biến đổi toán học, chúng ta cũng có thể tính toán trên các mạch điện thay thế này, sử dụng các quy tắc tính toán mạch điện quen thuộc. Tuy nhiên điều kiện cho việc đưa vào khái niệm mới này là lưới điện 3 pha phải là *cân bằng*.

Trước tiên đi từ định nghĩa của dòng và áp thành phần, ta sẽ định nghĩa *công suất của thành phần đối xứng*.

Lấy lại định nghĩa các vectơ (cột) $\mathbf{U_{abc}}$ $\mathbf{U_{012}}$ như ở công thức (3.12). Tương tự gọi $\mathbf{I_{abc}}$ và $\mathbf{I_{012}}$ là vectơ (cột) dòng điện pha và dòng điện thành phần đối xứng. Ta có công suất 3 pha:

$$S_{abc} = i_a^* u_a + i_b^* u_b + i_c^* u_c = \mathbf{I_{abc}^{*T}} \mathbf{U_{abc}} \tag{3.18}$$

(dấu sao chỉ số phức liên hợp, dấu T chỉ chuyển vị vectơ-ma trận). Chuyển sang biến 0,1,2 ta có:

$$\mathbf{I_{abc}^{*T}} \mathbf{U_{abc}} = (\mathbf{T}\mathbf{I_{012}})^{*\mathbf{T}} \mathbf{T}\mathbf{U_{012}} = \mathbf{I_{012}^{*T}} \mathbf{T}^{*T}\mathbf{T}\mathbf{U_{012}} = 3\mathbf{I_{012}^{*T}}\mathbf{U_{012}}$$

vì tích ma trận $\mathbf{T}^{*T}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

Gọi $S_{012} = \mathbf{I_{012}^{*T}}\mathbf{U_{012}}$ là *công suất tổng của dòng áp thuận, nghịch, không*, ta có quan hệ đơn giản:

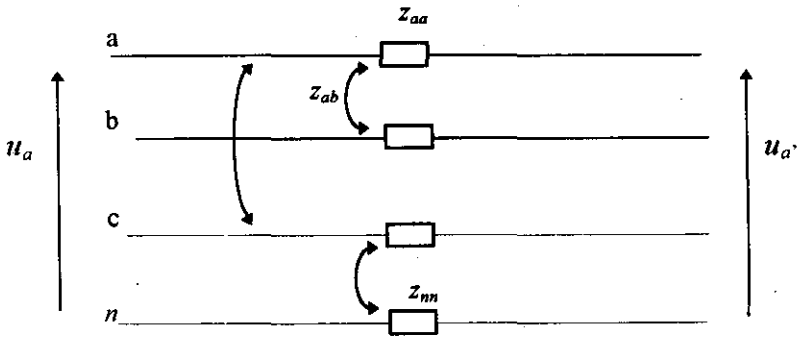
$$S_{abc} = 3\, S_{012} \tag{3.19}$$

và ta nói rằng phép biến đổi thành phần đối xứng *bảo toàn công suất*. (Chú ý trong đơn vị tương đối thì hệ số 3 biến mất nếu ta lấy $S_{abc}^{cơ\ sở} = 3S_{012}^{cơ\ sở}$).

3.4.1 *Mạch điện thành phần đối xứng của đường dây*

Bây giờ ta sẽ đưa vào khái niệm *tổng trở (thứ tự) thuận, tổng trở nghịch, tổng trở không* của đường dây điện lực 3 pha.

Trước hết nhận xét rằng quan hệ dòng áp trên đường dây 3 pha phụ thuộc vào tổng trở riêng của dây dẫn mỗi pha và tổng trở tương hỗ giữa các dây pha. Tổng trở riêng của các pha thường bằng nhau $z_{aa} = z_{bb} = z_{cc}$ còn tổng trở tương hỗ giữa chúng có thể khác nhau do vị trí đặt các pha thường là không đối xứng. Ví dụ khi 3 pha của đường dây trên không đặt nằm ngang thì tương hỗ giữa hai pha ngoài nhỏ hơn tương hỗ giữa pha ngoài và pha giữa, và ta có $z_{ab} \neq z_{ac}$ .. . Ngoài hệ thống pha thì đất hay dây chống sét nối đất- như là một *vật dẫn trở về* (do nối đất trung tính trong hệ thống)- cũng tham gia vào quan hệ dòng áp trên đường dây. Hình 3.9 vẽ hệ thống vật dẫn trên một đường dây 3 pha trong đó dây dẫn thứ 4 biểu diễn đường trở về đất (kí hiệu n).



Hình 3.9

Điện áp rơi trên pha a cho bởi:

$$z_{aa}\, i_a + z_{ab}\, i_b + z_{ac}\, i_c + z_{an}\, i_n$$

Điện áp rơi trên dây trở về cho bởi:

$$z_{nn}\, i_n + z_{an}\, i_a + z_{bn}\, i_b + z_{cn}\, i_c$$

Do đó độ lệch điện áp pha u_a giữa hai điểm trên đường dây được suy ra khi viết phương trình cân bằng áp cho mạch vòng pha a – dây trở về:

$$u_a - u_{a'} = (z_{aa} - z_{an})\, i_a + (z_{ab} - z_{bn})\, i_b + (z_{ac} - z_{cn})\, i_c + (z_{an} - z_{nn})\, i_n \qquad (3.20)$$

Thay thế dòng trở về bởi:

$$i_n = -(i_a + i_b + i_c) \tag{3.21}$$

ta có:

$$u_a - u_{a'} = (z_{aa} + z_{nn} - 2z_{an})\, i_a + (z_{ab} + z_{nn} - z_{bn} - z_{an})\, i_b + (z_{ac} + z_{nn} - z_{cn} - z_{an})\, i_c$$

(3.22)

Các biểu thức tương tự có thể được viết cho các pha *b* và *c*, cho ta một hệ thống tương đương 3 pha đã khử dây đất. Hệ này biểu diễn quan hệ giữa điện áp (pha) rơi theo dòng điện pha, thông qua một ma trận tổng trở 3 pha tương đương mà ta kí hiệu bởi (ma trận đối xứng):

$$\mathbf{Z}_{abc} = \begin{pmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

$$Z_{aa} = z_{aa} + z_{nn} - 2z_{an}$$

$$Z_{ab} = z_{ab} + z_{nn} - z_{an} - z_{bn}$$

Hệ phương trình ở dạng ma trận:

$$\Delta\mathbf{U}_{abc} = \mathbf{Z}_{abc}\, \mathbf{I}_{abc} \tag{3.24}$$

chuyển tới dòng áp thuận, nghịch, không bằng cách nhân trái với ma trận biến đổi nghịch đảo:

$$\mathbf{T}^{-1}\, \Delta\mathbf{U}_{abc} = \mathbf{T}^{-1}\, \mathbf{Z}_{abc}\, \mathbf{I}_{abc}$$

hay:

$$\Delta\mathbf{U}_{012} = \mathbf{T}^{-1}\, \mathbf{Z}_{abc}\, \mathbf{T}\, \mathbf{I}_{012} := \mathbf{Z}_{012}\, \mathbf{I}_{012} \tag{3.25}$$

trong đó gọi $\mathbf{Z}_{012} = \mathbf{T}^{-1}\, \mathbf{Z}_{abc}\, \mathbf{T}$ là *ma trận tổng trở thuận, nghịch, không.*

Thông thường ta chấp nhận giả thiết rằng đường dây 3 pha là *cân bằng (balanced)*, nghĩa là có mọi tổng trở riêng của các pha bằng nhau và mọi tổng trở tương hỗ giữa các pha bằng nhau, đồng thời các tổng trở tương hỗ pha-đất cũng bằng nhau. Chúng ta kí hiệu 3 đại lượng này lần lượt là z_{aa}, z_{ab} và z_{an}. Giả thiết xấp xỉ này rất thoả mãn đối với các đường dây trên không có chuyển vị pha. Tương ứng với nó ta có thể thấy rằng ma trận tổng trở pha (3.23) chỉ còn hai phần tử phân

biệt: tổng trở riêng kí hiệu Z_s và tổng trở tương hỗ kí hiệu Z_m:

$$\mathbf{Z}_{abc} = \begin{pmatrix} Z_s & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_s & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_s \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

$$Z_s = z_{aa} + z_{bb} - 2z_{ab}$$

$$Z_m = z_{ab} + z_{ac} - 2z_{ab}$$

Điều quan trọng của giả thiết trên là ở chỗ, đối với đường dây cân bằng có thể kiểm tra rằng:

$$\mathbf{Z}_{012} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Z}_{abc}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} Z_s + 2Z_m & & \\ & Z_s - Z_m & \\ & & Z_s - Z_m \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

tức là $\mathbf{Z}_{012}$ trở thành ma trận đường chéo, và do đó hệ phương trình (3.25) sẽ tách được thành 3 phương trình độc lập:

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= (Z_s + 2Z_m)\, i_0 := Z_0\, i_0 \\ \Delta u_1 &= (Z_s - Z_m)\, i_1 := Z_1\, i_1 \\ \Delta u_2 &= (Z_s - Z_m)\, i_2 := Z_2\, i_2 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Như ta đã thấy, ma trận tổng trở $\mathbf{Z}_{012}$ chỉ còn lại 3 đại lượng Z_0, Z_1 *và* Z_2 được gọi lần lượt là *tổng trở thứ tự không, tổng trở thứ tự thuận và tổng trở thứ tự nghịch*. Viết lại các đại lượng này, ta có:

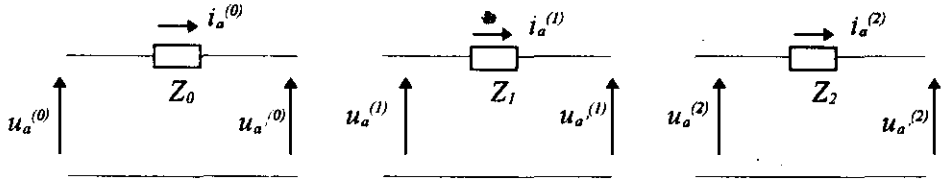
$$\begin{aligned} Z_0 &= Z_s + 2Z_m = z_{aa} + 2z_{ab} + 3z_{bb} - 6z_{ab} \\ Z_1 &= Z_2 = Z_s - Z_m = z_{aa} - z_{ab} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Như vậy chỉ riêng tổng trở thứ tự 0 phụ thuộc vào đất- đường trở về. Tổng trở thuận và nghịch bằng nhau và không chịu ảnh hưởng của đất (đường trở về).

Trở lại kết luận quan trọng đã rút ra: Chế độ 3 pha không đối xứng trên đường dây cân bằng có thể được nghiên cứu trên các đại lượng thứ tự thuận, nghịch và không một cách độc lập với nhau, đồng thời ta có thể mô hình hoá bởi 3 mạch điện độc lập: *mạch thứ tự thuận, mạch thứ tự nghịch và mạch thứ tự không* (hình 3.10).

Nói tóm lại nhờ biến đổi các thành phần đối xứng, chế độ 3 pha không đối xứng có thể được nghiên cứu trên 3 lưới điện một dây. Trong đó lưới thuận và nghịch của đường dây truyền tải điện là đồng nhất $Z_1 = Z_2$. Riêng tổng trở thứ tự 0

có giá trị khác, cụ thể điện kháng X_0 của đường dây trên không thường lớn gấp 2-3 lần X_1 (X_2) , điều đó là do dòng thứ tự 0 trùng pha nhau trong các pha và gây ra trường từ rất khác so với hai thành phần kia.



Hình 3.10

Chú ý rằng biến đổi các thành phần đối xứng cũng cho phép nghiên cứu hệ thống 3 pha trong trường hợp đối xứng như *một* hệ thống một pha. Như ta đã thấy khi hệ là đối xứng thì $u_a = u_1$ và $i_a = i_1$ đồng thời chỉ cần tính cho pha a. Do đó ta sẽ nghiên cứu hệ trên lưới điện thứ tự thuận, ứng với phương trình trong (3.28):

$$\Delta u_1 = Z_1 i_1 = (Z_s - Z_m) i_1$$

Công suất 3 pha $S_{abc} = 3\dot{i}_1^* u_1$. Nhận xét rằng ta không để ý đến hỗ cảm nữa, nó đã bao gồm trong tổng trở thứ tự thuận. Cũng có thể xét trường hợp đường dây không cân bằng, khi đó sẽ chỉ thay Z_1 trong phương trình trên (và lưới thứ tự thuận) bởi phần tử ứng với thành phần thuận trên đường chéo của ma trận $\mathbf{Z}_{012}$; có thể kiểm tra rằng nó chính bằng trung bình cộng các tổng trở riêng trong ma trận (3.23) trừ đi trung bình cộng các tổng trở tương hỗ, có nghĩa là về cơ bản giống với công thức của Z_1.

Phương pháp nói trên phân tích chế độ bình thường (đối xứng) của lưới điện chính là phương pháp vẫn được sử dụng quen thuộc trong tính toán lưới điện.

3.4.2 Mạch điện thành phần đối xứng của máy biến áp và máy điện đồng bộ

Trước hết nhận xét rằng các pha trong máy biến áp và máy điện đồng bộ đều cân bằng (đối xứng) so với nhau, do đó ta cũng có các mạch điện thành phần độc lập nhau như đối với đường dây cân bằng, ứng với khái niệm về 3 tổng trở thứ tự.

Ta biết rằng mỗi cuộn dây của máy biến áp được nối vào đường dây 3 pha theo sơ đồ hình sao hoặc tam giác. Từ nhận xét ở cuối mục 3.3 ta thấy rằng thành phần thứ tự 0 có thể tồn tại hay không tồn tại tuỳ thuộc vào sơ đồ nối dây cụ thể của máy biến áp, do đó mạch thay thế thứ tự 0 cũng thay đổi theo. Về phần mạch thứ

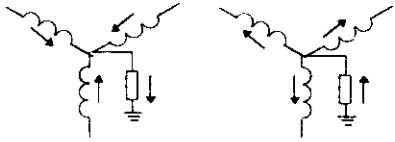
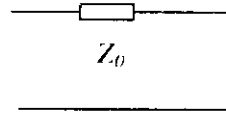
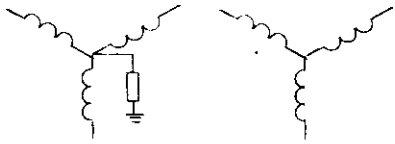
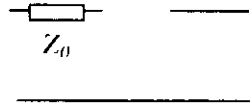
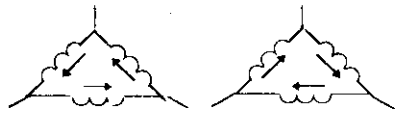
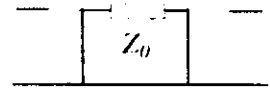
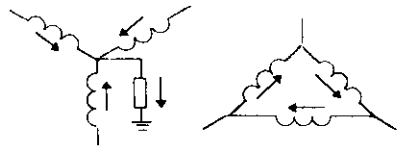
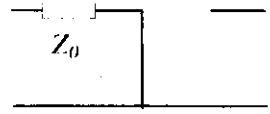
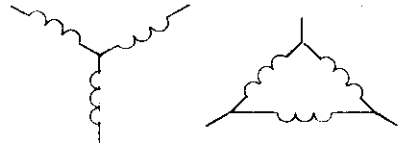
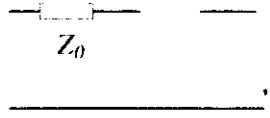
tự thuận và nghịch, ta có hai tổng trở Z_1 *và* Z_2 của máy biến áp là bằng nhau, cũng như đối với đường dây hay mọi thiết bị tĩnh khác. Do sự nối dây khác nhau của các cuộn dây sơ cấp và thứ cấp, thành phần thuận và nghịch của cuộn dây này có thể lệch pha so với cuộn dây kia.

Bảng dưới đây cho sơ đồ mạch thứ tự 0 ứng với các kiểu nối dây khác nhau của máy biến áp. Mũi tên chỉ dòng thứ tự 0 khi nó tồn tại.

Nhận xét:

- Không tồn tại dòng I_0 trong cuộn dây nối Y và trong mạch ngoài cuộn dây nối Δ.
- Nếu trong một cuộn dây không tồn tại đường cho I_0 thì dòng này cũng không thể tồn tại trong cuộn dây kia của máy biến áp (ví dụ trường hợp nối Y_0–Y)
- Trường hợp cuộn dây nối Y_0 với một tổng trở ở trung tính, tổng trở thứ tự 0 của nó phải bao gồm 3 lần giá trị tổng trở trung tính (như đã nêu trong nhận xét ở cuối mục 3.3). Điều này cũng đúng đối với mọi thiết bị có trung tính nối đất qua một tổng trở (ví dụ máy phát điện). Trái lại các mạch thứ tự thuận và nghịch không bao gồm các tổng trở trung tính.
- Về giá trị có thể lấy xấp xỉ bằng nhau cho cả 3 tổng trở thành phần thứ tự của máy biến áp.
- Trong sơ đồ nối Y–Δ hay Δ–Y, dòng áp thứ tự thuận và nghịch sẽ dịch pha 30^0 giữa sơ cấp và thứ cấp của máy biến áp. Tuỳ theo chuẩn chế tạo máy biến áp, thường dòng áp thuận sẽ dịch pha $+30^0$ khi chuyển từ phía hạ áp tới phía cao áp và dòng áp nghịch sẽ dịch pha -30^0.

Đối với máy điện đồng bộ bao gồm máy phát điện, ta có trung tính thường nối đất qua một điện kháng. Do đó có thể tồn tại thành phần thứ tự 0 trong máy. Tuy nhiên dòng điện thành phần này hoàn toàn trùng nhau trong các pha được đặt đối xứng quanh stator tạo nên một sức từ động tổng gần bằng 0 ở mọi điểm không gian, ứng với điện kháng thứ tự 0 nhỏ so với hai điện kháng kia (chưa kể sự tham gia của điện kháng trung tính vào mạch thứ tự 0). Ngoài ra không giống như ở thiết bị tĩnh, điện kháng thứ tự nghịch sẽ khác điện kháng thứ tự thuận trong các máy điện quay; điều đó là do từ trường quay sinh ra bởi dòng thứ tự nghịch là ngược chiều quay so với từ trường quay của cuộn dây rotor. Điều kiện này qui định giá trị X_2 gần với điện kháng siêu quá độ của máy. Do đó trong tính toán ngắn mạch siêu quá độ, ta có thể lấy X_1 và X_2 đều xấp xỉ bằng điện kháng siêu quá độ.

Kí hiệu	Sơ đồ nối dây	Mạch thứ tự 0
$Y_0 - Y_0$		
$Y_0 - Y$		
$\Delta - \Delta$		
$Y_0 - \Delta$		
$Y - \Delta$		

Trong 3 mạch điện thành phần, riêng mạch thứ tự thuận của máy phát điện sẽ chứa nguồn s.đ.đ. của máy (vì s.đ.đ. này là đối xứng thứ tự thuận).

Như vậy chúng ta đã có mạch điện thành phần đối xứng của các phần tử của lưới điện. Bây giờ ta sẽ nối các mạch thứ tự thuận của các phần tử lưới lại với nhau để thu được lưới điện thứ tự thuận. Lưới điện thứ tự nghịch chỉ khác lưới thuận ở chỗ không có nguồn s.đ.đ. và điện kháng máy điện quay có thể có giá trị khác. Tương tự ta cũng ghép nối các phần tử thứ tự không để lập ra lưới điện thứ tự không.

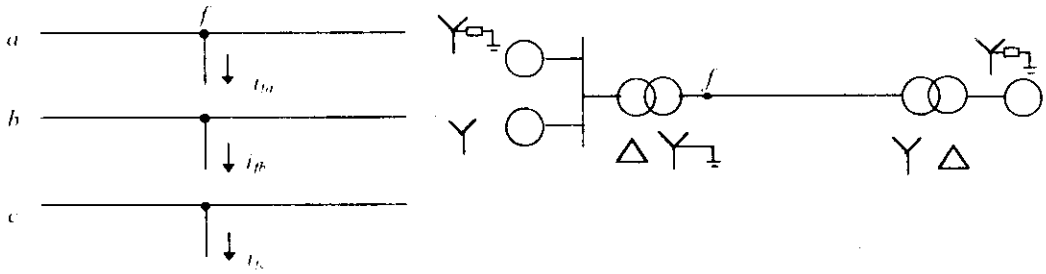
Việc sử dụng 3 lưới điện thành phần này để tính toán các chế độ không đối xứng sẽ được trình bày trong phần tiếp theo.

3.5 Tính toán hư hỏng không đối xứng

Tình trạng làm việc không đối xứng hay gặp trong các hư hỏng thông thường của lưới điện như ngắn mạch một pha chạm đất, ngắn mạch hai pha, hư hỏng đứt dây, hoặc trong các trường hợp thiết bị bảo vệ cắt riêng pha hay cắt 3 pha không đồng thời.

Xét một tình trạng ngắn mạch không đối xứng nào đó xảy ra tại điểm *f* trong lưới điện. Chúng ta sẽ quan tâm trước tiên đến dòng điện ngắn mạch tại *f*- tức là dòng đi ra khỏi lưới điện bình thường, xuất hiện do hư hỏng. Hình 3.11a biểu diễn điểm *f* trên lưới điện 3 pha và dòng ngắn mạch i_f.

Theo các kết quả thu được trong hai mục trước, chúng ta sẽ tổng hợp dòng

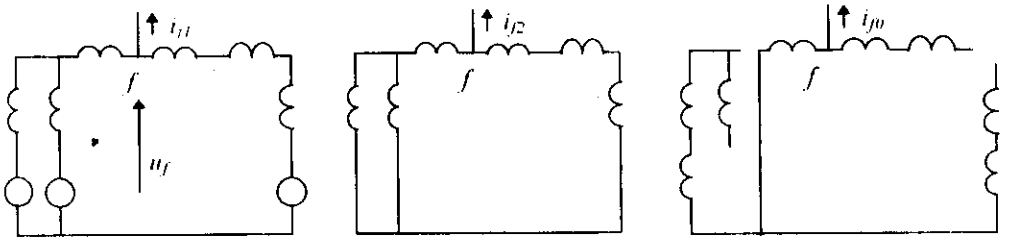


(a) *(b)*

Hình 3.11

ngắn mạch từ các dòng thành phần thuận, nghịch và không; mỗi dòng được xác định độc lập từ một lưới điện thành phần tương ứng.

Để minh hoạ cụ thể ta xét lưới điện hình 3.11b, các sơ đồ mạch thành phần đối xứng của nó được vẽ trên hình 3.12 theo qui tắc đã thiết lập ở mục trước.



(a) Lưới thuận *(b) Lưới nghịch* *(c) Lưới không*

Hình 3.12

u_f là điện áp trước ngắn mạch, chỉ tồn tại ở lưới thứ tự thuận.

3.5.1 *Ngắn mạch một pha*

Giả sử ngắn mạch tại điểm *f* là ngắn mạch một pha (chạm đất). Gọi pha chạm đất là pha *a*. Dòng áp tại điểm ngắn mạch thoả mãn:

$$u_{fa} = 0 \quad hay \quad u_{fa} = 3\, z_f\, i_{f0} \text{ nếu tổng trở chạm đất là } z_f \neq 0 \qquad (3.30)$$

$$i_{fb} = i_{fc} = 0$$

Từ đó theo quan hệ giữa dòng pha và dòng thành phần đối xứng, có dạng biểu thức (3.16) nhưng viết cho dòng, ta có:

$$\begin{aligned} i_{f0} &= \frac{1}{3}(i_{fa} + i_{fb} + i_{fc}) = \frac{i_{fa}}{3} \\ i_{f1} &= \frac{1}{3}(i_{fa} + a i_{fb} + a^2 i_{fc}) = \frac{i_{fa}}{3} \\ i_{f2} &= \frac{1}{3}(i_{fa} + a^2 i_{fb} + a i_{fc}) = \frac{i_{fa}}{3} \end{aligned} \qquad (3.31)$$

và theo (3. 15):

$$u_{fa} = u_{f0} + u_{f1} + u_{f2} = 3\, z_f i_{f0} \qquad (hoặc\ bằng\ 0) \qquad (6.32)$$

Như vậy 3 dòng ngắn mạch thành phần i_{f0}, i_{f1} *và* i_{f2} là bằng nhau còn tổng ba điện áp thành phần tại điểm ngắn mạch bằng điện áp rơi trên tổng trở ngắn mạch. Điều kiện này có thể được biểu diễn bằng cách *ghép nối tiếp 3 lưới điện thành phần*. Lấy thí dụ lưới điện hình 3.11, 3.12 ta có sơ đồ hình 3.13a.

Thay thế lưới điện giữa nút *f* và nút cơ sở-cân bằng bởi mạch tương đương Thevenin, ta đi tới sơ đồ *hình 3.13b*, trong đó $Z_{ff}^{(1)}$, $Z_{ff}^{(2)}$, $Z_{ff}^{(0)}$ là tổng trở tương đương của lưới điện thuận, nghịch, không khi nhìn từ nút *f*. Chúng cũng chính là phần tử *ff* của *ma trận tổng trở nút của các lưới này*. Từ đó ta có thể tính các dòng ngắn mạch thành phần:

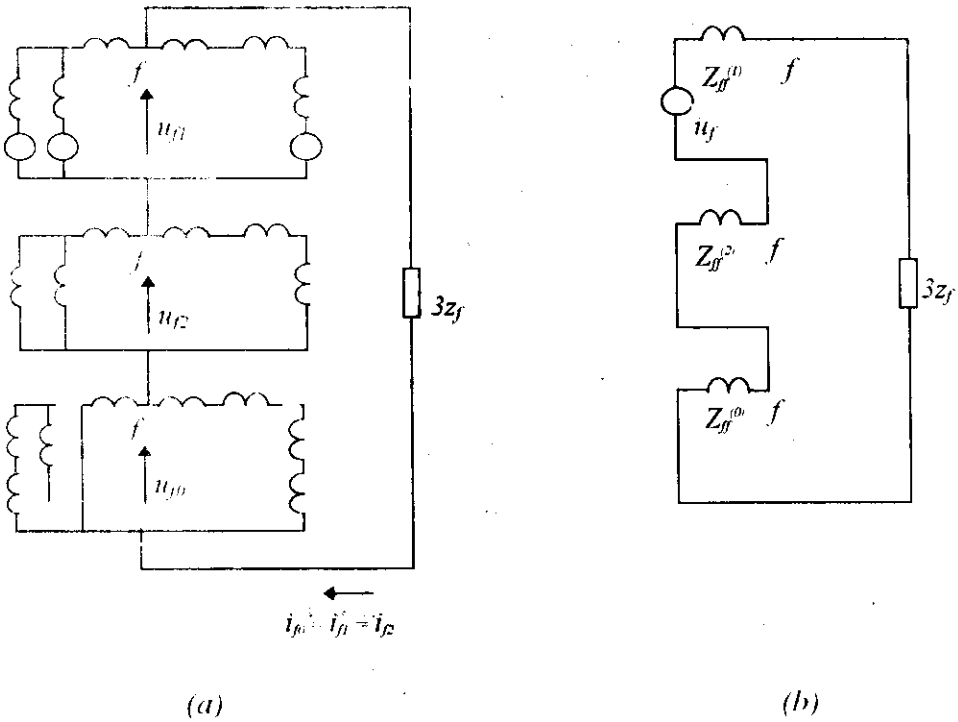
$$i_{f0} = i_{f1} = i_{f2} = \frac{u_f}{Z_{ff}^{(1)} + Z_{ff}^{(2)} + Z_{ff}^{(0)} + 3z_f} \qquad (3.33)$$

và sau đó tính dòng ngắn mạch i_{fa}.

Biết các dòng ngắn mạch thành phần, ta lại có thể tính điện áp thành phần ở nút bất kì, cũng như dòng thành phần trên các nhánh, sử dụng các lưới điện thành phần như trên hình 3.12. Ta cũng có thể dùng các phần tử của các ma trận tổng trở nút $\mathbf{Z}^{(1)}$, $\mathbf{Z}^{(2)}$, $\mathbf{Z}^{(0)}$ theo công thức tương tự như đã dẫn ở mục 3.2, chẳng hạn điện áp

thành phần ở nút k nào đó[1] :

$$\begin{aligned} u_{k0} &= -Z_{kf}^{(0)} i_{f0} \\ u_{k1} &= u_f - Z_{kf}^{(1)} i_{f1} \\ u_{k2} &= -Z_{kf}^{(2)} i_{f2} \end{aligned} \qquad (3.34)$$



Hình 3.13

3.5.2 *Ngắn mạch hai pha chạm đất*

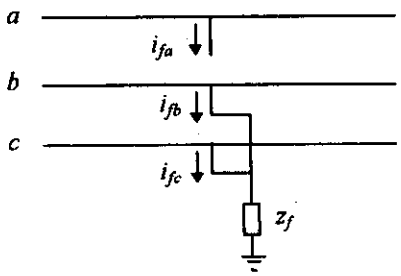
Xét sơ đồ ngắn mạch trên *hình 3.14:* Gọi hai pha sự cố là b và c, điểm sự cố là f (chạm đất qua một tổng trở z_f), ta có điều kiện đối với dòng áp ngắn mạch

[1] Chú ý điện áp thành phần qua máy biến áp nối Y-Δ phải dịch pha 30^0

$$u_{fb} = u_{fc} = (i_{fb} + i_{fc})\, z_f \qquad (3.35)$$
$$i_{fa} = 0$$

Vì $i_{fa} = 0$ nên ta có $i_{f0} = (i_{fa} = i_{fb} + i_{fc})/3 = (i_{fb} + i_{fc})/3$. Do đó điều kiện điện áp trong (3.35) trở thành:

$$u_{fb} = u_{fc} = 3\, z_f i_{f0} \qquad (3.36)$$



Hình 3.14

Dùng biến đổi các thành phần đối xứng (3. 16) ta có

$$u_{f0} = \tfrac{1}{3}(u_{fa} + u_{fb} + u_{fc})$$
$$u_{f1} = \tfrac{1}{3}(u_{fa} + a u_{fb} + a^2 u_{fc}) \qquad (6.37)$$
$$u_{f2} = \tfrac{1}{3}(u_{fa} + a^2 u_{fb} + a u_{fc})$$

Vì $u_{fb} = u_{fc}$ nên suy ra $u_{f1} = u_{f2}$, còn đối với thành phần thứ tự không ta có:

$$3\, u_{f0} = u_{fa} + 2\, u_{fb} = (u_{f0} + u_{f1} + u_{f2}) + 2\,(3 z_f i_{f0})$$

trong đó đã sử dụng phương trình (3. 15) cho u_{fa} và (3.36) cho u_{fb}.

$$2\, u_{f0} = 2\, u_{f1} + 2\,(3 z_f i_{f0});$$
$$u_{f1} = u_{f0} - 3\, z_f i_{f0}$$

Tóm lại điều kiện ngắn mạch này dẫn đến điều kiện sau đối với các thành phần đối xứng:

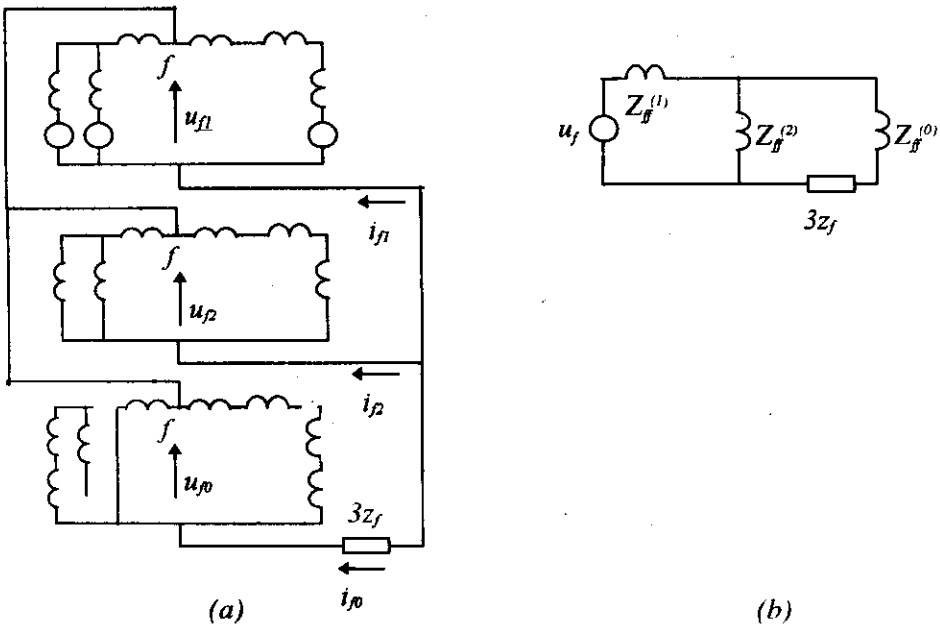
$$u_{f1} = u_{f2} = u_{f0} - 3\, z_f i_{f0} \qquad (3.38)$$
$$i_{f0} + i_{f1} + i_{f2} = 0$$

trong đó phương trình thứ hai thể hiện điều kiện $i_{fa} = 0$.

Như vậy trong ngắn mạch hai pha chạm đất, nếu tổng trở chạm đất $z_f = 0$ thì 3 điện áp thành phần tại điểm ngắn mạch bằng nhau và tổng 3 dòng ngắn mạch thành phần bằng 0. Điều kiện này có thể thực hiện bằng cách *ghép song song 3 lưới điện thành phần tại điểm ngắn mạch*. Trường hợp $z_f \neq 0$ sơ đồ thay đổi chút ít. Lấy thí dụ lưới điện hình 3.11, 3.12 ta có sơ đồ tính toán hình 3.15a.

Sử dụng mạch tương đương Thevenin tại điểm ngắn mạch ta có sơ đồ tương đương hình 3.15b. Sơ đồ này cũng mô tả cách tính toán dựa trên ma trận tổng trở nút.

Từ các sơ đồ này chúng ta có thể tính dòng, áp thành phần tại điểm ngắn mạch cũng như tại các điểm khác trong lưới. Từ đó có thể suy ra các dòng pha.



Hình 3.15

3.5.3 *Ngắn mạch hai pha*

Điều kiện ngắn mạch hai pha- giả sử là pha *b* và *c*- biểu diễn bởi:

$$u_{fb} = u_{fc} \tag{3.39}$$
$$i_{fb} = -i_{fc}$$
$$i_{fa} = 0$$

Từ điều kiện $u_{fb} = u_{fc}$ suy ra $u_{f1} = u_{f2}$ - giống như ở mục trước (ngắn mạch hai pha chạm đất). Còn đối với dòng điện thành phần, ta có từ điều kiện trên:

$$i_{f0} = \tfrac{1}{3}(i_{fa} + i_{fb} + i_{fc}) = 0$$
$$i_{f1} = \tfrac{1}{3}(i_{fa} + ai_{fb} + a^2 i_{fc}) = \tfrac{1}{3}(0 + ai_{fb} - a^2 i_{fb})$$
$$i_{f2} = \tfrac{1}{3}(i_{fa} + a^2 i_{fb} + ai_{fc}) = \tfrac{1}{3}(0 + a^2 i_{fb} - ai_{fb}) = -i_{f1}$$

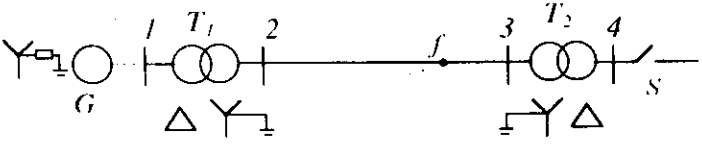
Tóm lại các điều kiện sau đây thoả mãn đối với dòng áp thành phần đối xứng:

$$u_{f1} = u_{f2}$$
$$i_{f1} = -i_{f2} \tag{3.40}$$
$$i_{f0} = 0$$

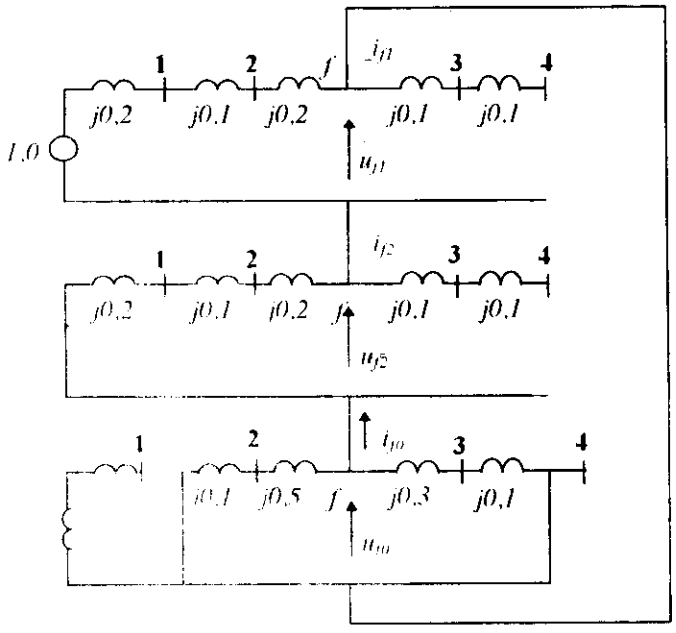
Điều kiện này tương ứng với việc bỏ qua lưới điện thứ tự không (do trong dạng ngắn mạch này không tồn tại dòng thứ tự không) và nối song song hai lưới điện thứ tự thuận và nghịch tại điểm ngắn mạch.

3.5.4 *Thí dụ*

Thí dụ sau đây[1] tính toán ngắn mạch một pha trực tiếp tại một điểm *f* trên đường dây ở hình 3.16a.



(a)



(b)

Hình 3.16

[1] Lấy từ [6].

Các thông số được cho như sau:

- Máy phát: 100 MVA; 20 kV

  $X'' = X_2 = 20\ \%$; $X_0 = 4\ \%$; $X_n = 5\ \%$ (điện kháng trung tính)

- Máy biến áp T_1 và T_2: 100 MVA; 20Δ / 345Y kV; $X = 10\ \%$

- Điện kháng đường dây trong đơn vị tương đối với cơ sở 100 MVA; 345 kV:

  Từ T_1 tới *f*: $X_1 = X_2 = 20\ \%$ $X_0 = 50\ \%$

  Từ T_2 tới *f*: $X_1 = X_2 = 10\ \%$ $X_0 = 30\ \%$

Sơ đồ tính toán dùng các giá trị điện kháng trong đơn vị tương đối đã cho tại mỗi cấp điện áp, với các đại lượng cơ sở bằng định mức.

Ghép nối tiếp các lưới điện thành phần đối xứng tại điểm *f*, ta có sơ đồ tính toán hình 3.16b. Điện áp trước ngắn mạch tại *f* lấy bằng 1 (khoá S mở, không có dòng trước sự cố).

Tổng trở nhìn từ điểm *f* của các lưới thành phần là:

$$Z_{ff}^{(0)} = j0,6 \,//\, j0,4 = j0,24 \text{ p.u}$$
$$Z_{ff}^{(1)} = Z_{ff}^{(2)} = j0,5 \text{ p.u}$$

Dòng ngắn mạch thành phần:

$$i_{f0} = i_{f1} = i_{f2} = 1 / (j0,5 + j0,5 + j0,24) = -j0,8065$$

Dòng ngắn mạch thực (ngắn mạch trên pha *a*):

$$i_{fA} = 3i_{f0} = -j2,4195$$

Dòng ngắn mạch trên hai pha lành (hiểu là dòng đi ra khỏi lưới) $i_{fB} = i_{fc} = 0$ tuy nhiên các thành phần đối xứng của chúng tồn tại, chẳng hạn tính theo công thức tương tự (3. 15) cho dòng điện pha *b*:

$$i_{fB}^{(0)} = i_{f0} = 0,8065 \angle -90^0$$

$$i_{fB}^{(1)} = a^2 i_{f1} = a^2 i_{f0} = 0,8065 \angle -90^0 + 240^0 = 0,8065 \angle 150^0$$

$$i_{fB}^{(2)} = a\, i_{f2} = a\, i_{f0} = 0,8065 \angle -90^0 + 120^0 = 0,8065 \angle 30^0$$

Tổng 3 thành phần này bằng 0.

Tiếp theo ta xác định dòng trên hai phía đường dây đi đến điểm ngắn mạch.

Dòng thành phần: Dòng ngắn mạch thứ tự không i_{f0} tính ở trên được phân phối ra hai mạch song song (xem lưới điện thứ tự 0):

$$i_{T1\text{-}f,0} = j0,4 / (j0,6 + j0,4).\ 0,8065 \angle -90^0 = 0,3226 \angle -90^0$$

$$i_{T2\text{-}f,0} = j0,6 / (j0,6 + j0.4).\ 0,8065 \angle -90^0 = 0,4839 \angle -90^0$$

Dòng thứ tự thuận và nghịch đi tới *f* chỉ từ phía T_1 vì phía T_2 hở mạch, do đó:

$$i_{T1\text{-}f,1} = i_{f1} = -\,j0,8065$$

$$i_{T1\text{-}f,2} = i_{f2} = -\,j0,8065$$

Dòng pha:

$$i_{T1\text{-}f,A} = i_{T1\text{-}f,0} + i_{T1\text{-}f,1} + i_{T1\text{-}f,2}$$

$$= 0,3226 \angle -90^0 + 0,8065 \angle -90^0 + 0,8065 \angle -90^0 = -\,j1,9356$$

$$i_{T1\text{-}f,B} = i_{T1\text{-}f,0} + a^2\, i_{T1\text{-}f,1} + a\, i_{T1\text{-}f,2}$$

$$= 0,3226 \angle -90^0 + 0,8065 \angle 150^0 + 0,8065 \angle 30^0 = j0,4839$$

$$i_{T1\text{-}f,C} = 0,3226 \angle -90^0 + 0,8065 \angle 30^0 + 0,8065 \angle 150^0 = j0,4839$$

Dòng đến từ phía T_2 là dòng thứ tự không:

$$i_{T2\text{-}f,A} = i_{T2\text{-}f,B} = i_{T2\text{-}f,C} = -\,j0,4839$$

Qua máy biến áp T_1 nối Y-Δ sang phía hạ áp, dòng điện thứ tự thuận và nghịch sẽ dịch pha -30^0 và $+30^0$ tương ứng. Do đó dòng trong máy phát G sẽ là:

$$i_{G,a} = i_{G0} + i_{G1} + i_{G2} = 0 + 0,8065 \angle -90^0 - 30^0 + 0,8065 \angle -90^0 + 30^0 = -\,j1,3969$$

$$i_{G,b} = i_{G0} + a^2\, i_{G1} + a\, i_{G2} = 0 + 0,8065 \angle -120^0 + 240^0 + 0,8065 \angle -60^0 + 120^0 = j1,3969$$

$$i_{G,c} = i_{G0} + a\, i_{G1} + a^2\, i_{G2} = 0 + 0,8065 \angle -120^0 + 120^0 + 0,8065 \angle -60^0 + 240^0 = 0$$

Dòng thứ tự 0 không thể ra khỏi cuộn dây Δ của T_1 do đó không xuất hiện trong mạch máy phát. Ta cũng nhận thấy dòng sự cố không xuất hiện trong pha c của máy phát.

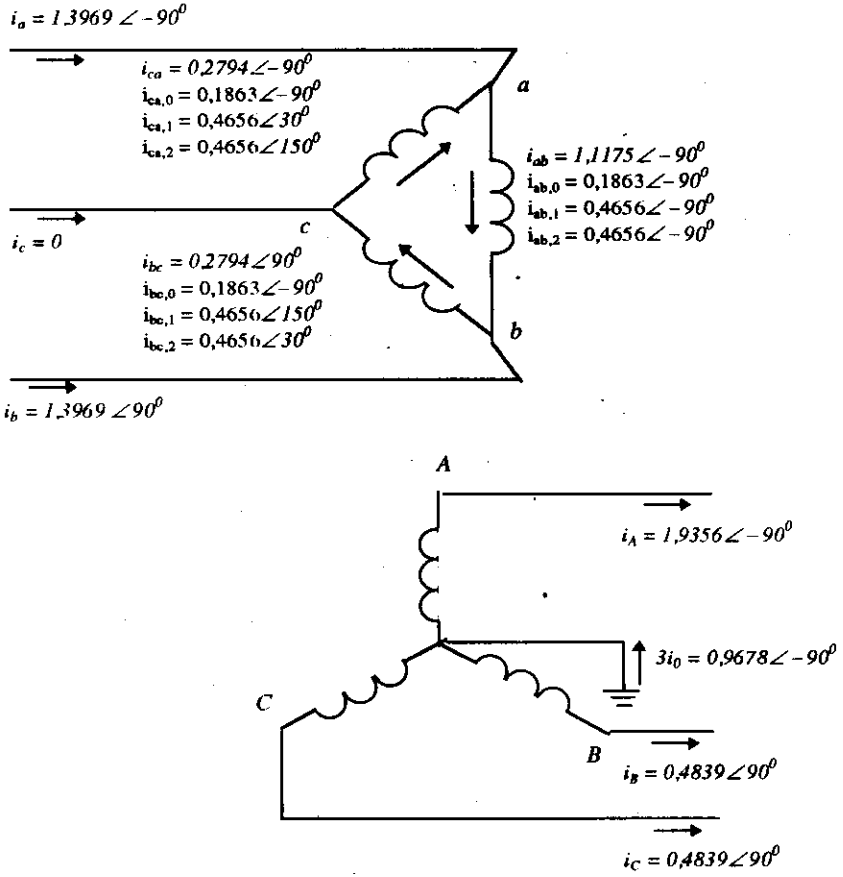
Cũng có thể xác định dòng trong các cuộn dây máy biến áp: Phía cao áp của T_1 có dòng bằng dòng trên đường dây mà ở trên ta đã tính. Dòng trong cuộn dây tam giác ở đơn vị tương đối định mức nhỏ hơn $\sqrt{3}$ lần so với dòng trong cuộn sao:

$$i_{ab} = i_A / \sqrt{3} = -\,j1,9356 / \sqrt{3} = -\,j1,1175$$

$$i_{bc} = i_B / \sqrt{3} = j0,4839 / \sqrt{3} = j0,2794$$

$$i_{ca} = i_C / \sqrt{3} = j0,2794$$

Theo tỉ lệ này cũng xác định các dòng thành phần nếu cần. Kết quả được cho trên *hình 3.17* (chú ý các dòng thành phần trên 3 cuộn dây lập nên hệ vectơ đối xứng).



Hình 3.17

Nhận xét rằng trong cuộn dây tam giác của T_1 tồn tại dòng thứ tự không nhưng trong mạch ngoài không có dòng này. Còn trong cuộn tam giác của T_2 thì chỉ tồn tại dòng thứ tự không (giống như trong toàn bộ mạch bên phải điểm ngắn mạch).

3.5.5 *Hở mạch không đối xứng*

Hở mạch không đối xứng trên đường dây có thể xảy ra do gió bão làm đứt dây dẫn hay do thiết bị đóng cắt (cầu chì hay các thiết bị khác) chỉ cắt một hay hai pha. Như vậy hở mạch không đối xứng bao gồm các trường hợp một hay hai pha bị cắt tại một điểm nào đó trên đường dây.

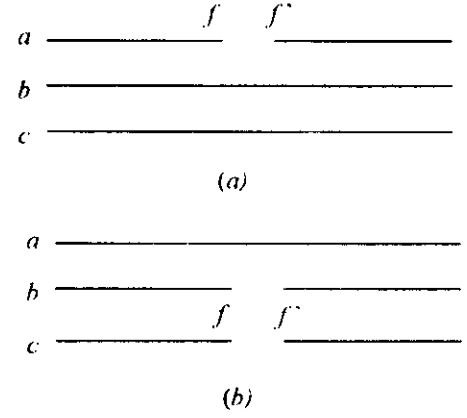
Giả sử nhánh (đường dây) giữa hai nút *k-m* bị đứt mạch pha *a* hoặc hai pha *b* và *c* tại điểm *f*. Gọi *f* và *f'* là hai điểm tạo nên do đứt mạch (hình 3.18).

Trường hợp hở mạch một pha *a* ta có các điều kiện tại điểm hở mạch- cặp nút *f-f'*:

$$i_a = 0 \qquad (3.41)$$

$$v_b = v_c = 0$$

trong đó kí hiệu *v* là điện áp rơi giữa *f-f'*. Vì chỉ pha *a* bị hở mạch nên chỉ có $v_a \neq 0$.



Hình 3.18

Điều kiện đó chuyển sang điều kiện đối với các thành phần đối xứng- sử dụng các công thức chuyển đổi dạng (3. 15),(3. 16)- cho ta:

$$i_0 + i_1 + i_2 = 0 \qquad (3.42)$$

$$v_0 = v_1 = v_2 = v_a / 3$$

Như vậy để thực hiện điều kiện này, ta sẽ ghép song song 3 lưới điện thành phần tại cặp nút *f-f'*. *Hình 3.19* vẽ các lưới điện đó, chúng được suy ra từ các lưới điện nhìn từ cặp nút *k-m* trước sự cố (tức là bao gồm cả nhánh đường dây *k-m*) như sau:

Loại bỏ nhánh *k-m* bằng cách ghép thêm nhánh tổng trở $-z$ giữa hai nút *k-m*, sau đó thêm hai nhánh *k-f* có tổng trở z_{kf} và *m-f'* có tổng trở z_{mf} biểu diễn hai nửa đường dây nối tới điểm hở mạch *f*. Trên hình 3.19 các lưới điện nhìn từ cặp nút *k-m* đã được thay thế bởi mạch tương đương Thevenin.

Từ hình này ta có thể tính thông số mạch Thevenin cho cặp nút *f-f'*:

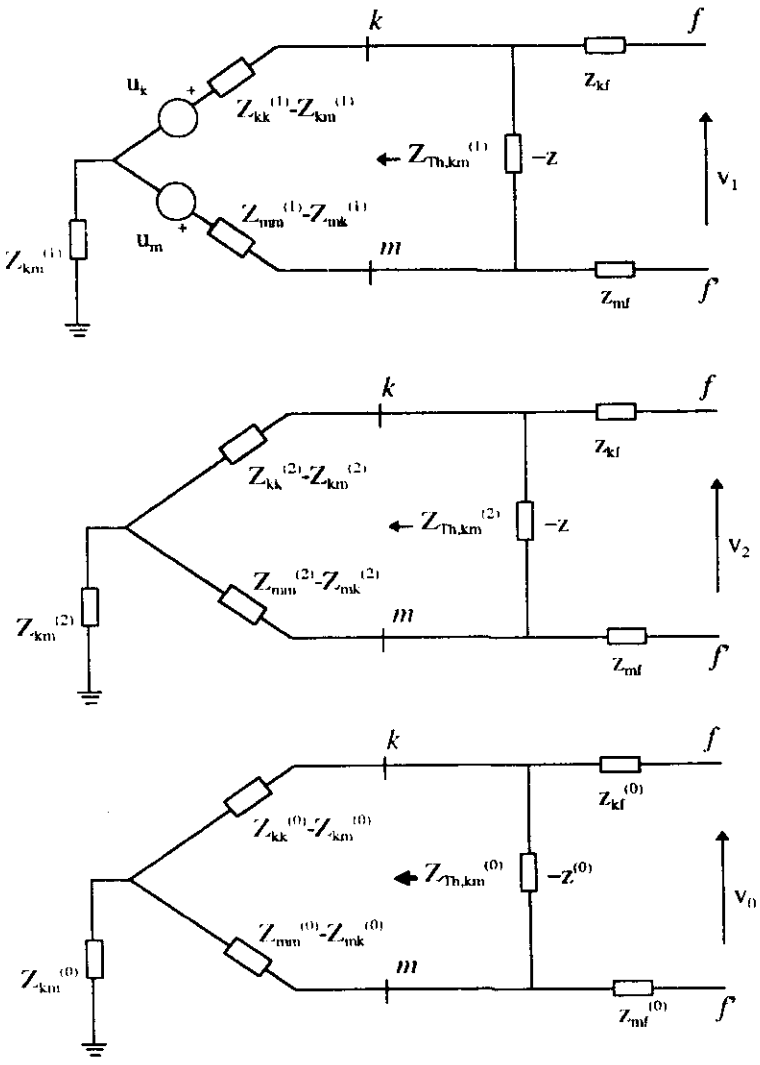
- Tổng trở Thevenin:

$$Z_{ff'}^{(1)} = z_{kf} + Z_{Th.km}^{(1)} // (-z) + z_{mf} = \frac{-z^2}{Z_{Th.km}^{(1)} - z} \qquad (3.43)$$

(chú ý $z_{kf} + z_{mf} = z$). Tương tự ta có công thức cho $Z_{ff'}^{(2)}$ và $Z_{ff'}^{(0)}$.

- Điện áp Thevenin giữa *f-f'* tính như áp giáng trên tổng trở $-z$:

$$E = -z \frac{u_k - u_m}{Z_{Th.km}^{(1)} - z} = \frac{Z_{ff'}^{(1)}}{z} (u_k - u_m) = Z_{ff'}^{(1)} i_{km} \qquad (3.44)$$



Hình 3.19

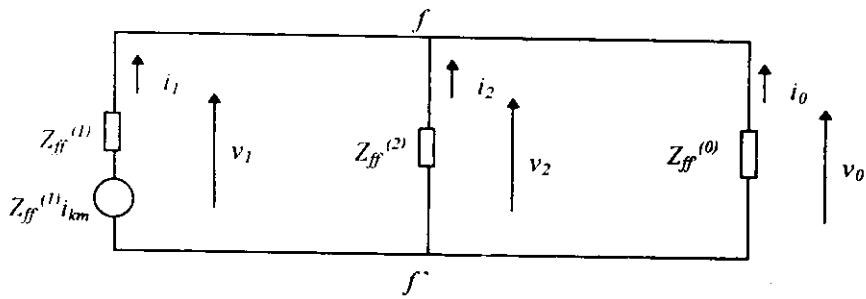
trong đó $i_{km} = (u_k - u_m)/z$ là dòng nhánh *k-m* trước sự cố.

Bây giờ theo kết luận ở trên, ta sẽ ghép song song 3 lưới điện thành phần tại cặp nút *f-f'* và được sơ đồ hình 3.20.

Sơ đồ này cho phép tính các dòng áp thành phần cho ở (3.42) tại điểm hở mạch:

$$i_1 = i_{km}\frac{Z_{ff'}^{(1)}}{Z_{ff'}^{(1)} + (Z_{ff'}^{(2)} // Z_{ff'}^{(0)})}$$
$$v_0 = v_1 = v_2 = i_1(Z_{ff'}^{(2)} // Z_{ff'}^{(0)}) \qquad (3.45)$$

Nếu để ý rằng i_{km} và i_1 là các dòng điện thuận trên nhánh k-m trước và sau khi hở mạch một pha, thì ta có thể nhận xét rằng sự cố này làm tăng tổng trở truyền thứ tự thuận qua đường dây lên một lượng bằng $(Z_{ff}^{(2)} // Z_{ff}^{(0)})$.



Hình 3.20

Tiếp theo chúng ta xem xét trường hợp hở mạch không đối xứng thứ hai là *hở mạch hai pha*, mà ta gọi là pha b và c. Bây giờ điều kiện là:

$$v_a = 0$$
$$i_b = i_c = 0 \qquad (3.46)$$

suy ra:

$$v_0 + v_1 + v_2 = 0$$
$$i_0 = i_1 = i_2 = i_a/3 \qquad (3.47)$$

tức là một *điều kiện đối ngẫu* so với trường hợp hở mạch một pha. Điều kiện này tương ứng việc ghép nối tiếp các lưới điện thành phần tại điểm f-f' (hình 3.21).

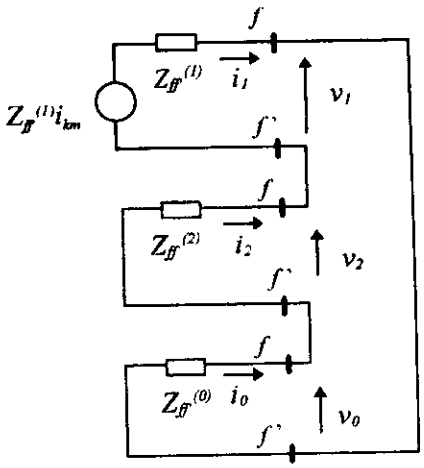
Từ đó suy ra:

$$i_0 = i_1 = i_2 = i_{km} \frac{Z_{ff'}^{(1)}}{Z_{ff'}^{(1)} + Z_{ff'}^{(2)} + Z_{ff'}^{(0)}} \quad (3.48)$$

$$v_1 = i_1 (Z_{ff'}^{(2)} + Z_{ff'}^{(0)})$$

$$v_2 = -i_2 Z_{ff'}^{(2)}$$

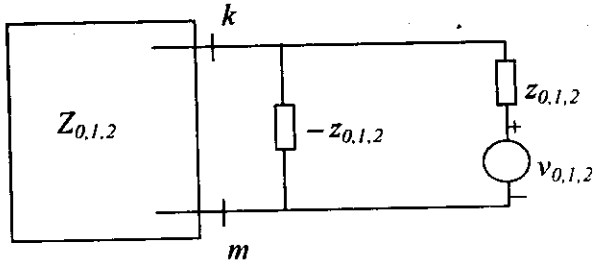
$$v_0 = -i_0 Z_{ff'}^{(0)}$$



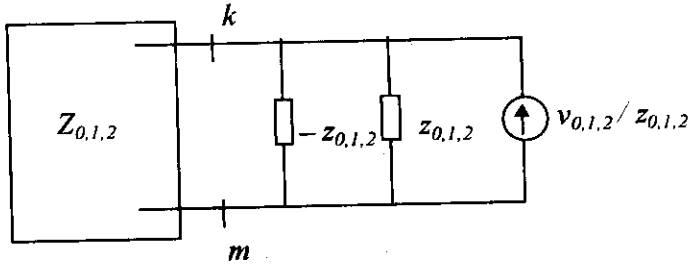
Hình 3.21

Như vậy nhận xét rằng sự cố hở mạch hai pha làm tăng tổng trở truyền thứ tự thuận qua đường dây lên một lượng bằng $(Z_{ff'}^{(2)} + Z_{ff'}^{(0)})$.

Cuối cùng chúng ta lưu ý rằng để xác định sự thay đổi điện áp tại một nút j bất kì trong lưới do sự cố hở mạch không đối xứng trên đường dây k-m, ta cũng có thể dựa trên ma trận tổng trở nút của lưới điện bình thường (trước sự cố). Thật vậy các lưới điện thành phần trong sự cố như trên hình 3.19 có dạng hình 3.22a sau đây (trong đó kí hiệu tắt các đại lượng có thể cùng là thành thứ tự không, hoặc cùng là thứ tự thuận hay cùng là thứ tự nghịch).



(a)



(b)

Hình 3.22

Nếu thay thế "nguồn áp" v ghép nối tiếp với tổng trở z bởi nguồn dòng ghép song song với tổng trở, ta có sơ đồ hình 3.22b, từ đó có thể loại bỏ hai nhánh z và $-z$ ghép song song, và chuyển nguồn dòng tới hai nút k,m. Do đó có thể

kết luận rằng: Sự cố hở mạch không đối xứng trên nhánh *k-m* tác động đến các *lưới thành phần* giống như khi đặt thêm tới nút *k* nguồn dòng thành phần có giá trị bằng $v_{0,1,2} / z_{0,1,2}$ và đặt thêm tới nút *m* nguồn dòng cùng giá trị nhưng trái dấu.

Việc biểu diễn tương đương này cho phép suy ra sự thay đổi áp (thành phần) tại một nút bất kì trong lưới do sự cố hở mạch không đối xứng tại một đường dây; nó chính bằng điện áp nút đó khi chỉ có riêng hai dòng nút cộng thêm nói trên, như vậy ta có thể tính bằng cách nhân ma trận tổng trở nút $\mathbf{Z}^{(1)}$, $\mathbf{Z}^{(2)}$, $\mathbf{Z}^{(0)}$ của lưới trước sự cố (bao gồm đường dây *k-m*) với "dòng nút" vừa xác định. Từ đó suy ra rằng sự thay đổi điện áp thành phần ở nút *j* nào đó sẽ bằng:

$$\begin{aligned}
\Delta u_{j1} &= \frac{Z_{jk}^{(1)} - Z_{jm}^{(1)}}{z^{(1)}} v_1 \\
\Delta u_{j2} &= \frac{Z_{jk}^{(2)} - Z_{jm}^{(2)}}{z^{(2)}} v_2 \\
\Delta u_{j0} &= \frac{Z_{jk}^{(0)} - Z_{jm}^{(0)}}{z^{(0)}} v_0
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Nhắc lại rằng Z_{jk} là phần tử ma trận tổng trở nút thành phần tương ứng (trước sự cố); $z^{(1)}$, $z^{(2)}$, $z^{(0)}$ là tổng trở thành phần của đường dây *k-m*; còn v_1, v_2, v_0 là áp thành phần rơi trên điểm hở mạch (giữa điểm *f* và điểm *f'* ở hình 3.18).

4

Giải tích chế độ xác lập

4.1 Định nghĩa bài toán

Giải tích (chế độ xác lập của) lưới điện (PF: Power Flow, Load Flow Calculation) là xuất phát từ các phương trình chế độ xác lập để xác định phân bố dòng, áp, công suất trong lưới, bằng cách giải các phương trình này. Bài toán giải tích lưới được thực hiện trong nghiên cứu *qui hoạch (planning)* chẳng hạn cho một đường dây hoặc trạm cung cấp điện mới, một trung tâm phụ tải mới hoặc sự tăng trưởng mới của phụ tải hệ thống điện. Khi đó tính toán giải tích lưới được thực hiện để xem xét khả năng đáp ứng của lưới điện, giúp cho việc lựa chọn vị trí, cấu trúc, thông số của các phần tử mới cho lưới điện.

PF cũng là một bộ phận của tính toán *tối ưu hóa (optimization)* chế độ làm việc, tính toán *ổn định (stability)* hay phân tích chế độ sự cố. Tính toán PF thuộc loại tính toán *nghiên cứu (study)*, không sử dụng các dữ liệu thời thực (real time).

Các phương trình chế độ xác lập, đối tượng của PF, sử dụng mô hình toán học tuyến tính cho các phần tử lưới, nhưng phi tuyến cho nguồn và phụ tải điện. Sự phi tuyến này là do dạng phi tuyến của luật Kirchhoff cho dòng công suất, mà ở chế độ xác lập, thường phụ tải điện được cho bởi công suất thực P và phản kháng Q hằng số, còn các nguồn điện thường làm việc với công suất P xác định và ở một điện áp được điều chỉnh xác định. Điều này sẽ thấy rõ hơn dưới đây.

Nếu gọi điện áp phức (chế độ xác lập) ở một nút lưới k là $\dot{u}_k = v_k + jw_k$ và dòng điện (phức) phụ tải hay nguồn điện ở nút k là i_k thì như đã biết ở chương 2, ta có phương trình chế độ xác lập $i_k = \sum_m \dot{Y}_{km}\dot{u}_m$ với $\dot{Y}_{km}$ là phần tử (phức) ma trận tổng dẫn nút với nút cơ sở điện áp là nút trung tính (đất). Ma trận $\{Y_{km}\}$ có thể bao gồm các tổng dẫn ở nút (bù tĩnh, kháng điện...). Ký hiệu $\sum_m$ chỉ tổng lấy theo mọi nút (kể cả nút k, nhưng trừ nút đất). Vì đây là ma trận hằng nên vế phải của phương trình (biểu diễn lưới điện) là tuyến tính với u_m, trong khi đó nếu công suất nút được cho chứ không phải dòng nút, ta có vế trái - đặc trưng nguồn và tải - cho bởi $(p_k - jq_k) / u_k^*$ là phi tuyến đối với điện áp (dấu * chỉ số phức liên hợp).

Biến đổi phương trình này ta có công suất nút (công suất pha ứng với áp pha hoặc công suất ba pha ứng với áp dây):

$$p_k + jq_k = \dot{u}_k i_k^* = \dot{u}_k \sum_m Y_{km}^* u_m^* \tag{4.1}$$

trong đó giả sử số phức tổng dẫn biểu diễn bởi $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$ trong đó Y_{kk} kể cả điện dung đường dây nếu có. Thế thì ta có:

$$p_k + jq_k = (v_k + jw_k)\sum_m [(v_m - jw_m)(G_{km} - jB_{km})]$$

Tách phần thực, ảo và đặt:

$$\begin{aligned} S(k) &= \sum_m (v_m G_{km} - w_m B_{km}) \\ Z(k) &= \sum_m (w_m G_{km} + v_m B_{km}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ta sẽ có:

$$\begin{cases} p_k = v_k S(k) + w_k Z(k) \\ q_k = w_k S(k) - v_k Z(k) \end{cases} \tag{4.3}$$

Đó là phương trình nút ở *dạng cân bằng công suất* viết theo điện áp ở *tọa độ vuông góc*: $\dot{u}_k = v_k + jw_k$.

Ta cũng có thể sử dụng phương trình nút ở *dạng cân bằng dòng:*

$$\sum_m (v_m + jw_m)(G_{km} + jB_{km}) - i_k = 0$$

Có thể thấy rằng tổng trong phương trình này chính bằng $S(k) + jZ(k)$. Thay $i_k = (p_k - jq_k)/(v_k - jw_k)$ và tách thực ảo, ta rút ra 2 phương trình cho phần thực và phần ảo, ký hiệu tuần tự là α_k và β_k:

$$\begin{cases} \alpha_k = S(k) - \dfrac{p_k v_k + q_k w_k}{v_k^2 + w_k^2} = 0 \\ \beta_k = Z(k) - \dfrac{p_k w_k - q_k v_k}{v_k^2 + w_k^2} = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Công thức PF thường hay sử dụng điện áp viết ở *tọa độ cực:* $\dot{u}_k = u_k \exp(j\theta_k)$ (kí hiệu $exp(j\theta) = e^{j\theta}$). Nếu tổng dẫn cũng viết ở tọa độ cực: $\dot{Y}_{km} = Y_{km} \exp(j\psi_{km})$ thì thay vào (4.1) ta có:

$$p_k + jq_k = u_k \exp(j\theta_k)\sum_m u_m \exp(-j\theta_m)Y_{km} \exp(-j\psi_{km})$$

$$= u_k \sum_m u_m Y_{km} \exp(j\theta_{km} - j\psi_{km})$$

trong đó $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$. Tách thực ảo, ta được:

$$\begin{cases} p_k = u_k \sum_m u_m Y_{km} \cos(\theta_{km} - \psi_{km}) \\ q_k = u_k \sum_m u_m Y_{km} \sin(\theta_{km} - \psi_{km}) \end{cases} \quad (4.5)$$

Cũng có thể viết ở dạng:

$$\begin{cases} p_k = u_k \sum_m u_m (G_{km} \cos\theta_{km} + B_{km} \sin\theta_{km}) \\ q_k = u_k \sum_m u_m (G_{km} \sin\theta_{km} - B_{km} \cos\theta_{km}) \end{cases} \quad (4.6)$$

Các phương trình (4.3), (4.4) và (4.5), (4.6) là dạng tọa độ vuông góc và tọa độ cực của *phương trình chế độ xác lập*. Chú ý ký hiệu $\sum_m$ chỉ tổng lấy theo mọi nút kể cả nút k và nút cân bằng. Các phương trình này mô tả cân bằng công suất (dòng) ở các nút và là phương trình (đại số) *phi tuyến* (đối với điện áp). Chú ý rằng các phương trình này không chứa biến thời gian vì ta đang xét chế độ xác lập. Cũng chú ý rằng ta đã tách thực ảo nên tất cả các đại lượng trong phương trình đều là số thực[1] .

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét việc giải các phương trình này. Trước hết nhận xét rằng vì phương trình là phi tuyến nên để giải nó ta không thể dùng phương pháp giải tích tường minh, mà phải dùng các *phương pháp số (numerical methods)*.

Giả sử lưới điện có $n+1$ nút đánh số từ 0 tới n, không kể nút trung tính (đất)[2] . Tại mỗi nút có 4 biến thực p_k, q_k, u_k, θ_k hoặc p_k, q_k, v_k, w_k. Nếu cho trước $2(n+1)$ các đại lượng này, thì từ $2(n+1)$ phương trình chế độ xác lập ở trên, ta có thể xác định $2(n+1)$ biến còn lại. Giả thiết này được thỏa mãn, nếu như ta xem xét trường hợp biểu diễn nút phụ tải bởi công suất P,Q hằng số đã biết (bao gồm cả nút

---

[1] Cũng có thể sử dụng biến phức khi tính toán trên máy tính; vấn đề là hiệu quả tính toán.

[2] Không viết phương trình cho nút này, đồng thời trong phương trình cho các nút, tổng không bao gồm nút đất vì tại đó u_m=0

nối dây có P=0, Q=0 hoặc Q=Q_c với Q_c mô tả công suất trên điện dung của đường dây nối tới nút), còn ở nút nguồn điện cho trước công suất tác dụng P và môđun điện áp u (các nút loại sau này được gọi là *nút điều khiển điện áp*).

Tuy nhiên xem xét kĩ hơn ta có hai nhận xét sau đây:

- Phương trình dạng tọa độ cực (4.5), (4.6) chứa một biến số là góc pha của điện áp, tuy nhiên các phương trình này chỉ phụ thuộc vào góc *tương đối* giữa hai nút $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$, do đó nếu cộng thêm một đại lượng nào đó vào tất cả các góc thì không làm thay đổi phương trình. Đó là vì về vật lí góc điện áp được định nghĩa so với một "mốc" nào đó tùy chọn. Điều đó cũng có nghĩa rằng ta phải chọn trước góc cho một nút nào đó [1].
- Không thể xác định trước công suất P ở tất cả các nút của lưới điện, vì điều kiện cân bằng công suất qui định phải có một nút tại đó công suất phát vào lưới phụ thuộc tổng công suất phụ tải, tổn thất công suất trên lưới và công suất đã cho ở các nút nguồn khác. Nút này được gọi là *nút cân bằng công suất (swing bus, slack bus)* và được chọn trong số các nút nguồn. Vì thế không thể cho trước P ở tất cả các nguồn như giả thiết ở trên.

Như vậy từ nhận xét thứ nhất, số ẩn góc điện áp giảm đi một vì phải cho trước một góc, còn từ nhận xét thứ hai phải có một công suất P (ở nút cân bằng) là ẩn số (biến phụ thuộc). Để cho tiện ta chọn góc ở nút cân bằng $\theta = 0$, như vậy ở nút này (một nút nguồn) sẽ cho trước $u, 0$ thay vì cho u, P. Số ẩn còn lại vẫn bằng số phương trình.

Tóm lại, 3 loại nút thường được xử lí trong tính toán PF là:

1. *Nút PV hay nút điều khiển điện áp:* Công suất tác dụng P và biên độ điện áp u được cho trước. Đây thường là các nhà máy điện với u được duy trì bởi thiết bị điều chỉnh tự động điện áp (AVR- automatic voltage regulator) hay các trạm bù công suất phản kháng. Việc duy trì điện áp được thực hiện bởi điều chỉnh công suất phản kháng nguồn phát ra. Tất nhiên khoảng điều chỉnh này có giới hạn do giới hạn của dòng stator và giới hạn của dòng kích từ của máy điện đồng bộ, cũng như điều kiện làm việc ổn định ở chế độ thiếu kích thích. Do đó ở các nút loại này thường phải xét điều kiện ràng buộc:

$$Q_k^{\min} < q_k < Q_k^{\max} \qquad (4.7)$$

2. *Nút PQ:* thường là nút phụ tải điện ở đó công suất tiêu thụ giả thiết là không bị biến động theo độ lệch nhỏ của điện áp trong chế độ xác lập.

---

[1] Điều này cũng đã được ghi nhận ở chương 2

3. *Nút cân bằng:* Phát sinh do tổn thất công suất trong lưới là không biết trước khi tính toán giải tích chế độ. Nút này thường được chọn trong số nút nguồn và ứng với nhà máy điện làm nhiệm vụ điều chỉnh tần số. Tại nút cân bằng cho trước u, θ. Thông thường các chương trình PF dùng một nút cân bằng, tuy nhiên cũng có thể xử lí bài toán giải tích trong hệ thống hợp nhất, bao gồm nhiều vùng, nhiều nút điều chỉnh tần số và công suất trao đổi (mua, bán) giữa các vùng.

Một trường hợp đặc biệt của bài toán giải tích lưới điện:

Một số điểm bổ sung trong mô tả bài toán PF sẽ được xem xét ở một phần sau, ở đây chỉ lưu ý một trường hợp đặc biệt hay gặp khi tính toán PF phục vụ cho nghiên cứu ổn định quá độ (Transient Stability)[1] hay nghiên cứu sự cố, trong đó cần dự đoán hậu quả của một thay đổi nào đó của cấu trúc lưới (gây ra do sự cố). Nếu giả thiết rằng công suất của tất cả các máy phát điện và phụ tải điện thay đổi rất ít sau sự cố (trong thời gian quá độ nhanh), thì việc xác định điện áp trên lưới sau sự cố trở thành bài toán PF trong đó *tất cả các nút cho trước P và Q, trừ nút cân bằng*. Chú ý rằng điều kiện cân bằng công suất trên lưới cũng áp dụng đối với công suất phản kháng, do đó cũng không thể cho trước Q ở tất cả các nút. Như vậy riêng nút cân bằng sẽ được cho điện áp, giống như đã xét ở trên.

Nhận xét sơ bộ về giải phương trình chế độ xác lập:

Ta nêu một nhận xét liên quan tới việc giải phương trình chế độ xác lập, tức là giải bài toán PF: *Mỗi ẩn công suất (p hoặc q) chỉ tham gia vào một phương trình (ở dạng cân bằng công suất), do đó không cần giải hệ phương trình để xác định chúng*. Công suất chưa biết sẽ được tính từ phương trình tương ứng *sau khi* xác định ẩn điện áp v,w hoặc u, θ bằng cách giải hệ phương trình.

Giả sử nút 0 là nút cân bằng, n nút còn lại bao gồm n_g nút nguồn (generators, hay nút PV) và n_c nút tải (charges, hay nút PQ). Từ $2(n+1)$ phương trình ta *loại ra các phương trình ứng với công suất nút chưa biết*, cụ thể là 2 phương trình đối với nút cân bằng, n_g phương trình cho q ở nút nguồn. Còn lại hệ $n+n_c$ phương trình đủ để giải ra n góc θ ở các nút và n_c ẩn điện áp u ở các nút phụ tải (trong trường hợp dùng tọa độ cực). Trường hợp dùng tọa độ vuông góc (4.3) ta có $2n$ ẩn v,w. Để giải chúng, ta sẽ bổ sung vào cho $n+n_c$ phương trình nói trên n_g phương trình sau đây viết cho các nút nguồn (đã biết u):

$$u_k^2 = v_k^2 + w_k^2 \quad k=1,..,n_g \tag{4.8}$$

---

[1] Cũng thường gọi là ổn định động

4.2 Phương pháp lặp Gauss- Seidel giải tích lưới điện

Để áp dụng phương pháp lặp Gauss-Seidel (xem chương 1) giải hệ phương trình chế độ xác lập, ta dùng phương trình cân bằng dòng nút viết cho n nút, trừ nút cân bằng đã biết điện áp $\dot{u}_0$:

$$\sum_m \dot{Y}_{km}\dot{u}_m = i_k \quad k=1,..,n$$

Tách riêng điện áp nút k từ tổng, ta có phương trình lặp sau đây:

$$\dot{u}_k^{(i+1)} = (i_k^{(i)} - \sum_{m\neq k}\dot{Y}_{km}\dot{u}_m^{(i)}) / \dot{Y}_{kk} \qquad (4.9)$$

trong đó dòng nút k xác định theo điện áp nút ở bước lặp trước[1]

$$i_k^{(i)} = \frac{P_k - jQ_k}{u_k^{*(i)}} - \dot{Y}_k\dot{u}_k^{(i)} \qquad (4.10)$$

Để ý rằng trong công thức này, ta đã gộp dòng trong các nhánh sun (nhánh ngang) của lưới vào dòng nút: $\dot{Y}_k$ là tổng dẫn nhánh sun nối với nút k. Nếu làm như vậy thì trong phần tử ma trận tổng dẫn nút trong (4.9) sẽ không tính đến tất cả các nhánh nối đất này.

Trong (4.10) công suất nút là đại lượng đã cho. Đối với các nút PV, công suất phản kháng trong (4.10) sẽ lấy xấp xỉ theo điện áp bước lặp cũ. Chẳng hạn từ công thức (4.5):

$$q_k^{(i)} = u_k \sum_m u_m^{(i)} Y_{km} \sin(\theta_{km}^{(i)} - \psi_{km}) \qquad (4.11)$$

trong đó u_k là điện áp đã cho tại nút PV. Như vậy ở các nút PV, trong xấp xỉ điện áp mới tính theo (4.9) chỉ dùng đến gốc pha $\theta_k^{(i)}$, không dùng môđun. Cũng nhắc lại rằng trong phương pháp GS, luôn luôn dùng giá trị mới nhất của điện áp khi tính vế phải của (4.9), tức là nếu tính toán theo thứ tự $k=1,2...$ thì (4.9) thay bởi:

---

[1] Cũng có thể xác định theo điện áp ở bước hiện tại: thay i_k tính theo $u_k^{(i+1)}$ vào (4.9) và giải ra $u_k^{(i+1)}$ nhưng không có hiệu quả đáng kể [1]

$$\dot{u}_k^{(i+1)} = \Big(\sum_{m=0,k-1} \dot{Y}_{km}\dot{u}_m^{(i+1)} + \sum_{m=k+1,n} \dot{Y}_{km}\dot{u}_m^{(i)} \Big) / \dot{Y}_{kk} \qquad (4.12)$$

Ưu điểm của phương pháp GS là đơn giản, khối lượng tính toán nhỏ trên một bước lặp và yêu cầu lưu trữ nhỏ. Nhưng nhược điểm lớn của phương pháp này là hội tụ chậm, nhất là khi kích thước lưới điện tăng lên. Số lượng bước lặp yêu cầu tăng theo số biến, với lưới điện thực tế ví dụ có 500 nút, phương pháp GS đòi hỏi cỡ 500 bước lặp, thời gian tính lớn hơn nhiều so với phương pháp Newton-Raphson (sẽ được đề cập trong phần sau). Do đó trong thực tế thường GS chỉ sử dụng có lợi cho tính toán PF trong vài bài toán ổn định hay phân tích sự cố, trong đó yêu cầu *tính giải tích nhiều lần với chỉ một vài công suất nút thay đổi nhẹ*. Xấp xỉ ban đầu có thể lấy theo kết quả tính toán trước, tức là khá gần nghiệm. Cùng với yêu cầu về độ chính xác tương đối thấp, kết quả là lặp GS có thể hội tụ nhanh.

Các chương trình giải tích lưới điện thực tế cũng có thể dùng GS cho 1,2 bước lặp đầu tiên, khi xấp xỉ còn xa nghiệm, tại đó phương pháp có tốc độ hội tụ cao như Newton- Raphson lại có khả năng hội tụ kém (xem phần sau). Bằng cách này có thể bảo đảm hơn cho sự hội tụ của tính toán, lại có thể giảm được một bước lặp Newton- Raphson, ứng với một khối lượng tính toán khá lớn.

4.3 Phương pháp Newton- Raphson

4.3.1 Phương trình lặp Newton- Raphson

Nếu ta viết hệ phương trình phi tuyến của chế độ xác lập ở dạng:

$$\mathbf{r(x) = 0} \qquad (4.13)$$

thì đối với dạng công suất (4.3), (4.5) hoặc (4.6) **r** là vectơ hàm biểu diễn *sai số công suất ở các nút:*

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} - \mathbf{p} \\ \mathbf{Q} - \mathbf{q} \end{pmatrix} \qquad (4.14)$$

trong đó **P,Q** là công suất đã cho của nút, còn **p,q** là hàm của điện áp nút (biến **x** trong (4.13)). Với dạng dòng điện (4.4) thì **r** = **(α,β)**, **x** bao gồm điện áp và công suất phản kháng.

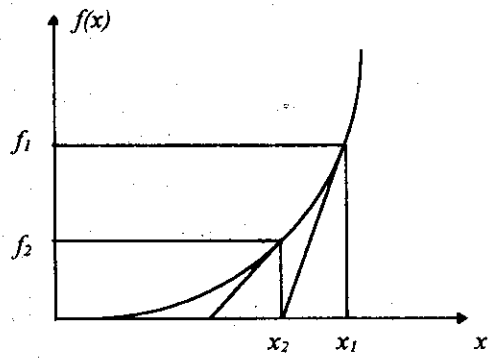
Trong các phương pháp số giải phương trình phi tuyến, phương pháp Newton-Raphson có vị trí quan trọng. Hình 4-1 minh họa quá trình giải cho trường hợp một phương trình $f(x)=0$. Xuất phát từ điểm xấp xỉ thứ nhất (x_1,f_1), hàm $f(x)$ được *tuyến tính hóa bởi đường tiếp tuyến* tại điểm này, từ đó xác định nghiệm của phương trình tuyến tính hóa, và ta được xấp xỉ thứ hai (x_2,f_2) tốt hơn. Quá trình được tiếp tục và hội tụ đến nghiệm của phương trình phi tuyến $f(x)=0$. Phương trình của đường tiếp tuyến tại x_1 là số hạng tuyến tính của khai triển Taylor của hàm $f(x)$ tại x_1 và có dạng:

$$f(x) \approx f(x_1) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_1} (x - x_1)$$

Đặt bằng 0 ta có phương trình tuyến tính cho phép giải ra x_2:

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) + f_1 = 0$$

trong đó $f'(x_1)$ là đạo hàm f tại x_1.



Hình 4-1

Áp dụng vào hệ phương trình cân bằng công suất nút dạng (4.13), (4.14) ta có phương trình tuyến tính hóa cần giải ở một bước lặp i là:

$$\mathbf{J}_i \cdot (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) = \mathbf{r}_i \qquad (4.15)$$

trong đó $\mathbf{r}_i = (\mathbf{P} - \mathbf{p}_i, \mathbf{Q} - \mathbf{q}_i)$ còn $\mathbf{J}_i$ là ma trận *Jacobian* (chứa các đạo hàm riêng của $\mathbf{p}$ và $\mathbf{q}$; chúng ta sẽ khảo sát ma trận này trong mục sau):

$$\mathbf{J}_i = -\mathbf{r}'(\mathbf{x}_i) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}'(\mathbf{x}_i) \\ \mathbf{q}'(\mathbf{x}_i) \end{pmatrix} \qquad (4.16)$$

4.3.1 *Jacobian của các phương trình chế độ xác lập*

Ma trận Jacobian có vai trò quan trọng trong thuật toán giải bằng phương pháp Newton- Raphson. Vì phương trình cho p và q là phi tuyến đối với ẩn x (điện áp) nên ma trận này, xác định theo (4.16), phụ thuộc chế độ làm việc (điện áp) và do đó thay đổi từ bước lặp này sang bước lặp khác. Sau đây dẫn ra biểu thức cho các phần tử của ma trận đạo hàm riêng này bằng cách lấy đạo hàm trực tiếp các phương trình chế độ xác lập.

Bắt đầu bằng phương trình ở tọa độ cực (4.5), (4.6) được dẫn lại ở đây :

$$p_k = u_k \sum_{m \neq k} u_m Y_{km} \cos(\theta_{km} - \psi_{km}) + u_k^2 G_{kk}$$

$$= u_k \sum_{m \neq k} u_m (G_{km} \cos\theta_{km} + B_{km} \sin\theta_{km}) + u_k^2 G_{kk} \qquad (n \text{ phươngtrình})$$

$$q_k = u_k \sum_{m \neq k} u_m Y_{km} \sin(\theta_{km} - \psi_{km}) - u_k^2 B_{kk}$$

$$= u_k \sum_{m \neq k} u_m (G_{km} \sin\theta_{km} - B_{km} \cos\theta_{km}) - u_k^2 B_{kk} \qquad (n_c \text{ phương trình})$$

Từ các phương trình này dễ dàng tính các phần tử Jacobian:

(4.17):

$$\partial p_k / \partial \theta_m = u_k u_m Y_{km} \sin(\theta_{km} - \psi_{km})$$

$$= u_k u_m (G_{km} \sin\theta_{km} - B_{km} \cos\theta_{km})$$

$$\partial p_k / \partial \theta_k = -u_k \sum_{m \neq k} u_m Y_{km} \sin(\theta_{km} - \psi_{km})$$

$$= u_k \sum_{m \neq k} u_m (-G_{km} \sin\theta_{km} + B_{km} \cos\theta_{km}) = -\sum_{m \neq k} \partial p_k / \partial \theta_m$$

$$\partial p_k / \partial u_m = u_k Y_{km} \cos(\theta_{km} - \psi_{km})$$

$$= u_k (G_{km} \cos\theta_{km} + B_{km} \sin\theta_{km})$$

$$\partial p_k / \partial u_k = 2u_k G_{kk} + \sum_{m \neq k} u_m Y_{km} \cos(\theta_{km} - \psi_{km})$$

$$= 2u_k G_{kk} + \sum_{m \neq k} u_m (G_{km} \cos\theta_{km} + B_{km} \sin\theta_{km}) = 2u_k G_{kk} + \sum_{m \neq k} \partial p_k / \partial u_m$$

$$\partial q_k / \partial \theta_m = -u_k u_m Y_{km} \cos(\theta_{km} - \psi_{km})$$

$$= -u_k u_m (G_{km} \cos\theta_{km} + B_{km} \sin\theta_{km})$$

$$\partial q_k / \partial \theta_k = u_k \sum_{m \neq k} u_m Y_{km} \cos(\theta_{km} - \psi_{km})$$

$$= u_k \sum_{m \neq k} u_m (G_{km} \cos\theta_{km} + B_{km} \sin\theta_{km}) = -\sum_{m \neq k} \partial q_k / \partial \theta_m$$

$$\partial q_k / \partial u_m = u_k Y_{km} \sin(\theta_{km} - \psi_{km})$$
$$= u_k (G_{km} \sin\theta_{km} - B_{km} \cos\theta_{km})$$

$$\partial q_k / \partial u_k = -2u_k B_{kk} + \sum_{m \neq k} u_m Y_{km} \sin(\theta_{km} - \psi_{km})$$

$$= -2u_k B_{kk} + \sum_{m \neq k} u_m (G_{km} \sin\theta_{km} - B_{km} \cos\theta_{km}) = -2u_k B_{kk} + \sum_{m \neq k} \partial q_k / \partial u_m$$

So sánh các biểu thức có thể rút ra:

$$\partial p_k / \partial \theta_k = -\sum_{m \neq k} (\partial p_k / \partial \theta_m) = -q_k - u_k^2 B_{kk}$$

$$\partial q_k / \partial \theta_k = -\sum_{m \neq k} (\partial q_k / \partial \theta_m) = p_k - u_k^2 G_{kk}$$

$$u_k (\partial p_k / \partial u_k) = (\partial q_k / \partial \theta_k) + 2u_k^2 G_{kk} = p_k + u_k^2 G_{kk}$$
$$u_m (\partial p_k / \partial u_m) = -(\partial q_k / \partial \theta_m)$$
$$u_k (\partial q_k / \partial u_k) = -(\partial p_k / \partial \theta_k) - 2u_k^2 B_{kk} = q_k - u_k^2 B_{kk}$$
$$u_m (\partial q_k / \partial u_m) = \partial p_k / \partial \theta_m \qquad (4.18)$$

Nhận xét rằng việc tính toán Jacobian sẽ đơn giản hơn nếu áp dụng các công thức trong (4.18). Như ta thấy, các phần tử đường chéo có thể tính theo p_k và q_k, và có thể đơn giản hóa nếu thay thế gần đúng p_k và q_k bởi P_k và Q_k (công suất nút đã cho). Nếu gần nghiệm xấp xỉ này là tốt [4].

Bây giờ ta biểu diễn ma trận J dưới dạng khối gồm 4 ma trận con:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \mathbf{p} / \partial \theta & \partial \mathbf{p} / \partial \mathbf{u} \\ \partial \mathbf{q} / \partial \theta & \partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad (4.19)$$

Kích thước các ma trận như sau: $\mathbf{J}_1$(nxn), $\mathbf{J}_2$(nxn_c), $\mathbf{J}_3$($n_c$xn), $\mathbf{J}_4$(n_cxn_c). Ta có từ (4.18) quan hệ giữa các khối con:

$$\begin{cases} u_k J_4(k,k) = 2q_k + J_1(k,k) \\ u_m J_4(k,m) = J_1(k,m) \end{cases} \qquad (4.20)$$

$$\begin{cases} u_k J_2(k,k) = 2p_k - J_3(k,k) \\ u_m J_2(k,m) = -J_3(k,m) \end{cases} \tag{4.21}$$

Tiếp theo chúng ta xem xét phương trình chế độ xác lập ở tọa độ vuông góc (4.3), (4.8) được viết lại dưới đây:

$$p_k = (v_k^2 + w_k^2)G_{kk} + v_k \sum_{m \neq k} (v_m G_{km} - w_m B_{km}) + w_k \sum_{m \neq k} (w_m G_{km} + v_m B_{km})$$

(n phương trình)

$$q_k = -(v_k^2 + w_k^2)B_{kk} + w_k \sum_{m \neq k} (v_m G_{km} - w_m B_{km}) - v_k \sum_{m \neq k} (w_m G_{km} + v_m B_{km})$$

(n_c phương trình)

$$u_k^2 = v_k^2 + w_k^2 \quad (n_g \text{ phương trình}) \tag{4.22}$$

Jacobian tương ứng có các phần tử sau:

$$\partial p_k / \partial v_k = 2v_k G_{kk} + \sum_{m \neq k} (v_m G_{km} - w_m B_{km})$$

$$\partial p_k / \partial v_m = v_k G_{km} + w_k B_{km}$$

$$\partial p_k / \partial w_k = 2w_k G_{kk} + \sum_{m \neq k} (w_m G_{km} + v_m B_{km})$$

$$\partial p_k / \partial w_m = -v_k B_{km} + w_k G_{km}$$

$$\partial q_k / \partial v_k = -2v_k B_{kk} - \sum_{m \neq k} (w_m G_{km} + v_m B_{km})$$

$$\partial q_k / \partial v_m = \partial p_k / \partial w_m$$

$$\partial q_k / \partial w_k = -2w_k B_{kk} + \sum_{m \neq k} (v_m G_{km} - w_m B_{km})$$

$$\partial q_k / \partial w_m = -\partial p_k / \partial v_m$$

$$\partial u_k^2 / \partial v_k = 2v_k$$

$$\partial u_k^2 / \partial w_k = 2w_k \tag{4.23}$$

Kích thước của ma trận ở đây là $2n$, lớn hơn là khi dùng tọa độ cực, nhưng các phần tử không chứa hàm lượng giác là các đại lượng đòi hỏi nhiều thời gian tính toán.

Cũng dùng tọa độ vuông góc, nhưng với phương trình ở dạng dòng điện (4.4) thì Jacobian đơn giản hơn nhiều, đặc biệt các phần tử ngoài đường chéo của các khối đều là hằng số:

$$\partial\alpha_k / \partial v_k = G_{kk} + \frac{2q_k v_k w_k + p_k(v_k^2 - w_k^2)}{u_k^4}$$

$$\partial\alpha_k / \partial w_k = -B_{kk} + \frac{2p_k v_k w_k - q_k(v_k^2 - w_k^2)}{u_k^4}$$

$$\partial\beta_k / \partial v_k = B_{kk} + \frac{2p_k v_k w_k - q_k(v_k^2 - w_k^2)}{u_k^4} \qquad (4.24)$$

$$\partial\beta_k / \partial w_k = G_{kk} + \frac{2q_k v_k w_k - p_k(v_k^2 - w_k^2)}{u_k^4}$$

$$\partial\alpha_k / \partial v_m = \partial\beta_k / \partial w_m = G_{km}$$

$$\partial\alpha_k / \partial w_m = -\partial\beta_k / \partial v_m = -B_{km}$$

4.3.2 *Đặc điểm phương pháp và áp dụng cho bài toán giải tích lưới điện*

Như ta đã nhận xét, ma trận Jacobian thay đổi từ bước lặp này sang bước lặp khác. Sự phức tạp của phương pháp Newton- Raphson (NR) chính là ở chỗ phải giải hệ phương trình tuyến tính ở mỗi bước lặp với ma trận thay đổi. Thời gian máy cần cho lời giải này là phần chủ yếu trong thời gian tính toán của một bước lặp. Giải hệ tuyến tính đầy m phương trình yêu cầu cỡ $2m^3/3$ phép tính; đối với lưới điện 500 nút, giải hệ khoảng 1000 phương trình sẽ cần 667 triệu phép tính !

May mắn là ma trận **J** cũng rất thưa như ma trận tổng dẫn nút **Y**: phần tử ngoài đường chéo của mỗi khối con chỉ khác 0 nếu tồn tại nhánh nối giữa hai nút tương ứng. Như ta đã biết, không phụ thuộc vào số nút, thường chỉ có trung bình 3 nhánh nối với mỗi nút, do đó ma trận càng thưa đối với lưới điện lớn[1] . Phương pháp NR chỉ có hiệu quả nếu áp dụng *kĩ thuật ma trận thưa* trong việc giải phương

[1] Làm phép toán đơn giản chẳng hạn đối với khối con J_1 có n^2 phần tử. Nếu mỗi hàng chỉ có 1 phần tử đường chéo và 3 phần tử ngoài đường chéo khác 0 thì tổng cộng các phần tử khác 0 chỉ chiếm một tỉ số $4n/n^2 = 4/n$. Ví dụ n=100 nút, tỉ lệ này chỉ là 4%.

trình, như phương pháp khai triển tam giác theo thứ tự tối ưu (OOF) mà ta đã xem xét ở chương 2.

Một bất lợi khác của phương pháp NR là *yêu cầu bộ nhớ* nhiều hơn so với phương pháp Gauss - Seidel (GS). Bù lại, ưu điểm lớn của phương pháp NR là *tốc độ hội tụ* cao. Nếu phương pháp GS *hội tụ tuyến tính*, tức là có $\varepsilon_{i+1} = k_n \varepsilon_i$ với ε_i là sai số của xấp xỉ thứ i, thì phương pháp NR *hội tụ bậc hai:* $\varepsilon_{i+1} = k_q \varepsilon_i^2$. So sánh với $k_n = k_q < 1$ rõ ràng sai số của NR giảm nhanh hơn, nếu sai số ban đầu nhỏ. Trái lại nếu sai số của xấp xỉ đầu lớn, lặp NR có thể phân kì. Như vậy sự hội tụ bậc hai là tốt khi và chỉ khi xấp xỉ ban đầu tốt. Do đó để áp dụng thành công phương pháp NR, cần bảo đảm một xấp xỉ tốt của nghiệm.

Tuy thời gian yêu cầu cho một bước lặp ở phương pháp NR lớn hơn vài lần so với GS, nhưng số bước lặp yêu cầu của NR thường chỉ là 2-5 bước, hầu như không phụ thuộc vào kích thước lưới điện. Do đó sử dụng phương pháp NR rất có lợi cho tính toán lưới điện lớn.

Một số ưu điểm khác thường được nêu lên của phương pháp NR so với GS là:

- Có thể giải cho hệ thống nặng tải, với góc lệch pha tới 90^o (đôi khi còn hội tụ cho cả một chế độ không ổn định)
- Có thể giải cho hệ thống chứa điện kháng âm như mô hình máy biến áp 3 cuộn dây hoặc tụ điện bù dọc cho đường dây
- Có thể giải cho hệ thống chứa những đường dây có độ dài rất lớn làm việc song song với đường dây ngắn, hoặc hệ thống truyền tải rất xa.

Áp dụng phương pháp cho phương trình công suất nút ở tọa độ cực, phương trình tuyến tính cần giải trên một bước lặp i là:

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{p} \\ \Delta \mathbf{q} \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \mathbf{u} \end{pmatrix}^{i+1} \tag{4.25}$$

$$\Delta \mathbf{p}^i = \mathbf{P} - \mathbf{p}^i; \Delta \mathbf{q}^i = \mathbf{Q} - \mathbf{q}^i; \Delta \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i; \ \Delta \theta^{i+1} = \theta^{i+1} - \theta^i; \ \mathbf{J}^i = \mathbf{J}(\theta^i, u^i)$$

Thực tế hay sử dụng ẩn $\Delta u^{i+1} / u^i$ thay cho Δu^{i+1}, tương ứng trong các ma trận con $\mathbf{J}_2$ và $\mathbf{J}_4$ phần tử k,m cần được nhân thêm với u_m^i. Dạng này có lợi hơn trong tính toán, cả hai ẩn trở thành không thứ nguyên và các phần tử Jacobian có công thức đối xứng như sau:

- Phần tử ngoài đường chéo:

$$J_1(k,m) = \partial p_k / \partial \theta_m = u_k u_m (G_{km} \sin\theta_{km} - B_{km} \cos\theta_{km})$$

$$J_3(k,m) = (\partial q_k / \partial \theta_m) = -u_k u_m (G_{km} \cos\theta_{km} + B_{km} \sin\theta_{km})$$

$$J_2(k,m) = u_m (\partial p_k / \partial u_m) = -J_3(k,m)$$

$$J_4(k,m) = u_m (\partial q_k / \partial u_m) = J_1(k,m)$$

- Phần tử đường chéo:

$$J_1(k,k) = -\sum_{m \neq k} J_1(k,m) = -q_k - u_k^2 B_{kk}$$

$$J_2(k,k) = J_3(k,k) + 2u_k^2 G_{kk} = p_k + u_k^2 G_{kk}$$

$$J_3(k,k) = -\sum_{m \neq k} J_3(k,m) = p_k - u_k^2 G_{kk}$$

$$J_4(k,k) = -J_1(k,k) - 2u_k^2 B_{kk} = q_k - u_k^2 B_{kk} \qquad (4.26)$$

Chú ý rằng ma trận Jacobian không đối xứng, trừ khi mọi điện áp (phức) bằng nhau.

Quá trình lặp tiến hành theo thuật toán sau:

1. Tính toán sai số công suất nút Δp, Δq theo xấp xỉ hiện tại của ẩn điện áp (u,θ)
2. Nếu $\max_k |\Delta p_k| \leq \varepsilon_p$ và $\max_k |\Delta q_k| \leq \varepsilon_q$ thì dừng quá trình lặp. Xấp xỉ hiện tại là nghiệm bài toán. Nếu không thì tiếp tục bước (3).
3. Lập ma trận **J**
4. Giải hệ tuyến tính (4.25) dạng **JΔx = Δr**
5. Tính xấp xỉ mới của nghiệm **x := x + Δx**. Riêng biến dạng $\Delta u^{i+1} / u^i$ sẽ cho xấp xỉ điện áp mới:

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} + \Delta u^{(i+1)} = u^{(i)} (1 + \frac{\Delta u^{(i+1)}}{u^{(i)}})$$

Trở lại bước (1).

Sau khi kết thúc quá trình lặp tìm được điện áp các nút, các đại lượng chế độ

xác lập khác như phân bố công suất trên lưới có thể xác định dễ dàng theo điện áp nút.

Đối với các nút PV cần thỏa mãn điều kiện ràng buộc (4.7). Do đó tại mỗi bước lặp cần tính công suất phản kháng của các nút PV để kiểm tra điều kiện này. Nếu giới hạn bị vi phạm thì nút tương ứng sẽ được *chuyển từ nút PV thành nút PQ* với Q đặt cố định ở giá trị giới hạn bị vi phạm. Khó khăn gặp phải ở đây là khi *chuyển loại nút* như vậy thì cấu trúc ma trận Jacobian cũng như cấu trúc phương trình và ẩn bị thay đổi.

Như đã nói, cần chú ý bắt đầu quá trình lặp NR không quá xa nghiệm để bảo đảm sự hội tụ. Nếu không biết một xấp xỉ nào tốt hơn thì có thể dùng *khởi tạo điện áp bằng phẳng*, tức là lấy điện áp các nút PQ bằng điện áp nút cân bằng, điện áp các nút PV lấy theo giá trị đã cho, còn góc pha lấy bằng 0 (bằng góc pha nút cân bằng).

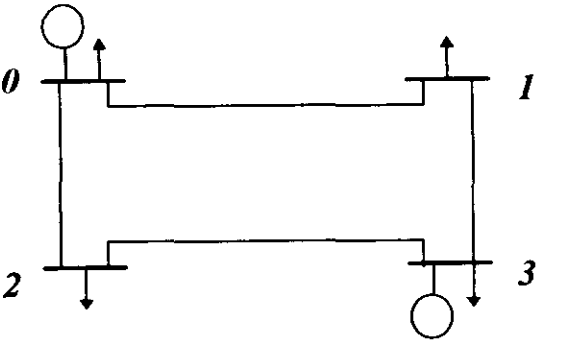
Kèm theo việc lựa chọn xấp xỉ đầu tiên như vậy, một hoặc hai bước lặp Gauss-Seidel có thể dùng để khởi tạo. Một biện pháp khác để tránh trường hợp không hội tụ là hạn chế độ lớn của hiệu chỉnh $\Delta\theta$ và Δu ở các bước lặp. Việc này tuy nhiên làm giảm tốc độ hội tụ.

Tất nhiên tính toán PF không thể hội tụ cho các chế độ không tồn tại về vật lí, như chế độ không ổn định, do phụ tải quá nặng hoặc dữ liệu sai.

Phương pháp NR cũng được áp dụng trong tọa độ vuông góc. Dạng phương trình dòng nút ít khi được sử dụng.

4.4 Thí dụ

Chúng ta minh họa phương pháp NR dùng tọa độ cực bằng một thí dụ dựa theo [6], giải bài toán PF cho lưới điện đơn giản 4 nút trên hình 4.2. Tại nút 0 và 3 có nguồn điện, ở tất cả các nút có phụ tải. Số liệu nhánh và nút cho trong bảng dưới đây với các đại lượng cơ sở là 100 MVA và 230 KV.



Hình 4.2

Số liệu các đường dây:

Nhánh	R (p.u)	X (p.u)	G (p.u)	B (p.u)	Q nạp (MVAR)+	Tổngdẫn sun Y/2 (p.u)
0-1	0,01008	0,05040	3,815629	-19,078144	10,25	0,05125
0-2	0,00744	0,03720	5,169561	-25,847809	7,75	0,03875
1-3	0,00744	0,03720	5,169561	-25,847809	7,75	0,03875
2-3	0,01272	0,06360	3,023705	-15,118528	12,75	0,06375

+ Xác định ở 230 KV.

Số liệu nút:

Nut	Công suất phát		Phụ tải		U (p.u)	Loại nút
	P (MW)	Q (MVAR)	P (MW)	Q(MVAR)+		
0	-	-	50	30,99	1,00	cân bằng
1	0		170	105,35		PQ
2	0	0	200	123,94		PQ
3	318	-	80	49,58	1,02	PV

+ Hệ số công suất 0.85

Ma trận tổng dẫn nút **G+jB** tính được như sau (ma trận đối xứng):

Nút	0	1	2	3
0	8,985190	-3,815629	-5,169561	0
	-j44,835953	+j19,078144	+j25,847809	
1		8,985190	0	-5,169561
		-j44,835953		+j25,847809
2			8,193267	-3,023705
			-j40,863838	+j15,118528
3				8,193267
				-j40,863838

Phương trình lặp (4.25) có 5 phương trình ứng với P_1,P_2,P_3, Q_1,Q_2 và 5 ẩn θ_1, θ_2,θ_3, u_1,u_2 (lấy θ_0=0). Jacobian xác định theo (4.26), tại xấp xỉ đầu tiên (điện áp phẳng) θ_1=θ_2=θ_3=0, u_1=u_2=1 p.u, ta có chẳng hạn khối $\mathbf{J_1}$:

- Phần tử ngoài đường chéo:

$$J_1(1,2) = \partial P_1 / \partial \theta_2 = J_1(2,1) = 0$$

$$J_1(1,3) = \partial P_1 / \partial \theta_3 = u_1 u_3 (G_{13} \sin \theta_{13} - B_{13} \cos \theta_{13})$$
$$= 1 \times 1,02(-5,169561 \sin 0 - 25,847809 \cos 0) = -26,364765$$

$$J_1(2,3) = 1 \times 1,02(-15,118528 \cos 0) = -15,420899$$

$$J_1(3,1) = 1,02 \times 1(-25,847809 \cos 0) = -26,364765$$

$$J_1(3,2) = 1,02 \times 1(-15,118528 \cos 0) = -15,420899$$

- Phần tử đường chéo:

$$J_1(2,2) = -J_1(2,0) - J_1(2,1) - J_1(2,3) =$$
$$= -1 \times 1 \times (-25,847809 \cos 0) - 0 - (-15,420898) = 41,268707$$

$$J_1(2,2) = -J_1(2,0) - J_1(2,1) - J_1(2,3) =$$
$$= -1 \times 1 \times (-25,847809 \cos 0) - 0 - (-15,420899) = 41,268707$$

$$J_1(3,3) = -J_1(3,0) - J_1(3,1) - J_1(3,2) =$$
$$= 0 - (-26,364765) - (-15,420899) = 41,785664$$

Tính tiếp theo $\mathbf{J_3}$, $\mathbf{J_2}$ và $\mathbf{J_4}$, cuối cùng ta có phương trình lặp dạng (4.25):

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|cc} 45,443 & 0 & -26,365 & 8,882 & 0 \\ 0 & 41,269 & -15,421 & 0 & 8,133 \\ -26,365 & -15,421 & 41,786 & -5,273 & -3,084 \\ \hline -9,089 & 0 & 5,273 & 44,229 & 0 \\ 0 & -8,254 & 3,084 & 0 & 40,459 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \Delta\theta_1^{(1)} \\ \Delta\theta_2^{(1)} \\ \Delta\theta_3^{(1)} \\ \hline \Delta u_1^{(1)} / u_1^{(0)} \\ \Delta u_2^{(1)} / u_2^{(0)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -1,597 \\ -1,940 \\ 2,213 \\ \hline -0,447 \\ -0,835 \end{array} \right)$$

Giải hệ phương trình này được xấp xỉ mới của điện áp:

$$u_1 = 0,98335\angle -0,93094°$$

$$u_2 = 0,97095\angle -1,78790°$$

$$u_3 = 1,02\angle -1,54383°$$

Bảng dưới đây cho kết quả giải bài toán sau 3 bước lặp. Dòng nhánh được tính sau khi biết điện áp nút. Các đại lượng khác như tổn thất công suất tổng trong lưới có thể tính bằng cách so sánh công suất phát và thu, còn tổn thất trên nhánh xác định như hiệu số giữa công suất đầu và cuối nhánh.

Nút	U	Góc	Công suất phát		Phụ tải		Loại	Tới	Dòng nhánh	
	(kV)	(độ)	(MW)	(MVAR)	(MW)	(MVAR)	nút	nút	(MW)	(MVAR)
0	1,0	0,0	186,8	114,5	50,0	30,99	CB	1	38,69	22,30
								2	98,12	61,21
1	0,982	- 0,976	0	0	170,0	105,35	PQ	2	-38,46	-31,24
								3	-131,54	-74,11
2	0,969	- 1,872	0	0	200,0	123,94	PQ	0	-97,09	-63,57
								3	-102,91	-60,37
3	1,02	1,523	318,0	181,4	80	49,58	PV	1	133,25	74,92
								2	104,75	56,93
	Tổng cộng		504,8	295,9	500,0	309,86				

4.5 Phương pháp PF bậc hai

Xem xét phương trình PF ở tọa độ vuông góc (4.22) ta nhận thấy rằng vế phải là các hàm *toàn phương* của phần thực và phần ảo của điện áp, tức là chỉ bao gồm toàn số hạng bậc hai của các biến này. Mỗi hàm này có thể biểu diễn dưới dạng:

$$f_k(\mathbf{x}) = (1/2)\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k \mathbf{x}$$

trong đó $x=(v,w)$ và $\mathbf{A_k}$ là ma trận hằng đối xứng, xác định từ ma trận tổng dẫn nút. Như vậy khai triển Taylor của các hàm này sẽ kết thúc ở số hạng bậc hai mà không có sai số chặt cụt. Khai triển hàm f_k trong phương trình $F_k - f_k(x) = 0$, ta có:

$$F_k = f_k(\mathbf{x}^0) + \mathbf{J}_\mathbf{k}^0 \Delta\mathbf{x} + f_k(\Delta\mathbf{x}) \qquad (4.27)$$

trong đó F_k là đại lượng đã cho; $f_k = (1/2)\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k \mathbf{x}$ đúng cho công suất tác dụng, phản kháng hay biên độ điện áp ở nút k; x^0 là xấp xỉ đầu; $\Delta x = x - x^0$

$$\mathbf{J}_\mathbf{k}^0 = (\partial f_k / \partial \mathbf{x})_{\mathbf{x}^0} = (\mathbf{x}^0)^T \mathbf{A}_k \qquad (4.28)$$

là hàng k của ma trận Jacobian. Số hạng bậc hai của chuỗi Taylor chính là $f_k(\Delta x)$. Như vậy cho tất cả phương trình (4.22) ta có hệ:

$$\mathbf{J}^0\Delta\mathbf{x} = \mathbf{F} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{f}(\Delta\mathbf{x}) \tag{4.29}$$

Chú ý rằng phương trình này là chính xác, không phải xấp xỉ của phương trình phi tuyến ban đầu. Ta có thể giải nó bằng công thức lặp sau đây:

$$\mathbf{J}^0\Delta\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{F} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{f}(\Delta\mathbf{x}^i) \tag{4.30}$$

với $\Delta x=0$ tại bước i=0. Bây giờ Jacobian $\mathbf{J}^0$ là ma trận hằng, do đó chỉ cần tính một lần tại xấp xỉ đầu tiên; đồng thời lưu ý rằng Δx luôn luôn đo từ xấp xỉ này. Xấp xỉ mới $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}^{i+1}$. Quá trình lặp dừng khi $\max_k \left|\Delta x_k^{i+1} - \Delta x_k^i\right| \le \varepsilon$. Ta có thể nhận xét rằng công thức lặp (4.30) tương đương với công thức truy hồi sau đây:

$$\mathbf{J}^0(\mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i) = \mathbf{F} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) \tag{4.31}$$

tức là *phương trình lặp NR của (4.22) với ma trận hằng*. Bởi vậy có thể nói tốc độ hội tụ của sơ đồ lặp này là *tuyến tính* chứ không phải bậc hai như lặp NR chuẩn. Tuy nhiên tốc độ hội tụ có thể được cải thiện bằng cách khởi tạo lại quá trình lặp, chẳng hạn sau mỗi 3 bước, và dùng Jacobian mới cập nhật. Giá phải trả là ma trận có thể có cấu trúc khác và phải làm lại khai triển tam giác.

Nhận xét từ (4.22) rằng phương trình đối với biên độ điện áp của các nút PV là độc lập với các phương trình đối với p,q, do đó phương trình (4.31) có thể tách dễ dàng ra 2 hệ, một hệ đơn giản dùng để cập nhật n_g biến, và một hệ với ma trận Jacobian đối xứng, cùng cấp với Jacobian trường hợp tọa độ cực và là ma trận hằng.

Biểu diễn tọa độ vuông góc còn một ưu điểm đã nói trước đây là việc cập nhật sai số công suất nút ở mỗi bước lặp là nhanh vì không đòi hỏi tính toán hàm lượng giác. Phương pháp này có thể tốt hơn phương pháp NR chuẩn trong tọa độ cực về cả tốc độ và yêu cầu bộ nhớ [11].

4.6 Thay đổi trong công thức Newton- Raphson. Phương pháp tách biến

Chúng ta đã có dịp nhận xét rằng, phương pháp NR không thể có hiệu quả nếu không khai thác tính chất thưa của ma trận Jacobian. Cơ sở của kĩ thuật giải hệ phương trình tuyến tính bởi khai triển tam giác theo thứ tự tối ưu (OOF) đã trình

bày ở chương 2. Nhiều thay đổi trong công thức NR cũng được tìm kiếm để cải thiện hiệu quả tính toán. Cần nhớ rằng do kích thước lớn của bài toán PF thực tế, nên những cải tiến dù nhỏ cũng tác động có ý nghĩa đến thời gian máy và dung lượng bộ nhớ yêu cầu cho bài toán. Một số thay đổi này đã được đề cập trong các mục trước, trong mục này tập trung chú ý đến phương pháp tách biến P-Q, một cải tiến đã trở thành cơ bản trong tính toán PF.

Trở lại thuật toán NR, ta thấy rằng việc cập nhật ma trận Jacobian ở mỗi bước lặp là công việc nặng nề, bởi nó đòi hỏi không những tính lại các phần tử Jacobian, mà tiếp theo phải khai triển LU lại ma trận này. Phần tử của J phụ thuộc biến điện áp u, θ trong lưới điện, tuy nhiên các biến này sau vài bước lặp sẽ ít thay đổi so với giá trị cuối cùng của chúng. Từ nhận xét này, ta có thể chỉ cập nhật Jacobian ở 2,3 bước lặp đầu, rồi dùng ma trận hằng cho các bước sau. Một cách khác là chỉ cập nhật Jacobian sau mọi 2 hay 3 bước lặp. Những thay đổi này không tác động lớn đến tốc độ hội tụ nhưng sẽ cho phép tiết kiệm nhiều thời gian tính toán.

Một sự thay đổi lớn công thức NR ở tọa độ cực đến từ việc xem xét *sự độc lập tương đối giữa cặp biến p-θ và cặp biến q-u*, một thực tế đã được biết từ lâu trong lưới điện truyền tải cao áp (đối tượng chủ yếu của tính toán PF). Đó là cơ sở của *phương pháp tách biến (decoupled load flow)*, đôi khi cũng gọi là phương pháp *Stott*, được đề xuất từ những năm 1972-1974 [39, 40], sẽ được giải thích dưới đây.

Trong công thức Jacobian ở tọa độ cực (4.26) hay (4.17), ta để ý rằng góc lệch pha θ_{km} giữa các nút thường không lớn và lưới điện cao áp thường trội điện kháng X >> R, tức là B >> G. Điều này kéo theo:

$$|G_{km}\sin\theta_{km} - B_{km}\cos\theta_{km}| >> |G_{km}\cos\theta_{km} + B_{km}\sin\theta_{km}|$$

và $\partial p/\partial\theta >> \partial p/\partial u; \partial q/\partial u >> \partial q/\partial\theta$. Như vậy các ma trận con ngoài đường chéo là nhỏ so với ma trận trên đường chéo. Nếu coi $\mathbf{J}_2 \approx \mathbf{0}, \mathbf{J}_3 \approx \mathbf{0}$ thì hệ tuyến tính (4.25) được tách ra hai hệ:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{J}_1\Delta\theta \qquad (4.32)$$

$$\Delta\mathbf{q} = \mathbf{J}_4(\Delta\mathbf{u}/\mathbf{u})$$

trong đó kí hiệu $\Delta\mathbf{u}/\mathbf{u}$ là vectơ có phần tử bằng $\Delta u_m/u_m$. Chú ý thuật ngữ "tách biến" được hiểu rằng Δθ được tính toán chỉ theo Δp và Δu chỉ theo Δq, còn thật ra hai phương trình trên vẫn phụ thuộc lẫn nhau vì Δp, Δq và $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_4$ đều phụ thuộc cả Δθ và Δu.

Nếu hơn nữa ta chấp nhận rằng:

$$\cos\theta_{km} \approx 1 \qquad \sin\theta_{km} \approx \theta_{km} \quad \text{nhỏ}$$

$$G_{km}\sin\theta_{km} << B_{km} \qquad q_k << B_{kk}u_k^2$$

thì có thể đơn giản hoá hai ma trận $\mathbf{J_1}$, $\mathbf{J_4}$ của hệ, bây giờ theo (4.26):

$$\begin{aligned} J_1(k,m) &= J_4(k,m) \approx -u_k u_m B_{km} \\ J_1(k,k) &= J_4(k,k) \approx -u_k^2 B_{kk} \end{aligned} \tag{4.33}$$

Thay vào các phương trình (4.32) và chia phương trình thứ k cho u_k, ta có hai hệ sau đây:

$$\Delta p_k / u_k = -\sum_m B_{km} u_m \Delta\theta_m \tag{4.34}$$

$$\Delta q_k / u_k = -\sum_m B_{km} \Delta u_m$$

(hệ thứ nhất có n phương trình và ẩn, hệ thứ hai có n_c phương trình và ẩn)

Nếu dùng đơn vị tương đối và coi điện áp còn lại ở vế phải $u_m \approx 1$ thì Jacobian sẽ bao gồm các phần tử của ma trận tổng dẫn nút, và là hằng số. Như vậy với xấp xỉ này, đồng thời với việc tách hệ lớn ra hai hệ nhỏ sẽ cho phép giảm số lượng phép tính khi giải, các ma trận trở thành không đổi và do đó chỉ phải khai triển tam giác một lần ở đầu quá trình lặp, trừ khi một giới hạn Q hoặc P bị vi phạm đòi hỏi phải thay đổi kiểu nút.

Chú ý dạng các phương trình công suất nút với xấp xỉ này: Giả sử cùng với các xấp xỉ như trên đối với $cos\theta_{km}$ và $sin\theta_{km}$, ta coi $G_{km} = 0$ tức là bỏ qua tổn thất (năng lượng) trên các nhánh, thì các phương trình nút (4.6) trở thành:

$$\begin{aligned} p_k &\approx \sum_m B_{km} u_k u_m (\theta_k - \theta_m) \\ q_k &\approx -\sum_m B_{km} u_k u_m \end{aligned} \tag{4.35}$$

Nếu trong phương trình công suất tác dụng lại xem xét điện áp các nút (ở đơn vị tương đối) xấp xỉ bằng 1 trong chế độ làm việc bình thường $u_k \approx u_m \approx 1$, thì ta có phương trình thường được gọi là *xấp xỉ phân bố dòng một chiều* sau đây:

$$p_k \approx \sum_m B_{km} (\theta_k - \theta_m) \tag{4.36}$$

Phương trình này có dạng phương trình nút của lưới điện một chiều với p coi là dòng điện và θ coi là điện áp. Rõ ràng với giả thiết trên thì trong đơn vị tương đối $p \equiv i$:

$$
\begin{aligned}
i_k &= \sum_m (\dot{u}_k - \dot{u}_m) jB_{km} \\
&= \sum_m \left[(\cos\theta_k + j\sin\theta_k) - (\cos\theta_m + j\sin\theta_m)\right] jB_{km} \\
&= \sum_m \left[\cos\theta_k - \cos\theta_m + j(\sin\theta_k - \sin\theta_m)\right] jB_{km} \\
&\approx \sum_m B_{km}(\theta_k - \theta_m) \equiv p_k
\end{aligned}
$$

$$i_{km} \equiv p_{km}$$

còn phương trình với q không cần dùng đến nữa. Mô hình xấp xỉ này có thể chấp nhận được trong *phân tích sự cố (contingency analysis).*

Trong phương pháp được gọi là *tách biến nhanh (FDLF: fast decoupled load flow)*[1] , một số đơn giản hóa còn được dùng khi tính toán Jacobian: Ma trận trong phương trình P-θ được bỏ qua các phần tử lưới tác động chủ yếu đến dòng Q, như điện kháng sun hay tỉ số biến áp ngoài định mức. Còn ma trận trong phương trình Q-u được tính toán bỏ qua các thiết bị điều chỉnh góc pha (Phase Shifter) (nếu có) trong lưới. Cuối cùng ta có biểu diễn các phương trình ở dạng:

$$
\begin{aligned}
\left[\Delta \mathbf{p} / \mathbf{u}\right] &= \mathbf{B}' \Delta\theta \\
\left[\Delta \mathbf{q} / \mathbf{u}\right] &= \mathbf{B}'' \Delta \underset{\sim}{\mathbf{u}}
\end{aligned}
\qquad (4.37)
$$

Các ma trận trong các hệ trên vẫn luôn luôn rất thưa, trong đó **B''** (vuông) đối xứng, làm giảm nhẹ yêu cầu bộ nhớ khi khai triển tam giác (**B'** cũng đối xứng nếu không có thiết bị điều chỉnh góc pha hoặc sử dụng một phương pháp khác để tính đến các thiết bị này).

Một ưu điểm quan trọng khác của phương pháp là ma trận **B** không những đối xứng mà còn xác định dương (hoặc ít nhất xác định không âm). Do đó ta có thể áp dụng phương pháp khai triển LL^T (Cholesky) để giải hệ phương trình bảo đảm ổn định số và cho phép dùng thuật toán tối ưu OOF cho ma trận thưa (xem chương 3).

Hai phương trình trong (4.37) nên giải xen kẽ trong quá trình lặp: mỗi bước lặp bao gồm giải cho θ và giải cho u. Luôn luôn dùng giá trị điện áp mới nhất.

Một điều cần chú ý là các giả thiết gần đúng trong phương pháp tách biến (nhanh) không ảnh hưởng tới độ chính xác của lời giải cuối cùng, độ chính xác này được điều khiển bởi sai số cân bằng công suất nút cho phép, dùng làm tiêu chuẩn

---

[1] B. Stott and O. Alsac, "Fast Decoupled Load Flow", *IEEE Trans. Power Apparatus and System*, PAS-93, 5-6/1974.

dừng phép lặp. Các giả thiết gần đúng có thể đưa sai số vào hiệu chỉnh $\Delta\theta$, Δu ở mỗi bước trung gian, nhưng chỉ làm tăng ít số bước lặp NR yêu cầu (ít khi hơn quá một bước). Phương pháp tách biến vẫn nhanh hơn nhiều so với NR chuẩn, đồng thời sử dụng ít bộ nhớ và cũng tin cậy. Đối với trường hợp lưới có tỉ số *R/X lớn*, có thể đưa vào một số thay đổi để đảm bảo hội tụ hoặc sử dụng một *phương pháp bù cho nhánh có R/X lớn*. Ý tưởng của phương pháp là tăng nhân tạo B của nhánh rồi bù lại bằng một vài nút và nhánh giả nối song song.

Tóm lại phương pháp tách biến (nhanh) có nhiều ưu điểm so với NR chuẩn khi dùng cho lưới điện thực tế.

4.7 Tính toán công suất nhánh

Dưới đây cho công thức tính công suất và tổn thất công suất trên các nhánh của graph lưới điện (đường dây, máy biến áp...), biến điện áp ở hai đầu nhánh.

Xét nhánh *k-m* có tổng dẫn (dọc) $\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = G + jB$.

Dòng nhánh và công suất nhánh tại đầu *k* và đi từ *k* tới *m* là:

$$i_{km} = \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{Y}(u_k - u_m)$$

$$s_{km} = p_{km} + jq_{km} = \sqrt{3}\dot{u}_k \hat{i}_{km} = \hat{Y}\dot{u}_k(\hat{u}_k - \hat{u}_m) = \hat{Y}(u_k^2 - u_k u_m \angle\theta_k - \theta_m)$$

$$= (G - jB)(u_k^2 - u_k u_m \cos\theta_{km} - ju_k u_m \sin\theta_{km})$$

Chú ý nếu tất cả các đại lượng dùng đơn vị tương đối thì bỏ các hệ số $\sqrt{3}$, công thức cuối không thay đổi. Từ đó:

$$p_{km} = u_k^2 G - u_k u_m (G\cos\theta_{km} + B\sin\theta_{km}) \quad (4.38)$$

$$q_{km} = -u_k^2 B - u_k u_m (G\sin\theta_{km} - B\cos\theta_{km})$$

Hay $p_{km} = G(u_k^2 - u_k u_m \cos\theta_{km}) - B u_k u_m \sin\theta_{km})$

$$q_{km} = -Gu_k u_m \sin\theta_{km}) - B(u_k^2 - u_k u_m \cos\theta_{km}) \quad (4.38a)$$

Nếu viết theo các phần tử ma trận tổng dẫn nút $G_{km} = -G$, $B_{km} = -B$ thì ta có công thức:

$$\begin{aligned} p_{km} &= -G_{km}(u_k^2 - u_k u_m \cos\theta_{km}) + B_{km} u_k u_m \sin\theta_{km}) \\ q_{km} &= G_{km} u_k u_m \sin\theta_{km} + B_{km}(u_k^2 - u_k u_m \cos\theta_{km}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Để xác định tổn thất công suất trên nhánh, ta có thể tính công suất ở đầu *m* (đi từ *m* tới *k*) dùng công thức tương tự, và ta có tổn thất công suất:

$$\Delta p_{km} = p_{km} + p_{mk} = -G_{km}(u_k^2 + u_m^2 - 2u_k u_m \cos\theta_{km})$$

$$\Delta q_{km} = q_{km} + q_{mk} = B_{km}(u_k^2 + u_m^2 - 2u_k u_m \cos\theta_{km}) = -\Delta p_{km}\frac{B_{km}}{G_{km}} \quad (4.40)$$

4.8. Giải tích chế độ có điều chỉnh và các bài toán PF đặc biệt

Trong mục này ta ghi nhận một số yêu cầu tính toán giải tích đặc biệt có thể gặp trong thực tế. Trước tiên là khả năng tính đến một số tác động điều chỉnh trong hệ thống.

Ta đã biết đối với nút điều khiển điện áp (nút PV), trong quá trình tính giải tích chế độ có thể kiểm tra điều kiện giới hạn phát VAR. Chương trình PF có thể cho phép thay đổi kiểu nút trong quá trình lặp, chẳng hạn nếu công suất Q tính ra vi phạm giới hạn, có thể chuyển nút PV sang loại nút PQ với Q đặt bằng giá trị giới hạn.

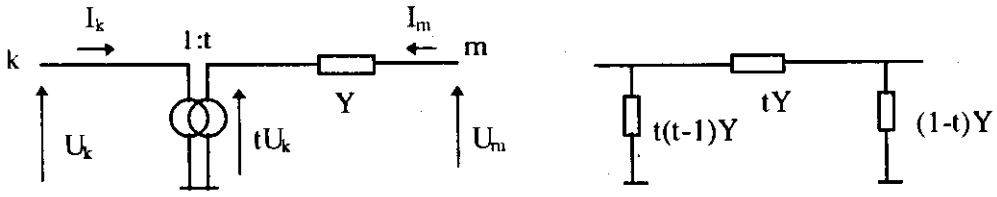
Điện áp nút PV cũng có thể được điều khiển bởi một nguồn VAR ở nơi khác trong lưới. Ngược lại cũng có thể sử dụng loại nút điều khiển có P xác định và Q biến thiên để duy trì điện áp ở một nút khác.

Chương trình PF cũng có thể chấp nhận loại *nút cân bằng vùng*, công suất P của nó biến thiên để duy trì điều kiện trao đổi công suất giữa các vùng tần số, còn điện áp giữ cố định trong giới hạn Q đã cho.

Hai loại tác động điều chỉnh khác trong lưới cũng có thể được tính đến bởi chương trình PF. Đó là máy biến áp điều chỉnh điện áp dưới tải và máy biến áp điều chỉnh pha (Phase Shifter). Trong loại thứ nhất, đầu phân áp (thường giả thiết điều chỉnh trơn) được tìm ra cùng với kết quả tính PF sao cho bảo đảm duy trì điện áp cho trước ở nút điều chỉnh (gọi là *nút PQV*). Trong loại thứ hai, tác động điều chỉnh góc pha trong lưới (điều chỉnh công suất tác dụng P) được thực hiện bằng cách đặt nối tiếp vào pha một điện áp khác góc pha (thường lấy từ điện áp pha khác). Độ dịch chuyển pha cần thiết để duy trì dòng công suất tác dụng đã cho tại điểm điều chỉnh được xác định bởi chương trình giải tích chế độ.

Để hiểu cách đưa các biến điều khiển này vào chương trình chế độ xác lập, ta dẫn ra ma trận tổng dẫn nút của máy biến áp điều chỉnh.

Máy biến áp với tỉ số biến đổi *1: t* được biểu diễn trên *hình 4.3a* dưới đây bởi một máy biến áp lí tưởng nối với một tổng dẫn Y (bằng nghịch đảo tổng trở máy biến áp). Tổng dẫn giả thiết đặt ở phía có đầu phân áp điều chỉnh.



(a) *(b)*

Hình 4.3.

Hệ số biến áp t có thể là số thực hoặc phức. Công suất đi vào máy biến áp lí tưởng từ hai nút k và m là:

$$\dot{S}_k = \dot{U}_k I_k^* \; ; \; \dot{S}_m = t\dot{U}_k I_m^*$$

Máy biến áp lí tưởng không có tổn thất, do đó $\dot{S}_k = -\dot{S}_m$, suy ra :

$$\dot{I}_k = -t^* \dot{I}_m$$

trong đó dòng I_m có thể biểu diễn bởi: $\dot{I}_m = (\dot{U}_m - t\dot{U}_k)Y = tY\dot{U}_k + Y\dot{U}_m$

Do đó: $$\dot{I}_k = -t^* \dot{I}_m = |t|^2 Y\dot{U}_k - t^* Y\dot{U}_m$$

Như vậy ta có phương trình tổng dẫn nút: $$\begin{pmatrix} |t|^2 Y & -t^* Y \\ -tY & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k \\ U_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k \\ I_m \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Nhận xét rằng ma trận chỉ đối xứng (và không làm cho ma trận Y của toàn lưới mất đối xứng) khi t là thực (không có quay pha); khi đó máy biến áp có sơ đồ mạch tương đương như trên *hình 4.3b*.

Bây giờ để mô hình hóa máy biến áp điều chỉnh được nối giữa hai nút k, m của lưới, ta xếp chồng ma trận tổng dẫn của máy biến áp trong (4.38) lên ma trận tổng dẫn nút của toàn lưới: thay đổi 4 phần tử *kk, km, mk* và *mm*. Biến t có thể tham gia vào các phương trình lặp NR như ẩn số, thay cho $|U_m|$ bây giờ được gán giá trị mong muốn (trường hợp chỉ điều chỉnh modun điện áp - t thực). Trường hợp khác, biến góc quay pha φ (với $t = 1\angle\phi$) tham gia vào ẩn số, ứng với phương trình phụ thêm mô tả dòng công suất P mong muốn (trường hợp máy biến áp điều chỉnh pha).

Một số chương trình PF chấp nhận nhánh L-C sun đóng cắt tự động từng bậc theo điều kiện điện áp tại nút (thiết bị bù).

Để tiện lợi cho tính toán nghiên cứu, qui hoạch, chương trình PF có thể được thiết kế phù hợp cho việc tính nhiều lần kèm đối thoại người-máy tính. Các điều kiện giới hạn về dòng, công suất trong các phần tử lưới, điện áp tại các nút... được kiểm tra, các vi phạm được thông báo. Người sử dụng chương trình có thể thay đổi dữ liệu và tiến hành tính toán lại, chương trình tự động tận dụng các kết quả tính toán trước trong lần giải mới.

Về các loại bài toán PF đặc biệt, có thể kể ra yêu cầu tính toán 3 pha, tính phân bố dòng hài, tính phân bố dòng trong hệ thống AC-DC (xoay chiều - một chiều hỗn hợp). Phân bố dòng 3 pha được dùng để phân tích hệ thống làm việc rất không đối xứng, như vài trường hợp đường dây truyền tải cao áp không chuyển vị pha hay lưới điện phân phối hỗn hợp 3 pha và 1 pha. Tuy nhiên tính toán 3 pha phức tạp và cồng kềnh hơn nhiều nên ít được sử dụng.

Trường hợp tồn tại các phụ tải phi tuyến trong hệ thống điện như các thiết bị điện tử công suất lớn, dòng áp trong hệ thống trở nên không sin, có thể khai triển ra nhiều thành phần hài tần số khác nhau. Khi cần đánh giá ảnh hưởng của các thành phần tần số cao này, hay khi thiết kế các bộ lọc hài..., yêu cầu tính toán giải tích dòng hài trong hệ thống điện.