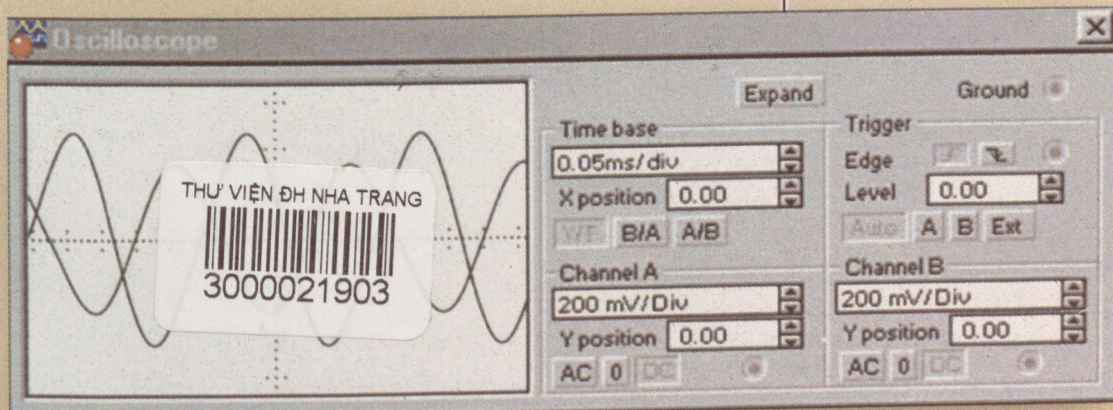
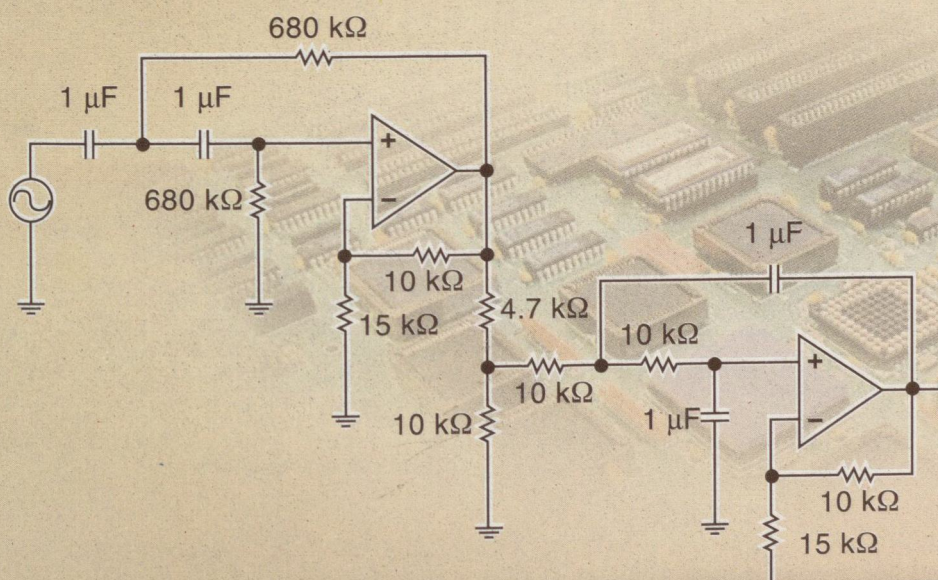


MẠCH ĐIỆN I



ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

Phạm Thị Cư (Chủ biên)

Trương Trọng Tuấn Mỹ - Lê Minh Cường

MẠCH ĐIỆN I

(Tái bản lần thứ năm)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA
TP HỒ CHÍ MINH - 2011

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	5
-------------	---

Chương 1

NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ MẠCH ĐIỆN	7
1.1 Giới hạn và phạm vi ứng dụng của lý thuyết mạch	7
1.2 Mạch điện và mô hình	8
1.3 Các phần tử mạch	13
1.4 Công suất và năng lượng	23
1.5 Phân loại mạch điện	27
1.6 Các định luật cơ bản của mạch điện	31
1.7 Biến đổi tương đương mạch	39
1.8 Phân loại bài toán mạch theo tính chất quá trình điện từ	45

Chương 2

MẠCH XÁC LẬP ĐIỀU HÒA	50
2.1 Quá trình điều hòa	50
2.2 Phương pháp biên độ phức	52
2.3 Quan hệ giữa điện áp và dòng điện trên các phần tử R, L, C - trở kháng và dẫn nạp	61
2.4 Các định luật Ohm, Kirchhoff dạng phức	69
2.5 Đồ thị vectơ	81
2.6 Công suất	84
2.7 Phối hợp trở kháng giữa tải và nguồn	97
2.8 Mạch cộng hưởng	100

Chương 3

CÁC PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH MẠCH	123
3.1 Phương pháp dòng nhánh	123
3.2 Phương pháp thế nút	123
3.3 Phương pháp đồng mất lưới	133
3.4 Mạch có ghép hồ cảm	142

3.5 Mạch chứa khuếch đại thuật toán (op-amp)	155
3.6 Các định lý mạch cơ bản	163
3.7 Graph và tô pô mạch	202
3.8 Phân tích mạch điện dùng ma trận	238

Chương 4

MẠCH BA PHA	269
4.1 Mạch nhiều pha và ba pha	269
4.2 Ghép nối mạch ba pha	272
4.3 Mạch ba pha nối sao đối xứng bốn dây	275
4.4 Hệ thống nối sao ba dây	279
4.5 Hệ thống nguồn tam giác – tải nối tam giác hoặc sao	287
4.6 Công suất tác dụng trong mạch ba pha – đo công suất	289
4.7 Công suất phản kháng, công suất biểu kiến và công suất phức trong mạch ba pha – hiệu chỉnh hệ số công suất	294
4.8 Sụt áp và công suất tổn hao trên đường dây ba pha	297
4.9 Phương pháp các thành phần đối xứng	302

Chương 5

MẠNG HAI CỬA	310
5.1 Khái niệm chung	310
5.2 Các hệ phương trình trạng thái của mạng hai cửa	310
5.3 Phân loại mạng hai cửa	331
5.4 Cách nối các mạng hai cửa	338
5.5 Các thông số làm việc	348
5.6 Các thông số sóng của mạng hai cửa	357
5.7 Lọc điện	366

LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết Mạch là một lĩnh vực khoa học có ý nghĩa quan trọng trong việc đào tạo kỹ sư các ngành Kỹ thuật Điện, Điện tử - Viễn thông, Tự động điều khiển v.v... Nó có phạm vi nghiên cứu rất rộng, nhằm cung cấp cho sinh viên các phương pháp phân tích, tổng hợp mạch, là cơ sở để thiết kế các hệ thống Điện - Điện tử.

Lý thuyết Mạch là môn học lý thuyết, đồng thời là môn khoa học ứng dụng. Nó được nghiên cứu theo hai hướng chính là: Phân tích mạch, tức là tính toán các đại lượng điện khi đã biết cấu trúc mạch với các thông số của nó và nguồn kích thích, và Tổng hợp mạch là xây dựng các hệ thống theo các yêu cầu đã cho về tác động và đáp ứng. Cả hai hướng nghiên cứu đều có chung cơ sở toán học và vật lý. Cơ sở vật lý là các định luật về điện từ trường, còn cơ sở toán học là toán giải tích, lý thuyết hàm hữu tỉ và phương trình vi phân.

Cuốn sách MẠCH ĐIỆN trong chương trình đào tạo kỹ sư Điện, Điện tử - Viễn thông và Tự động, sẽ cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản đã nói ở trên, nhưng chủ yếu là ở phần phân tích mạch.

Cuốn sách MẠCH ĐIỆN được soạn thảo theo đề cương đã được Hội đồng Khoa học của Khoa Điện - Điện tử, Trường Đại học Bách khoa - Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh thông qua. Cuốn sách được chia thành hai tập lý thuyết: MẠCH ĐIỆN I, MẠCH ĐIỆN II và hai tập bài tập tương ứng với nội dung hai tập lý thuyết. Việc phân chia thành hai tập là do thời gian bố trí cho môn học trải ra ở hai học kỳ, mỗi học kỳ ba tín chỉ 3(3-2-6) đối với sinh viên ngành Kỹ thuật Điện. Với các ngành khác, tùy theo yêu cầu về nội dung và thời gian mà có thể thay đổi cho phù hợp.

MẠCH ĐIỆN I gồm năm chương (1+5), đề cập đến các vấn đề cơ bản của phân tích mạch: Mô hình mạch, mô hình toán, các định luật cơ bản của lý thuyết Mạch, các phương pháp phân tích mạch tuyến tính, tập trung, dừng, ở xác lập điều hòa (sin) và một chiều.

MẠCH ĐIỆN II gồm bốn chương (6+9) nghiên cứu các bài toán phân tích mạch tổng quát hơn, đó là: Mạch điện ở trạng thái quá độ, ở xác lập tuần hoàn không sin, mạch có thông số rải và mạch không tuyến tính. Sách bài tập được soạn theo sát nội dung các chương lý thuyết, để giúp người học có thể ứng dụng các phương pháp phân tích mạch đã học. Tuy số lượng bài tập không nhiều, nhưng cũng đủ để nắm được các vấn đề cốt lõi của môn học.

Các tác giả đã viết cuốn sách này với sự cố gắng sưu tầm các tài liệu trong và ngoài nước, với sự đóng góp tận tình của các đồng nghiệp trong và ngoài bộ môn, cùng với kinh nghiệm giảng dạy môn học này trong nhiều năm. Nội dung của cuốn sách cũng được chỉnh sửa qua nhiều lần tái bản, tuy nhiên không thể tránh được những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các đồng nghiệp, của các em sinh viên và của các bạn đọc quan tâm đến giáo trình này.

Xin liên hệ với chúng tôi về Bộ môn Cơ sở Kỹ Thuật Điện, Khoa Điện - Điện tử, Trường Đại học Bách khoa - Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh - Địa chỉ: 268 Lý Thường Kiệt - Quận 10, ĐT: 8647685.

Xin chân thành cảm ơn.

TP. HCM tháng 12 năm 2002

CÁC TÁC GIẢ.

NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ MẠCH ĐIỆN

1.1 GIỚI HẠN VÀ PHẠM VI ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT MẠCH

Việc nghiên cứu các hiện tượng vật lý thường đòi hỏi phải dẫn đến việc mô tả các hiện tượng đó bằng các mô hình. Dựa trên mô hình với các dữ kiện ban đầu và bằng các phương pháp toán học người ta có thể nghiên cứu phân tích các hiện tượng vật lý. Mô hình được tạo ra phải phản ánh tốt nhất các đặc tính của hiện tượng, không đưa đến sự sai khác quá lớn giữa kết quả nhận được từ việc phân tích trên mô hình và kết quả đo lường thực tế. Mô hình do đó chỉ là gần đúng với thực tế, mô hình càng tốt nếu sự gần đúng càng chính xác.

Để khảo sát các hiện tượng điện từ trong kỹ thuật điện, điện tử, vô tuyến điện thường dùng hai loại mô hình: *mô hình trường* và *mô hình mạch*, mà tương ứng ta có hai môn học: *lý thuyết trường điện từ* và *lý thuyết mạch điện*.

Trong lý thuyết trường, mô hình trường được sử dụng. Quá trình điện từ được đo bởi một số hữu hạn các biến phân bố trong không gian cũng như thời gian như vectơ cường độ trường điện $\vec{E}(\vec{r}, t)$, cường độ trường từ $\vec{H}(\vec{r}, t)$, mật độ dòng điện $\vec{J}(\vec{r}, t)$, mật độ điện tích $\rho(\vec{r}, t)$, v.v.. Việc khảo sát dựa trên hệ phương trình Maxwell, là hệ phương trình đạo hàm riêng trong không gian và thời gian, liên hệ giữa các đại lượng trên. Tính chất của các môi trường trong đó ta khảo sát quá trình điện từ được mô tả bởi các phương trình chất có dạng: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$; $\vec{B} = \mu \vec{H}$; $\vec{J} = \gamma \vec{E}$; v.v. trong đó: hệ số điện thẩm ϵ , hệ số từ thẩm μ , độ dẫn điện γ là các thông số đặc trưng của môi trường.

Các hiện tượng điện từ được xét dùng mô hình trường là: bức xạ điện từ, sự truyền lan của sóng điện từ, hiệu ứng bề mặt, màn chắn điện v.v..

Việc dùng mô hình trường để khảo sát các hiện tượng điện từ có ưu điểm là chính xác nhưng rất phức tạp về mặt toán học ngay cả đối với các hệ đơn giản.

Trong trường hợp kích thước hình học của hệ rất nhỏ so với bước sóng điện từ của tín hiệu, có thể khảo sát quá trình điện từ bằng một loại mô hình đơn giản hơn mô hình trường, đó là mô hình mạch.

Ở mô hình mạch dùng trong lý thuyết mạch điện, quá trình truyền đạt và biến đổi năng lượng hay tín hiệu điện từ được đo bởi một số hữu hạn biến, chỉ phụ thuộc vào thời gian mà không phân bố trong không gian, như dòng điện điện áp trên các cực của các phần tử của hệ. Việc khảo sát được dựa trên hai định luật cơ bản là định luật Kirchhoff về sự cân bằng dòng điện ở nút và định luật Kirchhoff về sự cân bằng điện áp trong vòng kín. Bản chất quá trình điện từ trong các phần tử được mô tả bởi các phương trình đại số hoặc vi tích phân trong miền thời gian liên hệ giữa dòng với áp trên các cực của phần tử như: $u = Ri$; $u = L \frac{di}{dt}$; $i = C \frac{du}{dt}$, v.v.

trong đó: điện trở R , điện cảm L , điện dung C , v.v. là các thông số đặc trưng của các phần tử.

1.2 MẠCH ĐIỆN VÀ MÔ HÌNH

Mạch điện là một hệ thống gồm các thiết bị điện, điện tử ghép lại trong đó xảy ra các quá trình truyền đạt, biến đổi năng lượng hay tín hiệu điện từ do bởi các đại lượng dòng điện, điện áp. Mạch điện được cấu trúc từ các phần riêng rẽ đủ nhỏ, thực hiện các chức năng xác định được gọi là *các phần tử mạch điện*. Hai loại phần tử chính của mạch điện là *nguồn* và *phụ tải*.

Nguồn là các phần tử dùng để cung cấp năng lượng điện hoặc tín hiệu điện cho mạch, ví dụ như máy phát điện (biến đổi cơ năng thành điện năng), ắc qui (biến đổi hóa năng sang điện năng), cảm biến nhiệt, v.v..

Phụ tải là các thiết bị nhận năng lượng điện hay tín hiệu điện, ví dụ như động cơ điện (biến điện năng thành cơ năng), đèn điện (biến điện năng sang quang năng), bếp điện, bàn là, ống tia điện tử, v.v..

Ngoài hai loại chính trên, trong mạch điện còn có nhiều loại phần tử khác nhau như: phần tử dùng để nối nguồn với phụ tải (ví dụ dây nối, đường dây tải điện), phần tử làm thay đổi áp và dòng trong các phần khác của mạch (máy biến áp, máy biến dòng), phần tử làm giảm hoặc tăng cường các thành phần nào đó của tín hiệu (các bộ lọc, bộ khuếch đại), v.v..

Trên mỗi phần tử thường có một số đầu nối ra gọi là *các cực* dùng để nối nó với các phần tử khác. Dòng điện đi vào hoặc ra phần tử từ các cực. Phần tử có thể có hai cực, ba cực, bốn cực hay nhiều cực.

Ví dụ, cuộn dây, tụ điện là phần tử hai cực

Transistor là phần tử ba cực; máy biến áp, khuếch đại thuật toán là phần tử nhiều cực.

. Nếu phần tử có kích thước rất nhỏ so với độ dài của bước sóng điện từ, thì trên các cực của phần tử có thể định nghĩa các đại lượng dòng điện, điện áp và có thể dùng hai đại lượng này để đo cường độ chung (xét về toàn bộ) của quá trình điện từ xảy ra bên trong phần tử. Điện áp và dòng điện được định nghĩa như sau:

- Điện áp giữa điểm A với điểm B là công cần thiết để làm dịch chuyển một đơn vị điện tích (1 coulomb) từ A đến B.

Đơn vị của điện áp là vôn (V). Điện áp được ký hiệu là u .

Trên H.1.1: u - là điện áp giữa A với B:

dấu + được đặt ở phía A

dấu - ở phía B.

Đôi khi thay vì dùng các dấu +, -

u_{AB} - điện áp giữa A với B.

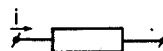
và ta có:

$$u_{AB} = -u_{BA}$$

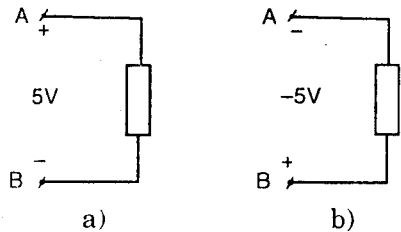
Hình 1.2a và 1.2b tương đương với nhau.

- Dòng điện là dòng các điện tích chuyển dịch có hướng. Cường độ dòng điện (gọi tắt là dòng điện) là lượng điện tích dịch chuyển qua một bề mặt nào đó (tiết diện ngang của dây dẫn, nếu là dòng điện chảy trong dây dẫn) trong một đơn vị thời gian. Dòng điện được ký hiệu là i và đơn vị là ampe (A). Chiều dòng điện, theo định nghĩa, là chiều chuyển động của các điện tích dương (hay là ngược chiều với chiều chuyển động các điện tích âm). Để tiện lợi, người ta chọn tùy ý một chiều và ký hiệu bằng mũi tên như trên H.1.3 và gọi là chiều dương của dòng điện.

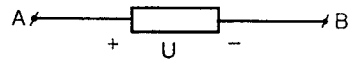
Nếu tại một thời điểm t nào đó, chiều dòng điện trùng với chiều dương thì i sẽ mang dấu dương ($i > 0$), còn nếu chiều dòng điện ngược với chiều dương thì i sẽ âm ($i < 0$).



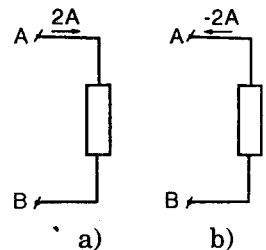
Hình 1.3



Hình 1.1



Hình 1.2



Hình 1.4

Hình 1.4a và H.1.4b tương đương với nhau.

. Các hiện tượng điện từ gồm rất nhiều vẻ, như hiện tượng chỉnh lưu, tách sóng, tạo hàm, tạo sóng, biến áp, khuếch đại, v. v.. Tuy nhiên nếu xét theo quan điểm năng lượng thì quá trình điện từ trong mạch điện có thể qui về hai hiện tượng năng lượng cơ bản là *hiện tượng biến đổi năng lượng* và *hiện tượng tích phóng năng lượng điện từ*.

Hiện tượng biến đổi năng lượng có thể chia làm hai loại:

- *Hiện tượng nguồn*: là hiện tượng biến đổi từ các dạng năng lượng khác như cơ năng, hóa năng, nhiệt năng v.v. thành năng lượng điện từ.

- *Hiện tượng tiêu tán*: là hiện tượng biến đổi năng lượng điện từ thành các dạng năng lượng khác như nhiệt, cơ, quang, hóa năng - tiêu tán đi không hoàn trở lại trong mạch nữa.

Hiện tượng tích phóng năng lượng điện từ là hiện tượng năng lượng điện từ được tích vào một vùng không gian có tồn tại trường điện từ hoặc đưa từ vùng đó trả lại bên ngoài.

Để thuận tiện cho việc nghiên cứu, người ta coi sự tồn tại của một trường điện từ thống nhất gồm hai mặt thể hiện: *trường điện* và *trường từ*. Vì vậy hiện tượng tích phóng năng lượng điện từ cũng gồm *hiện tượng tích phóng năng lượng trong trường từ* và *hiện tượng tích phóng năng lượng trong trường điện*.

Bởi vì dòng điện và trường điện từ có liên quan chặt chẽ với nhau nên trong bất kỳ thiết bị điện nào cũng đều xảy ra cả hai hiện tượng biến đổi và tích phóng năng lượng. Nhưng có thể trong một thiết bị thì hiện tượng năng lượng này xảy ra mạnh hơn hiện tượng năng lượng kia. Ví dụ, ta xét các phần tử thực là điện trở, tụ điện, cuộn dây, ắc qui.

Trong tụ điện, hiện tượng năng lượng chủ yếu xảy ra là hiện tượng tích phóng năng lượng trường điện. Ngoài ra do điện môi giữa hai cốt tụ có độ dẫn điện hữu hạn nào đó nên trong tụ cũng xảy ra hiện tượng tiêu tán biến điện năng thành nhiệt năng.

Trong cuộn dây xảy ra chủ yếu là hiện tượng tích phóng năng lượng trường từ. Ngoài ra dòng điện dẫn cũng gây ra tổn hao nhiệt trong dây dẫn của cuộn dây nên trong cuộn dây cũng xảy ra hiện tượng tiêu tán. Trong cuộn dây cũng xảy ra hiện tượng tích phóng năng lượng trường điện nhưng thường rất yếu và có thể bỏ qua nếu tần số làm việc (và do đó tốc độ biến thiên của trường điện từ) không lớn lắm.

Trong điện trở thực, hiện tượng chủ yếu xảy ra là hiện tượng tiêu tán biến đổi năng lượng trường điện từ thành nhiệt năng. Nếu trường điện từ biến thiên không lớn lắm, có thể bỏ qua dòng điện dịch (giữa các vòng dây quấn hoặc giữa các lớp điện trở) so với dòng điện dẫn và bỏ qua sức điện động cảm ứng so với sụt áp trên điện trở, nói cách khác bỏ qua hiện tượng tích phóng năng lượng điện từ.

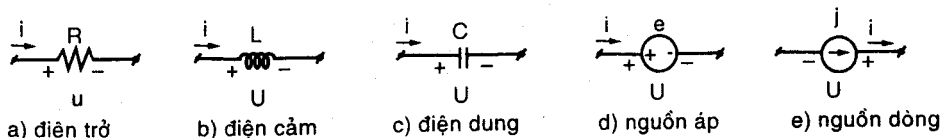
Trong ắc qui xảy ra hiện tượng nguồn biến đổi từ hóa năng sang điện năng; đồng thời cũng xảy ra hiện tượng tiêu tán.

• Mô hình mạch dùng trong lý thuyết mạch điện, được xây dựng từ các *phần tử mạch lý tưởng* sau đây:

- *Phần tử điện trở*: là phần tử đặc trưng cho hiện tượng tiêu tán năng lượng điện từ. Ký hiệu của phần tử điện trở như trên H.1.5a. Quan hệ giữa dòng và áp trên hai cực của phần tử điện trở ở dạng $u = Ri$, trong đó R là một thông số cơ bản của mạch điện đặc trưng cho hiện tượng tiêu tán năng lượng, gọi là điện trở.

- *Phần tử điện cảm*: là phần tử đặc trưng cho hiện tượng tích phóng năng lượng trường từ, ký hiệu như trên H.1.5b. Quan hệ giữa dòng và áp trên phần tử điện cảm thường có dạng $u = L \frac{di}{dt}$, trong đó L là một thông số cơ bản của mạch điện đặc trưng cho hiện tượng tích phóng năng lượng trường từ, gọi là điện cảm.

- *Phần tử điện dung*: là phần tử đặc trưng cho hiện tượng tích phóng năng lượng trường điện, ký hiệu như H.1.5c. Quan hệ giữa dòng và áp thường có dạng $i = C \frac{du}{dt}$, trong đó C gọi là điện dung là một thông số cơ bản của mạch điện đặc trưng cho hiện tượng tích phóng năng lượng trường điện.



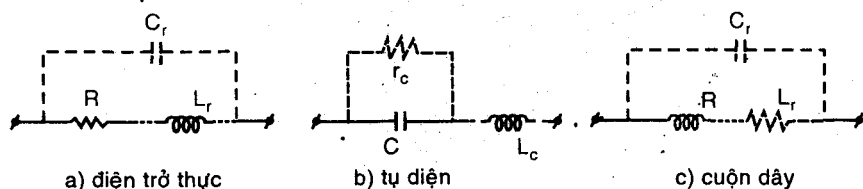
Hình 1.5: Các phần tử mạch lý tưởng

- *Phần tử nguồn*: là phần tử đặc trưng cho hiện tượng nguồn. Phần tử nguồn gồm hai loại: *phần tử nguồn áp* (H.1.5d) và *phần tử nguồn dòng*

(H.1.5e). Phương trình trạng thái của phần tử nguồn áp có dạng $u(t) = e(t)$, trong đó $e(t)$ không phụ thuộc dòng $i(t)$ chảy qua phần tử và được gọi là sức điện động. Phương trình trạng thái của phần tử nguồn dòng có dạng $i(t) = j(t)$, trong đó $j(t)$ không phụ thuộc áp $u(t)$ trên hai cực của phần tử. $e(t)$ và $u(t)$ là hai thông số cơ bản của mạch điện đặc trưng cho hiện tượng nguồn, đo khả năng phát của nguồn.

R, L, C, e, j là các thông số cơ bản của mạch điện, đặc trưng cho bản chất của quá trình điện từ (tiêu tán, tích phóng năng lượng điện trường hoặc từ trường hoặc hiện tượng nguồn). Các phần tử điện trở, điện cảm, điện dung, nguồn áp, nguồn dòng là các phần tử lý tưởng cơ bản của mạch điện. Chúng là các phần tử hai cực. Ngoài ra để tiện lợi và chính xác hơn khi mô hình các phần tử thực có nhiều cực như: transistor, khuếch đại thuật toán, biến áp v.v. người ta còn xây dựng thêm các phần tử lý tưởng nhiều cực như: các phần tử nguồn phụ thuộc, phần tử có ghép hồ cảm, biến áp lý tưởng v.v. (mục 1.3.2).

• Một phần tử thực của mạch điện có thể được mô hình gần đúng bởi một hay tập hợp nhiều phần tử mạch lý tưởng được ghép nối với nhau theo một cách nào đó để mô tả gần đúng (với độ chính xác nào đó) hoạt động của phần tử thực tế.



Hình 1.6: Sơ đồ thay thế của điện trở thực, tụ điện, cuộn dây

H.1.6a, b, c là mô hình của các phần tử thực điện trở, tụ điện, cuộn dây. Các phần tử lý tưởng điện cảm L , điện dung C , điện trở R theo thứ tự phản ảnh quá trình điện từ cơ bản xảy ra trong cuộn dây, tụ điện, điện trở thực. Ngoài ra, trong các điều kiện cụ thể phải lưu ý đến các quá trình phụ (ký sinh) xảy ra trong phần tử thực bằng cách bổ sung thêm vào mô hình các phần tử ký sinh tương ứng.

Trong mô hình cuộn dây, ngoài phần tử điện cảm L , đặc trưng cho quá trình cơ bản trong cuộn dây là quá trình tích phóng năng lượng trường từ, trong nhiều trường hợp phải lưu ý đến các điện trở r_L phản ảnh tổn hao năng lượng trong cuộn dây và trong lõi. Ở tần số cao còn phải kể đến ảnh hưởng của điện dung ký sinh giữa các vòng dây.

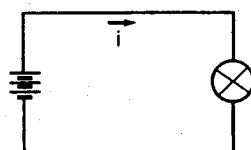
Mô hình của tụ điện trong đa số trường hợp gồm hai phần tử điện dung C và điện trở r_c , trong đó, phần tử điện dung là phần tử quan trọng nhất đặc trưng cho quá trình chủ yếu trong tụ điện là quá trình tích, phóng năng lượng trường điện, còn điện trở r_c là tính đến tổn hao trong điện môi. Nếu tần số làm việc rất cao thì cũng phải lưu ý đến điện cảm L_c của dây nối.

Ở tần số cao, trong mô hình của điện trở thực cũng phải lưu ý đến các tham số điện cảm L_r và điện dung C_r mà trong đa số các trường hợp có thể bỏ qua.

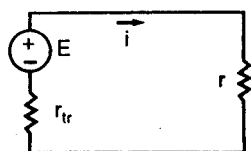
Mỗi phần tử mạch lý tưởng tương ứng với một cách biểu diễn hình học (H.1.5). Mô hình của một phần tử thực có thể được mô tả hình học bởi một sơ đồ gồm một hoặc nhiều phần tử lý tưởng ghép nối với nhau, được gọi là *sơ đồ thay thế* hoặc *sơ đồ tương đương của phần tử thực*. Ví dụ, (H.1.6a,b,c) là sơ đồ thay thế của điện trở, tụ điện, cuộn dây.

. Bởi vì mạch điện thực gồm các phần tử thực ghép nối với nhau theo một sơ đồ nối dây cụ thể nào đó, nên từ sơ đồ thay thế của từng phần tử thực và sơ đồ nối dây của mạch điện có thể mô tả hình học mô hình của mạch điện thực bởi một sơ đồ gọi là *sơ đồ thay thế (tương đương) của mạch điện*, hay gọi tắt là *sơ đồ mạch*. Kết cấu hình học của sơ đồ thay thế phải giống như kết cấu của mạch điện thực, tuy nhiên mỗi phần tử thực đã được thay bằng sơ đồ thay thế của nó.

Ví dụ, H.1.7 là sơ đồ nối dây của một mạch điện đơn giản gồm một ắc quy cung cấp điện năng cho đèn sợi nung. Sơ đồ mạch của mạch điện này được cho trên H.1.8, trong đó ắc quy được mô hình bởi một phần tử nguồn áp E (đặc trưng cho hiện tượng nguồn trong ắc quy) mắc nối tiếp với một điện trở r_{tr} (đặc trưng cho tổn hao điện năng trong ắc quy) gọi là điện trở trong của nguồn, còn đèn sợi nung chỉ có hiện tượng tiêu tán nên được đặc trưng bằng điện trở r trên sơ đồ (điện trở của dây nối được bỏ qua).



Hình 1.7



Hình 1.8

1.3 CÁC PHẦN TỬ MẠCH

Trong phần này ta xét các phần tử mạch lý tưởng gồm các phần tử hai cực như phần tử điện trở, điện dung, điện cảm, nguồn áp nguồn dòng và một số phần tử bốn cực.

1.3.1 Các phần tử hai cực

1- Phần tử điện trở

Một cách tổng quát, phần tử điện trở được định nghĩa là phần tử được đặc trưng bởi quan hệ giữa dòng điện và điện áp trên phần tử có dạng sau:

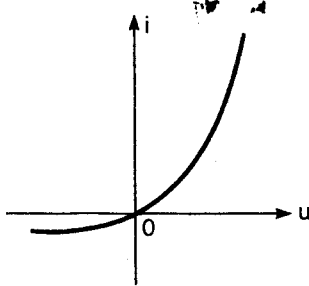
$$u = f_R(i) \quad (1.1)$$

$$\text{hoặc:} \quad i = \varphi_R(u) \quad (1.2)$$

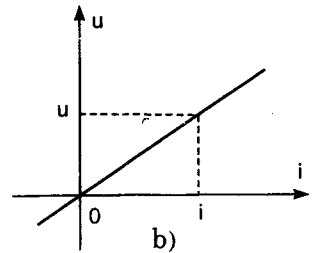
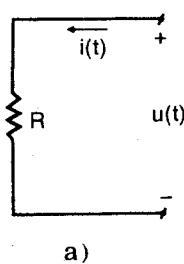
trong đó: f_R và φ_R - là các hàm liên tục

Quan hệ (1.1) hoặc (1.2) gọi là đặc tuyến vôn-ampe (V-A) của phần tử điện trở. Tổng quát các đặc tuyến này không là đường thẳng: ta có phần tử điện trở phi tuyến (không tuyến tính).

Ví dụ, trên H.1.9 là đặc tuyến V-A của một loại diode bán dẫn.



Hình 1.9: Một ví dụ về đặc tuyến V-A của điện trở phi tuyến



Hình 1.10: Ký hiệu và đặc tuyến V-A của điện trở tuyến tính

Nếu đặc tuyến V-A là đường thẳng (H.1.10b) thì ta có phần tử điện trở tuyến tính. Quan hệ giữa dòng điện và điện áp được biểu thị qua định luật Ohm:

$$u = R \cdot i \quad (1.3)$$

$$\text{với:} \quad R = \frac{u}{i} \quad (1.4)$$

là điện trở, đo bằng Ohm (Ω).

Điện trở tuyến tính có giá trị không âm, và không phụ thuộc vào giá trị của điện áp và dòng điện trên nó.

$$\text{Trường hợp } R = 0 \text{ ta có: } u \equiv 0 \quad (1.5)$$

đối với giá trị bất kỳ của dòng điện. Điều này tương đương với sự ngắn mạch hai cực. Mô hình loại này thường dùng cho dây dẫn nối mạch.

Phương trình (1.3) có thể viết dưới dạng khác:

$$i = \frac{1}{R}u = G.u \quad (1.6)$$

trong đó: G - được gọi là điện dẫn và được đo bằng Siemen (S)

hoặc: mho (Ω): $1S = 1/\Omega = \Omega^{-1} = \mathfrak{U}$

$$\text{Khi } R = \infty \text{ hay } G = 0 \text{ thì: } i \equiv 0 \quad (1.7)$$

không phụ thuộc vào áp trên nó

Điều này tương đương với sự hở mạch. Mô hình này thường dùng để biểu diễn sự hở mạch.

2- Phần tử điện dung

Phần tử điện dung là mô hình lý tưởng của tụ điện, khi chỉ xét đến hiện tượng chủ yếu là hiện tượng tích phóng năng lượng điện trường, bỏ qua các hiện tượng khác. Phần tử này được đặc trưng bởi quan hệ giữa điện tích tích lũy trên cốt tụ và điện áp giữa hai cốt tụ:

$$q = f_c(u) \quad (1.8)$$

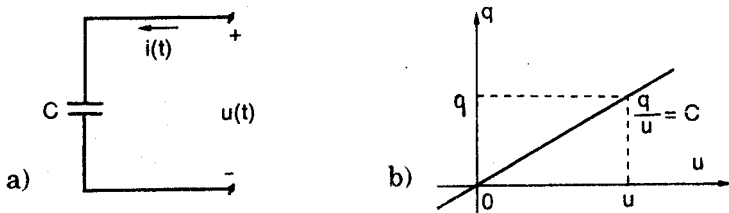
mà trong trường hợp tổng quát được biểu diễn trên H.1.11

Nếu đặc tuyến này là đường thẳng: ta có phần tử điện dung tuyến tính. Trong trường hợp này:

$$q = Cu \quad (1.9)$$

$$\text{trong đó: } C = \frac{q}{u} \quad (1.10)$$

là điện dung được tính bằng Farad (F) có giá trị không phụ thuộc vào điện áp. Ký hiệu và đặc tuyến của điện dung tuyến tính như H.1.12.



Hình 1.12: Ký hiệu và đặc tuyến của điện dung tuyến tính

Dòng điện chảy qua điện dung bằng tốc độ biến thiên của điện tích:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (1.11)$$

$$\text{với: } q(t) = Cu(t) \quad (1.12)$$

Nếu điện dung tuyến tính C không thay đổi theo thời gian thì:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (1.13)$$

Điện áp trên phần tử điện dung được xác định bởi phương trình:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + u(t_0) \quad (1.14)$$

trong đó: $u(t_0) = \frac{q(t_0)}{C} \quad (1.15)$

$u(t_0)$ - là giá trị của điện áp trên phần tử điện dung tại thời điểm ban đầu t_0 .

3- Phần tử điện cảm

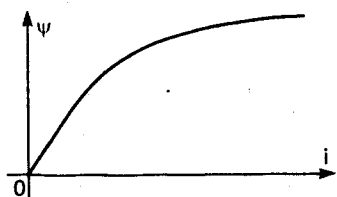
Phần tử điện cảm là mô hình lý tưởng của cuộn dây, khi chỉ xét đến hiện tượng chủ yếu là hiện tượng tích phóng năng lượng từ trường, bỏ qua các hiện tượng khác (H.1.13). Phần tử này được đặc trưng bởi quan hệ giữa từ thông móc vòng và dòng điện chảy qua cuộn dây:

$$\psi = f_L(i) \quad (1.16)$$

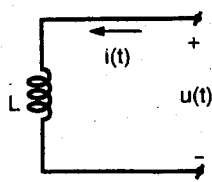
Trong trường hợp đặc tuyến này là đường thẳng (H.1.14b) ta có phần tử điện cảm tuyến tính.

Khi đó tỉ số $L = \frac{\psi}{i}$ không phụ thuộc vào dòng điện i .

L được gọi là điện cảm (hoặc hệ số tự cảm) và được đo bằng Henry (H). Ký hiệu và đặc trưng của nó như trên H.1.14.



Hình 1.13: Đặc tuyến của điện cảm phi tuyến



Hình 1.14: Ký hiệu và đặc tuyến của điện cảm tuyến tính

Điện áp trên phần tử điện cảm bằng tốc độ biến thiên của từ thông:

$$u(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = -e_L(t) \quad (1.17)$$

trong đó: $e_L(t)$ - là sức điện động cảm ứng do từ thông biến đổi theo thời gian gây nên.

$$\psi(t) = Li \quad (1.18)$$

Nếu điện cảm tuyến tính L không thay đổi theo thời gian thì:

$$u(t) = \frac{d}{dt}(Li(t)) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1.19)$$

Dòng điện trong trường hợp này được xác định từ phương trình:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau + i(t_0) \quad (1.20)$$

trong đó:
$$i(t_0) = \frac{\Psi(t_0)}{L} \quad (1.21)$$

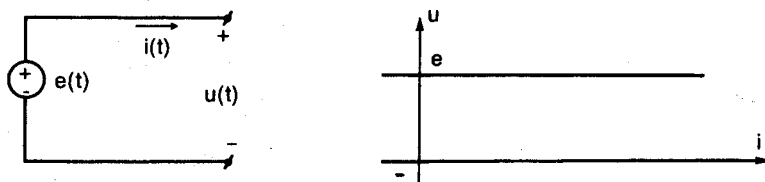
$i(t_0)$ - là giá trị của dòng điện qua phần tử điện cảm tại thời điểm ban đầu t_0 .

4- Nguồn điện áp độc lập

Nguồn điện áp độc lập là phần tử hai cực mà điện áp của nó không phụ thuộc vào giá trị dòng điện cung cấp từ nguồn và chính bằng sức điện động của nguồn:

$$u(t) \equiv e(t) \quad (1.22)$$

Ký hiệu của nguồn điện áp và đặc tuyến ngoài của nó (tức là sự phụ thuộc của điện áp trên hai cực nguồn vào dòng điện chảy qua nó) như trên H.1.15.



Hình 1.15: Nguồn điện áp lý tưởng và đặc tuyến ngoài

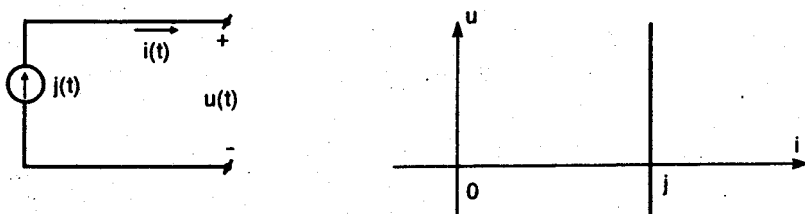
Dòng điện của nguồn sẽ phụ thuộc vào tải mắc vào nó.

5- Nguồn dòng độc lập

Nguồn dòng độc lập là phần tử hai cực mà dòng điện của nó không phụ thuộc vào điện áp trên hai cực nguồn:

$$i(t) \equiv j(t) \quad (1.23)$$

Ký hiệu và đặc tuyến ngoài của nguồn dòng điện như trên H.1.16. Điện áp trên các cực nguồn phụ thuộc vào tải mắc vào nó và chính bằng điện áp trên tải này.

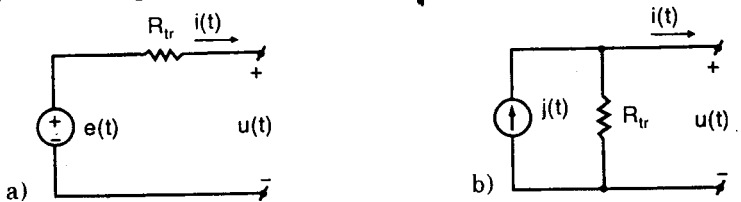


Hình 1.16: Nguồn dòng điện

Đặc tuyến của các nguồn thực tế sẽ khác với biểu diễn trên H.1.15 và H.1.16. Với đa số các nguồn thực, người ta xây dựng cho chúng các mô hình gồm một nguồn lý tưởng nối với một điện trở R_{tr} . Khi đó đặc tuyến ngoài có dạng:

$$u(t) = e(t) - R_{tr}i(t) \quad (1.24)$$

phụ thuộc vào dòng của nguồn cung cấp.



Hình 1.17: a) Nguồn điện áp thực; b) Nguồn dòng điện thực

Đối với nguồn dòng điện thực, mô hình của nó gồm nguồn dòng lý tưởng nối song song với điện trở R_{tr} (H.1.17b)

Dòng điện chảy từ nguồn phụ thuộc vào điện áp trên hai cực của nguồn dòng:

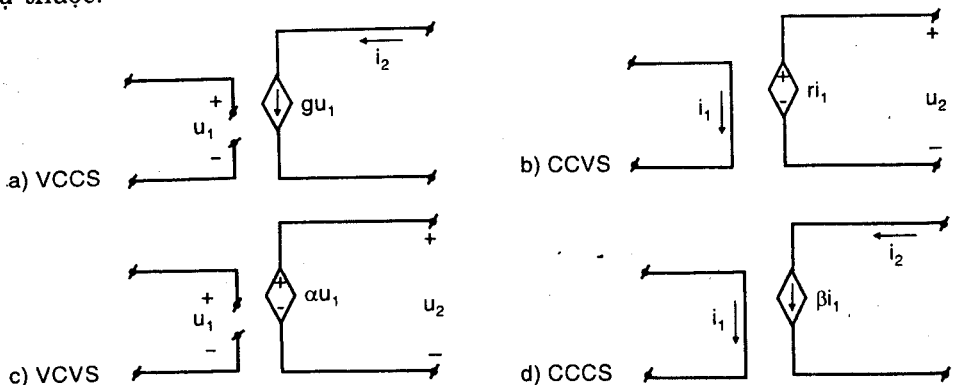
$$i(t) = j(t) - \frac{u(t)}{R_{tr}}$$

$$i(t) = j(t) - G_{tr}u(t) \quad (1.25)$$

1.3.2 Các phần tử bốn cực

1- Các nguồn phụ thuộc

Trái với các nguồn độc lập có thể tạo ra một điện áp hoặc dòng điện hoàn toàn không bị ảnh hưởng bởi phần còn lại của mạch, các nguồn phụ thuộc tạo ra một dòng điện hoặc điện áp phụ thuộc vào một dòng điện hoặc điện áp ở một nơi nào đó trong mạch. H.1.18 là ký hiệu của bốn loại nguồn phụ thuộc.



Hình 1.18: Bốn loại nguồn phụ thuộc

Các đầu vào ở bên trái tượng trưng điện áp hoặc dòng điện điều khiển nguồn phụ thuộc. Các đầu ra ở bên phải là dòng điện hoặc điện áp ra của

nguồn bị điều khiển.

Các hằng số: r, g, α, β - là các hệ số điều khiển.

a) Nguồn dòng phụ thuộc áp

(VCCS: *voltage controlled current source*)

Phần tử này phát ra dòng điện i_2 phụ thuộc vào điện áp u_1 theo hệ thức:

$$i_2 = g \cdot u_1 \quad (1.26)$$

Đơn vị đo của g là siemen (S), hoặc mho (Ω)

b) Nguồn áp phụ thuộc dòng

(CCVS: *current controlled voltage source*)

Phần tử này phát ra điện áp u_2 mà phụ thuộc dòng điện i_1 theo hệ thức:

$$u_2 = r i_1 \quad (1.27)$$

Đơn vị đo của r là ohm (Ω)

c) Nguồn áp phụ thuộc áp

(VCVS: *voltage - controlled voltage source*)

Phần tử này phát ra điện áp u_2 :

$$u_2 = \alpha u_1 \quad \alpha \text{ không thứ nguyên} \quad (1.28)$$

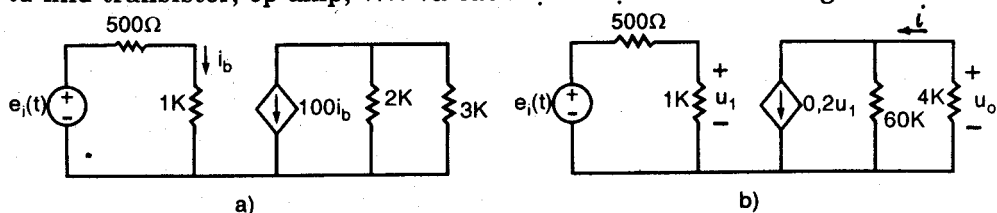
d) Nguồn dòng phụ thuộc dòng

(CCCS: *current controlled current source*)

Phần tử này phát ra dòng điện i_2 :

$$i_2 = \beta i_1 \quad \beta \text{ không có thứ nguyên} \quad (1.29)$$

Các nguồn phụ thuộc thường được dùng khi mô hình các linh kiện điện tử như transistor, op-amp, v.v. và các mạch điện tử chứa chúng.



Hình 1.19: Ví dụ về mạch có chứa nguồn phụ thuộc

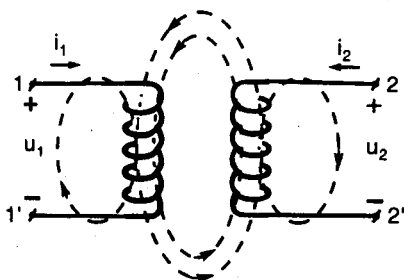
Hình 1.19a,b là hai ví dụ đơn giản của các mạch có chứa nguồn phụ thuộc. Chúng là các mô hình đơn giản của một mạch điện tử khuếch đại tín hiệu dùng transistor.

Mạch H.1.19a chứa nguồn dòng phụ thuộc vào dòng điện i_b chảy qua điện trở $1k\Omega$. Mạch H.1.19b chứa nguồn dòng phụ thuộc vào điện áp u_1 giữa hai đầu điện trở $1k\Omega$.

2- Hai phần tử điện cảm có ghép hồ cảm

Phần tử bốn cực này có thể xem như là mô hình lý tưởng của hai cuộn dây có ghép hồ cảm với nhau nếu ta bỏ qua hiện tượng tiêu tán và hiện tượng tích phóng năng lượng điện trường.

Xét hai cuộn dây đặt gần nhau sao cho dòng điện biến thiên chạy trong một cuộn dây sẽ tạo ra từ thông móc vòng không những ở chính bản thân cuộn dây đó, mà với cả cuộn dây kia. Và do đó, cảm ứng điện áp không những ở trong chính bản thân cuộn dây đó mà cả ở trong cuộn dây kia. Mỗi cuộn dây đều bị ảnh hưởng bởi từ trường gây ra do cuộn dây kia. Khi đó ta nói hai cuộn dây có ghép hồ cảm với nhau.



Hình 1.20: Hai cuộn dây ghép hồ cảm.

Từ thông ψ_1 móc vòng cuộn dây 1 gồm hai phần:

$$\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{12}$$

với: ψ_{11} - từ thông móc vòng cuộn dây 1 gây bởi chính dòng điện i_1 trong cuộn dây 1

ψ_{12} - từ thông móc vòng cuộn dây 1 gây bởi dòng điện i_2 trong cuộn dây 2.

Tương tự từ thông ψ_2 móc vòng cuộn dây 2:

$$\psi_2 = \psi_{22} + \psi_{21}$$

trong đó: ψ_{22} - từ thông móc vòng cuộn dây 2 gây bởi chính dòng i_2

ψ_{21} - từ thông móc vòng cuộn dây 2 gây bởi dòng i_1 trong cuộn dây 1

Trường hợp môi trường là tuyến tính ta có:

$$\psi_{11} = L_1 i_1; \quad \psi_{12} = \pm M_{12} i_2$$

$$\psi_{22} = L_2 i_2; \quad \psi_{21} = \pm M_{21} i_1$$

với: L_1 - hệ số tự cảm cuộn dây 1; L_2 - hệ số tự cảm cuộn dây 2

$M_{12} = M_{21} = M$ - hệ số hồ cảm giữa hai cuộn dây ($L_1 > 0$; $L_2 > 0$; $M > 0$)

L_1 , L_2 và M phụ thuộc vào kết cấu của hai cuộn dây, vị trí tương hồ giữa hai cuộn dây và tính chất môi trường. Việc chọn dấu + hoặc - trước M trong các biểu thức trên phụ thuộc vào chiều quấn các cuộn dây cũng như vào việc chọn chiều dương các dòng điện i_1 và i_2 .

Như vậy ta có:

$$\psi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \quad (1.30a)$$

$$\psi_2 = L_2 i_2 \pm M i_1 \quad (1.30b)$$

Nếu cực tính của các điện áp u_1 , u_2 và chiều dương các dòng điện i_1 , i_2 được chọn như H.1.20 (chiều dương dòng điện i_1 từ cực tính + của điện áp u_1 đi vào cuộn dây 1, chiều dương i_2 cũng đi từ cực + của u_2 vào cuộn 2), thì theo định luật cảm ứng điện từ Faraday ta có:

$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad (1.31a)$$

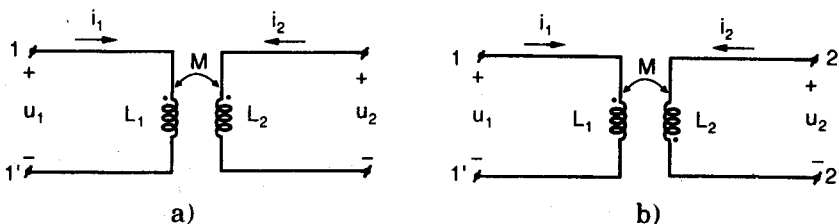
$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d\psi_{22}}{dt} + \frac{d\psi_{21}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \quad (1.31b)$$

Điện áp u_1 gồm hai thành phần: - điện áp tự cảm $L_1 \frac{di_1}{dt}$

- điện áp hồ cảm $\pm M \frac{di_2}{dt}$

Điện áp u_2 gồm hai thành phần: - điện áp tự cảm $L_2 \frac{di_2}{dt}$

- điện áp hồ cảm $\pm M \frac{di_1}{dt}$



Hình 1.21: Hai phần tử điện cảm có ghép hồ cảm

Hai cuộn dây ghép hồ cảm bỏ qua quá trình tiêu tán và quá trình tích phóng năng lượng điện trường có thể được mô hình bởi phần tử bốn cực “hai điện cảm ghép hồ cảm” và được ký hiệu trên sơ đồ mạch như H.1.21a hoặc H.1.21b. Trên đó hai dấu chấm (.) được dùng để đánh dấu hai cực cùng tên; vị trí của hai dấu chấm được xác định từ chiều quấn các cuộn dây với qui ước sau: Nếu hai dòng điện i_1 và i_2 cùng đi vào (hoặc cùng đi ra) hai cực có đánh dấu chấm thì từ thông do chúng gây ra sẽ cùng chiều.

Ví dụ, với chiều quấn các cuộn dây như trên H.1.20 thì hai cực 1 và 2 là cùng tên, hai dấu chấm sẽ được đặt trên hai cực 1 và 2 (tất nhiên cũng có thể đặt hai dấu chấm trên hai cực 1' và 2').

Từ định luật Lentz, với qui ước đánh dấu các cực cùng tên như trên, có

thể suy ra qui tắc sau đây để xác định dấu + hoặc - trong biểu thức $\pm M \frac{di}{dt}$ của điện áp hồ cảm. Nếu dòng điện i có chiều dương đi vào đầu có dấu chấm (đầu không có dấu chấm) trong một cuộn dây và điện áp có cực tính + ở đầu có dấu chấm (đầu không có dấu chấm) trong cuộn dây kia thì điện áp hồ cảm là $M \frac{di}{dt}$, trường hợp ngược lại là $-M \frac{di}{dt}$.

Như vậy với H.1.21a, ta viết được:

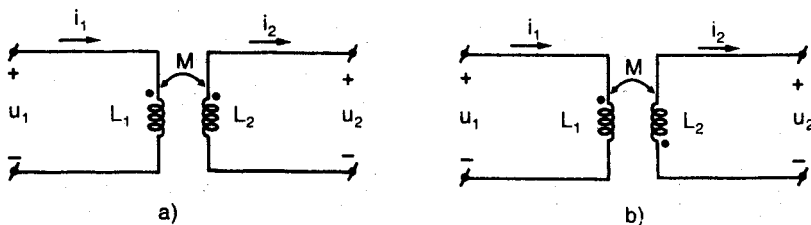
$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Với H.1.21b thì:

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Với chiều dương dòng, áp như H.1.22a, ta được:

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$



Hình 1.22

với H.1.22b thì:

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Mức độ ghép hồ cảm giữa hai cuộn dây được xác định qua hệ số ghép k được định nghĩa:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (1.32)$$

Người ta chứng minh được $k \leq 1$.

Khi $M^2 = L_1 L_2$ thì $k = 1$: ta có ghép lý tưởng, toàn bộ các đường sức từ móc vòng một cuộn dây thì đều móc vòng cuộn dây kia.

3- Biến áp lý tưởng

Mạch hai cuộn dây ghép hồ cảm nêu ở mục trên nếu ghép lý tưởng ($k = 1$) và hệ số tự cảm L_1 và L_2 là vô cùng lớn nhưng tỷ số $\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2$ là hữu hạn được gọi là biến áp lý tưởng, trong đó: w_1 - số vòng dây quấn của cuộn 1; w_2 - số vòng dây quấn của cuộn 2.

Với sơ đồ H.1.21a ta có:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (1.33a)$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (1.33b)$$

Vì ghép lý tưởng $M = \sqrt{L_1 L_2}$ nên hai phương trình trên có thể viết lại:

$$u_1 = \sqrt{L_1} \left(\sqrt{L_1} \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_2} \frac{di_2}{dt} \right)$$

$$u_2 = \sqrt{L_2} \left(\sqrt{L_1} \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_2} \frac{di_2}{dt} \right)$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{L_1}} = \frac{w_2}{w_1} = n$$

n - gọi là tỷ số vòng.

Phương trình (1.33a) có thể viết lại:

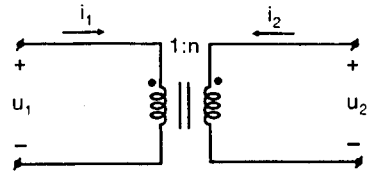
$$\frac{u_1}{L_1} = \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} + n \frac{di_2}{dt}$$

Nếu $L_1 \rightarrow \infty$ thì $\frac{u_1}{L_1} \rightarrow 0$ nên $\frac{di_1}{dt} = -n \frac{di_2}{dt}$ suy ra $i_1 = -ni_2$.

Biến áp lý tưởng có ký hiệu như H.1.23. Hệ phương trình các cực là:

$$u_2 = nu_1 \quad (1.34)$$

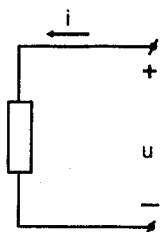
$$i_2 = \frac{-1}{n} i_1 \quad (1.35)$$



Hình 1.23

1.4 CÔNG SUẤT VÀ NĂNG LƯỢNG

Xét một phần mạch điện chịu tác động ở hai đầu một điện áp u , qua nó sẽ có dòng điện i .



Hình 1.24

Nếu chiều dương của dòng điện i và điện áp u như trên H.1.24 thì năng lượng điện được đưa vào phần mạch điện đó (nói cách khác là được hấp thu bởi phần mạch đó) trong khoảng thời gian vô cùng bé dt là:

$$dw = u.d.q = u.i.dt \quad (1.36)$$

trong đó: dq - là lượng điện tích dịch chuyển qua phần mạch điện từ cực + đến cực - trong thời gian dt .

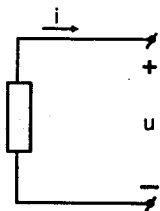
Công suất tức thời được đưa vào phần mạch điện (được hấp thu bởi phần mạch điện) là:

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = u.i \quad (1.37)$$

$p(t)$ là một đại lượng đại số có thể âm hoặc dương. Nếu tại một thời điểm t nào đó $p > 0$ thì tại thời điểm t đó phần mạch *thực sự hấp thu* năng lượng với công suất là p , còn nếu $p < 0$ thì tại thời điểm t đó phần mạch *thực sự phát* ra năng lượng (tức năng lượng được đưa từ phần mạch ra ngoài) với công suất là $|p|$.

Từ biểu thức (1.36) suy ra năng lượng cung cấp cho phần mạch (hoặc năng lượng được hấp thu bởi phần mạch) trong khoảng thời gian Δt từ t_0 đến $t_0 + \Delta t$ bằng:

$$W(t_0, t_0 + \Delta t) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} p(t)dt = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} u(t)i(t)dt \quad (1.38)$$



Hình 1.25

Nếu chiều dương của dòng i và áp u được chọn như H.1.25 thì tích $u.i$ gọi là công suất tức thời phát ra bởi phần mạch điện (nói cách khác là đưa từ phần mạch ra bên ngoài):

$$p_f(t) = u(t).i(t) \quad (1.39)$$

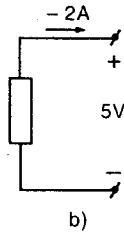
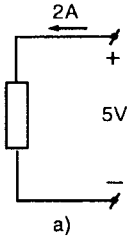
$p_f(t)$ - là đại lượng đại số.

Nếu tại t , $p_f(t) > 0$: phần mạch *thực sự phát* ra năng lượng với công suất p_f .

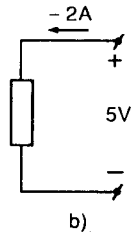
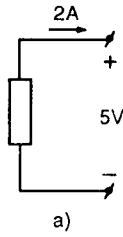
$p_f(t) < 0$: phần mạch *thực sự hấp thu* năng lượng với công suất $|p_f|$.

Đơn vị của công suất là Watt (W). Đơn vị của năng lượng là Joule (J).

Dĩ nhiên nói một phần tử phát ra một công suất âm, chẳng hạn $-10W$ như H.1.26b, thì cũng tương đương với việc nói phần tử đó hấp thu một công suất dương $10W$ như H.1.26a. Trong cả hai trường hợp, phần tử đều *thực sự hấp thu* công suất $10W$.



Hình 1.26



Hình 1.27

Tương tự nói phần tử phát ra công suất dương cũng tương đương nói phần tử hấp thu công suất âm. Trong cả hai trường hợp trên H.1.27, phần tử đều *thực sự phát ra* công suất 10W.

1- Công suất và năng lượng trên điện trở

Công suất tức thời tiêu hao trên điện trở R là:

$$p_R(t) = u(t) \cdot i(t) = R i^2(t) = G u^2(t) \quad (1.40)$$

với:
$$G = \frac{1}{R}$$

Chiều dương dòng và áp như H.1.10a.

Với $R > 0$, ta thấy $p_R(t)$ luôn dương, điều đó chứng tỏ trong phần tử điện trở chỉ có tiêu hao năng lượng.

Năng lượng tiêu tán trên điện trở trong khoảng thời gian từ t_0 đến $t_0 + \Delta t$ là:

$$W_R = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} p_R(t) dt = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} R i^2(t) dt = R \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} i^2(t) dt \geq 0 \quad (1.41)$$

2- Công suất và năng lượng trên phần tử điện dung

Công suất tức thời hấp thu bởi phần tử điện dung C:

$$P_C(t) = u(t) i(t) = C u(t) \frac{du(t)}{dt} \quad (1.42)$$

với chiều dương của i và u như trên H.1.12a.

Năng lượng tích lũy trong phần tử điện dung tại thời điểm t :

$$W_C(t) = \int_{-\infty}^t p_C(\tau) d\tau = C \int_{-\infty}^t u(\tau) \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = C \int_{-\infty}^t u du$$

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C u^2(t) \quad (1.43)$$

với giả thiết $u(-\infty) = 0$.

Khi $|u|$ tăng từ trị số $|u_1|$ lên trị số $|u_2|$ ($> |u_1|$) thì năng lượng điện

trường được tích lũy vào phần tử C thêm một lượng:

$$\Delta W_C = \frac{1}{2} C(u_2^2 - u_1^2)$$

Khi $|u|$ giảm từ $|u_2|$ xuống lại $|u_1|$ thì toàn bộ lượng năng lượng ΔW_C trên được phóng ra bên ngoài. Trong phần tử C không có hiện tượng tiêu tán, chỉ có hiện tượng tích phóng năng lượng điện trường.

3- Công suất và năng lượng trên phần tử điện cảm

Công suất tức thời hấp thu bởi phần tử điện cảm L:

$$p_L(t) = u(t) \cdot i(t) = L i(t) \frac{di(t)}{dt} \quad (1.44)$$

với chiều dương của i và u như trên H.1.14a.

Năng lượng tích lũy trong phần tử điện cảm tại thời điểm t :

$$W_L(t) = \int_{-\infty}^t P_L(\tau) d\tau = L \int_{-\infty}^t i(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau = L \int_{-\infty}^t i di$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \quad (1.45)$$

với giả thiết $i(-\infty) = 0$

Khi $|i|$ tăng từ $|i_1|$ lên $|i_2|$ ($> |i_1|$) thì năng lượng từ trường được tích lũy vào L thêm một lượng: $\Delta W_L = \frac{1}{2} L(i_2^2 - i_1^2)$.

Khi $|i|$ giảm từ $|i_2|$ xuống lại $|i_1|$ thì lượng năng lượng nói trên được phóng ra lại mạch ngoài. Phần tử L không có hiện tượng tiêu tán, chỉ có hiện tượng tích phóng năng lượng từ trường.

4- Công suất và năng lượng trên phần tử bốn cực gồm hai cuộn dây ghép hỗ cảm

$$p(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 = i_1 \left(L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \right) + i_2 \left(L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \right) \quad (1.46)$$

Với chiều dương của dòng và áp như trên H.1.20, thì $p(t)$ cho bởi (1.46) là công suất tức thời hấp thu bởi phần tử.

Năng lượng tích lũy trong phần tử ở thời điểm t :

$$W(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) \pm M i_1 i_2 \quad (1.47)$$

với giả thiết: $i_1(-\infty) = 0, i_2(-\infty) = 0$

Có thể chứng minh rằng $W(t)$ không âm. Chú ý rằng hệ số ghép:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \text{ luôn } \leq 1$$

5- Phần tử thụ động và phần tử tích cực

Dựa vào việc xét năng lượng của các phần tử, người ta phân chia các phần tử mạch ra hai loại:

- *Phần tử mạch thụ động*: phần tử mạch là thụ động (*passive element*) nếu năng lượng cung cấp cho nó luôn luôn dương:

$$W(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t u(\tau) i(\tau) d\tau \geq 0 \quad (1.48)$$

trong đó: t - là một thời điểm bất kỳ

và giả thiết rằng $u(-\infty) = 0$, $i(-\infty) = 0$, chiều dương của u và i được cho như H.1.24.

- *Phần tử mạch tích cực (active element)*. Nếu nó không thỏa mãn (1.48):

Theo định nghĩa trên, thì các phần tử điện trở (tiêu tán năng lượng), điện dung, điện cảm là các phần tử thụ động. Phần tử bốn cực gồm hai điện cảm ghép hồ cảm với nhau cũng thuộc loại phần tử thụ động. Các phần tử nguồn áp, nguồn dòng (độc lập cũng như phụ thuộc) là các phần tử tích cực.

Các phần tử thực tế như cuộn dây, tụ điện, máy biến áp là các phần tử thụ động. Các nguồn năng lượng điện như máy phát điện, pin, ắc qui là các phần tử tích cực. Các phần tử như đèn điện tử, transistor, khuếch đại thuật toán cũng là các phần tử tích cực; mô hình mạch của chúng có chứa các nguồn phụ thuộc và chúng có khả năng khuếch đại các tín hiệu điện.

1.5 PHÂN LOẠI MẠCH ĐIỆN

1- Có thể phân loại mạch điện thành mạch có *thông số tập trung* và mạch có *thông số rải*.

- Các phần tử lý tưởng đã xét trong mục 1.3 thuộc loại các phần tử có thông số tập trung. Cường độ của quá trình điện từ ở phần tử có thông số tập trung được đo bằng các biến dòng áp trên các cực của phần tử và các biến dòng áp này không phụ thuộc vào tọa độ không gian mà chỉ phụ thuộc vào biến thời gian. Bản chất của quá trình điện từ (tiêu tán, tích lũy, v.v.) trong các phần tử thông số tập trung được mô tả bởi các phương trình đại số hoặc vi tích phân trong thời gian liên hệ giữa dòng và áp trên các cực của phần tử, thông qua các thông số tập trung như R , L , C , M v.v. không phụ thuộc tọa độ không gian. Mạch điện thực có thể được thay thế bởi một

mô hình mạch chỉ gồm các phần tử lý tưởng tập trung (như đã xét trong mục 1.3) được gọi là mạch có thông số tập trung. Quá trình điện từ trong mạch có thông số tập trung được đo bởi một số hữu hạn biến dòng, áp chỉ phụ thuộc vào biến thời gian, và được mô tả bởi một hệ phương trình đại số hoặc vi tích phân trong miền thời gian.

Trong mạch có thông số tập trung, quá trình điện từ xem như được khoan hòng vùng ở từng phần tử, năng lượng điện từ xem như được tập trung chỉ trong các phần tử. Sự thay đổi của các đại lượng điện dòng áp công suất năng lượng ở từng vùng phần tử mạch thông số tập trung được xem là xảy ra đồng thời, nói cách khác sóng điện từ và năng lượng xem như lan truyền tức thời giữa các vùng. Điều này sẽ đúng nếu kích thước của mạch là rất nhỏ so với bước sóng của trường điện từ trong mạch; khi đó thời gian lan truyền của sóng điện từ và năng lượng giữa các vùng là rất nhỏ so với chu kỳ của sóng điện từ. Thời gian lan truyền này chỉ ứng với một giai đoạn biến thiên không đáng kể của quá trình điện từ nên ta có thể bỏ qua xem như lan truyền tức thời.

Chú ý rằng, bước sóng λ được định nghĩa là khoảng đường mà sóng điện từ tần số f lan truyền được trong một chu kỳ $T = \frac{1}{f}$ nghĩa là $\lambda = \frac{v}{f}$ với v là vận tốc lan truyền, trong không khí ($v \approx c = 3.10^8$, m/s).

- Ở phần tử mạch có thông số rải, cường độ quá trình điện từ cũng được đo bởi các biến dòng điện, điện áp tuy nhiên các biến này không những phụ thuộc vào thời gian mà còn phụ thuộc vào biến không gian. Quá trình điện từ trong phần tử thông số rải được mô tả bởi các phương trình đạo hàm riêng trong không gian và thời gian. Mạch có chứa các phần tử thông số rải được gọi là mạch có thông số rải.

Phần tử có thông số rải có kích thước so được với bước sóng điện từ, do đó không thể bỏ qua thời gian lan truyền của sóng điện từ. Ví dụ về phần tử có thông số rải là những đường dây trên không hoặc cáp có chiều dài so được với bước sóng (cỡ trên 1/10 bước sóng), chẳng hạn đường dây tải điện dài cỡ trên vài trăm km làm việc ở tần số 50 Hz ứng với bước sóng $\lambda = \frac{3.10^8}{50} \text{ m} = 6000 \text{ km}$ hoặc một đường dây fide dài chừng vài chục mét nối từ máy phát sóng có bước sóng cỡ vài chục mét lên anten phát v.v.

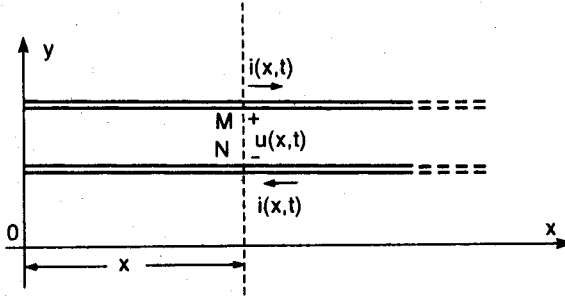
Ta gọi các đường dây như vậy là *đường dây dài*. Quá trình điện từ ở đường dây dài có thể được đo gần đúng bởi hai biến dòng điện $i(x,t)$ và điện áp $u(x,t)$ coi là phân bố, truyền dọc đường dây (H.1.28).

Phương trình mô tả đường dây dài có dạng phương trình đạo hàm

riêng như sau:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L \frac{\partial i}{\partial t} + R i \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial u}{\partial t} + G u \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

trong đó: L, C, R, G - là các thông số của đường dây dài.



Hình 1.28: Đường dây dài

Mạch có thông số rải có thể được xếp vào mô hình trường bởi vì nó mô tả quá trình điện từ dùng các phương trình đạo hàm riêng trong không gian và thời gian. Tuy nhiên, như sau này sẽ trình bày (xem chương 8), nó có những đặc điểm gần với mô hình mạch.

Ví dụ, cũng do quá trình điện từ ở mỗi tiết diện dây bằng hai biến trạng thái: dòng điện và điện áp nên người ta xếp nó vào bên cạnh các mô hình mạch, xem như là một mô hình mạch biến tướng.

Tóm lại trong lý thuyết mạch điện, ta sử dụng hai mô hình: mô hình mạch đã định nghĩa và xây dựng ở các mục trước mà ta gọi là mô hình mạch có thông số tập trung, và mô hình mạch có thông số rải mà ta vừa giới thiệu ở mục này và sẽ được khảo sát riêng ở chương 8.

Một mạch điện thực được coi là mạch có thông số tập trung hay rải tùy thuộc vào tần số của tín hiệu làm việc, nói cách khác tùy thuộc vào quan hệ giữa kích thước hình học của mạch với độ dài của bước sóng λ của trường điện từ trong mạch. Trong thực tế một mạch điện được coi là mạch có thông số tập trung nếu thỏa điều kiện: $l_{\max} \leq 0,01 \lambda$

trong đó: $l_{\max}$ - kích thước hình học lớn nhất của mạch.

2- Có thể chia mạch điện thành mạch tuyến tính và không tuyến tính (phi tuyến).

- Mạch điện được gọi là tuyến tính nếu nó thỏa mãn nguyên lý xếp chồng và nguyên lý tỉ lệ.

Nguyên lý xếp chồng phát biểu như sau: Nếu đáp ứng của mạch đối với

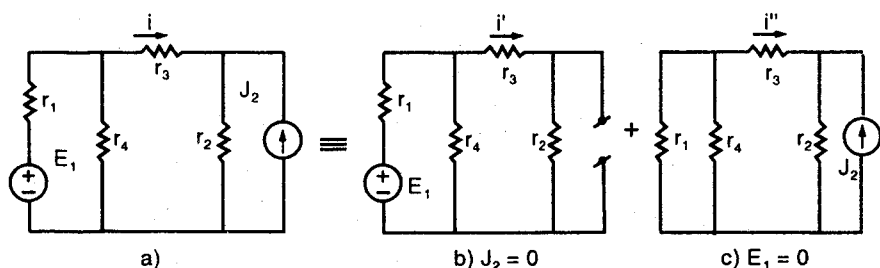
các kích thích $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ tác động riêng rẽ theo thứ tự là $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ thì đáp ứng đối với tác động đồng thời n kích thích đó sẽ bằng tổng n đáp ứng đối với từng kích thích thành phần: $y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$.

Nguyên lý tỉ lệ được phát biểu như sau:

Nếu đáp ứng của mạch đối với kích thích $f(t)$ là $y(t)$ thì đáp ứng đối với kích thích $Af(t)$ sẽ là $Ay(t)$, trong đó A là hằng số.

$$\{f(t) \rightarrow y(t)\} \Rightarrow \{Af(t) \rightarrow Ay(t)\} \quad (1.50)$$

Nếu mạch điện chỉ gồm những phần tử tuyến tính thì nó là mạch tuyến tính. Quan hệ giữa các đại lượng trong mạch tuyến tính được mô tả bằng các phương trình vi phân tuyến tính hoặc đại số tuyến tính.



Hình 1.29

Ví dụ 1.1: xét mạch điện tuyến tính như H.1.29 có hai kích thích là nguồn sức điện động E_1 và nguồn dòng J_2 . Giả sử tiến hành hai thí nghiệm:

- Khi chỉ có tác dụng của $E_1 = 40V$ như H.1.29b, dòng qua điện trở r_3 đo được là $4A$.

- Khi chỉ có tác dụng của nguồn dòng $J_2 = 5A$, dòng qua r_3 là $-1A$. Hỏi khi đồng thời có sự tác dụng của nguồn $E_1 = 20V$ và nguồn $J_2 = 6A$ thì dòng qua điện trở r_3 bao nhiêu?

Giải. Từ nguyên lý tỉ lệ suy ra:

- Nếu chỉ có tác dụng của $E_1 = 20V$ thì dòng qua r_3 sẽ là:

$$i' = \frac{4 \times 20}{40} = 2A$$

- Nếu chỉ có tác dụng của $J_2 = 6A$ thì dòng qua r_3 sẽ là:

$$i'' = \frac{-1 \times 6}{5} = -1,2A$$

Do đó theo nguyên lý xếp chồng khi có tác dụng đồng thời của cả hai nguồn $E_1 = 20V$ và $J_2 = 6A$ thì dòng qua r_3 sẽ là:

$$i = i' + i'' = 2 + (-1,2) = 0,8 A$$

Trong ví dụ trên, chú ý rằng việc triệt tiêu nguồn áp E_1 tương ứng với việc ngắn mạch hai đầu nguồn, còn việc triệt tiêu nguồn dòng J_2 tương ứng với hở mạch.

- Mạch điện không thỏa mãn hai nguyên lý xếp chồng và tỉ lệ là mạch không tuyến tính (phi tuyến). Với mạch chỉ cần chứa một phần tử phi tuyến thì nó đã là mạch phi tuyến.

Việc phân tích mạch tuyến tính thì đơn giản hơn phân tích mạch phi tuyến. Nhờ tính chất tuyến tính của mạch ta có thể dùng các phương pháp số phức, biến đổi Laplace hoặc Fourier để làm đơn giản việc phân tích.

3- Có thể phân chia mạch thành mạch điện dừng và không dừng.

Nếu đáp ứng của mạch không phụ thuộc vào thời điểm ở đó các kích thích được tác dụng vào mạch thì mạch gọi là dừng. Nghĩa là ở mạch dừng; nếu các kích thích $f_1(t)$; $f_2(t)$, ... và $f_n(t)$ gây ra đáp ứng $x(t)$ thì các kích thích $f_1(t-\tau)$; $f_2(t-\tau)$; ... và $f_n(t-\tau)$ sẽ gây ra đáp ứng $x(t-\tau)$. Mạch mà tất cả các phần tử của nó là R, L, C, v.v. không phụ thuộc thời gian thì nó là mạch dừng.

Mạch chỉ cần chứa một phần tử có tham số thay đổi theo thời gian thì nó đã là mạch không dừng.

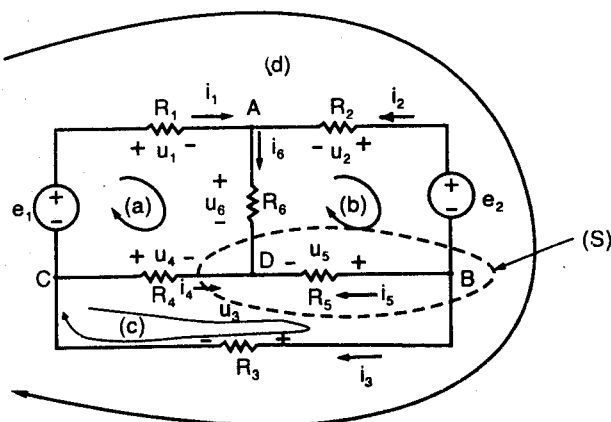
Đa số các mạch điện trong thực tế có thể được mô hình bằng mạch điện dừng.

Trong lý thuyết mạch đóng vai trò quan trọng nhất là mạch tuyến tính, dừng, có thông số tập trung (TTD). Mạch này có thể được mô tả nhờ các phương trình đại số hay vi phân tuyến tính.

1.6 CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA MẠCH ĐIỆN

Các bài toán về giải mạch điện có thể qui về bài toán phân tích mạch và bài toán tổng hợp mạch.

Nội dung bài toán phân tích mạch là cho một mạch điện với kết cấu và các thông số đã biết, tìm dòng điện, điện áp, công suất v.v. phân bố trên các nhánh các phần tử hoặc quan hệ giữa các



Hình 1.30

biến v.v..

Nội dung bài toán tổng hợp mạch là cho biết qui luật của quan hệ giữa các tín hiệu dòng, áp hoặc cho biết những nghiệm dòng, áp cần có ứng với những kích thích cụ thể, phải lập được một mạch điện với kết cấu và thông số cụ thể thực hiện các yêu cầu đó.

Giáo trình này chỉ tập trung chủ yếu vào vấn đề phân tích mạch.

Nhưng nói chung, dù là bài toán phân tích hay tổng hợp, cơ sở của việc giải mạch có thông số tập trung vẫn là hai định luật Kirchhoff 1 và 2.

Định luật Kirchhoff 1 chỉ rõ mối liên hệ giữa các dòng điện ở một nút, nó nói lên tính liên tục của dòng điện.

Định luật Kirchhoff 2 chỉ rõ mối liên hệ giữa các điện áp trong một vòng, nó nói lên tính chất thế.

Xét sơ đồ mạch điện trên H.1.30, ta phân biệt thành: nhánh, nút, vòng.

Nhánh: là phần tử hai cực bất kỳ, hoặc là gồm các phần tử hai cực nối nối tiếp với nhau trên đó có cùng dòng điện chảy.

(*Chú ý*, trong Chương 3 sẽ trình bày một định nghĩa về nhánh chuẩn thích hợp hơn cho việc phân tích mạch điện dùng lý thuyết ma trận).

Nút (hoặc đỉnh): là biên của nhánh hoặc điểm chung của các nhánh.

Vòng: là một tập các nhánh tạo thành một đường khép kín. Nó có tính chất là nếu bỏ đi một nhánh bất kỳ thì tập còn lại không tạo thành vòng kín nữa.

Trên sơ đồ mạch H.1.30 có sáu nhánh:

Nhánh 1 gồm hai phần tử e_1 và R_1 nối tiếp

Nhánh 2 gồm e_2 và R_2

Nhánh 3 gồm R_3

Nhánh 4 gồm R_4

Nhánh 5 gồm R_5

Nhánh 6 gồm R_6

Mạch có 4 đỉnh là A, B, C và D.

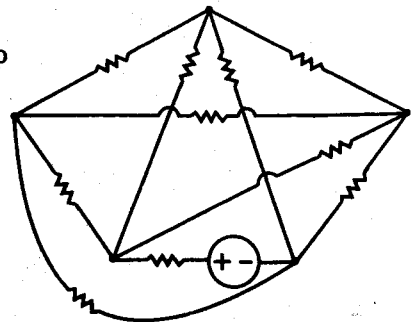
Có 7 vòng:

Vòng (a) gồm ba nhánh 1, 6 và 4

Vòng (b) gồm ba nhánh 2, 5 và 6

Vòng (c) gồm ba nhánh 4, 5 và 3

Vòng (d) gồm ba nhánh 1, 2 và 3



Hình 1.31: Mạch không phẳng

Ngoài ra còn có vòng (1,6,5,3), (1,2,5,4) và (2,3,4,6).

Đối với mạch phẳng (là mạch mà có thể được vẽ trên một mặt phẳng sao cho không có nhánh nào cắt nhau), còn định nghĩa *mắt lưới*, đó là vòng mà không chứa vòng nào bên trong nó.

Ví dụ, mạch H.1.30 là mạch phẳng, trong đó ba vòng (a), (b), (c) là ba mắt lưới còn các vòng khác, ví dụ vòng (d) không phải là mắt lưới vì nó chứa bên trong nó ba vòng (a), (b) và (c). Hình 1.31 không phải là mạch phẳng, đối với nó không có khái niệm mắt lưới.

Tổng quát: *một mạch phẳng có d nút, n nhánh thì số mắt lưới là $(n-d+1)$.*

Sau khi định nghĩa các khái niệm trên, ta phát biểu hai định luật Kirchhoff.

1.6.1 Định luật Kirchhoff 1 (K1)

Còn gọi là định luật Kirchhoff về dòng điện, được phát biểu như sau:

Tổng đại số các dòng điện tại một nút bất kỳ bằng không.

$$\sum_{\text{nút}} \pm i_k = 0 \quad (1.51)$$

Trong đó có thể qui ước: *Các dòng điện có chiều dương đi vào nút thì lấy dấu +, còn đi ra khỏi nút thì lấy dấu -*

Hoặc có thể qui ước ngược lại: *đi vào lấy dấu -, còn đi ra lấy dấu +.*

Ví dụ: với mạch H.1.30, áp dụng định luật K1 cho bốn nút A, B, C, D với chiều dương các dòng điện chọn như hình vẽ:

$$\text{nút A:} \quad i_1 + i_2 - i_6 = 0 \quad (1.52a)$$

$$\text{nút B:} \quad -i_2 - i_3 - i_5 = 0 \quad (1.52b)$$

$$\text{nút C:} \quad -i_1 + i_3 - i_4 = 0 \quad (1.52c)$$

$$\text{nút D:} \quad i_4 + i_5 + i_6 = 0 \quad (1.52d)$$

Bốn phương trình trên có thể viết lại ở dạng sau:

$$\text{nút A:} \quad i_1 + i_2 = i_6$$

$$\text{nút B:} \quad 0 = i_2 + i_3 + i_5$$

$$\text{nút C:} \quad i_3 = i_1 + i_4$$

$$\text{nút D:} \quad i_4 + i_5 + i_6 = 0$$

Vì vậy định luật K1 có thể phát biểu dưới dạng: *Tổng các dòng điện có chiều dương đi vào một nút bất kỳ thì bằng tổng các dòng điện có chiều dương đi ra khỏi nút đó.*

Nhận xét rằng trong bốn phương trình (1.52a,b,c,d) chỉ có ba phương trình là độc lập với nhau, một trong bốn phương trình có thể được suy ra từ ba phương trình còn lại. Ví dụ, nếu đem cộng ba phương trình (1.52a,b,c) về theo về thì ta sẽ suy ra được phương trình còn lại (1.52d).

Tổng quát, với mạch điện có d nút thì ta viết được $(d-1)$ phương trình K1 độc lập với nhau cho $(d-1)$ nút. Phương trình K1 viết cho nút còn lại có thể được suy ra từ $(d-1)$ phương trình K1 trên.

Định luật K1 còn được phát biểu ở dạng tổng quát hơn:

Tổng đại số các dòng điện đi vào (hoặc rời khỏi) một bề mặt kín bất kỳ (bao một số nút nào đó) thì bằng 0.

Ví dụ: ở mạch điện H.1.30, xét bề mặt kín S bao hai nút B và D như trên H.1.30. Qua mặt kín S có hai dòng điện i_4 và i_6 có chiều dương đi vào mặt S và hai dòng điện i_2 và i_3 có chiều dương đi ra khỏi mặt S nên theo định luật K1, dạng tổng quát như đã phát biểu ở trên ta có:

$$-i_2 - i_3 + i_4 + i_6 = 0 \quad (1.53)$$

Nhận xét rằng nếu cộng hai phương trình (1.52b) (K1 cho nút B) và (1.52d) (K1 cho nút D) về theo về ta sẽ được phương trình (1.53).

1.6.2 Định luật Kirchhoff 2 (K2)

Định luật này còn gọi là định luật Kirchhoff về điện áp và được phát biểu như sau:

Tổng đại số các điện áp trên các phần tử dọc theo tất cả các nhánh trong một vòng bằng không.

$$\sum_{\text{vòng}} \pm u_k = 0 \quad (1.54)$$

Dấu của điện áp được xác định dựa trên chiều dương của điện áp đã chọn so với chiều của vòng. Chiều của vòng được chọn tùy ý. Tuy nhiên, để tiện lợi thường chọn chiều của các vòng là như nhau (cùng cùng chiều kim đồng hồ hoặc là cùng ngược chiều kim đồng hồ). Trong mỗi vòng nếu chiều vòng đi từ cực + sang cực - của một điện áp thì điện áp mang dấu +, còn ngược lại thì điện áp ấy mang dấu -.

Đối với mạch điện trên H.1.30, với chiều của các vòng và chiều dương của các điện áp được chọn như trên H.1.30, nếu áp dụng định luật K2 cho bốn vòng a, b, c, d ta được:

$$\text{Vòng a:} \quad -e_1 + u_1 + u_6 - u_4 = 0 \quad (1.55a)$$

$$\text{Vòng b:} \quad -u_2 + e_2 + u_5 - u_6 = 0 \quad (1.55b)$$

$$\text{Vòng c:} \quad u_4 - u_5 + u_3 = 0 \quad (1.55c)$$

$$\text{Vòng d: } -e_1 + u_1 - u_2 + e_2 + u_3 = 0 \quad (1.55d)$$

Bốn phương trình trên có thể viết lại ở dạng sau:

$$\text{Vòng a: } u_1 + u_6 - u_4 = e_1 \quad (1.56a)$$

$$\text{Vòng b: } -u_2 + u_5 - u_6 = -e_2 \quad (1.56b)$$

$$\text{Vòng c: } u_4 - u_5 + u_3 = 0 \quad (1.56c)$$

$$\text{Vòng d: } u_1 - u_2 + u_3 = e_1 - e_2 \quad (1.56d)$$

Từ đó ta thấy rằng: *Tổng đại số các sức điện động trong một vòng bằng tổng đại số các sụt áp trên các phần tử khác.*

Đó là dạng phát biểu thứ hai của định luật Kirchhoff 2:

$$\sum_{\text{vòng}} \pm u_p = \sum_{\text{vòng}} \pm e_l \quad (1.57)$$

trong đó: u_p - là điện áp trên phần tử không phải là nguồn sức điện động.

Nếu chiều của vòng đi từ cực tính - sang cực tính + của một nguồn sức điện động thì sức điện động ấy mang dấu +, ngược lại mang dấu -.

Đối với điện áp trên các phần tử khác, nếu chiều vòng đi từ cực + sang cực - của một điện áp thì điện áp ấy mang dấu +, ngược lại mang dấu -.

Nhận xét rằng bốn phương trình (1.55a,b,c,d) không độc lập tuyến tính với nhau, một trong bốn phương trình có thể suy ra từ ba phương trình còn lại.

Ví dụ, nếu cộng ba phương trình (1.55a), (1.55b) và (1.55c) về theo về thì ta được phương trình (1.55d). Như vậy số lượng phương trình có được từ định luật K2 bằng số vòng của mạch, nhưng chú ý rằng chúng chưa phải là độc lập tuyến tính với nhau.

Người ta chứng minh được rằng: *với một mạch có d nút, n nhánh thì số phương trình độc lập có được từ định luật K2 là (n-d+1).*

Đối với mạch điện phẳng có d nút, n nhánh thì số mắt lưới là (n-d+1). Do đó: *(n-d+1) phương trình K2 độc lập nhau có thể đạt được bằng cách viết (n-d+1) phương trình K2 cho (n-d+1) mắt lưới.*

Trở lại mạch H.1.30, nếu thay:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 \\ u_2 &= R_2 i_2 \\ u_3 &= R_3 i_3 \\ u_4 &= R_4 i_4 \\ u_5 &= R_5 i_5 \\ u_6 &= R_6 i_6 \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

vào bốn phương trình (1.6.6) ta được:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vòng a: } R_1 i_1 + R_6 i_6 - R_4 i_4 = e_1 \\ \text{Vòng b: } -R_2 i_2 + R_5 i_5 - R_6 i_6 = -e_2 \\ \text{Vòng c: } R_4 i_4 - R_5 i_5 + R_3 i_3 = 0 \\ \text{Vòng d: } R_1 i_1 - R_2 i_2 + R_3 i_3 = e_1 - e_2 \end{array} \right\} \quad (1.59)$$

Từ đó ta thấy rằng, có thể viết các phương trình K2 theo các biến dòng điện nhánh (không cần thông qua các biến điện áp trên các phần tử) ở dạng sau đây:

$$\sum_{\text{vòng}} \left(\pm R_k i_k \pm L_k \frac{di_k}{dt} \pm \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right) = \sum_{\text{vòng}} \pm e_k \quad (1.60)$$

Trong đó dòng điện i_k nào có chiều dương cùng chiều với chiều của vòng thì trước nó sẽ mang dấu +, ngược lại sẽ mang dấu -.

Đối với sức điện động (sdd) e_k , nếu chiều của vòng đi từ cực - sang cực + của nguồn sdd thì sdd ấy mang dấu +, ngược lại mang dấu -.

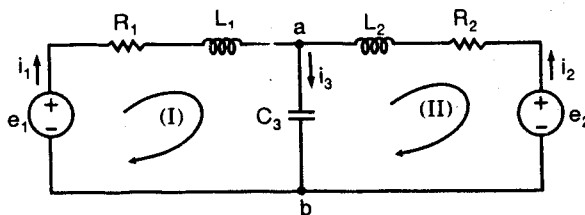
Tóm lại, đối với mạch có d nút, n nhánh ta được $(d-1)$ phương trình K1 độc lập và $(n-d+1)$ phương trình K2 độc lập (điều này chỉ đúng với mạch đơn liên tức các đỉnh đều liên thông với nhau, còn đối với mạch đa liên gồm m mạch đơn liên không liên thông với nhau thì số phương trình K1 độc lập là $d-m$ và số phương trình K2 độc lập là $n-d+m$). Như vậy tổng số phương trình độc lập có được từ hai định luật K1 và K2 là $(d-m) + (n-d+m) = n$ phương trình với n ẩn số là n dòng điện trong n nhánh.

Ví dụ 1.2: Viết các phương trình K1, K2 độc lập cho mạch điện H.1.32 theo các biến dòng điện nhánh.

Giải. Chọn chiều dương của các dòng điện như (H.1.32). Mạch có hai nút nên viết được một phương trình K1:

$$\text{Nút a: } i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad (1)$$

Mạch phẳng có hai mắt lưới, viết được hai phương trình K2 độc lập:



Hình 1.32

$$\text{Mắt lưới (I): } R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt = e_1 \quad (2)$$

Mắt lưới (II):
$$-L_2 \frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 - \frac{1}{C_3} \int i_3 dt = -e_2 \quad (3)$$

Vậy i_1, i_2, i_3 là nghiệm của hệ phương trình vi tích phân gồm ba phương trình (1), (2), (3).

Ví dụ 1.3: Cho mạch điện có sơ đồ H.1.33.

Tìm dòng điện chảy trong các nhánh.

Giải. Chọn chiều dương các dòng như H.1.33.

Áp dụng luật K1 cho nút a:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (1)$$

Viết phương trình theo luật K2 cho hai mắt lưới:

Mắt lưới (I): $10I_1 + 30I_2 = 4,5 \quad (2)$

Mắt lưới (II): $-30I_2 + 60I_3 = 0 \quad (3)$

Giải hệ ba phương trình (1), (2), (3) ta được:

$$I_1 = 0,15A; \quad I_2 = 0,1A \quad \text{và} \quad I_3 = 0,05A$$

Ví dụ 1.4: Xét mạch điện có sơ đồ H.1.34

a) Tìm các dòng điện I_1, I_2, I_3

b) Tính tổng công suất phát bởi các nguồn và tổng công suất tiêu tán trên các điện trở.

Giải. a) Viết luật K1 cho nút a:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 5 \quad (1)$$

Viết luật K2 cho hai mắt lưới (I) và (II):

$$-3I_1 + 6I_2 = 0 \quad (2)$$

$$-6I_2 - 12I_3 = -24 \quad (3)$$

Giải hệ ba phương trình (1), (2), (3) ta được:

$$I_1 = 4A; \quad I_2 = 2A; \quad I_3 = 1A$$

b) Công suất phát bởi nguồn áp 24V theo (1.39) là $24I_3 = 24W$.

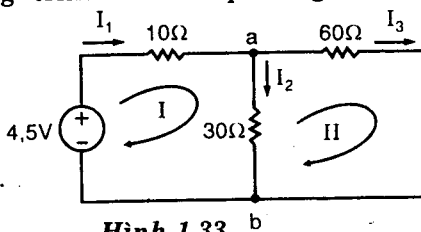
Điện áp giữa hai đầu nguồn dòng 5A là: $V_{ab} = 3I_1 = 12V$

$\Rightarrow$ công suất phát bởi nguồn dòng 5A là: $5V_{ab} = 60W$

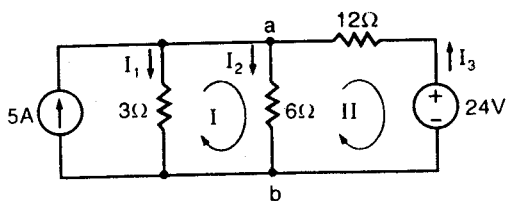
Vậy tổng công suất phát bởi hai nguồn là: $24 + 60 = 84W$

Theo (1.40), công suất tiêu thụ trên:

- Điện trở 3Ω là: $3I_1^2 = 48W$



Hình 1.33



Hình 1.34

- Điện trở 6Ω là: $6I_2^2 = 24 \text{ W}$

- Điện trở 12Ω là: $12I_3^2 = 12 \text{ W}$

Vậy tổng công suất tiêu thụ trên các điện trở là: $48 + 24 + 12 = 84 \text{ W}$.

Ta có nhận xét rằng: *tổng công suất phát bởi các nguồn bằng tổng công suất thu trên các phần tử khác*. Điều này đúng trong trường hợp tổng quát, nó là hệ quả của định luật bảo toàn năng lượng.

Ví dụ 1.5: Tìm dòng điện trong các nhánh trên sơ đồ mạch điện H.1.35.

Giải. Chọn chiều dương các dòng trên như H.1.35.

$$\text{Áp dụng luật K1 cho nút a: } -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (1)$$

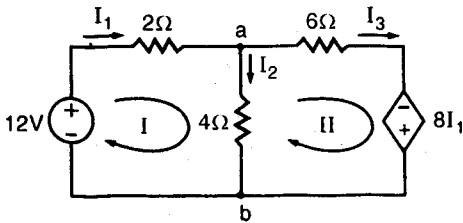
$$\text{Áp dụng luật K2 cho mắt lưới (I): } 2I_1 + 4I_2 = 12 \quad (2)$$

$$\text{Luật K2 viết cho mắt lưới (II): } -4I_2 + 6I_3 = 8I_1 \quad (3)$$

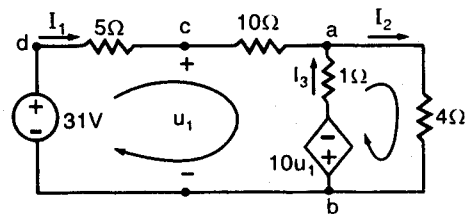
với $8I_1$ là nguồn áp phụ thuộc dòng I_1 .

Giải hệ ba phương trình (1), (2), (3) ta được:

$$I_1 = 10 \text{ A}; \quad I_2 = -2 \text{ A}; \quad I_3 = 12 \text{ A}$$



Hình 1.35



Hình 1.36

Ví dụ 1.6: Tính I_1 , I_2 , I_3 trên sơ đồ H.1.36.

Giải. Viết luật K1 cho nút a:

$$-I_1 - I_3 + I_2 = 0 \quad (1)$$

Viết luật K2 cho hai mắt lưới:

$$(5 + 10)I_1 - I_3 = 10u_1 + 31 \quad (2)$$

$$4I_2 + I_3 = -10u_1 \quad (3)$$

Mặt khác theo luật K2 ta có: $u_1 = u_{cb} = u_{cd} + u_{db}$

$$\Rightarrow u_1 = -5I_1 + 31 \quad (4)$$

Thay (4) vào (2) và (3) ta được: $65I_1 - I_3 = 341$ (5)

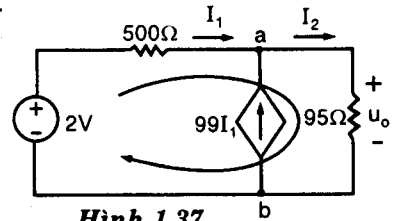
$$4I_2 + I_3 - 50I_1 = -310 \quad (6)$$

Từ hệ ba phương trình (1), (5) và (6) suy ra:

$$I_1 = 5A; I_2 = -11A; I_3 = -16A.$$

Ví dụ 1.7: Tính điện áp U_o trên sơ đồ H.1.37

Giải. Chọn chiều dương của dòng I_2 chảy qua điện trở 95Ω như H.1.37. Viết K1 cho nút a:



Hình 1.37

$$I_1 + 99I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = 100I_1 \quad (1)$$

Viết K2 cho vòng như (H1.37):

$$500I_1 + 95I_2 = 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $I_2 = 0,02A$

Do đó: $U_o = 95I_2 = 1,9V$

1.7 BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG MẠCH

Trong thực tế đôi khi cần làm đơn giản một phần mạch thành một phần mạch tương đương đơn giản hơn. Việc biến đổi mạch tương đương thường được làm để cho mạch mới có: ít phần tử, ít số nút, ít số vòng và nhánh hơn mạch trước đó và do đó làm giảm đi số phương trình phải giải.

Mạch tương đương được định nghĩa như sau:

Hai phần mạch được gọi là tương đương nếu quan hệ giữa dòng điện và điện áp trên các cực của hai phần mạch là như nhau.

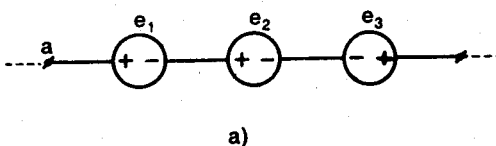
Một phép biến đổi mạch tương đương sẽ không làm thay đổi dòng điện và điện áp trên các nhánh ở các phần của sơ đồ không tham gia vào phép biến đổi.

Sau đây là một số phép biến đổi tương đương thông dụng:

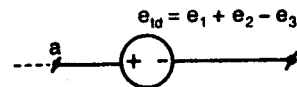
1- Các nguồn sức điện động mắc nối tiếp sẽ tương đương với một nguồn sức điện động duy nhất có trị số bằng tổng đại số các sức điện động đó:

$$e_{td} = \sum \pm e_k \quad (1.61)$$

Trong hai H.1.38a,b ta đều có: $u_{ab} = e_1 + e_2 - e_3$



a)



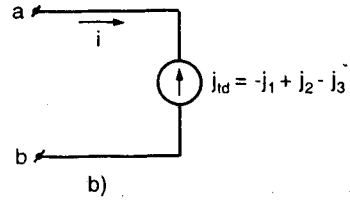
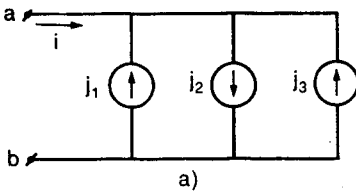
b)

Hình 1.38

2- Các nguồn dòng điện mắc song song sẽ tương đương với một nguồn dòng duy nhất có trị số bằng tổng đại số các nguồn dòng đó:

$$j_{td} = \sum \pm j_k \quad (1.62)$$

Trong hai H.1.39a,b ta đều có: $i = -j_1 + j_2 - j_3$

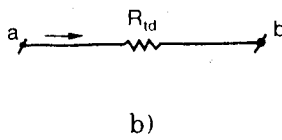
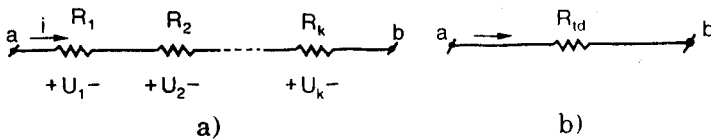


Hình 1.39

3. Các phần tử điện trở mắc nối tiếp sẽ tương đương với một phần tử điện trở duy nhất có điện trở bằng tổng các điện trở các phần tử đó:

$$R_{td} = \sum R_k \quad (1.63)$$

Ta có theo luật K2: $u_{ab} = \sum_1^n u_k = \sum_1^n R_k \cdot i = \left(\sum_1^n R_k \right) i$



Hình 1.40

Suy ra mạch H.1.40a sẽ tương đương với H.1.40b nếu (1.63) thỏa.

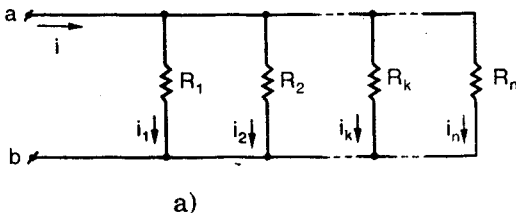
Điện áp trên mỗi điện trở ở H.1.40a là: $u_k = R_k i$

$$\Rightarrow u_k = \frac{R_k u_{ab}}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} \quad (1.64)$$

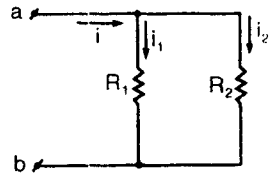
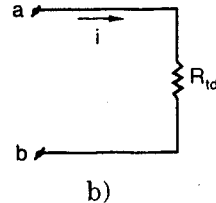
4. Các phần tử điện trở mắc song song sẽ tương đương với một phần tử điện trở duy nhất có điện dẫn bằng tổng các điện dẫn các phần tử đó:

$$G_{td} = \sum G_k \quad (1.65)$$

Theo luật K1 ta có:



Hình 1.41



Hình 1.42

$$i = \sum_1^n i_k = \sum_1^n \frac{u_{ab}}{R_k}$$

$$i = \left(\sum_1^n \frac{1}{R_k} \right) u_{ab} = \left(\sum_1^n G_k \right) u_{ab}$$

Suy ra hai mạch H.1.41a,b sẽ tương đương nếu (1.65) thỏa.

Dòng điện chảy qua mỗi phần tử điện trở H.1.41a là:

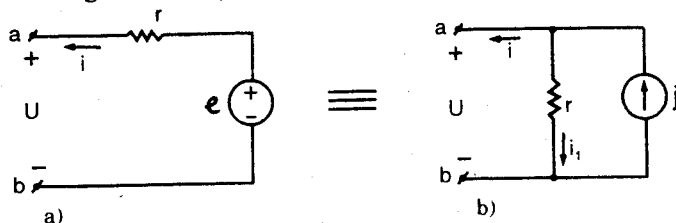
$$i_k = \frac{u_{ab}}{R_k} = G_k u_{ab} = \frac{G_k i}{G_1 + G_2 + \dots + G_n} \quad (1.66)$$

Trường hợp chỉ có hai điện trở mắc song song như H.1.42 thì:

$$G_{td} = G_1 + G_2; \quad \text{hay: } R_{td} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.67)$$

$$\text{và: } i_1 = \frac{G_1 i}{G_1 + G_2} = \frac{R_2 i}{R_1 + R_2} \quad \text{và: } i_2 = \frac{G_2 i}{G_1 + G_2} = \frac{R_1 i}{R_1 + R_2} \quad (1.68)$$

5- Nguồn sức điện động mắc nối tiếp với một điện trở sẽ tương đương với một nguồn dòng mắc song song với điện trở đó và ngược lại.



Hình 1.43

Ở mạch H.1.43a ta có quan hệ u và i như sau:

$$u = e - r \cdot i \quad (1.69)$$

Ở mạch H.1.43b ta có: $j = i + i_1$; với: $i_1 = \frac{u}{r}$

$$\text{suy ra: } u = r \cdot j - r \cdot i \quad (1.70)$$

So sánh (1.69) và (1.70) ta thấy hai mạch sẽ tương đương nếu:

$$e = r \cdot j \quad (1.71)$$

$$\text{hoặc: } j = \frac{e}{r}$$

6- Phép biến đổi sao - tam giác (Y - Δ)

Ba điện trở R_1 , R_2 và R_3 mắc sao (Y) như H.1.44a có thể được biến đổi tương đương thành ba điện trở R_{12} , R_{23} và R_{31} mắc tam giác (Δ) như H.1.44b, và ngược lại, trong đó quan hệ giữa các điện trở như sau:

$$R_1 = \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.72a)$$

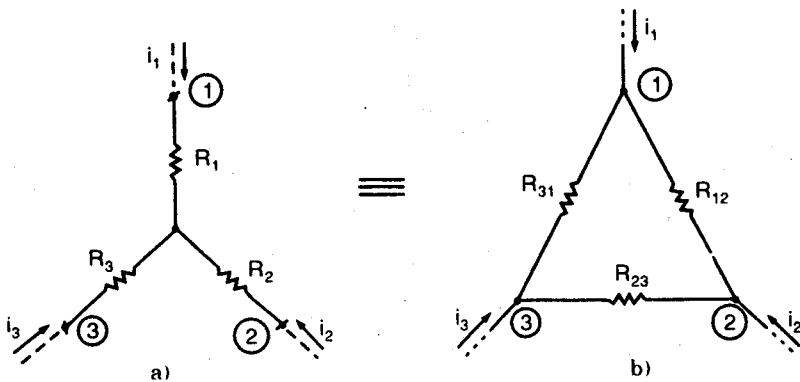
$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.72b)$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.72c)$$

hoặc ngược lại: $R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \quad (1.73a)$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (1.73b)$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \quad (1.73c)$$



Hình 1.44

Các quan hệ trên có thể được chứng minh như sau:

Vì hai mạch là tương đương nên các quan hệ sau đây thì bằng nhau đối

với hai mạch: $R_{td12} = \left. \frac{u_{12}}{i_1} \right|_{i_3=0} ; R_{td23} = \left. \frac{u_{23}}{i_2} \right|_{i_1=0} ; R_{td31} = \left. \frac{u_{31}}{i_3} \right|_{i_2=0}$

Đối với mạch H.1.44a ta có:

$$R_{td12} = R_1 + R_2; \quad R_{td23} = R_2 + R_3 \quad \text{và:} \quad R_{td31} = R_3 + R_1$$

Đối với mạch H.1.44b ta có:

$$R_{td12} = R_{12} // (R_{23} + R_{31}) = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_{td23} = R_{23} // (R_{31} + R_{12}) = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_{td31} = R_{31} // (R_{23} + R_{12}) = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Do đó ta có các phương trình sau:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.74a)$$

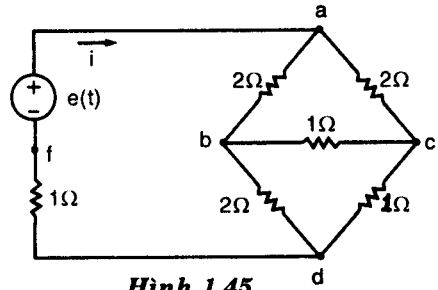
$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.74b)$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.74c)$$

Từ (1.74a), (1.74b), và (1.74c) ta dễ dàng suy ra (1.72) và (1.73).

Ví dụ 1.8: Tìm dòng điện i trong mạch H.1.45, với: $e(t) = 6\sin 100\pi t$ vôn

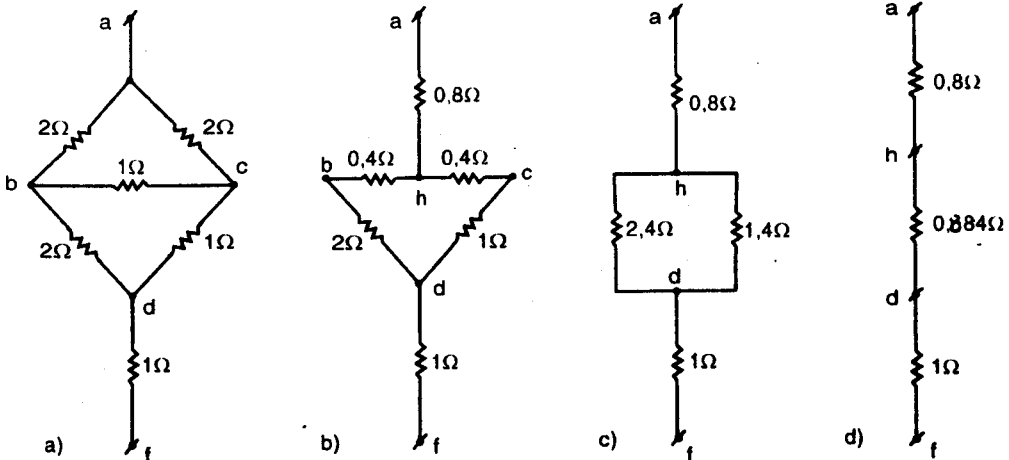
Có nhiều cách để làm đơn giản mạch thụ động nhìn từ hai điểm a và f thành một điện trở duy nhất mắc giữa hai cực của nguồn điện áp $e(t)$ bằng cách dùng biến đổi sao - tam giác. Sau đây là một cách tiêu biểu:



Hình 1.45

Mạch thụ động nhìn từ a và f ở H.1.45 được vẽ lại trên H.1.46a.

Nếu thay mạch Δ_{abc} (3 điện trở mắc Δ giữa ba đỉnh a , b và c) thành mạch Y với điểm nối chung là h ta được H.1.46b:

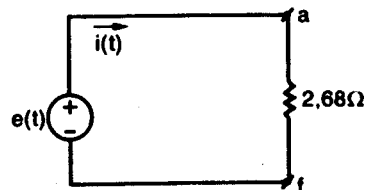


Hình 1.46

$$R_{ah} = \frac{2 \times 2}{2 + 2 + 1} = \frac{4}{5} = 0,8\Omega$$

$$R_{bh} = \frac{2 \times 1}{2 + 2 + 1} = \frac{2}{5} = 0,4\Omega$$

$$R_{ch} = \frac{2 \times 1}{2 + 2 + 1} = \frac{2}{5} = 0,4\Omega$$



Hình 1.47

Thay các điện trở nối tiếp trên một nhánh thành một điện trở, sau đó lại thay hai điện trở mắc song song thành một thì ta sẽ được H.1.46d, trong đó:

$$R_{hd} = \frac{2,4 \times 1,4}{2,4 + 1,4} = 0,884\Omega$$

và cuối cùng ta được H.1.47 với:

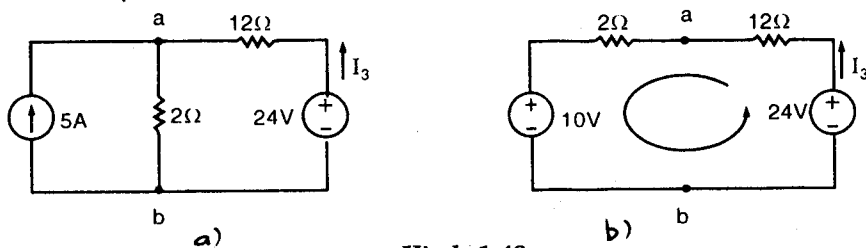
$$R_{af} = 0,8 + 0,884 + 1 = 2,68\Omega$$

Từ đó dễ dàng suy ra:

$$i = \frac{e(t)}{R_{af}} = 2,235 \sin 100\pi t \text{ A}$$

Ví dụ 1.9: Giải lại ví dụ 1.4 của mục 1.6 dùng phép biến đổi tương đương.

Giải. Thay hai điện trở 3Ω và 6Ω mắc song song (H.1.34) bằng một điện trở $\frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2\Omega$ ta sẽ được H.1.48a. Sau đó biến đổi nguồn dòng 5A mắc song song với điện trở 2Ω thành nguồn sức điện động 10V mắc nối tiếp với điện trở 2Ω ta được H.1.48b.



Hình 1.48

Áp dụng luật K2 cho vòng duy nhất của H.1.48b ta được:

$$(2 + 12)I_3 = 24 - 10 \Rightarrow I_3 = 1\text{A}$$

Cũng từ H.1.48b suy ra: $u_{ab} = 2I_3 + 10 = 12\text{V}$

$$\text{Suy ra: } I_1 = \frac{u_{ab}}{3} = 4\text{A}; \quad I_2 = \frac{u_{ab}}{6} = 2\text{A}$$

Ví dụ 1.10: Tính tỉ số u_o/e_i ở mạch điện H.1.19b.

Giải. Áp dụng công thức (1.64) cho phần bên trái H.1.19b ta được:

$$u_1 = \frac{1000e_i}{500 + 1000} = \frac{2}{3}e_i$$

Do đó trị số của nguồn dòng phụ thuộc là $0,2u_1 = \frac{2}{15}e_i$

Áp dụng công thức (1.68) cho phần bên phải của H.1.19b ta được:

$$i = \frac{60 \times 0,2u_1}{60 + 4} = \frac{1}{8}e_i \Rightarrow u_o = -4000i = -500e_i$$

Vậy:
$$\frac{u_o}{e_i} = -500$$

1.8 PHÂN LOẠI BÀI TOÁN MẠCH THEO TÍNH CHẤT QUÁ TRÌNH ĐIỆN TỬ

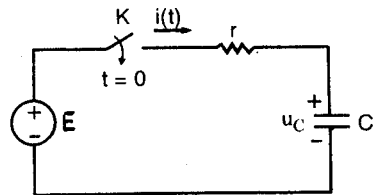
Tính chất của quá trình điện tử xảy ra trong mạch điện trong khoảng thời gian $(-\infty, \infty)$ phụ thuộc vào:

- Nguồn tác động lên mạch (thường gọi là *kích thích*);
- Cấu trúc của mạch và sự thay đổi của nó theo thời gian. Cấu trúc của mạch bị thay đổi khi ta thêm vào hoặc bớt đi số phần tử các nhánh nào đó.

Giả thiết rằng trong mạch tuyến tính dùng tập trung có tác động một nguồn một chiều (không đổi) hoặc tuần hoàn. Nếu sau một khoảng thời gian nào đó trong mạch cũng tồn tại quá trình điện một chiều hoặc tuần hoàn thì ta nói mạch đã ở *trạng thái xác lập*. Giả sử một mạch điện đang ở trạng thái xác lập, nếu ta thay đổi nguồn tác động hoặc cấu trúc mạch thì mạch sẽ trải qua *trạng thái quá độ* trước khi đạt đến trạng thái xác lập mới. Ở trạng thái quá độ các đại lượng dòng áp trong mạch không phải là một chiều hoặc tuần hoàn. Việc xuất hiện trạng thái quá độ chuyển tiếp giữa hai trạng thái xác lập liên quan đến việc năng lượng điện tử trong mạch không thể thay đổi đột ngột mà cần phải có một khoảng thời gian.

Để minh họa ta xét hai ví dụ sau:

Ví dụ 1.11: Xét mạch điện như H.1.49. Tại thời điểm $t = 0$, đóng khóa K đưa nguồn áp một chiều $E = \text{const}$ vào mạch. Ta tìm điện áp $u_C(t)$ trên phần tử điện dung C ở $t > 0$. Giả sử điều kiện ban đầu là $u_C(0) = 0$.



Hình 1.49

Áp dụng luật K2 ta được: $r \cdot i + u_C = E$

vì: $i = C \frac{du_C}{dt}$, nên: $u_C + \tau \frac{du_C}{dt} = E$ (1.75)

với: $\tau = rC$ - gọi là hằng số thời gian của mạch.

Từ lý thuyết phương trình vi phân có thể tìm được nghiệm của (1.75) là: $u_C(t) = Ke^{-t/\tau} + E$ (1.76)

trong đó: K - là hằng số tích phân được xác định từ điều kiện ban đầu:

$$u_C(0) = 0 \quad (1.77)$$

thay (1.77) vào (1.76) suy ra được $K = -E$, vậy:

$$u_C(t) = -Ee^{-t/\tau} + E \quad (1.78)$$

Ta thấy $u_C(t)$ là tổng của hai thành phần:

- Thành phần tự do: $u_{Ctd}(t) = Ke^{-t/\tau}$

là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất tương ứng với vế phải của (1.75) bằng 0 tức là

$$u_C + \tau \frac{du_C}{dt} = 0$$

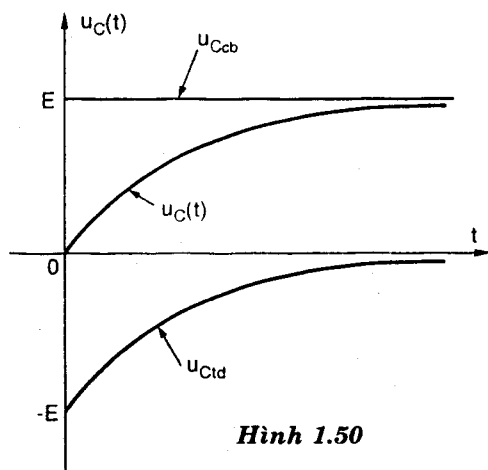
- Thành phần cưỡng bức: $u_{Ccb} = E = \text{const}$

là một nghiệm riêng của (1.75). Thành phần cưỡng bức cũng không đổi (DC) giống nguồn kích thích.

Đồ thị biểu diễn $u_C(t)$, $u_{Ctd}(t)$ và u_{Ccb} theo thời gian ($t > 0$) như H.1.50.

Thành phần tự do u_{Ctd} có trị tuyệt đối giảm dần theo thời gian.

Khi $t \rightarrow \infty$ thì thành phần tự do $u_{Ctd} \rightarrow 0$, nghiệm tổng $u_C(t)$ bằng thành phần cưỡng bức u_{Ccb} không thay đổi theo thời gian; khi đó ta nói mạch điện đã ở trạng thái (chế độ) xác lập DC và vì ở chế độ xác lập nghiệm tổng $u_C(t)$ bằng thành phần cưỡng bức u_{Ccb} nên thành phần này gọi là thành phần xác lập u_{Cxl} .



Hình 1.50

Bảng 1.1

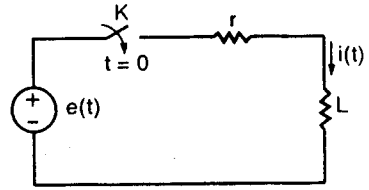
t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$\frac{ u_{Ctd} }{E}$	1	0,368	0,135	0,05	0,018	0,007

Trạng thái của mạch trước đó (khi còn tồn tại thành phần tự do u_{Ctd}) gọi là trạng thái quá độ.

Thành phần tự do u_{Ctd} chỉ tồn tại ở trạng thái quá độ nên còn gọi là thành phần quá độ.

Về mặt lý thuyết thì trạng thái xác lập chỉ đạt tới khi $t = \infty$, nhưng trong thực tế, như có thể thấy trên bảng 1.1, sau một khoảng thời gian $t = 4\tau + 5\tau$ (với $\tau = rC$) thì có thể xem như $u_{Ctd} \approx 0$; $u_C = u_{Ccb} = E$, nghĩa là có thể xem mạch đã đạt đến trạng thái xác lập.

Ví dụ 1.12: Xét mạch điện H.1.51. Tại $t = 0$, đóng khóa K, đưa nguồn áp hình sin tần số ω : $e(t) = E_m \sin \omega t$ vào mạch. Ta tìm dòng điện $i(t)$ trong mạch ở $t > 0$. Giả sử điều kiện ban đầu là $i(0) = 0$.



Hình 1.51

Áp dụng định luật K2:

$$r \cdot i + L \frac{di}{dt} = e(t) \Rightarrow i + \tau \frac{di}{dt} = \frac{E_m}{r} \sin \omega t \quad (1.79)$$

với: $\tau = \frac{L}{r}$ - gọi là hằng số thời gian của mạch.

Từ lý thuyết phương trình vi phân có thể tìm được nghiệm của phương trình vi phân cấp một (1.79) là:

$$i(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{E_m}{z} \sin(\omega t - \varphi) \quad (1.80)$$

trong đó: $z = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}$; $\sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}$; $\cos \varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}$

A - là hằng số tích phân được xác định từ điều kiện ban đầu:

$$i(0) = 0 \quad (1.81)$$

thay (1.81) vào (1.80) ta suy ra được: $A = \frac{\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2} \cdot E_m$

Từ (1.80) ta thấy $i(t)$ là tổng của hai thành phần:

- Thành phần tự do (còn gọi thành phần quá độ): $i_{td} = A e^{-t/\tau}$

là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất ứng với vế phải của (1.79) bằng 0 tức là: $i + \tau \frac{di}{dt} = 0$.

- Thành phần cưỡng bức (còn gọi thành phần xác lập): $i_{xl} = \frac{E_m}{z} \sin(\omega t - \varphi)$

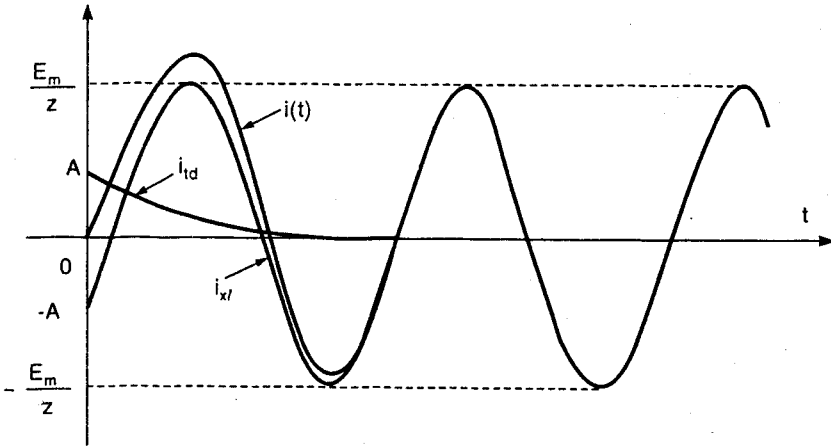
là nghiệm riêng của (1.79), cũng biến thiên hình sin tần số ω như kích thích $e(t)$.

Đồ thị: $i(t)$; $i_{td}(t)$; $i_{xl}(t)$ như trên H.1.52.

Thành phần tự do i_{td} giảm dần theo thời gian. Sau một khoảng thời gian $t = 4\tau + 5\tau$ có thể xem như thành phần tự do i_{td} bằng 0, đáp ứng tổng $i(t)$ bằng thành phần cưỡng bức i_{xl} , nghĩa là cũng biến thiên hình sin tần số ω như nguồn kích thích $e(t)$: khi đó ta nói mạch đã ở trạng thái xác lập hình sin.

Có thể thấy trong hai ví dụ trên, trạng thái quá độ là trạng thái chuyển tiếp giữa hai trạng thái xác lập, xuất hiện do việc đóng nguồn kích thích vào mạch:

- trạng thái xác lập thứ nhất là khi $t < 0$, nguồn kích thích bằng không;
- trạng thái xác lập thứ hai là khi thời gian đủ lớn đáp ứng dòng áp trong mạch có dạng giống nguồn kích thích.



Hình 1.52

Tổng quát, đối với mạch tuyến tính dừng thông số tập trung, đáp ứng dòng áp trên các phần tử của mạch là nghiệm của hệ phương trình vi phân hệ số hằng. Nghiệm này có dạng tổng của hai thành phần:

Thành phần tự do (là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng với vế phải bằng 0 tức kích thích bằng không).

Thành phần cưỡng bức (có đặc trưng giống nguồn kích thích).

Khi t đủ lớn thành phần tự do sẽ giảm về 0, khi đó nghiệm chỉ còn bằng thành phần cưỡng bức và ta nói mạch ở trạng thái xác lập. Trạng thái trước đó tồn tại cả 2 thành phần gọi là trạng thái quá độ.

Theo tính chất của quá trình điện từ trong mạch, có thể phân bài toán mạch thành hai loại:

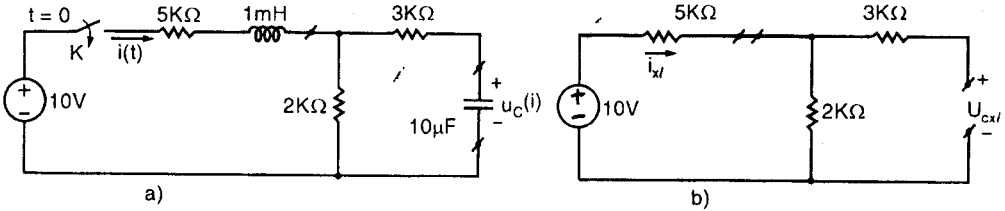
1- Bài toán phân tích mạch ở trạng thái xác lập đối với nguồn kích thích một chiều (DC) hoặc tuần hoàn.

- Trường hợp nguồn kích thích một chiều ta có trạng thái xác lập DC. Ở trạng thái xác lập DC, mọi dòng điện và điện áp trong mạch đều không thay đổi theo thời gian, do đó điện áp giữa hai đầu phần tử cảm sẽ bằng không ($u_L = L \frac{di_L}{dt} = 0$ vì $i_L = \text{const}$) và dòng điện qua phần tử điện dung

bằng không ($i_C = \frac{du_C}{dt} = 0$ vì $u_C = \text{const}$). Do đó khi phân tích mạch điện ở chế độ xác lập DC, ta có thể ngắn mạch các phần tử điện cảm và hở mạch các phần tử điện dung. Khi đó trong mạch chỉ còn lại các nguồn và các

phần tử điện trở việc giải mạch rất đơn giản, các phương trình mạch là các phương trình đại số.

Ví dụ 1.13: Xét mạch điện H.1.53a, tại $t = 0$ đóng khóa K. Ta tìm các đáp ứng xác lập i_{xl} và u_{cxl} . Ở trạng thái xác lập DC, phần tử điện cảm 1mH xem như ngắn mạch, phần tử điện dung $10\mu\text{F}$ xem như hở mạch do đó ở trạng thái xác lập mạch điện tương đương với H.1.53b.



Hình 1.53

Áp dụng định luật K2 dễ dàng suy ra: $i_{xl} = \frac{10}{5+2} \text{mA} = \frac{10}{7} \text{mA}$.

Vì dòng qua điện trở $3\text{K}\Omega$ bằng không nên: $u_{cxl} = 2 \times \frac{10}{7} = \frac{20}{7} \text{V}$

- Trường hợp nguồn kích thích là hình sin tần số ω , ta có trạng thái xác lập hình sin. Ở trạng thái xác lập này tất cả các đáp ứng dòng áp trên các nhánh, các phần tử đều là hàm hình sin theo t với cùng tần số ω . Để phân tích mạch điện xác lập hình sin người ta thường dùng phương pháp ảnh phức, làm tương ứng mỗi đại lượng hình sin $x(t) = X_m \sin(\omega t + \psi)$ với một ảnh phức $\dot{X} = X_m e^{j\psi}$, việc giải hệ phương trình vi tích phân đối với các đại lượng dòng, áp tức thời sẽ được đưa về việc giải hệ phương trình đại số đối với các ảnh phức. Phương pháp này sẽ được xét ở chương 2.

- Trường hợp kích thích là tuần hoàn với chu kỳ T thì ở trạng thái xác lập, các đáp ứng cũng biến thiên tuần hoàn. Ta có thể nhờ chuỗi Fourier để phân tích kích thích tuần hoàn thành tổng vô hạn các kích thích hình sin có tần số khác nhau. Sau đó sẽ dùng phương pháp phân tích mạch xác lập hình sin để tìm đáp ứng đối với từng kích thích thành phần hình sin, và theo tính chất xếp chồng của mạch tuyến tính đáp ứng cần tìm sẽ bằng tổng các đáp ứng thành phần này.

2-Bài toán phân tích mạch ở trạng thái không xác lập (quá độ) đối với kích thích bất kỳ có hệ phương trình mạch là hệ phương trình vi phân. Việc giải nó phải chú ý đến các điều kiện ban đầu của mạch. Nghiệm có thể được tìm bằng các phương pháp trực tiếp hoặc bằng phương pháp toán tử dựa vào việc sử dụng phép biến đổi Laplace.

MẠCH XÁC LẬP ĐIỀU HÒA

Trong chương này chúng ta sẽ xét phương pháp phân tích mạch điện tuyến tính thông số tập trung dừng ở trạng thái xác lập điều hòa. Các kích thích là các nguồn áp, nguồn dòng biến thiên hình sin theo thời gian với cùng một tần số góc ω . Ở trạng thái xác lập điều hòa (xác lập hình sin), các đáp ứng dòng điện, điện áp trên tất cả các nhánh, các phần tử cũng biến thiên hình sin theo thời gian với cùng tần số ω .

2.1 QUÁ TRÌNH ĐIỀU HÒA

Một đại lượng $f(t)$ gọi là điều hòa nếu nó biến thiên theo thời gian theo quy luật sau:

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \psi) \quad (2.1)$$

ở đây: $f(t)$ - có thể là dòng điện $i(t)$, điện áp $u(t)$, sức điện động $e(t)$ hoặc nguồn dòng điện $j(t)$.

$F_m > 0$ - biên độ

$\omega > 0$ - tần số góc, đơn vị đo là rad/s (radian/giây)

$\omega t + \psi$ - góc pha tại thời điểm t , đơn vị đo là radian hoặc độ

ψ - góc pha ban đầu, đơn vị đo là radian hoặc độ có giá trị :

$$-180^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$$

hoặc:

$$0 \leq \psi < 360^\circ$$

Đại lượng điều hòa cũng được định nghĩa dùng hàm sin:

$$f(t) = F_m \sin(\omega t + \psi) \quad (2.2)$$

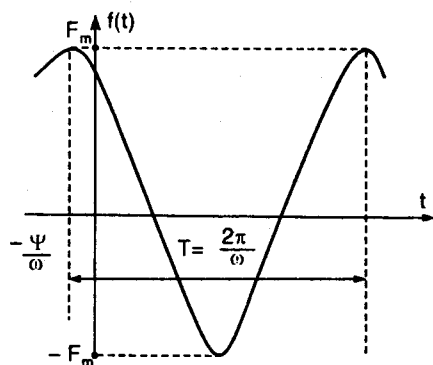
Quá trình điều hòa là hàm tuần hoàn theo thời gian với chu kỳ:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.3)$$

(Chu kỳ là thời gian ngắn nhất để hàm lặp lại giá trị cũ)

$$\text{Đại lượng : } f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.4)$$

được gọi là tần số, đơn vị đo là Hertz (Hz)

**Hình 2.1:** Quá trình điều hòa

Giả sử có hai đại lượng điều hòa cùng tần số góc ω :

$$f_1(t) = F_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)$$

và:

$$f_2(t) = F_{m2} \cos(\omega t + \psi_2)$$

với:

$$F_{m1} > 0; F_{m2} > 0 \text{ là các biên độ}$$

Đại lượng: $\varphi = (\omega t + \psi_1) - (\omega t + \psi_2) = \psi_1 - \psi_2$ gọi là góc lệch pha giữa $f_1(t)$ với $f_2(t)$.

Nếu: $\psi_1 > \psi_2$ (tức $\varphi > 0$): ta nói f_1 nhanh (sớm) pha hơn f_2 một góc φ .

$\psi_1 < \psi_2$ (tức $\varphi < 0$): f_1 chậm (trễ) pha hơn f_2 một góc $|\varphi|$.

$\varphi = \pm\pi$ ($\pm 180^\circ$): f_1 và f_2 ngược pha nhau.

$\varphi_1 = \varphi_2$ ($\varphi = 0$): f_1 và f_2 cùng pha nhau.

Ví dụ : Để tính góc lệch pha giữa hai điện áp:

$$u_1(t) = 4 \cos(2t + 30^\circ) \text{ và } u_2(t) = -2 \sin(2t + 18^\circ)$$

ta phải biến đổi chúng sang cùng dạng cos như (2.1) hoặc cùng dạng sin như (2.2). Ta có:

$$u_2(t) = -2 \sin(2t + 18^\circ) = 2 \cos(2t + 108^\circ)$$

Vậy u_2 nhanh pha hơn u_1 một góc 78° , hoặc u_1 chậm pha sau u_2 một góc 78° .

Đối với đại lượng điện biến thiên chu kỳ theo thời gian ngoài các thông số như biên độ, tần số, chu kỳ v.v. trong kỹ thuật điện người ta còn định nghĩa khái niệm giá trị hiệu dụng.

Trị hiệu dụng:

Trị hiệu dụng I của một dòng điện $i(t)$ biến thiên tuần hoàn chu kỳ T bằng với dòng điện không đổi gây ra cùng một công suất tiêu tán trung bình trên một điện trở R .

Theo định nghĩa trên ta có:

$$\frac{1}{T} \int_0^T Ri^2 dt = RI^2 \quad (2.5)$$

Vế trái của (2.5) là công suất tiêu thụ trung bình trên điện trở R trong một chu kỳ gây bởi dòng điện biến thiên chu kỳ $i(t)$, còn vế phải là công suất tiêu thụ trên R gây bởi dòng không đổi $I = \text{const}$.

Từ (2.5) suy ra trị hiệu dụng I của dòng điện chu kỳ $i(t)$ được tính theo công thức sau:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (2.6)$$

Một cách tương tự đối với điện áp $u(t)$ (sức điện động $e(t)$, nguồn dòng điện $j(t)$) biến thiên tuần hoàn chu kỳ T cũng định nghĩa trị hiệu dụng U (E, J) và được tính theo các công thức sau:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}; \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt}; \quad J = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T j^2(t) dt} \quad (2.7)$$

Trường hợp các đại lượng điều hòa:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$$

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_e)$$

$$j(t) = J_m \cos(\omega t + \psi_j)$$

với:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

thay vào (2.6), (2.7) ta tính được quan hệ giữa trị hiệu dụng và biên độ của các đại lượng điều hòa:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}; \quad J = \frac{J_m}{\sqrt{2}} \quad (2.8)$$

2.2 PHƯƠNG PHÁP BIÊN ĐỘ PHỨC

Các đáp ứng dòng điện, điện áp trong mạch, trong trường hợp tổng quát là nghiệm của hệ phương trình vi phân được thành lập từ các định luật Kirchhoff. Việc giải trực tiếp hệ phương trình vi phân của mạch để tìm các đáp ứng dòng áp sẽ gặp khó khăn nhất là trong các mạch phân nhánh phức tạp ở đó số phương trình vi phân phải giải tăng lên nhiều.

Đối với mạch điện kích thích điều hòa cùng tần số ω ở trạng thái xác lập, tất cả dòng điện, điện áp trên các phần tử, các nhánh đều biến thiên

hình sin cùng tần số ω (bằng với tần số của nguồn kích thích) và như vậy chúng chỉ phân biệt nhau về biên độ và góc pha ban đầu hay nói cách khác, chỉ còn đặc trưng bởi cặp số biên độ pha ban đầu như (I_m, ψ_i) , (U_m, ψ_u) v.v..

Nhờ tính chất này khi phân tích mạch tuyến tính xác lập điều hòa, có thể tránh việc giải trực tiếp hệ phương trình vi phân của mạch bằng cách dùng phương pháp số phức. Theo phương pháp này, mỗi đại lượng điều hòa sẽ được biểu diễn bằng một số phức (gọi là ảnh phức của nó) có môđun bằng biên độ và argumen bằng góc pha ban đầu của đại lượng điều hòa và việc giải hệ phương trình vi phân đối với các biến tức thời điều hòa sẽ được qui về việc giải hệ phương trình đại số tuyến tính đối với các ảnh phức của các biến tức thời.

Trước tiên chúng ta nhắc lại tóm tắt các công thức tính toán về số phức.

2.2.1 Số phức

Một số phức C có thể được viết ở một trong hai dạng sau:

- **Dạng đại số:**

$$C = a + jb \quad (2.9)$$

trong đó: $j = \sqrt{-1}$; a, b - là hai số thực

a gọi là phần thực của C : $a = \text{Re}C$

b gọi là phần ảo của C : $b = \text{Im}C$

- **Dạng mũ (dạng cực):**

$$C = |C|e^{j\alpha} = |C| \angle \alpha \quad (2.10)$$

trong đó: $|C|$ - là môđun

α - là argumen, đơn vị là radian hoặc

độ: $\alpha = \arg C$

$$-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \text{ hoặc: } 0 \leq \alpha < 360^\circ$$

Có thể biểu thị số phức C trên mặt phẳng phức như H.2.2.2.

Ta có các quan hệ:

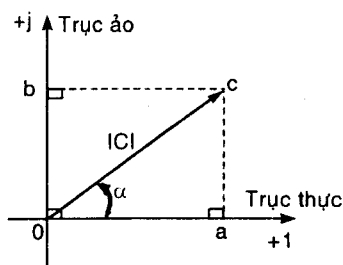
$$|C| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.11)$$

$$a = |C| \cos \alpha \quad (2.12a)$$

$$b = |C| \sin \alpha \quad (2.12b)$$

Ví dụ 2.1: Đổi các số phức sau từ dạng đại số sang dạng mũ:

$$4 + j3; \quad 4 - j3; \quad -4 + j3; \quad -4 - j3$$



Hình 2.2

Giải. Cả bốn số phức trên có môđun như nhau:

$$|C| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Để tính argumen có thể dựa vào H.2.3. Đối với số phức:

$$C = 4 + j3: \quad \alpha = \tan^{-1} \frac{3}{4} = 36^\circ 87'$$

$$C = 4 - j3: \quad \alpha = -\tan^{-1} \frac{3}{4} = -36^\circ 87'$$

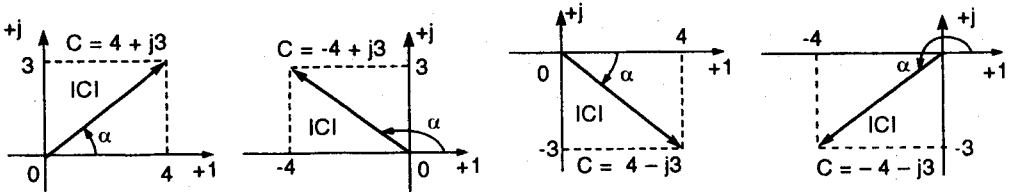
$$C = -4 + j3: \quad \alpha = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{3}{4} = 143^\circ 13'$$

$$C = -4 - j3: \quad \alpha = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{3}{4} = 216^\circ 87'$$

Tóm lại:

$$4 + j3 = 5 \angle 36^\circ 87'; \quad -4 + j3 = 5 \angle 143^\circ 13'$$

$$4 - j3 = 5 \angle -36^\circ 87'; \quad -4 - j3 = 5 \angle 216^\circ 87' = 5 \angle -143^\circ 13'$$



Hình 2.3

Như vậy: $C = |C| e^{j\alpha} = a + jb = |C| (\cos \alpha + j \sin \alpha)$

trong đó đã dùng công thức Euler:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (2.13)$$

Số phức liên hợp với số phức $C = a + jb = |C| \angle \alpha$ được ký hiệu là C^* định nghĩa bởi: $C^* = a - jb = |C| \angle -\alpha$

Các số phức đặc biệt:

$$j = 1 \angle 90^\circ; \quad -1 = 1 \angle 180^\circ; \quad 1 = 1 \angle 0^\circ; \quad -j = 1 \angle -90^\circ$$

Phép cộng trừ hai số phức:

$$(a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

đặc biệt: $C + C^* = 2 \operatorname{Re} C = 2a$ và $C - C^* = j2 \operatorname{Im} C = j2b$

Phép cộng trừ hai số phức có thể được tiến hành bằng đồ thị như H.2.4, trong đó hai số phức C_1 và C_2 được biểu diễn bằng hai vectơ và số phức $C = C_1 + C_2$ sẽ được biểu diễn bởi vectơ tổng của hai vectơ trên.

Phép nhân chia hai số phức:

$$|C_1| \angle \alpha_1 \cdot |C_2| \angle \alpha_2 = |C_1| \cdot |C_2| \angle \alpha_1 + \alpha_2$$

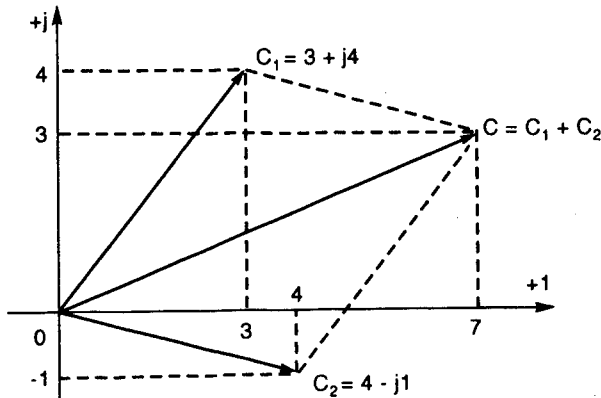
đặc biệt: $C \cdot C^* = |C|^2 = a^2 + b^2$; $j^2 = -1$

$$\frac{|C_1| \angle \alpha_1}{|C_2| \angle \alpha_2} = \frac{|C_1|}{|C_2|} \angle \alpha_1 - \alpha_2$$

$$(a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Chú ý: $\frac{1}{j} = -j$



Hình 2.4

2.2.2 Biểu diễn đại lượng điều hòa bằng số phức - biên độ phức

Theo công thức Euler (2.13) ta được:

$$F_m e^{j(\omega t + \psi)} = F_m \cos(\omega t + \psi) + jF_m \sin(\omega t + \psi)$$

Như vậy, nếu đại lượng điều hòa $f(t)$ được định nghĩa dùng hàm cos như (2.1) thì:

$$f(t) = \text{Re} \{ F_m e^{j(\omega t + \psi)} \}$$

Còn nếu dùng (2.2) thì: $f(t) = \text{Im} \{ F_m e^{j(\omega t + \psi)} \}$

Do đó đại lượng điều hòa $f(t)$ như (2.1) (hoặc (2.2)) có thể được biểu diễn bằng số phức $F_m e^{j(\omega t + \psi)}$, hay nói cách khác có thể được biểu

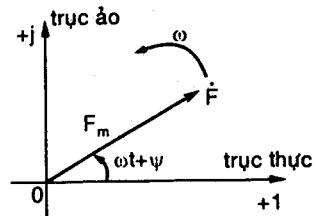
diễn trên mặt phẳng phức bởi một vectơ có suất

bằng biên độ F_m và làm với trục thực một góc $(\omega t + \psi)$ như H.2.5. Vectơ

này quay quanh gốc O theo chiều ngược với chiều kim đồng hồ với vận tốc góc ω , tại thời điểm ban đầu $t = 0$ làm với trục thực một góc bằng ψ . Đại

lượng điều hòa $f(t)$ sẽ bằng phần thực (hoặc phần ảo) của số phức:

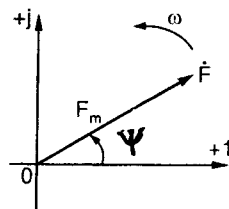
$$F_m e^{j(\omega t + \psi)} = F_m e^{j\psi} e^{j\omega t}$$



Hình 2.5

hay sẽ bằng hình chiếu của vectơ quay lên trục thực (hoặc trục ảo).

Bởi vì ta hạn chế xét mạch điện xác lập điều hòa, trong đó tất cả các đại lượng dòng điện, điện áp đều biến thiên điều hòa với cùng chung một tần số ω nên các số phức biểu diễn chúng đều có một thừa số chung là $e^{j\omega t}$ hay nói cách khác, trên mặt phẳng phức các vectơ biểu diễn đều quay ngược chiều kim đồng hồ với cùng một tốc độ góc là ω . Do đó ta chỉ cần xét tại thời điểm $t = 0$ là đủ, nghĩa là ta sẽ biểu diễn đại lượng điều hòa $f(t)$ bởi số phức:



Hình 2.6

$F_m e^{j\psi}$ (là giá trị của $F_m e^{j(\omega t + \psi)}$ tại $t = 0$)

còn trên mặt phẳng phức thì biểu diễn bởi vectơ có suất bằng biên độ F_m và làm với trục thực một góc bằng pha ban đầu ψ của $f(t)$ như trên H.2.6.

Số phức: $\dot{F} = F_m e^{j\psi} = F_m \angle \psi$ - gọi là *biên độ phức* của đại lượng điều hòa: $f(t) = F_m \cos(\omega t + \psi)$

hoặc: $f(t) = F_m \sin(\omega t + \psi)$

Ta có công thức liên hệ:

$$f(t) = \operatorname{Re}\{\dot{F} e^{j\omega t}\} \quad (2.14a)$$

$$\text{hoặc:} \quad f(t) = \operatorname{Im}\{\dot{F} e^{j\omega t}\} \quad (2.14b)$$

Tóm lại, khi phân tích mạch điện xác lập điều hòa, mà ở đó tất cả các biến điều hòa dòng áp đều có cùng một tần số, chỉ còn phân biệt nhau bởi biên độ và góc pha ban đầu, các biến điều hòa được biểu diễn bằng biên độ phức của chúng:

$$i(t) = I_m \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\omega t + \psi_i) \Leftrightarrow \dot{I} = I_m \angle \psi_i$$

$$u(t) = U_m \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\omega t + \psi_u) \Leftrightarrow \dot{U} = U_m \angle \psi_u$$

$$e(t) = E_m \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\omega t + \psi_e) \Leftrightarrow \dot{E} = E_m \angle \psi_e$$

$$j(t) = J_m \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\omega t + \psi_j) \Leftrightarrow \dot{J} = J_m \angle \psi_j$$

Thay vì dùng biên độ phức, người ta còn biểu diễn đại lượng điều hòa bằng số phức có môđun bằng trị hiệu dụng và argumen bằng góc pha ban đầu của đại lượng điều hòa, gọi là *hiệu dụng phức* $\dot{F}_{hd}$:

$$\dot{F}_{hd} = F \angle \psi = \frac{F_m}{\sqrt{2}} \angle \psi = \frac{\dot{F}}{\sqrt{2}}$$

Ta sẽ gọi chung biên độ phức hoặc hiệu dụng phức $\dot{F}_{hd}$ là ảnh phức của đại lượng điều hòa $f(t)$.

Sau đây là một số tính chất của phép biểu diễn đại lượng điều hòa bằng ảnh phức.

1- Nhân đại lượng điều hòa $f(t)$ với một hằng số thực k cũng tương ứng với việc nhân ảnh phức $\dot{F}$ với k và ngược lại

$$k f(t) \Leftrightarrow k \dot{F} \quad (2.15)$$

Thật vậy giả sử $\dot{F}$ là ảnh phức của $f(t)$, theo (2.14a) ta có:

$$f(t) = \text{Re} (\dot{F} e^{j\omega t})$$

$$\Rightarrow k f(t) = k \text{Re} (\dot{F} e^{j\omega t})$$

vì k là số thực nên có thể viết: $k f(t) = \text{Re} (k \dot{F} e^{j\omega t})$

điều này chứng tỏ $k \dot{F}$ là ảnh phức của $k f(t)$

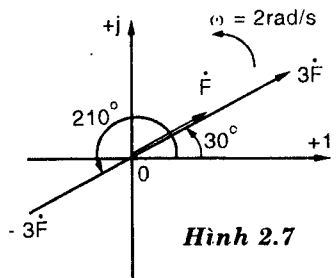
Ví dụ:

$$f(t) = 5 \cos (2t + 30^\circ) \Leftrightarrow \dot{F} = 5 \angle 30^\circ$$

$$3f(t) = 15 \cos (2t + 30^\circ) \Leftrightarrow 3\dot{F} = 15 / 30^\circ$$

$$-3f(t) = -15 \cos (2t + 30^\circ) \Leftrightarrow -3\dot{F} = -15 \angle 30^\circ$$

$$= 15 \cos (2t + 210^\circ) = 15 \angle 210^\circ$$



Hình 2.7

Đồ thị vectơ biểu diễn $f(t)$, $3f(t)$ và $-3f(t)$ như trên H.2.7

2- Phép đạo hàm đại lượng điều hòa tương ứng với việc nhân ảnh phức của nó với số phức thuần ảo $j\omega$:

$$\frac{d f(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega \dot{F} \quad (2.16)$$

Thật vậy giả sử $\dot{F}$ là ảnh phức của $f(t)$, theo (2.14a) ta có:

$$f(t) = \text{Re} \left\{ \dot{F} e^{j\omega t} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Re} \left\{ \dot{F} e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \dot{F} \frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) \right\}$$

Vì:
$$\frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) = j\omega e^{j\omega t}$$

nên:
$$\frac{df(t)}{dt} = \operatorname{Re} \left\{ (j\omega \dot{F}) e^{j\omega t} \right\}$$

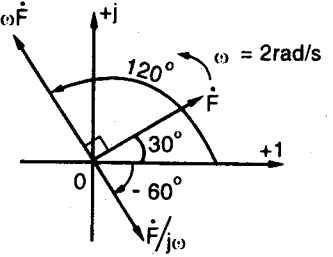
Biểu thức này chứng tỏ ảnh phức của $\frac{df(t)}{dt}$ là $j\omega \dot{F}$

Ví dụ: $f(t) = 5 \cos(2t + 30^\circ) \Leftrightarrow \dot{F} = 5 \angle 30^\circ$ $\omega = 2 \text{ rad/s}$

$$\frac{df(t)}{dt} = -10 \sin(2t + 30^\circ) = 10 \cos(2t + 120^\circ)$$

$$\Leftrightarrow j\omega \dot{F} = j2\dot{F} = 2 \angle 90^\circ \cdot 5 \angle 30^\circ = 10 \angle 120^\circ$$

Đồ thị vectơ của $f(t)$ và $\frac{df(t)}{dt}$ như trên H.2.8.



3- Phép tích phân đại lượng điều hòa tương ứng với việc nhân ảnh phức của nó với số phức $\frac{1}{j\omega}$:

$$\int f(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \dot{F} = -j \frac{1}{\omega} \dot{F} \quad (2.17)$$

Thật vậy ta có:

$$\int f(t) dt = \int \operatorname{Re} \left\{ \dot{F} e^{j\omega t} \right\} dt = \operatorname{Re} \left\{ \dot{F} \int e^{j\omega t} dt \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \dot{F} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{1}{j\omega} \dot{F} \right) e^{j\omega t} \right\}$$

Biểu thức này chứng tỏ $\frac{1}{j\omega} \dot{F}$ là ảnh phức của $\int f(t) dt$.

Ví dụ:

$$f(t) = 5 \cos(2t + 30^\circ) \Leftrightarrow \dot{F} = 5 \angle 30^\circ$$

$$\int f(t) dt = \frac{5}{2} \sin(2t + 30^\circ) \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \dot{F} = \frac{1}{j2} \dot{F} = \frac{1}{2} \angle -90^\circ \cdot 5 \angle 30^\circ = \frac{5}{2} \angle -60^\circ$$

$$= \frac{5}{2} \cos(2t - 60^\circ)$$

Đồ thị vectơ của $f(t)$ và $\int f(t) dt$ như trên H.2.8

4- Phép cộng (hoặc trừ) hai đại lượng điều hòa (cùng tần số) tương ứng với phép cộng (trừ) hai ảnh phức của chúng:

$$f_1(t) \pm f_2(t) \Leftrightarrow \dot{F}_1 \pm \dot{F}_2 \quad (2.18)$$

Thật vậy giả sử: $f_1(t) \Leftrightarrow \dot{F}_1$; $f_2(t) \Leftrightarrow \dot{F}_2$

theo (2.14a) ta có: $f_1(t) = \text{Re} \left\{ \dot{\mathbf{F}}_1 e^{j\omega t} \right\}$

$$f_2(t) = \text{Re} \left\{ \dot{\mathbf{F}}_2 e^{j\omega t} \right\}$$

$$\Rightarrow f_1(t) \pm f_2(t) = \text{Re} \left\{ \dot{\mathbf{F}}_1 e^{j\omega t} \right\} \pm \text{Re} \left\{ \dot{\mathbf{F}}_2 e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \dot{\mathbf{F}}_1 e^{j\omega t} \pm \dot{\mathbf{F}}_2 e^{j\omega t} \right\}$$

$$f_1(t) \pm f_2(t) = \text{Re} \left\{ (\dot{\mathbf{F}}_1 \pm \dot{\mathbf{F}}_2) e^{j\omega t} \right\}$$

Biểu thức này chứng tỏ $f_1(t) \pm f_2(t)$ có ảnh phức là $\dot{\mathbf{F}}_1 \pm \dot{\mathbf{F}}_2$.

Ví dụ: $f_1(t) = 3 \cos(\omega t + 30^\circ) \Leftrightarrow \dot{\mathbf{F}}_1 = 3 \angle 30^\circ$

$$f_2(t) = 4 \cos(\omega t - 60^\circ) \Leftrightarrow \dot{\mathbf{F}}_2 = 4 \angle -60^\circ$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}_1 + \dot{\mathbf{F}}_2 &= 3 \angle 30^\circ + 4 \angle -60^\circ = (2.6 + j1.5) + (2 - j3.46) \\ &= 4.6 - j1.96 = 5 \angle -23^\circ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_1(t) + f_2(t) = 5 \cos(\omega t - 23^\circ)$$

Trên đồ thị vector (H.2.9), vector biểu diễn $f_1 + f_2$ bằng tổng của hai vector biểu diễn f_1 và f_2 .

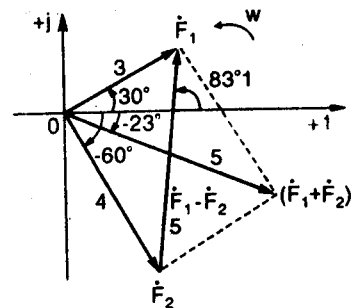
Tương tự:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}_1 - \dot{\mathbf{F}}_2 &= 3 \angle 30^\circ - 4 \angle -60^\circ \\ &= (2.6 + j1.5) - (2 - j3.46) = 0.6 + j4.96 = 5 \angle 83.1^\circ \\ \Rightarrow f_1(t) - f_2(t) &= 5 \cos(\omega t + 83.1^\circ) \end{aligned}$$

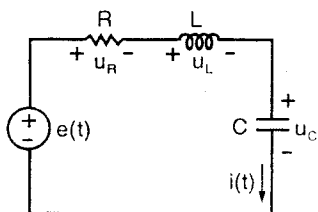
Trên đồ thị vector (H.2.9), vector biểu diễn $f_1 - f_2$ bằng hiệu của hai vector biểu diễn f_1 và f_2 .

Từ các tính chất của phép biểu diễn hàm điều hòa bằng ảnh phức đã trình bày ở trên ta có thể thấy rằng: việc giải hệ các phương trình vi tích phân đối với các biến dòng áp tức thời điều hòa, khi phân tích mạch tuyến tính xác lập điều hòa, có thể được đưa về việc giải hệ các phương trình đại số tuyến tính đối với các ảnh phức của chúng. Để minh họa, ta xét mạch điện như H.2.10 kích thích bởi nguồn áp:

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \Psi)$$



Hình 2.9



Hình 2.10

Ở trạng thái xác lập, $i(t)$ cũng biến thiên điều hòa tần số ω .

Áp dụng định luật Kirchhoff 2 ta được:

$$u_R + u_L + u_C = e(t)$$

trong đó: $u_R = Ri$; $u_L = L \frac{di}{dt}$; $u_C = \frac{1}{C} \int i dt$

do đó $i(t)$ thỏa phương trình vi tích phân:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e(t) \quad (2.19)$$

Biểu diễn $i(t)$ bởi ảnh phức là biên độ phức $\dot{I}$

$$e(t) \text{ bởi biên độ phức } \dot{E} = E_m e^{j\psi} = E_m \angle \psi$$

Theo các tính chất (2.15), (2.16), (2.17), (2.18) từ phương trình (2.19) có thể suy ra $\dot{I}$ sẽ thỏa phương trình đại số sau đây:

$$R\dot{I} + Lj\omega\dot{I} + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{j\omega}\dot{I} = \dot{E}$$

$$\Rightarrow (R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}) \dot{I} = \dot{E}$$

$$\Rightarrow \dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{E_m \angle \psi}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

giả sử: $e(t) = 10 \cos 2t \text{ V}$

$$R = 4\Omega; L = 2\text{H}; C = 0,5\text{F}$$

khi đó: $\dot{E} = 10 \angle 0^\circ = 10\text{V}; \omega L = 4; \frac{1}{\omega C} = 1$

suy ra: $\dot{I} = \frac{10}{4 + j3} = \frac{10}{5 \angle 36^\circ 87'} = 2 \angle -36^\circ 87' \text{ A}$

do đó: $i(t) = 2 \cos(2t - 36^\circ 87') \text{ A}$

Để có thể bỏ qua giai đoạn thành lập hệ phương trình vi tích phân của mạch trước khi chuyển về hệ phương trình đại số, nhằm làm cho phương pháp phân tích mạch dùng số phức đơn giản và có hiệu lực hơn, người ta đưa ra các khái niệm trở kháng, dẫn nạp cũng như các dạng phức của hai định luật Kirchhoff mà sẽ cho phép hệ phương trình đại số đối với các ảnh phức được thành lập trực tiếp từ sơ đồ mạch, bỏ qua giai đoạn lập hệ phương trình vi tích phân.

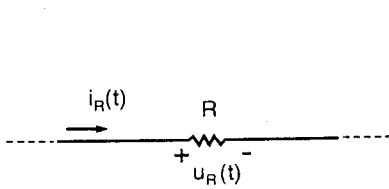
2.3 QUAN HỆ GIỮA ĐIỆN ÁP VÀ DÒNG ĐIỆN TRÊN CÁC PHẦN TỬ R, L, C - TRỞ KHÁNG VÀ DẪN NẠP

2.3.1 Quan hệ áp - dòng trên R, L, C ở xác lập điều hòa

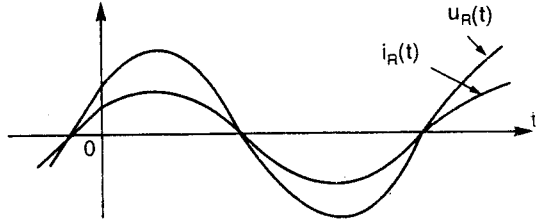
1- Trên phần tử điện trở R

Khi có dòng điều hòa chảy qua điện trở R (H.2.11)

$$i_R(t) = I_{Rm} \cos(\omega t + \Psi) \quad (2.20)$$



Hình 2.11



Hình 2.12

thì trên hai đầu điện trở sẽ xuất hiện điện áp:

$$u_R(t) = R i_R(t) = R I_{Rm} \cos(\omega t + \Psi) \quad (2.21)$$

$$\text{biên độ điện áp: } U_{Rm} = R I_{Rm} \quad (2.22)$$

$$\text{và trị hiệu dụng: } U_R = R I_R \text{ với } U_R = \frac{U_{Rm}}{\sqrt{2}}, I_R = \frac{I_{Rm}}{\sqrt{2}}$$

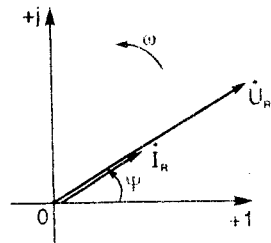
Điện áp trên hai đầu điện trở và dòng điện qua nó cùng pha với nhau. $u_R(t)$ và $i_R(t)$ cùng đạt cực đại và cực tiểu hay bằng không tại các thời điểm giống nhau (H.2.12)

Gọi: $\dot{U}_R$ - là biên độ phức của $u_R(t)$:

$$\dot{U}_R = U_{Rm} \angle \Psi$$

$\dot{I}_R$ - là biên độ phức của $i_R(t)$:

$$\dot{I}_R = I_{Rm} \angle \Psi$$



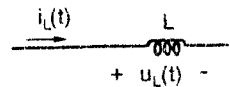
Hình 2.13

$$\text{ta có quan hệ sau: } \dot{U}_R = R \dot{I}_R \quad (2.23)$$

Hình 2.13 là đồ thị vectơ biểu diễn áp và dòng trên phần tử điện trở R.

2- Trên phần tử điện cảm L

Nếu qua phần tử điện cảm có dòng điều hòa (H.2.14)



Hình 2.14

$$i_L(t) = I_{Lm} \cos(\omega t + \Psi) \quad (2.24)$$

trên nó sẽ xuất hiện điện áp:

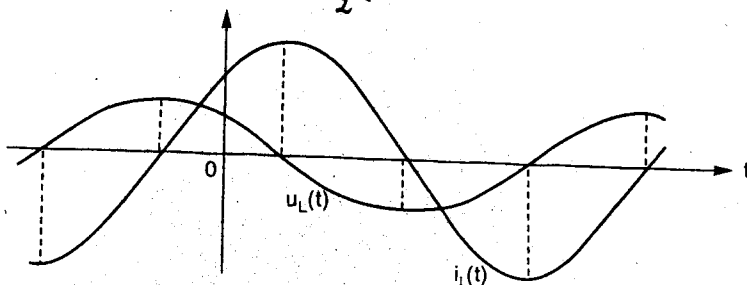
$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -\omega L I_{Lm} \sin(\omega t + \Psi)$$

$$u_L(t) = \omega L I_{Lm} \cos(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}) \quad (2.25)$$

vậy biên độ của điện áp: $U_{Lm} = \omega L I_{Lm}$ (2.26)

về trị hiệu dụng: $U_L = \omega L I_L$ với: $U_L = \frac{U_{Lm}}{\sqrt{2}}$; $I_L = \frac{I_{Lm}}{\sqrt{2}}$

Điện áp $u_L(t)$ nhanh pha hơn so với dòng $i_L(t)$ một góc $\pi/2$ hay dòng chậm pha so với áp một góc $\frac{\pi}{2}$ (H.2.15).



Hình 2.15: Quan hệ áp - dòng trên L

Biên độ phức của dòng điện $i_L(t)$:

$$\dot{I}_L = I_{Lm} \angle \psi$$

Biên độ phức của điện áp :

$$\dot{U}_L = \omega L I_{Lm} \angle \psi + \frac{\pi}{2} = \omega L \angle \frac{\pi}{2} I_{Lm} \angle \psi$$

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L = jx_L \dot{I}_L \quad (2.27)$$

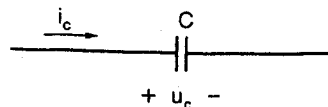
trong đó đặt: $x_L = \omega L$ (2.28)

gọi là điện kháng điện cảm hay gọi tắt là cảm kháng. Đơn vị đo của x_L là Ohm (Ω)

Hình 2.16 là đồ thị vectơ biểu diễn áp và dòng trên phần tử điện cảm.

3- Trên phần tử điện dung C

Khi đặt lên hai đầu của phần tử điện dung một điện áp điều hòa (H.2.17)



Hình 2.17

$$u_C(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \psi) \quad (2.29)$$

thì qua nó sẽ có dòng điện:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -\omega C U_{Cm} \sin(\omega t + \psi)$$

$$i_C(t) = \omega.C.U_{Cm} \cos\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.30)$$

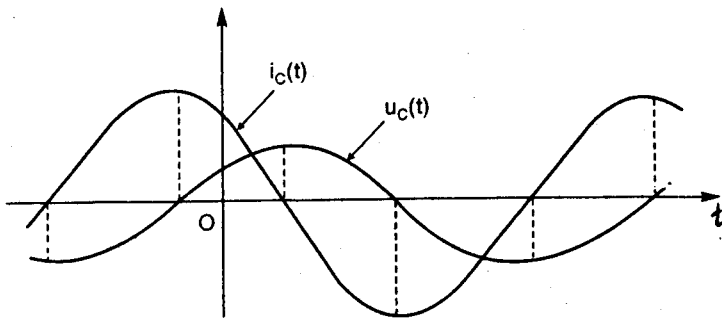
Ta có quan hệ giữa biên độ điện áp và dòng điện trên phần tử điện dung:

$$I_{Cm} = \omega.C.U_{Cm} \quad (2.31a)$$

hay:
$$U_{Cm} = \frac{1}{\omega.C} I_{Cm} \quad (2.31b)$$

tương tự về trị hiệu dụng : $U_C = \frac{1}{\omega.C} I_C$ với $U_C = \frac{U_{Cm}}{\sqrt{2}}$; $I_C = \frac{I_{Cm}}{\sqrt{2}}$

Về pha, dòng điện $i_C(t)$ nhanh pha hơn so với điện áp $u_C(t)$ một góc $\pi/2$, hay điện áp chậm pha so với dòng điện một góc $\pi/2$ (H.2.18).



Hình 2.18: Quan hệ áp - dòng trên C

Biên độ phức của điện áp:

$$\dot{U}_C = U_{Cm} \angle \Psi$$

Biên độ phức của dòng điện:

$$\dot{I}_C = \omega.C.U_{Cm} \angle \Psi + \pi/2 = \omega.C \angle \pi/2 . U_{Cm} \angle \Psi \Rightarrow \dot{I}_C = j.\omega.C.\dot{U}_C \quad (2.32)$$

hay:
$$\dot{U}_C = \frac{1}{j.\omega.C} \dot{I}_C ; \dot{U}_C = -j \frac{1}{\omega.C} \dot{I}_C = j.x_C.\dot{I}_C \quad (2.33)$$

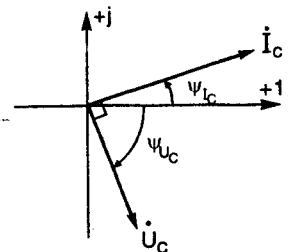
trong đó: $x_C = - \frac{1}{\omega.C} \quad (2.34)$

gọi là điện kháng điện dung hay gọi tắt là dung kháng, đơn vị đo là ohm (Ω)

Hình 2.19 là đồ thị vectơ biểu diễn áp và dòng trên phần tử điện dung C.

2.3.2 Khái niệm trở kháng và dẫn nạp

Tỉ số của biên độ phức điện áp với biên độ phức dòng điện chạy qua phần tử mạch R,L hoặc C gọi là trở kháng của phần tử đó.



Hình 2.19

Theo định nghĩa đó, trở kháng của:

- phần tử điện trở là :
$$Z_R = \frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R} = R \quad (2.35a)$$

- phần tử điện cảm là :
$$Z_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L} = j\omega L = jx_L \quad (2.35b)$$

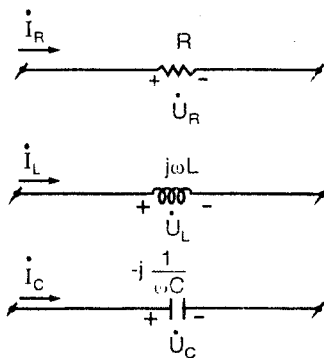
- phần tử điện dung là :
$$Z_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = -j\frac{1}{\omega C} = jx_C \quad (2.35c).$$

Tổng quát, xét một hai cực (được hiểu là một phần của mạch điện liên lạc trao đổi năng lượng tín hiệu với bên ngoài thông qua hai cực như H.2.21) không nguồn (bên trong không chứa các nguồn áp độc lập và nguồn dòng độc lập nào) ở chế độ xác lập điều hòa. Trên hai cực có dòng điện và điện áp hình sin tần số ω :

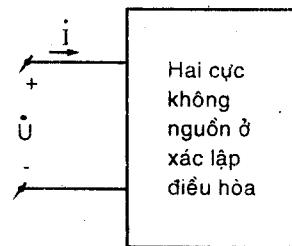
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \Psi_i) \text{ với biên độ phức } \dot{I} = I_m \angle \Psi_i$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \Psi_u) \text{ với biên độ phức } \dot{U} = U_m \angle \Psi_u$$

Tỉ số: $Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$ - gọi là trở kháng của hai cực.



Hình 2.20



Hình 2.21

Nghịch đảo của Z , ký hiệu là Y :

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} \text{ - gọi là dẫn nạp của hai cực.}$$

Z , Y không phụ thuộc vào $\dot{U}$, $\dot{I}$ mà chỉ phụ thuộc vào các thông số đặc trưng của phần tử như điện trở, điện cảm, điện dung v.v. cũng như cách nối

ghép các phần tử. Ngoài ra trong trường hợp tổng quát trở kháng Z và dẫn nạp Y phụ thuộc tần số ω , chúng là các hàm phức của tần số ω .

Trở kháng Z có thể biểu diễn ở dạng đại số và dạng mũ:

$$Z = R + jX = |Z| e^{j\varphi} \quad (2.36)$$

phần thực $R(\omega)$ gọi là điện trở, còn phần ảo $X(\omega)$ gọi là điện kháng, $|Z|$ là môđun trở kháng, φ là argumen của trở kháng.

$X(\omega)$ có thể có giá trị âm hoặc dương.

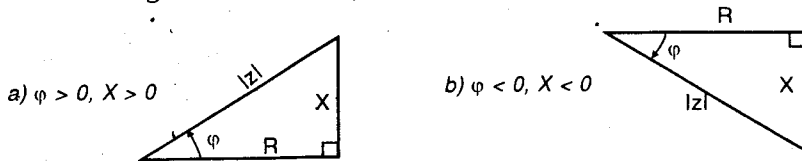
Đối với hai cực thụ động (không chứa các phần tử tích cực), thì người ta chứng minh được rằng điện trở $R(\omega)$ luôn dương, khi đó vì $R(\omega)$ dương còn $X(\omega)$ có thể âm hoặc dương nên argumen $\varphi(\omega)$ của trở kháng sẽ có giá trị nằm trong khoảng:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi(\omega) \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.37)$$

Quan hệ giữa $R(\omega)$, $X(\omega)$ với $\varphi(\omega)$, $z(\omega)$ cho bởi:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{X}{R}; \quad R = |Z| \cos \varphi; \quad X = |Z| \sin \varphi \quad (2.38)$$

và được minh họa trên đồ thị bởi một tam giác vuông như H.2.22a,b gọi là tam giác trở kháng.



Hình 2.22: Tam giác trở kháng

Ta có:

$$|Z| = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U_m \angle \Psi_u}{I_m \angle \Psi_i} = \frac{U_m}{I_m} \angle \Psi_u - \Psi_i$$

do đó từ (2.36) ta suy ra :

$$|Z| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} \quad (2.39)$$

và:

$$\varphi = \Psi_u - \Psi_i \quad (2.40)$$

Vậy môđun $|Z|$ của trở kháng bằng tỉ số giữa biên độ của điện áp với biên độ của dòng điện, hoặc bằng tỉ số giữa trị hiệu dụng của điện áp với trị hiệu dụng của dòng điện; còn argumen φ của trở kháng bằng góc lệch pha giữa điện áp với dòng điện. Trường hợp:

• $X > 0$; $\varphi > 0$, điện áp nhanh pha hơn dòng điện: hai cực được nói có

tính chất cảm (cảm tính).

. $X < 0$; $\varphi < 0$, *điện áp chậm pha sau dòng điện*: hai cực được nói có tính chất dung (dung tính).

. $X = 0$; $\varphi = 0$, *điện áp cùng pha với dòng điện*: hai cực có tính chất thuần trở.

. $R = 0$; $\varphi = \pm \pi/2$, *điện áp và dòng điện vuông pha với nhau*: hai cực có tên là hai cực thuần kháng, đó là hai cực không tổn hao.

Đơn vị đo của Z , $|Z|$, X , R là ohm (Ω).

Dẫn nạp Y có thể biểu diễn ở dạng đại số và dạng mũ

$$Y = G + jB = |Y| e^{j\alpha} \quad (2.41)$$

$|Y|$ là môđun dẫn nạp, α là argumen của dẫn nạp

Phần thực $G(\omega)$ được gọi là điện dẫn

Phần ảo $B(\omega)$ được gọi là điện nạp

vì:
$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{|Z|} e^{-j\varphi}$$

nên suy ra:
$$|Y| = \frac{1}{|Z|}; \alpha = -\varphi \quad (2.42)$$

mặt khác:
$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

nên suy ra:
$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \text{ và: } B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (2.43)$$

từ:
$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

cũng suy ra được:
$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \text{ và } X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \quad (2.44)$$

Vậy G cùng dấu với R , B ngược dấu với X .

Giữa G , B với $|Y|$, cũng có các quan hệ:

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}, \alpha = \tan^{-1} \frac{B}{G} \quad (2.45)$$

$$G = |Y| \cos \alpha, B = |Y| \sin \alpha$$

Các thành phần của dẫn nạp tạo thành tam giác dẫn nạp (H.2.23)

Trong trường hợp:

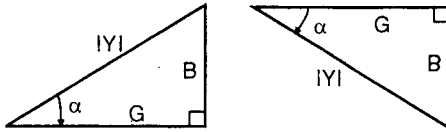
. $B > 0$; $\alpha > 0$: hai cực có dung tính

. $B < 0$; $\alpha < 0$: hai cực có cảm tính

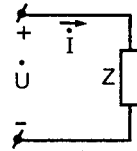
. $B = 0$; $\alpha = 0$: hai cực có tính chất thuần trở.

• $G = 0$; $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$: hai cực thuần kháng.

Đơn vị đo của Y , $|Y|$, G , B là Siemen (S), hoặc mho (Ω^{-1}).



Hình 2.23: Tam giác dẫn nạp



Hình 2.24: Ký hiệu của trở kháng

Tóm lại, một hai cực không nguồn ở chế độ xác lập điều hòa, nếu chỉ quan tâm đến quan hệ dòng áp ở trên hai cực đầu vào, thì có thể được đặc trưng bởi trở kháng hoặc dẫn nạp của nó, và thường được ký hiệu như H.2.24.

Ví dụ 2.2: Hãy xác định trở kháng Z , dẫn nạp Y của mạch rLC nối tiếp (H.2.25) và xác định $R(\omega)$, $X(\omega)$, $|Z(\omega)|$, $\varphi(\omega)$, $G(\omega)$, $B(\omega)$, $|Y(\omega)|$.

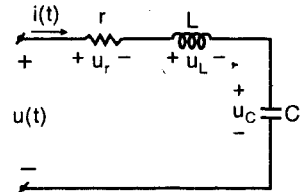
Giải. Định luật K2 cho:

$$u_r(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t)$$

Từ tính chất (2.18) suy ra phương trình đối với các biên độ phức:

$$\dot{U}_r + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{U}$$

Suy ra trở kháng của nhánh rLC nối tiếp là:



Hình 2.25: Nhánh rLC

nối tiếp ở xác lập điều hòa

$$Z = \frac{\dot{U}_r}{\dot{I}} + \frac{\dot{U}_L}{\dot{I}} + \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}} = Z_r + Z_L + Z_C$$

$$\Rightarrow Z = r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Như vậy: $R(\omega) = r = \text{const}; X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$

môđun trở kháng: $|Z(\omega)| = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

argumen: $\varphi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega L - 1/\omega C}{r}$

Dẫn nạp: $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{r - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

Vậy: $Y = G(\omega) + jB(\omega) = y(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}$

với:

$$|Y(\omega)| = \frac{1}{|Z(\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad G(\omega) = \frac{r}{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad B(\omega) = \frac{-\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Đồ thị biểu diễn sự thay đổi của R , X , $|Y|$, $|Z|$ theo tần số ω được cho trên H.2.26.

Ta rút ra các nhận xét:

Ở tần số:

$$\cdot \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{thì} \quad X = 0;$$

$B = 0$; $\varphi = 0$; Z và Y chỉ có phần thực, dòng $i(t)$ và áp $u(t)$ cùng pha với nhau, hai cực có tính thuần trở. Khi đó ta nói mạch ở trạng thái cộng hưởng và tần số ω_0 gọi là tần số cộng hưởng của mạch (hiện tượng cộng hưởng này gọi là cộng hưởng nối tiếp và sẽ được xét chi tiết trong mục 2.8.2).

$\cdot \quad \omega < \omega_0$ thì $X < 0$; $B > 0$; $\varphi < 0$: ta nói hai cực có dung tính.

$\cdot \quad \omega > \omega_0$ thì $X > 0$; $B < 0$; $\varphi > 0$: hai cực có cảm tính.

Ví dụ 2.3: Tìm dẫn nạp Y , trở kháng Z của mạch gồm r , L , C mắc song song (H.2.27).

Giải. Định luật K1 cho: $\dot{I} = \dot{I}_r + \dot{I}_L + \dot{I}_C$

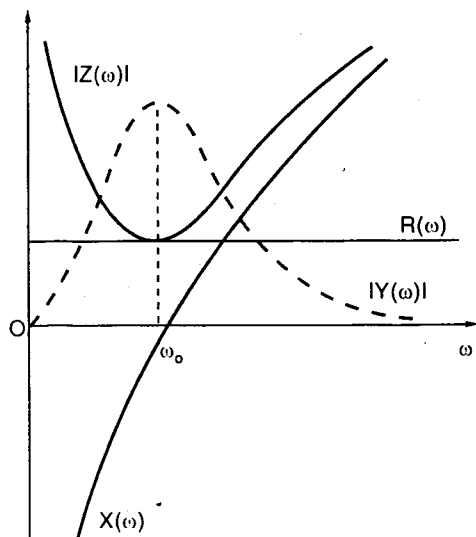
Suy ra dẫn nạp của hai cực:

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{\dot{I}_r}{\dot{U}} + \frac{\dot{I}_L}{\dot{U}} + \frac{\dot{I}_C}{\dot{U}} = \frac{1}{Z_r} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}$$

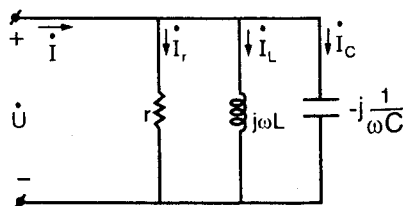
$$\Rightarrow Y = \frac{1}{r} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = g + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Với, $g = \frac{1}{r}$

Vậy: $Y = G + jB = |Y|e^{j\alpha}$,



Hình 2.26: Đồ thị biểu diễn sự thay đổi của R , X , $|Y|$, $|Z|$ theo tần số ω .



Hình 2.27

với: $G(\omega) = g = \text{const}; B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}$

$$|Y(\omega)| = \sqrt{g^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}; \alpha(\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{g}$$

trở kháng: $Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{g + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{g - j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{g^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$

Vậy: $Z = R + jX = |Z| e^{j\varphi}$

với: $R(\omega) = \frac{g}{g^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}; X(\omega) = \frac{-\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{g^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$

$$|Z(\omega)| = \frac{1}{|Y(\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}; \varphi(\omega) = -\alpha(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{g}$$

Đồ thị của $|Y(\omega)|$; $|Z(\omega)|$; $G(\omega)$; $B(\omega)$ theo thứ tự có dạng giống với đồ thị của $|Z(\omega)|$; $|Y(\omega)|$; $R(\omega)$; $X(\omega)$ ở mạch rLC nối tiếp ở ví dụ trước (xem lại H.2.26). Ta cũng có một số nhận xét ở tần số:

• $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ thì $B = 0$; $X = 0$; $\varphi = 0$; Z và Y chỉ có phần thực, $i(t)$

và $u(t)$ cùng pha, mạch có tính thuần trở: ta nói mạch ở trạng thái cộng hưởng và tần số ω_0 gọi là tần số cộng hưởng (hiện tượng cộng hưởng này gọi là cộng hưởng song song và sẽ được xét kỹ ở mục 2.8.3).

• $\omega < \omega_0$ thì $B < 0$; $X > 0$; $\varphi > 0$: hai cực có cảm tính.

• $\omega > \omega_0$ thì $B > 0$; $X < 0$; $\varphi < 0$: hai cực có dung tính.

2.4 CÁC ĐỊNH LUẬT OHM, KIRCHHOFF DẠNG PHỨC

1- Giữa ảnh phức của điện áp và dòng điện của một hai cực không nguồn ta có quan hệ:

$$\dot{U} = Z\dot{I}, \quad \text{hoặc:} \quad \dot{I} = Y\dot{U} \quad (2.46)$$

Các trường hợp riêng với:

- Hai cực là phần tử điện trở R : $Z_R = R \Rightarrow \dot{U} = R\dot{I}$ (2.47a)

- Phần tử điện cảm L : $Z_L = j\omega L \Rightarrow \dot{U} = j\omega L\dot{I}$ (2.47b)

- Phần tử điện dung C : $Z_C = -j\frac{1}{\omega C} \Rightarrow \dot{U} = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}$ (2.47c)

Các biểu thức (2.46), (2.47a, b, c) có thể được xem là sự mở rộng của định luật Ohm trong miền phức: ta gọi chúng là **định luật Ohm dạng phức**.

2- Từ hai định luật Kirchhoff 1 và 2 đối với các đại lượng điện áp, dòng điện tức thời (xem mục 1.6), nếu áp dụng tính chất (2.18) ta suy ra được hai định luật Kirchhoff đối với các ảnh phức điện áp, dòng điện như sau:

Định luật Kirchhoff 1 dạng phức được phát biểu dưới dạng:

Tổng đại số các ảnh phức của các dòng điện vào hoặc ra một nút hoặc một mặt kín bất kỳ thì bằng không.

$$\sum_{\text{nút (mặt kín)}} \pm \dot{I}_k = 0 \quad (2.48)$$

Dấu + hoặc - trong (2.48) được xác định theo cách đối với (1.51) ở mục 1.6.1 chương 1.

Hoặc có thể phát biểu ở dạng khác: *Tổng các ảnh phức của các dòng điện đi vào một nút (mặt kín) bất kỳ thì bằng tổng các ảnh phức các dòng điện đi ra khỏi nút (mặt kín) đó.*

$$\sum_{\substack{\text{vào nút} \\ \text{(mặt kín)}}} \dot{I}_l = \sum_{\substack{\text{ra nút} \\ \text{(mặt kín)}}} \dot{I}_p \quad (2.49)$$

Định luật Kirchhoff 2 dạng phức được phát biểu như sau:

Tổng đại số các ảnh phức của các điện áp trên các phần tử dọc theo tất cả các nhánh trong một vòng bất kỳ thì bằng không.

$$\sum_{\text{vòng}} \pm \dot{U}_k = 0 \quad (2.50)$$

Dấu $\pm$ trong (2.50) được xác định theo cách đối với (1.54) ở chương 1.

Hoặc ở dạng tương đương: *Tổng đại số các ảnh phức sức điện động trong một vòng bằng tổng đại số các ảnh phức của các sụt áp trên các phần tử khác.*

$$\sum_{\text{vòng}} \pm \dot{U}_P = \sum_{\text{vòng}} \pm \dot{E}_l \quad (2.51a)$$

Dấu +, - trong (2.51a) được chọn theo cách đối với (1.57) ở chương 1.

Từ định luật Ohm dạng phức (2.46) ta suy ra có thể viết các phương trình K2 dạng phức theo các biến dòng điện nhánh ở dạng sau:

$$\sum_{\text{vòng}} \pm Z_k \dot{I}_k = \sum_{\text{vòng}} \pm \dot{E}_l \quad (2.51b)$$

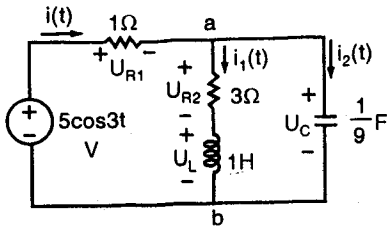
trong đó: dòng $\dot{I}_k$ nào có chiều dương cùng chiều với chiều của vòng thì trước nó sẽ mang dấu +, ngược lại sẽ mang dấu -

Cần nhắc lại rằng, đối với mạch có d nút, n nhánh ta viết được (n-d+1) phương trình độc lập theo định luật K2 và (d-1) phương trình độc lập theo định luật K1.

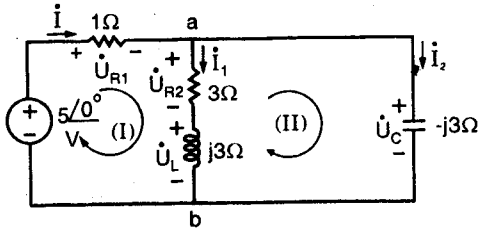
Để tiện lợi cho việc phân tích mạch, người ta thường phức hóa sơ đồ mạch điện. Theo đó trên sơ đồ mạch điện sẽ ghi các biến ảnh phức ví dụ như $\dot{U}$, $\dot{I}$, $\dot{E}$, $\dot{J}$ v.v. (thay vì ghi $u(t)$, $i(t)$, $e(t)$, $j(t)$), và bên cạnh các phần tử như phần tử điện trở, phần tử điện cảm, phần tử điện dung ta ghi kèm giá trị các trở kháng của chúng như R , $j\omega L$, $-j\frac{1}{\omega C}$. Ta gọi đó là sơ đồ phức của mạch điện.

Sau đây ta xét vài ví dụ về phân tích mạch điện xác lập hình sin.

Ví dụ 2.4: Ở mạch H.2.28 tìm dòng điện trong các nhánh $i(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$ và điện áp trên các phần tử $u_{R1}(t)$, $u_{R2}(t)$, $u_L(t)$, $u_C(t)$ ở xác lập.



Hình 2.28



Hình 2.29. Sơ đồ phức

Giải. Tần số góc của nguồn: $\omega = 3 \text{ rad/s}$

Biên độ phức của sức điện động $5\cos 3t$ là: $5\angle 0^\circ \text{ V}$

Trở kháng của các phần tử:

- điện trở 1Ω là 1Ω
- điện trở 3Ω là 3Ω
- điện cảm $1H$ là: $j\omega L = j3 \times 1 = j3\Omega$
- điện dung $\frac{1}{9}F$ là $-j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{3 \times \frac{1}{9}} = -j3\Omega$

Sơ đồ phức được vẽ trên H.2.29, trên đó $\dot{I}$, $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{U}_{R1}$, $\dot{U}_{R2}$, $\dot{U}_L$, $\dot{U}_C$ là các biên độ phức.

Viết định luật K1 cho nút a ta được :

$$\dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0 \quad (1)$$

Viết định luật K2 cho mắt lưới (I) và (II) ta được hai phương trình:

$$\dot{U}_{R1} + \dot{U}_{R2} + \dot{U}_L = 5 \Rightarrow 1\dot{I} + 3\dot{I}_1 + j3\dot{I}_1 = 5 \quad (2)$$

$$-\dot{U}_{R2} - \dot{U}_L + \dot{U}_C = 0 \Rightarrow -3\dot{I}_1 - j3\dot{I}_1 - j3\dot{I}_2 = 0 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \dot{I}_2 = \dot{I} - \dot{I}_1 \quad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta được:

$$j1\dot{I} + \dot{I}_1 = 0 ; \Rightarrow \dot{I}_1 = -j1\dot{I} \quad (5)$$

Thay (5) vào (2) ta được:

$$(4 - j3)\dot{I} = 5 \Rightarrow \dot{I} = \frac{5}{4 - j3} = \frac{5(4 + j3)}{4^2 + 3^2} = 0,8 + j0,6 = 1 \angle 36^\circ 87' \text{ A}$$

$$(5) \Rightarrow \dot{I}_1 = -j1(0,8 + j0,6) = 0,6 - j0,8 = 1 \angle -53^\circ 13' \text{ A}$$

$$(4) \Rightarrow \dot{I}_2 = (0,8 + j0,6) - (0,6 - j0,8) = 0,2 + j1,4 = \sqrt{2} \angle 81^\circ 87' \text{ A}$$

$$\text{Suy ra: } \dot{U}_{R1} = 1\dot{I} = 1 \angle 36^\circ 87' \text{ V}; \quad \dot{U}_{R2} = 3\dot{I}_1 = 3 \angle -53^\circ 13' \text{ V}$$

$$\dot{U}_L = j3\dot{I}_1 = 3 \angle 36^\circ 87' \text{ V}; \quad \dot{U}_C = -j3\dot{I}_2 = 3\sqrt{2} \angle -8^\circ 13' \text{ V}$$

Chuyển sang giá trị tức thời ta được:

$$i(t) = \cos(3t + 36^\circ 87') \text{ A}$$

$$i_1(t) = \cos(3t - 53^\circ 13') \text{ A};$$

$$i_2(t) = \sqrt{2} \cos(3t + 81^\circ 87') \text{ A}$$

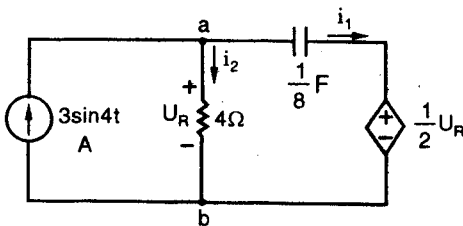
$$u_{R1}(t) = \cos(3t + 36^\circ 87') \text{ V};$$

$$u_{R2}(t) = 3 \cos(3t - 53^\circ 13') \text{ V}$$

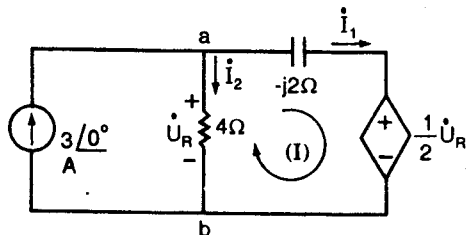
$$u_L(t) = 3 \cos(3t + 36^\circ 87') \text{ V};$$

$$u_C(t) = 3\sqrt{2} \cos(3t - 8^\circ 13') \text{ V}$$

Ví dụ 2.5: Tìm dòng điện trong các nhánh $i_1(t)$, $i_2(t)$ ở xác lập đối với mạch điện H.2.30



Hình 2.30



Hình 2.31

Giải:

Tần số góc $\omega = 4 \text{ rad/s}$

$3\sin 4t \text{ A} \Leftrightarrow$ biên độ phức $3\angle 0^\circ \text{ A}$

$\Rightarrow$ trở kháng của $\frac{1}{8} \text{ F}$ là $-j \frac{1}{4 \times \frac{1}{8}} = -j2\Omega$

Sơ đồ phức cho trên H.2.31

Viết định luật K1 cho nút a: $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 3$ (1)

Viết định luật K2 cho mắt lưới (I): $-j2\dot{I}_1 + \frac{1}{2}\dot{U}_R - 4\dot{I}_2 = 0$ (2)

Thay $\dot{U}_R = 4\dot{I}_2$ vào (2) ta được: $j\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0$ (3)

(1) - (3) $\Rightarrow (1 - j)\dot{I}_1 = 3$

$$\Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{3}{1-j} = \frac{3\angle 0^\circ}{\sqrt{2}\angle -45^\circ} = \frac{3}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó từ (1)} \quad \Rightarrow \dot{I}_2 &= 3 - \dot{I}_1 = 3 - \frac{3}{1-j} = \frac{3-j3-3}{1-j} \\ &= \frac{-j3}{1-j} = \frac{3\angle -90^\circ}{\sqrt{2}\angle -45^\circ} \Rightarrow \dot{I}_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\angle -45^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Suy ra: $i_1(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin(4t + 45^\circ) \text{ A}$

và: $i_2(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin(4t - 45^\circ) \text{ A}$

Tương tự như ở mục 1.7 chương 1, có thể dùng các phép biến đổi tương đương đối với sơ đồ phức của mạch điện để giảm bớt số nút, vòng, nhánh làm cho sơ đồ phức đơn giản hơn, do đó giảm đi số phương trình đại số phức phải giải.

Sau đây là một số phép biến đổi tương đương thông dụng, cách chứng minh chúng cũng hoàn toàn tương tự với cách chứng minh các phép biến đổi tương đương ở mục 1.7. Tuy nhiên, ở đây ta dùng định luật Ohm dạng phức $\dot{U} = Z\dot{I}$ và hai định luật Kirchhoff dạng phức (thay vì là định luật Ohm dạng $u = Ri$ và hai định luật Kirchhoff dạng tức thời).

1- Các nguồn sức điện động mắc nối tiếp sẽ tương đương với một nguồn sức điện động có ảnh phức bằng tổng đại số các ảnh phức sức điện động đó:

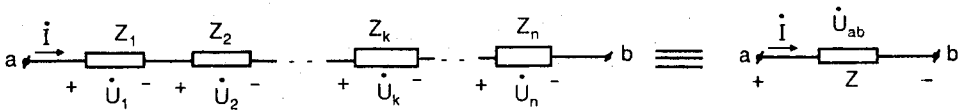
$$\dot{E} = \sum \pm \dot{E}_k \quad (2.52)$$

2- Các nguồn dòng mắc song song sẽ tương đương với một nguồn dòng có ảnh phức bằng tổng đại số các ảnh phức các nguồn dòng đó:

$$\dot{J} = \sum \pm \dot{J}_k \quad (2.53)$$

3- Nối nối tiếp các hai cực thụ động có thể được thay thế bằng một hai cực tương đương có trở kháng bằng tổng các trở kháng của các hai cực thành phần:

$$Z = \sum Z_k \quad (2.54a)$$



Hình 2.32: Nối nối tiếp các hai cực

$$\text{Thật vậy ta có: } \dot{U}_{ab} = \sum_{k=1}^n \dot{U}_k = \sum_{k=1}^n Z_k \dot{I} = \left(\sum_{k=1}^n Z_k \right) \dot{I} \Rightarrow \frac{\dot{U}_{ab}}{\dot{I}} = \sum_{k=1}^n Z_k$$

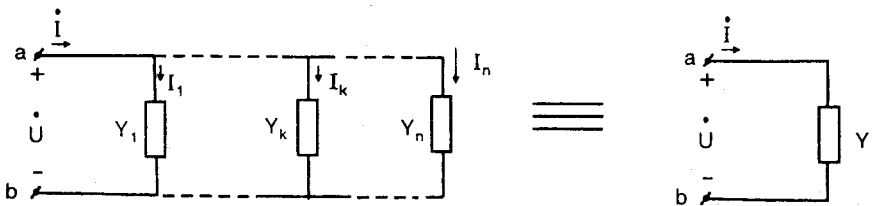
Do đó ta suy ra (2.54a)

Điện áp trên hai cực thứ k :

$$\dot{U}_k = Z_k \dot{I} = \frac{Z_k \dot{U}_{ab}}{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n} \quad (2.54b)$$

4- Nối song song các hai cực thụ động có thể được thay thế bằng một hai cực tương đương có dẫn nạp bằng tổng các dẫn nạp thành phần:

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k \quad (2.55a)$$



Hình 2.33: Nối song song các hai cực

Thật vậy từ H.2.33 ta có:

$$\dot{I} = \sum_{k=1}^n \dot{I}_k = \sum_{k=1}^n Y_k \dot{U} = \left(\sum_{k=1}^n Y_k \right) \dot{U} \Rightarrow \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \sum_{k=1}^n Y_k$$

Do đó ta suy ra được (2.55a)

Dòng điện qua hai cực thứ k là:

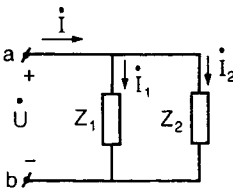
$$\dot{I}_k = Y_k \dot{U} = \frac{Y_k \dot{I}}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n} \quad (2.55b)$$

Trường hợp đơn giản chỉ có hai hai cực mắc song song thì:

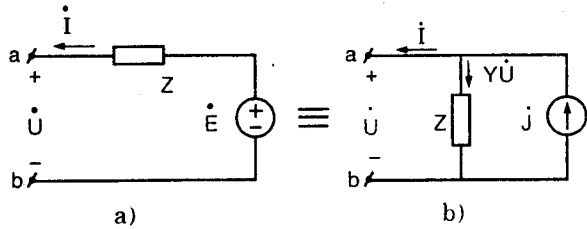
$$Y = Y_1 + Y_2 \text{ hay suy ra: } Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (2.55c)$$

Dòng điện:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{Y_1 \dot{I}}{Y_1 + Y_2} = \frac{Z_2 \dot{I}}{Z_1 + Z_2} \\ \dot{I}_2 &= \frac{Y_2 \dot{I}}{Y_1 + Y_2} = \frac{Z_1 \dot{I}}{Z_1 + Z_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.55d)$$



Hình 2.34

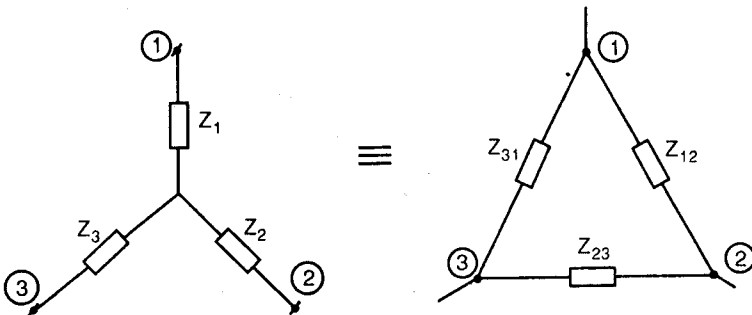


Hình 2.35

5- Hai cực tích cực gồm một phần tử sức điện động $\dot{E}$ mắc nối tiếp với trở kháng Z có thể được thay tương đương bởi một hai cực tích cực gồm một phần tử nguồn dòng $\dot{J}$ mắc song song với trở kháng Z và ngược lại. Trong đó quan hệ giữa $\dot{E}$ và $\dot{J}$ là:

$$\dot{E} = Z \dot{J} \quad (2.56a)$$

hoặc: $\dot{J} = Y \dot{E} \quad (2.56b)$



Hình 2.36

Thật vậy, trong cả hai sơ đồ H.2.35 ta đều có quan hệ:

$$\dot{U} = -Z \dot{I} + \dot{E} \text{ hoặc } \dot{I} = -Y \dot{U} + \dot{J}$$

6- Ba phần tử hai cực thụ động mắc hình sao (Y) có thể được thay tương đương bởi ba phần tử hai cực thụ động mắc tam giác (Δ) và ngược lại.

Chứng minh tương tự như ở mục 1.7 chương 1 ta được:

$$Z_1 = \frac{Z_{31}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \quad Z_3 = \frac{Z_{23}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \quad Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \quad (2.57)$$

$$\text{và: } Z_{23} = Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2Z_3}{Z_1}; \quad Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1Z_2}{Z_3}; \quad Z_{31} = Z_3 + Z_1 + \frac{Z_3Z_1}{Z_2} \quad (2.58)$$

Ví dụ 2.6: Xét mạch điện H.2.37a được kích thích bởi nguồn áp:

$e(t) = E_m \cos(2t + \psi)$, làm việc ở xác lập điều hòa với tần số $\omega = 2\text{rad/s}$

1- Tìm trở kháng tương đương Z_{td} và dẫn nạp tương đương Y_{td} của mạch hai cực bên phải A và B.

2- Tìm $i(t)$ và $i_1(t)$ nếu: $e(t) = 5\cos(2t + 30^\circ) \text{ V}$.

3- Tìm $e(t)$ để cho: $i_1(t) = 3\cos(2t + 45^\circ) \text{ A}$.

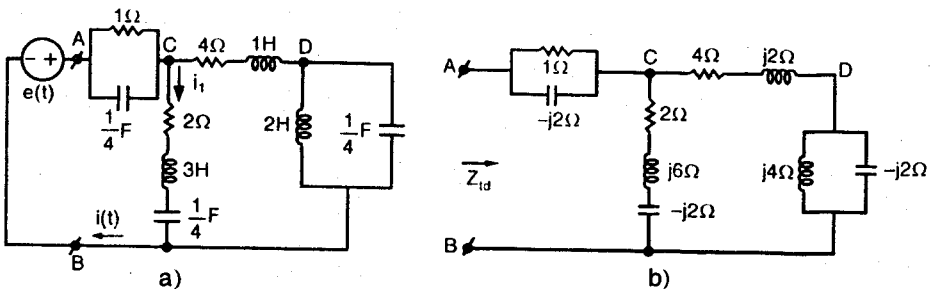
Giải. Tần số góc: $\omega = 2\text{rad/s}$; $e(t) = E_m \cos(2t + \psi)$

$$\Leftrightarrow \dot{E} = E_m \angle \psi \text{ V}$$

$$\frac{1}{4}F \Rightarrow -j \frac{1}{2 \times \frac{1}{4}} = -j2 \Omega$$

$$1H \rightarrow j2 \times 1 = j2 \Omega; \quad 2H \rightarrow j4 \Omega; \quad 3H \rightarrow j6 \Omega$$

Sơ đồ phức như trên H.2.37b



Hình 2.37

1- Trở kháng Z_1 của điện trở 1Ω mắc song song với điện dung $\frac{1}{4}F$ là:

$$Z_1 = \frac{1(-j2)}{1-j2} = \frac{-j2(1+j2)}{5} = \frac{4-j2}{5} \Omega$$

Trở kháng Z_2 của nhánh gồm 2Ω , $3H$ và $\frac{1}{4}F$ mắc nối tiếp là:

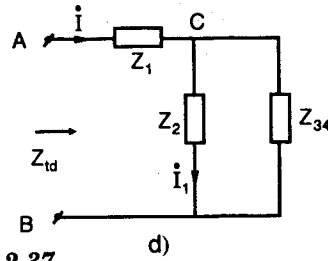
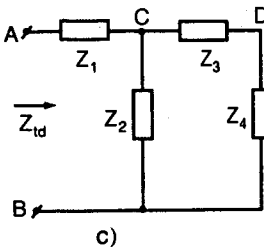
$$Z_2 = 2 + j6 + (-j2) = 2 + j4 \Omega$$

Trở kháng Z_3 của nhánh giữa C và D là $Z_3 = 4 + j2 \Omega$

Trở kháng Z_4 của 2H mắc song song $\frac{1}{4}F$ là:

$$Z_4 = \frac{j4(-j2)}{j4 - j2} = -j4 \Omega$$

Kết quả ta có mạch H.2.37c



Hình 2.37

Z_3 và Z_4 nối tiếp nên tương đương với trở kháng

$$Z_{34} = Z_3 + Z_4 = 4 + j2 - j4 = 4 - j2 \Omega$$

Trên H.2.37d, hai trở kháng Z_2 và Z_{34} mắc song song tương đương với trở kháng:

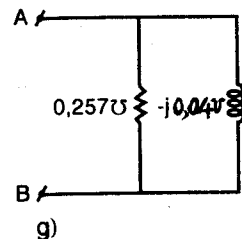
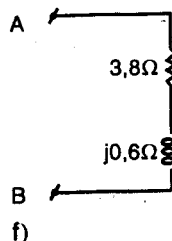
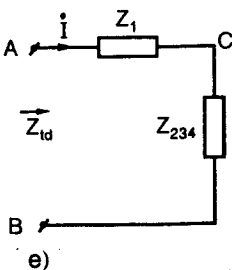
$$Z_{234} = \frac{Z_2 \cdot Z_{34}}{Z_2 + Z_{34}} = \frac{(2 + j4)(4 - j2)}{(2 + j4) + (4 - j2)} = \frac{16 + j12}{6 + j2} = \frac{8 + j6}{3 + j1} = \frac{(8 + j6)3 - j1}{10} = 3 + j1 \Omega$$

Do đó từ H.2.37e suy ra:

$$Z_{td} = Z_1 + Z_{234} = \frac{4}{5} - j\frac{2}{5} + 3 + j1 = 3,8 + j0,6 \Omega = 3,847 \angle 8^\circ 97' \Omega \quad (1)$$

$$\text{và: } Y_{td} = \frac{1}{Z_{td}} = \frac{1}{3,847 \angle 8^\circ 97'} = 0,26 \angle -8^\circ 97' \text{ S} = 0,257 - j0,04 \text{ S} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy ở tần số $\omega = 2 \text{ rad/s}$, mạng hai cực (phần bên trái A và B) của H.2.37a có thể xem như tương đương với điện trở $3,8 \Omega$ nối tiếp với phần tử điện cảm có trở kháng $j0,6 \Omega$ như H.2.37f, hoặc có thể xem như tương đương với phần tử trở có điện dẫn $0,257(\text{S})$ mắc song song với phần tử cảm có dẫn nạp $-j0,04(\text{S})$ như H.2.37g.



Hình 2.37

2- $e(t) = 5\cos(2t + 30^\circ)$ có biên độ phức $\dot{E} = 5\angle 30^\circ$ V

Suy ra:

$$\dot{I} = Y_{td} \dot{E} = \frac{\dot{E}}{Z_{td}} = \frac{5\angle 30^\circ}{3,847\angle 8^\circ 97'} = 1,3\angle 21^\circ 03' \text{ A}$$

$$\Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{CB}}{Z_2} = \frac{Z_{234} \dot{I}}{Z_2} = \frac{Z_{34} \dot{I}}{Z_2 + Z_{34}} = 0,92\angle -23^\circ 97' \text{ A} \quad (3)$$

Vậy: $i(t) = 1,3\cos(2t + 21^\circ 03') \text{ A}$

$$i_1(t) = 0,92\cos(2t - 23^\circ 97') \text{ A}$$

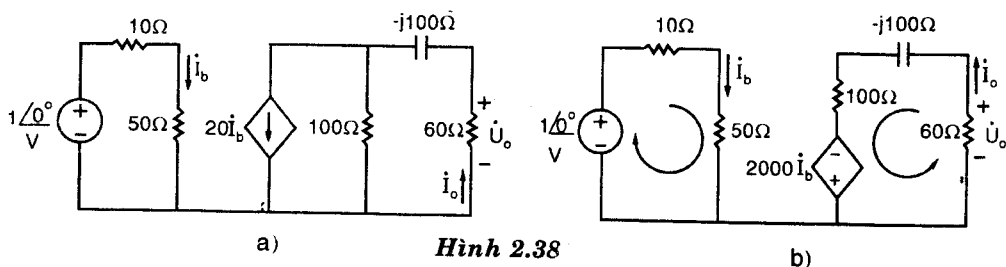
3- $i_1(t) = 3\cos(2t + 45^\circ) \text{ A}$ có biên độ phức là: $\dot{I}_1 = 3\angle 45^\circ \text{ A}$

$$\text{Từ (3) suy ra: } \dot{I} = \frac{Z_2 + Z_{34}}{Z_{34}} \cdot \dot{I}_1 = 4,24\angle 90^\circ \text{ A}$$

do đó: $E = Z_{td} \dot{I} = 3,847\angle 8^\circ 97' \cdot 4,24\angle 90^\circ = 16,3\angle 98^\circ 97' \text{ V}$

vậy: $e(t) = 16,3\cos(2t + 98^\circ 97') \text{ V}$

Ví dụ 2.7: Tìm điện áp ra $\dot{U}_o$ ở mạch điện H.2.38a



Hình 2.38

Giải

Viết định luật K2 cho vòng bên trái suy ra:

$$\dot{I}_b = \frac{1\angle 0^\circ}{10 + 50} = \frac{1}{60} \text{ A}$$

Biến đổi nguồn dòng $20\dot{I}_b$ mắc song song với 100Ω thành nguồn áp $2000\dot{I}_b$ mắc nối tiếp với 100Ω ta được H.2.38b. Từ định luật K2 suy ra:

$$\dot{I}_o = \frac{2000\dot{I}_b}{100 + 60 - j100} \quad (1)$$

Cũng có thể suy ra ngay (1) dùng công thức (2.55d) cho H.2.38a mà không cần biến đổi thành H.2.38b.

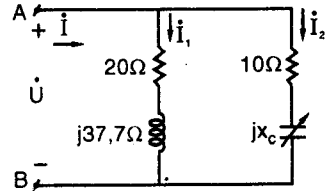
$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \dot{U}_o = -60\dot{I}_o = 10,6\angle -148^\circ \text{ V}$$

Ví dụ 2.8: Xét mạch điện H.2.39. Tần số làm việc là $f = 60\text{Hz}$

a) Xác định giá trị C để dòng $i(t)$ và áp $u(t)$ cùng pha với nhau.

b) Biểu diễn dẫn nạp Y của mạch (nhìn từ hai cực A và B) bằng một vectơ xuất phát từ gốc O trên mặt phẳng phức. Chứng tỏ khi giá trị C thay đổi từ 0 đến ∞ thì đầu mút của vectơ biểu diễn Y sẽ vạch nên một nửa vòng tròn (gọi là đồ thị vòng của Y).

c) Xác định giá trị C để $i(t)$ có biên độ cực tiểu ứng với điện áp vào có biên độ không đổi.



Hình 2.39

Giải. a) Dẫn nạp vào của mạch: $Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = Y_1 + Y_2$

$$\text{trong đó: } Y_1 = \frac{1}{20 + j37,7} = 0,0234\angle -62^\circ = 0,011 - j0,0207 \quad (2)$$

$$Y_2 = \frac{1}{10 + jx_C} = \frac{10 - jx_C}{100 + x_C^2} \quad (3)$$

$$\text{với: } x_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2\pi f C} = -\frac{1}{377C} \quad (4)$$

$\dot{I}$ và $\dot{U}$ cùng pha khi:

$$\text{Im} Y = 0 \Rightarrow \text{Im } Y_2 = -\text{Im } Y_1 \Rightarrow \frac{-x_C}{100 + x_C^2} = 0,0207 \Rightarrow x_C = -46,142 \Omega \quad (5a)$$

$$\text{hoặc } x_C = -2,167 \Omega \quad (5b)$$

$$\text{Từ (4)} \Rightarrow C = 47,59 \mu\text{F}, \text{ hoặc: } C = 1224 \mu\text{F}$$

Tại hai giá trị này của C , Y chỉ có phần thực và mạch được nói là ở trạng thái cộng hưởng.

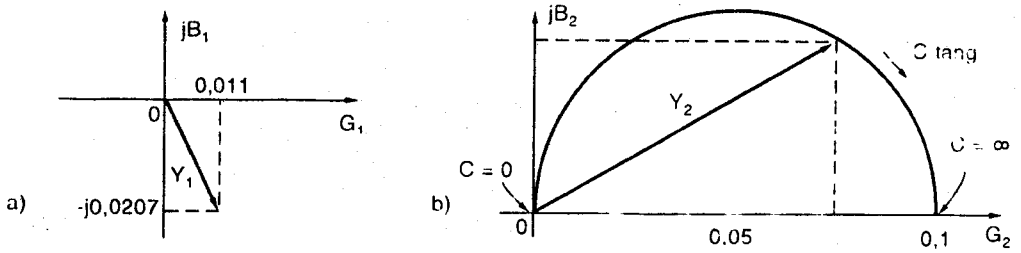
b) Ta có $Y_1 = 0,011 - j0,0207$, do đó Y_1 được biểu diễn bằng một vectơ như trên H.2.40a.

$$Y_2 = \frac{10 - jx_C}{100 + x_C^2} = G_2 + jB_2 \Rightarrow G_2 = \frac{10}{100 + x_C^2} > 0 \quad (6a)$$

$$B_2 = \frac{-x_C}{100 + x_C^2} > 0 \quad (6b)$$

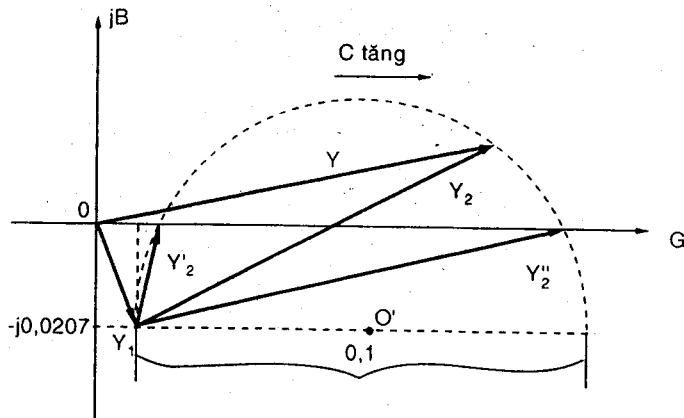
từ (6a) và (6b) suy ra:

$$G_2^2 + B_2^2 = \frac{1}{100 + x_C^2} = \frac{G_2}{10} \Rightarrow (G_2 - 0,05)^2 + B_2^2 = (0,05)^2 \quad (7)$$



Hình 2.40

Từ (7) với chú ý $G_2 > 0$; $B_2 > 0$ suy ra khi C tăng từ 0 đến ∞ , đầu mút vectơ biểu diễn Y_2 sẽ vạch nên nửa vòng tròn tâm $(0,05; 0)$ bán kính 0,05 như trên H.2.40b.

Hình 2.41: Đồ thị vòng của Y

Vì: $Y = Y_1 + Y_2$, nên vectơ biểu diễn Y bằng tổng hình học của hai vectơ biểu diễn Y_1 và Y_2 , do đó kết hợp H.2.40a,b ta được đồ thị H.2.41, đồ thị vòng của Y là nửa vòng tròn tâm $(0,061; -0,0207)$ bán kính 0,05. Trên H.2.41, hai giá trị của C để $i(t)$ và $u(t)$ cùng pha là $47,59\mu F$ và $1224\mu F$ tương ứng với hai giá trị Y_2' và Y_2'' của Y_2 , đầu mút của hai vectơ biểu diễn Y_2' và Y_2'' là giao điểm của đồ thị vòng với trục thực G .

c) Từ đồ thị vòng của Y ta thấy Y sẽ có môđun cực tiểu (do đó biên độ của I cũng cực tiểu) khi vectơ biểu diễn Y vuông góc với đồ thị vòng, nghĩa là khi vectơ Y nằm trên đường thẳng nối gốc O với tâm O' của đồ thị vòng (như H.2.42). Từ H.2.42, ta có:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{0,0207}{0,011 + 0,05} = 18,7^\circ$$

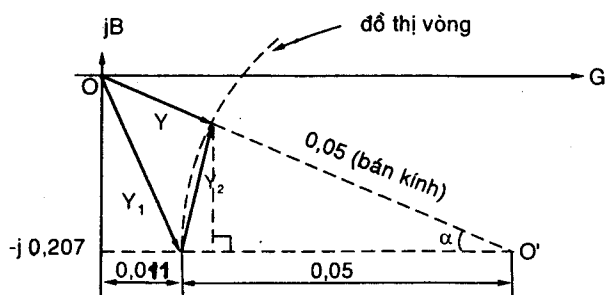
$$\text{Im } Y_2 = 0,05 \sin 18,7^\circ = 0,0161$$

$$\text{Re } Y_2 = 0,05 - 0,05 \cos 18,7^\circ = 0,00265$$

Vậy $Y_2 = 0,00265 + j0,0161 = 0,0163 \angle 80^\circ 6$

$$\Rightarrow Z_2 = \frac{1}{Y_2} = 61,35 \angle -80^\circ 6 = 10 - j60,53$$

Do đó: $-60,53 = x_c = -\frac{1}{377C} \Rightarrow C = 43,8 \mu F$



Hình 2.42

2.5 ĐỒ THỊ VECTO

Các định luật Kirchhoff dạng phức được thành lập ở mục trên là cơ sở để đi đến khái niệm về đồ thị vectơ. Có thể nói, đồ thị vectơ là biểu diễn hình học của quan hệ giữa các biên độ phức (hoặc hiệu dụng phức) dòng và áp trong mạch điện theo các định luật Kirchhoff. Giả sử, do định luật K1, ta có biên độ phức một dòng điện bằng tổng các biên độ phức dòng nào đó thì trên đồ thị vectơ, vectơ biểu diễn dòng này sẽ bằng tổng hình học các vectơ biểu diễn các dòng thành phần. Tương tự trên đồ thị vectơ, vectơ biểu diễn một điện áp (có biên độ phức bằng tổng các biên độ phức điện áp nào đó do hậu quả của định luật K2) sẽ bằng tổng hình học các vectơ biểu diễn các điện áp thành phần.

Ví dụ 1: Hình 2.43 là đồ thị vectơ dòng và áp của mạch r, L, C nối tiếp (H.2.25) trong ba trường hợp:

- Mạch có tính chất cảm
- Mạch có tính chất dung
- Mạch có tính chất thuần trở.

Chọn góc pha ban đầu của $\vec{I}$ bằng 0. Vectơ $\vec{I}$ biểu diễn $\vec{I}$ có suất bằng I_m và góc (trục thực, $\vec{I}$) bằng 0.

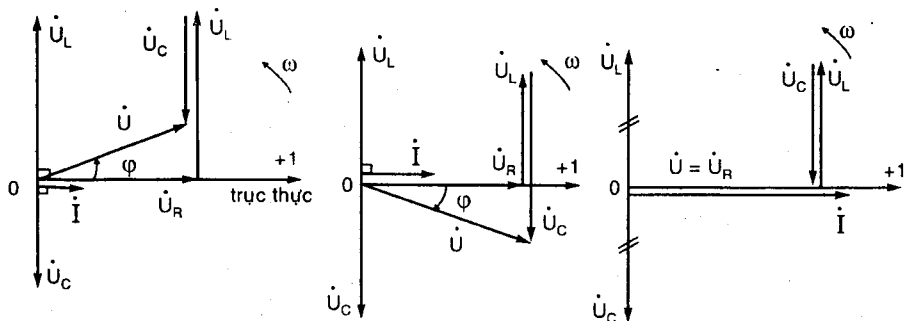
• $\vec{U}_R = r\vec{I} \Rightarrow \vec{U}_R$ cùng pha với $\vec{I}$ và có biên độ rI_m ; vectơ $\vec{U}_R$ biểu diễn $\vec{U}_R$ có suất bằng rI_m và góc $(\vec{I}, \vec{U}_R) = 0$.

• $\dot{U}_L = j\omega L \dot{I} \Rightarrow \dot{U}_L$ nhanh pha hơn $\dot{I}$ góc 90° và có biên độ $\omega L I_m$; vectơ $\vec{U}_L$ biểu diễn $\dot{U}_L$ có suất bằng $\omega L I_m$ và góc $(\vec{I}, \vec{U}_L)$ bằng 90° .

• $\dot{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I} \Rightarrow \dot{U}_C$ chậm pha sau $\dot{I}$ góc 90° và có biên độ $\frac{I_m}{\omega C}$; vectơ $\vec{U}_C$ biểu diễn $\dot{U}_C$ có suất bằng $\frac{I_m}{\omega C}$ và góc $(\vec{I}, \vec{U}_C)$ bằng -90° .

Theo định luật K2: $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$

$\Rightarrow$ vectơ $\vec{U}$ bằng tổng hình học của ba vectơ $\vec{U}_R, \vec{U}_L, \vec{U}_C$.



a) $\varphi > 0$ (cảm tính)

b) $\varphi < 0$ (dung tính)

c) $\varphi = 0$ (thuần trở)

Hình 2.43: Đồ thị vectơ của mạch r, L, C mắc nối tiếp

Hình 2.43a ứng với khi: $|\dot{U}_L| > |\dot{U}_C|$

tức: $\omega > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}: \varphi = (\vec{I}, \vec{U}) > 0$, cảm tính.

Hình 2.43b ứng với: $|\dot{U}_L| < |\dot{U}_C|$

tức: $\omega < \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}: \varphi = (\vec{I}, \vec{U}) < 0$, dung tính.

Hình 2.43c ứng với: $|\dot{U}_L| = |\dot{U}_C|$

tức: $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}: \varphi = (\vec{I}, \vec{U}) = 0$, thuần trở.

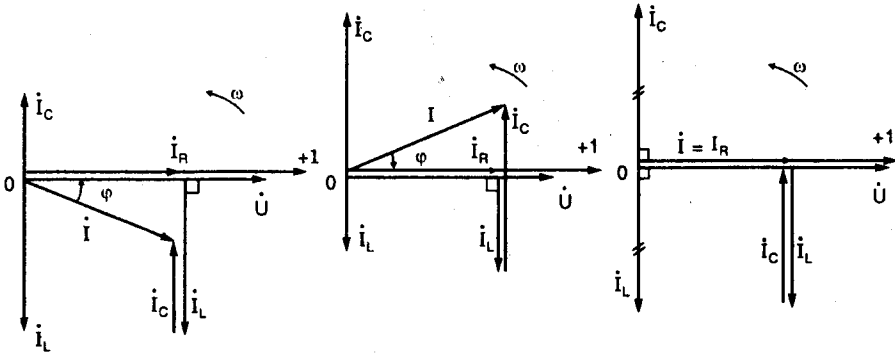
Ví dụ 2: Hình 2.44 là đồ thị vectơ dòng và áp của mạch r, L, C mắc song song (H.2.27). Chọn góc pha ban đầu của $\dot{U}$ bằng 0.

$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{r} \Rightarrow \dot{I}_R$ cùng pha với $\dot{U}$ và có biên độ $\frac{U_m}{r}$ (U_m là biên độ của $\dot{U}$).

$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{j\omega L} \Rightarrow \dot{I}_L$ chậm pha sau $\dot{U}$ một góc 90° và có biên độ $\frac{U_m}{\omega L}$.

$\dot{I}_C = j\omega C \dot{U} \Rightarrow \dot{I}_C$ nhanh pha hơn $\dot{U}$ một góc 90° và có biên độ $\omega C U_m$

Theo định luật K1 : $\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C \Rightarrow$ vectơ biểu diễn $\dot{I}$ bằng tổng của ba vectơ biểu diễn $\dot{I}_R, \dot{I}_L, \dot{I}_C$.



a) $\varphi > 0$ (cảm tính)

b) $\varphi < 0$ (dung tính)

c) $\varphi = 0$ (thuần trở)

Hình 2.44: Đồ thị vectơ của mạch r, L, C mắc song song

Hình 2.44a ứng với: $|\dot{I}_L| > |\dot{I}_C|$

$$\Leftrightarrow \omega < \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} : \text{mạch có tính chất cảm } \varphi = (\vec{I}, \vec{U}) > 0.$$

Ở H.2.44b: $|\dot{I}_L| < |\dot{I}_C|$

$$\Leftrightarrow \omega > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} : \text{mạch có tính chất dung } \varphi = (\vec{I}, \vec{U}) < 0.$$

Khi: $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ thì: $|\dot{I}_L| = |\dot{I}_C|$; $\varphi = (\vec{I}, \vec{U}) = 0$: mạch có tính chất

thuần trở (H.2.44c).

Ví dụ 3: Xét mạch điện H.2.28 và H.2.29

ở ví dụ 2.4, chúng ta đã tính được:

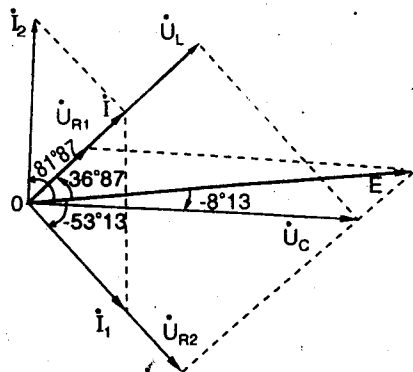
$$\dot{I}_1 = 1 \angle -53^\circ 13 \text{ A}; \quad \dot{I}_2 = \sqrt{2} \angle 81^\circ 87 \text{ A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 1 \angle 36^\circ 87 \text{ A}$$

$$\dot{U}_{R2} = 3 \angle -53^\circ 13 \text{ V}; \quad \dot{U}_L = 3 \angle 36^\circ 87 \text{ V}$$

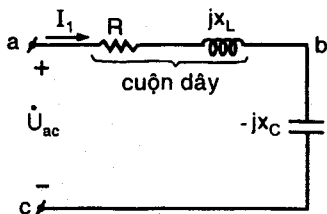
$$\dot{U}_C = \dot{U}_{R2} + \dot{U}_L = 3\sqrt{2} \angle -8^\circ 13 \text{ V}$$

$$\dot{U}_{R1} = 1 \angle 36^\circ 87 \text{ V}; \quad \dot{E} = \dot{U}_{R1} + \dot{U}_C = 5 \angle 0^\circ \text{ V}.$$

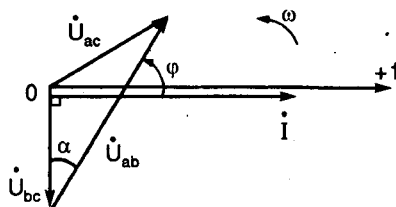


Hình 2.45

Ví dụ 4: Xét mạch điện như H.2.46, đo được: $I = 2\text{A}$; $U_{ac} = 100\text{V}$; $U_{ab} = 173\text{V}$; $U_{bc} = 100\text{V}$ (hiệu dụng). Vẽ đồ thị vectơ biểu diễn $i(t)$, $u_{ac}(t)$, $u_{ab}(t)$ và $u_{bc}(t)$. Suy ra giá trị R và x_L của cuộn dây.



Hình 2.46



Hình 2.47

Giải. Trong bài này ta sử dụng hiệu dụng phức. Chọn pha ban đầu của $i(t)$ bằng 0. Biết hiệu dụng $I = 2\text{A}$ ta vẽ được vectơ biểu diễn $\dot{I}$ trên đồ thị (H.2.47). Điện áp $u_{bc}(t)$ trên điện dung có hiệu dụng $U_{bc} = 100\text{V}$, chậm pha so với dòng $i(t)$ một góc 90° . Theo định luật K2: $\dot{U}_{ac} = \dot{U}_{ab} + \dot{U}_{bc}$ nên các vectơ biểu diễn chúng tạo thành một tam giác có ba cạnh là:

$$U_{bc} = 100\text{V}; U_{ab} = 173\text{V}; U_{ac} = 100\text{V}$$

dùng compa ta vẽ được các vectơ biểu diễn $\dot{U}_{ac}$ và $\dot{U}_{ab}$ như hình vẽ. Chú ý rằng góc $\varphi = (\vec{I}, \vec{U}_{ab})$ phải thỏa $|\varphi| \leq 90^\circ$. Ta có:

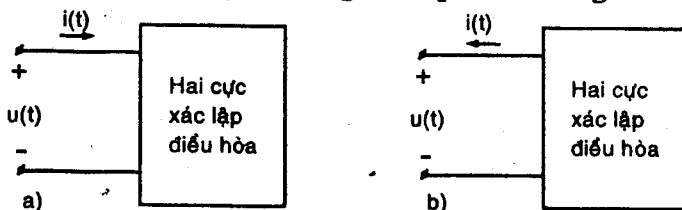
$$\cos \alpha = \frac{U_{ac}^2 - U_{bc}^2 - U_{ab}^2}{-2U_{ab}U_{bc}} = 0,865 \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \varphi = 60^\circ \Rightarrow \dot{U}_{ab} = 173 \angle 60^\circ \text{ V}$$

$$\text{Do đó: } R + jX_L = \frac{\dot{U}_{ab}}{\dot{I}} = \frac{173 \angle 60^\circ}{2 \angle 0^\circ} = 86,5 \angle 60^\circ = 43,25 + j75 \Omega$$

Suy ra : $R = 43,25 \Omega$ và $x_L = 75 \Omega$.

2.6 CÔNG SUẤT

2.6.1 Công suất tác dụng và công suất phản kháng



Hình 2.48

Xét mạng hai cực H.2.48. Dòng điện và điện áp ở hai cực là:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \Psi_i); \quad u(t) = U_m \cos(\omega t + \Psi_u)$$

Công suất tức thời:

$$p(t) = u(t) i(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \Psi_u) \cos(\omega t + \Psi_i) \quad (2.59)$$

nếu chiều dương dòng và áp được chọn như H.2.48a thì $p(t)$ là công suất tức thời thu bởi hai cực, còn với chiều dương dòng và áp như H.2.48b thì $p(t)$ là công suất tức thời mà hai cực cung cấp cho mạch ngoài.

Biểu thức (2.59) có thể được viết lại như sau:

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\Psi_u - \Psi_i) + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \Psi_u + \Psi_i) \quad (2.60)$$

Biểu thức (2.60) chứng tỏ công suất tức thời có hai thành phần:

- Thành phần không đổi: $\frac{1}{2} U_m I_m \cos(\Psi_u - \Psi_i)$
- Thành phần xoay chiều: $\frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \Psi_u + \Psi_i)$

biến thiên hình sin với tần số 2ω bằng hai lần tần số của điện áp và dòng điện. Giá trị trung bình của công suất tức thời trong một chu kỳ là:

$$\frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\Psi_u - \Psi_i) \quad (2.61)$$

tức là bằng thành phần không đổi, bởi vì giá trị trung bình của thành phần xoay chiều trong một chu kỳ bằng không.

Công suất trung bình này được gọi là công suất tác dụng P :

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\Psi_u - \Psi_i) = UI \cos(\Psi_u - \Psi_i) \quad (w) \quad (2.62)$$

trong đó: U, I - là các trị hiệu dụng:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Công suất phản kháng, ký hiệu là Q , được định nghĩa bởi biểu thức sau:

$$Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin(\Psi_u - \Psi_i) = UI \sin(\Psi_u - \Psi_i) \quad (VAr) \quad (2.63)$$

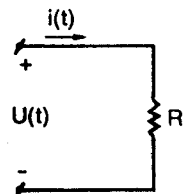
VAr : đơn vị đo của công suất phản kháng (*voltamperes reactive*).

Ta xét một số trường hợp riêng:

Hai cực là phần tử điện trở (H.2.49)

Vì: $\Psi_u = \Psi_i = \Psi$ nên (2.60) trở thành:

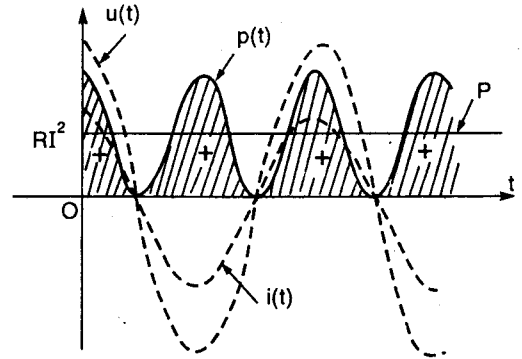
$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + 2\Psi) = RI^2 \{1 + \cos(2\omega t + 2\Psi)\} \quad (2.64)$$



Hình 2.49

Công suất tức thời không âm (≥ 0) nên năng lượng điện luôn luôn được đưa từ ngoài vào phần tử điện trở, không có quá trình ngược lại (nghĩa là đưa từ phần tử điện trở ra ngoài). Toàn bộ năng lượng được đưa vào phần tử điện trở bị tiêu tán đi, do đó điện trở là hai cực tổn hao.

Từ H.2.50 ta thấy công suất tức thời dao động với tần số 2ω (gấp đôi tần số áp dòng) xung quanh giá trị trung bình $\frac{1}{2}U_m I_m = RI^2$.



Hình 2.50: Công suất tức thời trên điện trở R . (chọn $\psi_u = \psi_i = 0$)

Công suất tác dụng trên phần tử điện trở R , theo định nghĩa (2.62) là:

$$P = \frac{1}{2}U_m I_m = UI = \frac{1}{2}RI_m^2 = RI^2 \quad (2.65)$$

trong đó: $U_m = RI_m$; $U = RI$

Công suất phản kháng trên phần tử điện trở bằng 0, theo định nghĩa (2.63).

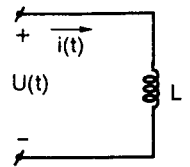
Hai cực là phần tử điện cảm (H.2.51):

Ta có: $\Psi_u - \Psi_i = \frac{\pi}{2}$; $U_m = \omega LI_m = x_L I_m$ nên (2.60) trở thành:

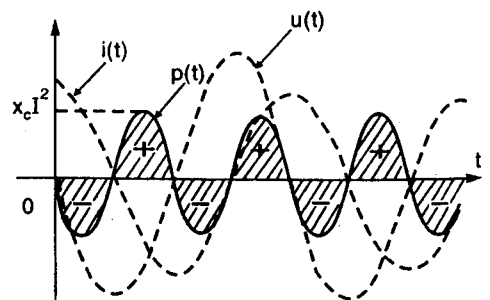
$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2}U_m I_m \cos(2\omega t + 2\Psi_i + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}U_m I_m \sin(2\omega t + 2\Psi_i) \\ p(t) &= -x_L I^2 \sin(2\omega t + 2\Psi_i) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Thành phần không đổi bằng không, do đó công suất tác dụng, nghĩa là công suất trung bình trong một chu kỳ, bằng không.

Công suất tức thời dao động với tần số 2ω quanh giá trị 0 (H.2.52). Có thể thấy rằng cứ sau $1/4$ chu kỳ của dòng hoặc áp thì dấu của công suất lại đổi một lần. Giả sử trong $1/4$ chu kỳ này, $p(t) > 0$ nghĩa là năng lượng được đưa từ bên ngoài vào phần tử



Hình 2.51



Hình 2.52: Công suất tức thời trên điện cảm L . (Chọn $\psi_i = 0$)

điện cảm và được tích lũy dưới dạng năng lượng từ trường thì trong 1/4 chu kỳ kế tiếp $p(t)$ lại âm, khi đó năng lượng từ trường lại được phóng ra ngoài. Quá trình tích phóng năng lượng xảy ra một cách chu kỳ. Như vậy phần tử điện cảm có khả năng tích lũy năng lượng và trong nó không có hiện tượng tiêu tán nhiệt năng, nghĩa là phần tử L là phần tử không tổn hao.

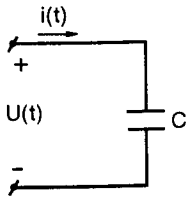
Công suất phản kháng trên phần tử L , theo (2.63) là:

$$Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \frac{\pi}{2}$$

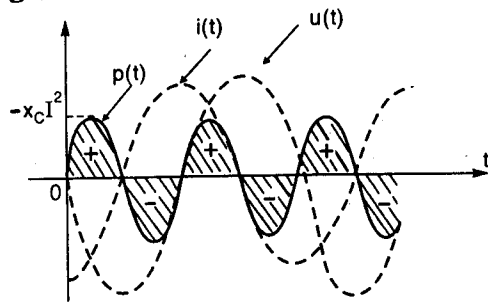
$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2} U_m I_m = UI = \frac{1}{2} x_L I_m^2 = x_L I^2 > 0 \quad (2.67)$$

Công suất phản kháng bằng biên độ dao động của công suất tức thời $p(t)$, vì vậy nó là đại lượng đo cường độ của quá trình tích phóng năng lượng từ trường ở phần tử điện cảm.

Hai cực là phần tử điện dung (H.2.54)



Hình 2.53



Hình 2.54: Công suất tức thời trên điện dung C (chọn $\psi_i = 0$)

Ta có: $\Psi_i - \Psi_u = \frac{\pi}{2}; U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = -x_C I_m$

do đó theo (2.60)

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + 2\Psi_i - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} U_m I_m \sin(2\omega t + 2\Psi_i)$$

$$p(t) = -x_C I^2 \sin(2\omega t + 2\Psi_i) \quad (2.68)$$

Do đó cũng giống như ở phần tử điện cảm, đối với phần tử điện dung công suất tác dụng cũng bằng không, nghĩa là trong nó không có hiện tượng tiêu tán năng lượng mà chỉ xảy ra hiện tượng tích phóng năng lượng điện trường một cách chu kỳ.

Công suất tức thời dao động với tần số 2ω quanh giá trị 0, biên độ dao động (H.2.54) là:

$$\frac{1}{2} U_m I_m = -\frac{1}{2} x_C I_m^2 = -x_C I^2$$

Công suất phản kháng trên phần tử C, theo (2.63) bằng:

$$Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

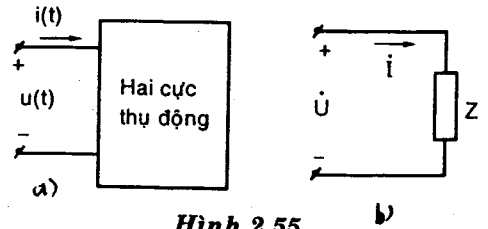
$$\Rightarrow Q = -\frac{1}{2} U_m I_m = -UI = \frac{1}{2} x_C I_m^2 = x_C I^2 < 0 \quad (2.69)$$

Vậy công suất phản kháng của phần tử điện dung C thì âm và trị tuyệt đối của nó bằng biên độ dao động của công suất tức thời $p(t)$, do đó nó đo cường độ của quá trình tích phóng năng lượng điện trường ở phần tử điện dung.

Hai cực là hai cực thụ động (H.2.55a) không chứa các phần tử tích cực như các nguồn áp, nguồn dòng (độc lập cũng như phụ thuộc). Trường hợp này ở chế độ xác lập hình sin hai cực có thể được đặc trưng bởi trở kháng Z:

$$Z = R + jX = |Z|e^{j\varphi}$$

và dẫn nạp: $Y = G + jB = |Y|e^{-j\varphi}$



Hình 2.55

với: $R \geq 0; \quad G \geq 0; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

ta có: $\Psi_u - \Psi_i = \varphi; \quad \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = |Z|; \quad \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U} = |Y|$

Công suất tác dụng, tức công suất trung bình trong một chu kỳ cung cấp cho hai cực, theo (2.62) là:

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi = UI \cos \varphi \quad (2.70)$$

vi $U_m = |Z| I_m; \quad U = |Z| I$ nên: $P = \frac{1}{2} |Z| I_m^2 \cos \varphi = |Z| I^2 \cos \varphi$

thay: $R = |Z| \cos \varphi$ ta được:

$$P = \frac{1}{2} R I_m^2 = R I^2 \quad (2.71)$$

nếu trong (2.70) thay $I_m = |Y| U_m$, sau đó dùng biểu thức $G = |Y| \cos \varphi$ ta được:

$$P = \frac{1}{2} G U_m^2 = G U^2 \quad (2.72)$$

Hệ số $\cos \varphi$ trong (2.70) có tên gọi là hệ số công suất, nó có ý nghĩa quan trọng trong kỹ thuật mà chúng ta sẽ nói sau này.

Nếu hai cực là thuần kháng ($\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, $R = 0$) thì $P = 0$.

Có thể chứng minh (xem mục 3.6.5 chương 3) rằng công suất tác dụng của hai cực bằng tổng các công suất tác dụng của các phần tử bên trong hai cực (ở đây là các phần tử điện trở). Công suất tác dụng của hai cực liên quan đến sự có mặt của các phần tử điện trở, nó đo cường độ của quá trình tiêu tán.

Công suất phản kháng được định nghĩa bởi (2.63) là:

$$Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi = UI \sin \varphi \quad (2.73)$$

chú ý rằng: $U_m = |Z| I_m$; $|Z| \sin \varphi = X$

ta được:
$$Q = \frac{1}{2} X I_m^2 = X I^2 \quad (2.74)$$

tương tự nếu trong (2.73) thay $I_m = |Y| U_m$, rồi thay: $|Y| \sin \varphi = -B$ ta được:

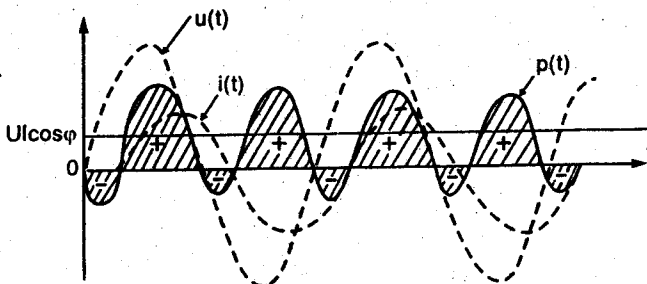
$$Q = -\frac{1}{2} B U_m^2 = -B U^2 \quad (2.75)$$

nếu hai cực: - là thuần trở: ($\varphi = 0$, $X = 0$, $B = 0$): $Q = 0$
 - có tính chất cảm: ($\varphi > 0$, $X > 0$, $B < 0$): $Q > 0$
 - có dung tính: ($\varphi < 0$, $X < 0$, $B > 0$): $Q < 0$.

Có thể chứng minh được rằng (xem ở mục 3.6.5 chương 3), công suất phản kháng của hai cực bằng tổng các công suất phản kháng của các phần tử bên trong hai cực (ở đây là các phần tử điện cảm, điện dung). Công suất phản kháng của hai cực liên quan đến sự tồn tại của các phần tử điện kháng là điện cảm và điện dung, nó đo một cách toàn cục cường độ của quá trình tích phóng năng lượng điện từ trường trong các phần tử điện kháng đó.

Công suất tức thời, theo (2.60) là:

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + 2\Psi_i + \varphi) \quad (2.76)$$



Hình 2.56: Công suất tức thời trên hai cực

Hình 2.56 là đồ thị biểu diễn $p(t)$. Công suất tức thời dao động với tần số 2ω quanh giá trị trung bình $UI\cos\varphi$.

Biểu thức (2.76) của công suất tức thời $p(t)$ có thể viết lại ở dạng sau:

$$p(t) = \frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi + \frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi \cos(2\omega t + 2\Psi_i) - \frac{1}{2}U_m I_m \sin\varphi \sin(2\omega t + 2\Psi_i)$$

$$p(t) = \frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi \{1 + \cos(2\omega t + 2\Psi_i)\} - \frac{1}{2}U_m I_m \sin\varphi \sin(2\omega t + 2\Psi_i)$$

$$\text{Suy ra: } p(t) = RI^2 \{1 + \cos(2\omega t + 2\Psi_i)\} - XI^2 \sin(2\omega t + 2\Psi_i) \quad (2.77)$$

So sánh với (2.64), (2.66) và (2.68) ta thấy số hạng đầu tiên ở vế phải của (2.77) luôn dương là công suất tức thời trên điện trở tương đương R của hai cực; còn số hạng thứ hai ở vế phải của (2.77) là công suất tức thời trên điện kháng tương đương X của hai cực, nó dao động hình sin tần số 2ω với biên độ $|X|I^2$ mà là trị tuyệt đối của công suất phản kháng của hai cực.

2.6.2 Công suất biểu kiến

Công suất biểu kiến của hai cực H.2.48, ký hiệu là $|S|$ và được định nghĩa là:

$$|S| = \frac{1}{2}U_m I_m = UI \quad (2.78)$$

Từ (2.62) và (2.63) ta có:

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (2.79)$$

Đơn vị đo của công suất biểu kiến là VA (*volt amperes*).

$$\text{ta có: } P = |S| \cos(\Psi_u - \Psi_i) \quad (2.80a)$$

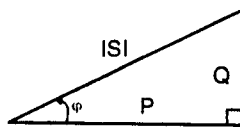
$$Q = |S| \sin(\Psi_u - \Psi_i) \quad (2.80b)$$

với hai cực thụ động H.2.55 đặc trưng bởi trở kháng $Z = |Z|e^{j\varphi}$ thì:

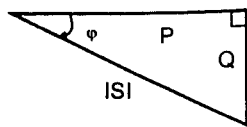
$$P = |S| \cos\varphi \quad (2.81a)$$

$$Q = |S| \sin\varphi \quad (2.81b)$$

Các quan hệ (2.81a), (2.81b) có thể được minh họa bằng đồ thị bởi một tam giác vuông như H.2.57 gọi là tam giác công suất.



a) $\varphi > 0, Q > 0$;



b) $\varphi < 0, Q < 0$

2.6.3 Công suất phức

Hình 2.57: Tam giác công suất

Để tiện lợi cho việc tính toán công suất, người ta định nghĩa khái

niệm công suất phức S bởi biểu thức sau:

$$S = P + jQ \quad (2.82)$$

thay P và Q bởi (2.80a), (2.80b) ta được:

$$\begin{aligned} S &= S (\cos(\Psi_u - \Psi_i) + j \sin(\Psi_u - \Psi_i)) \\ S &= |S| \angle \Psi_u - \Psi_i \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\text{Vì:} \quad |S| = \frac{1}{2} U_m I_m$$

$$\text{nên:} \quad S = \frac{1}{2} U_m I_m \angle \Psi_u - \Psi_i = \frac{1}{2} U_m \angle \Psi_u \cdot I_m \angle -\Psi_i$$

$$\text{Do đó:} \quad S = \frac{1}{2} \dot{U} \dot{I} \quad (2.84)$$

trong đó: $\dot{U}$ - là biên độ phức điện áp.

$\dot{I}$ - là biên độ phức liên hợp của dòng điện.

Sau đây ta xét vài ví dụ về tính toán công suất.

Ví dụ 2.9: Xét mạch điện H.2.28 (ví dụ 2.4 mục 2.4). Tính công suất tác dụng, công suất phản kháng của mỗi phần tử trong mạch.

Giải. Chúng ta đã tính được biên độ phức dòng điện qua các phần tử:

$$\dot{I}_1 = 1 \angle -53^\circ 13A; \quad \dot{I}_2 = \sqrt{2} \angle 81^\circ 87A; \quad \dot{I} = 1 \angle 36^\circ 87A = \frac{4+j3}{5} A$$

- Đối với phần tử điện trở 1Ω , công suất phản kháng bằng 0 còn công suất tác dụng, theo (2.65) là: $P_1 = 1 \cdot \frac{I_m^2}{2} = 1 \cdot \frac{(1)^2}{2} = 0,5w$.

- Đối với phần tử điện trở 3Ω , công suất phản kháng cũng bằng 0 còn công suất tác dụng là: $P_2 = 3 \cdot \frac{I_{1m}^2}{2} = 3 \cdot \frac{(1)^2}{2} = 1,5w$.

- Công suất phản kháng của phần tử điện cảm $1H$ (có trở kháng $j3\Omega$), theo (2.67) là: $Q_1 = 3 \cdot \frac{I_{1m}^2}{2} = 3 \cdot \frac{(1)^2}{2} = 1,5VAr$, còn công suất tác dụng bằng 0.

- Công suất phản kháng của phần tử điện dung $\frac{1}{9}F$ (có trở kháng $-j3\Omega$), theo (2.69) là: $Q_2 = -3 \cdot \frac{I_{2m}^2}{2} = -3 \cdot \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = -3 VAr$, còn công suất tác dụng bằng 0.

Công suất phức cung cấp bởi nguồn áp $\dot{E} = 5v$, theo (2.84) là:

$$S_f = \frac{1}{2} \dot{E} \dot{I} = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{4-j3}{5} = 2 - j1,5 \text{ VA}$$

Suy ra công suất tác dụng cung cấp bởi nguồn là:

$$P_f = \text{Re} S_f = 2 \text{ W}$$

và công suất phản kháng: $Q_f = \text{Im} S_f = -1,5 \text{ VAR}$

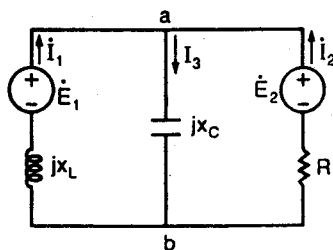
Để tính $P_f (Q_f)$ cũng có thể dùng công thức 2.62 (2.63) :

$$P_f = \frac{1}{2} E_m I_m \cos(\psi_e - \psi_i) = \frac{1}{2} \times 5 \times 1 \cos(0 - 36^\circ 87') = 2 \text{ W}$$

$$Q_f = \frac{1}{2} E_m I_m \sin(\psi_e - \psi_i) = \frac{1}{2} \times 5 \times 1 \sin(0 - 36^\circ 87') = -1,5 \text{ VAR}$$

có thể nghiệm lại: $P_f = P_1 + P_2$ và $Q_f = Q_1 + Q_2$

Trường hợp tổng quát ta có: Trong một mạch điện, tổng các công suất tác dụng (công suất phản kháng) cung cấp bởi các nguồn bằng tổng các công suất tác dụng (công suất phản kháng) nhận bởi các phần tử khác.



Hình 2.58a

Đó là nội dung của định lý cân bằng công suất (sẽ được chứng minh trong mục 3.6.5 ở chương 3).

Ví dụ 2.10: Xét mạch điện H.2.58a. Cho biết $X_L = 10\Omega$; $\dot{I}_1 = 12,7 \angle -78^\circ 45' \text{ A}$, công suất phức phát bởi hai nguồn $\dot{E}_1$ và $\dot{E}_2$ là:

$$S_1 = 259 + j1250 \text{ VA}; S_2 = 375 + j125 \text{ VA}.$$

Tìm $\dot{E}_1$, $\dot{E}_2$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$, x_C và R .

Giải. Trong bài này ta sử dụng hiệu dụng phức.

Nguồn áp $\dot{E}_1$ có:

- Công suất tác dụng: $P_{f1} = \text{Re} S_1 = 259 \text{ W}$

- Công suất phản kháng: $Q_{f1} = \text{Im} S_1 = 1250 \text{ VAR}$

Đặt $\dot{E}_1 = E_1 \angle \psi_{e1}$ ta có: $\varphi_1 = \psi_{e1} - \psi_{i1} = \tan^{-1} \frac{Q_{f1}}{P_{f1}} = 78^\circ 30'$

$$\Rightarrow \psi_{e1} = \varphi_1 + \psi_{i1} = 78^\circ 30' + (-78^\circ 45') = -0^\circ 15'$$

và
$$E_1 = \frac{P_{f1}}{I_1 \cos \varphi_1} = \frac{259}{12,7 \cos 78^\circ 30'} = 100,5 \text{ V}$$

Do đó: $\dot{E}_1 = 100,5 \angle -0^\circ 15' \text{ V}$

Điện áp giữa hai nút a và b là: $\dot{U}_{ab} = \dot{E}_1 - jx_L \dot{I}_1$

$$= 100,5 \angle -0^\circ 15' - 10 \angle 90^\circ \cdot 12,7 \angle -78^\circ 45'$$

$$= -23,93 - j25,7V = 35,116 \angle -133^\circ V$$

Theo luật cân bằng công suất phản kháng:

$$Q_{f1} + Q_{f2} = Q_C + Q_L \Rightarrow Q_C = Q_{f1} + Q_{f2} - Q_L = \text{Im}S_1 + \text{Im}S_2 - x_L I_1^2$$

$$Q_C = 1250 + 125 - 10(12,7)^2 = -237,9 \text{ VAR}$$

Mặt khác:

$$Q_C = x_C I_3^2 = x_C \left(\frac{U_{ab}}{-x_C} \right)^2 = \frac{U_{ab}^2}{x_C}$$

$$\Rightarrow x_C = \frac{U_{ab}^2}{Q_C} = \frac{(35,116)^2}{-237,9} \Rightarrow x_C = -5,18 \Omega$$

Do đó dòng điện $\dot{I}_3$ chảy qua tụ là:

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{jx_C} = \frac{35,166 \angle -133^\circ}{5,18 \angle -90^\circ}$$

$$\dot{I}_3 = 6,78 \angle -43^\circ A$$

Dòng $\dot{I}_2$ cung cấp bởi nguồn áp $\dot{E}_2$ là:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_3 - \dot{I}_1 = 6,78 \angle -43^\circ - 12,7 \angle -78^\circ 45'$$

$$\dot{I}_2 = 2,42 + j7,82 = 8,19 \angle 72^\circ 8' A$$

Theo luật cân bằng công suất tác dụng ta được công suất tiêu tán trong R là:

$$P_R = RI_2^2 = P_{f1} + P_{f2} = \text{Re}S_1 + \text{Re}S_2 = 259 + 375 = 634 \text{ W}$$

suy ra:

$$R = \frac{634}{(8,19)^2} = 9,45 \Omega$$

Cuối cùng:

$$\dot{E}_2 = \dot{U}_{ab} + R\dot{I}_2 = -23,93 - j25,7 + 9,45(2,42 + j7,82)$$

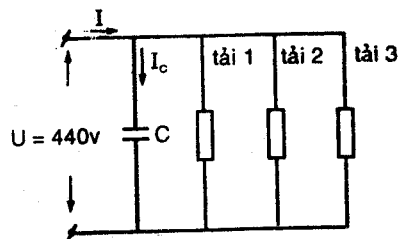
$$\Rightarrow \dot{E}_2 = -1,06 + j48,2 = 48,21 \angle 91^\circ V$$

Ví dụ 2.11: Nguồn điện hình sin tần số 50 Hz, điện áp 440V (hiệu dụng) cung cấp cho ba tải mắc song song: tải một có công suất (biểu kiến) 10 KVA và hệ số công suất là 0,7 (vượt); tải hai có công suất (tác dụng) 15KW và hệ số công suất 0,5 (chậm); và tải ba thuần trở có công suất 5KW (H.2.58b).

a) Xác định dòng điện (hiệu dụng) tổng trên đường dây và hệ số công suất của hệ (gồm ba tải).

b) Để nâng hệ số công suất của hệ lên 0,9 (chậm), người ta mắc song song một tụ điện có điện dung C. Xác định C và dòng điện tổng trên đường dây (sau khi mắc tụ).

Giải. a) Tải một có hệ số công suất 0,7 (vượt) nghĩa là có tính chất dung, công suất



Hình 2.58b

tác dụng và công suất phản kháng của nó là:

$$P_1 = 10.000 \times 0,7 = 7000 \text{ W}$$

$$Q_2 = 10.000 \sin(-\cos^{-1} 0,7) = -7141 \text{ VAR}$$

Tải hai có hệ số công suất 0,5 (chậm) nghĩa là có tính chất cảm:

$$P_2 = 15 \text{ KW} = 15.000 \text{ W}$$

$$Q_2 = 15.000 \tan(\cos^{-1} 0,5) = 25981 \text{ VAR}$$

Tải ba thuần trở nên: $Q_3 = 0 \text{ VAR}$; $P_3 = 5 \text{ KW} = 5000 \text{ W}$

Công suất tác dụng và công suất phản kháng của hệ:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 27000 \text{ W}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 18840 \text{ VAR} > 0$$

$$\Rightarrow \text{Công suất biểu kiến: } |S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = 32923 \text{ VA}$$

$$\text{Do đó dòng điện tổng trên đường dây là: } I = \frac{|S|}{U} = \frac{32923}{440} = 74,8 \text{ A}$$

$$\text{Hệ số công suất của hệ: } \cos \varphi = \frac{P}{|S|} = 0,82 \text{ (chậm).}$$

b) Gọi Q_C là công suất phản kháng của tụ điện.

Giả sử bỏ qua tổn hao trong tụ điện, xem như công suất tác dụng của tụ là $P_C = 0$.

Công suất tác dụng của hệ:

$$P' = P_1 + P_2 + P_3 + P_C = 27000 \text{ W}$$

Công suất phản kháng của hệ:

$$Q' = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_C = 18840 + Q_C$$

Mặt khác sau khi mắc tụ, hệ số công suất của hệ là 0,9 (chậm) nên:

$$Q' = P' \tan(\cos^{-1} 0,9) = 13561 \text{ Var}$$

Do đó:

$$Q_C = Q' - 18840 = -5279 \text{ Var}$$

Theo (2.69) ta có:

$$Q_C = -UI_C = -\omega CU^2 = -2\pi f CU^2$$

$$\Rightarrow C = \frac{-Q_C}{2\pi f U^2} = 86,8 \mu\text{F} \text{ với } f = 50 \text{ Hz}$$

Công suất biểu kiến của hệ (gồm 3 tải và tụ):

$$|S| = \frac{P'}{0,9} = \frac{27000}{0,9} = 30000 \text{ VA}$$

Suy ra dòng điện tổng trên đường dây sau khi mắc tụ:

$$I' = \frac{|S'|}{U} = \frac{30000}{440} = 68,2 \text{ A (hiệu dụng)}$$

Ta thấy sau khi mắc tụ điện, dòng điện trên đường dây giảm từ 74,8A xuống 68,2A.

Hệ số công suất $\cos\varphi$ của tải có ý nghĩa quan trọng về mặt kinh tế và kỹ thuật: $\cos\varphi$ của tải càng cao (càng gần 1) thì khi truyền tải điện năng từ nguồn qua đường dây đến tải, dòng điện trên đường dây càng nhỏ ($I = \frac{P}{U \cos\varphi}$ càng nhỏ nếu $\cos\varphi$ càng lớn với cùng P, U). Do đó, tổn hao năng lượng trên đường dây (do đường dây có điện trở) càng nhỏ, hiệu suất truyền tải của đường dây cao hơn, đồng thời sụt áp trên đường dây truyền tải cũng ít hơn. Một trong các biện pháp để nâng cao hệ số công suất của tải là ghép song song với tải (thường có tính chất cảm) những tụ điện chuyên dụng gọi là tụ bù.

2.6.4 Đo công suất

Để đo công suất tác dụng người ta thường dùng dụng cụ đo gọi là watt-mét. Thông thường watt-mét chứa hai cuộn dây:

Cuộn dây dòng có trở kháng bé đặt cố định.

Cuộn dây áp có trở kháng lớn đặt trong lòng cuộn dây dòng và có thể quay được quanh một trục.

Như vậy, watt-mét có 4 đầu ra trong đó 2 đầu là của cuộn áp còn 2 đầu còn lại là của cuộn dòng. Một đầu của mỗi cuộn dây được đánh dấu * (hoặc một dấu khác nào đó).

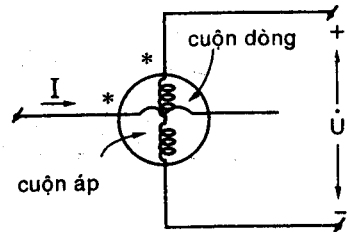
Gọi I là dòng điện chảy qua cuộn dòng còn U là điện áp đặt lên 2 đầu cuộn áp, với chiều dương của áp và dòng đối với các đầu cùng tên (*) là như nhau (nghĩa là nếu chiều dương của I đi vào đầu * của cuộn dòng thì cực + của U cũng ở đầu * của cuộn áp). Khi đó độ lệch của kim trên watt-mét tỉ lệ với đại lượng:

$$UI \cos(\Psi_u - \Psi_i) = \text{Re} \left(\frac{1}{2} \dot{U} \dot{I} \right) \quad (2.85)$$

trong đó: U, I - là giá trị hiệu dụng của áp và dòng

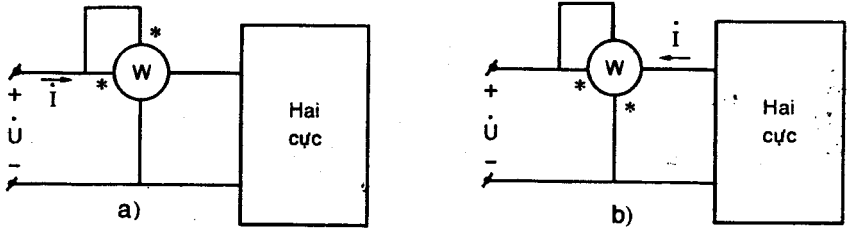
$\Psi_u - \Psi_i$ - là độ lệch pha giữa áp và dòng

$\dot{U}, \dot{I}$ - là biên độ phức áp dòng; $\dot{I}$ - là liên hợp của I .



Hình 2.59: Ký hiệu của watt-mét

Như vậy để đo công suất tác dụng cung cấp cho một hai cực có thể mắc watt-mét như H.2.60a, trong đó cuộn dòng được mắc nối tiếp với hai cực còn cuộn áp được mắc song song với hai cực. Bởi vì cuộn áp được chế tạo có trở kháng rất lớn còn cuộn dòng có trở kháng rất bé nên có thể xem gần đúng sụt áp trên cuộn dòng bằng không và dòng điện trong cuộn áp bằng không nghĩa là sự có mặt của watt-mét không làm thay đổi tình trạng của mạch.

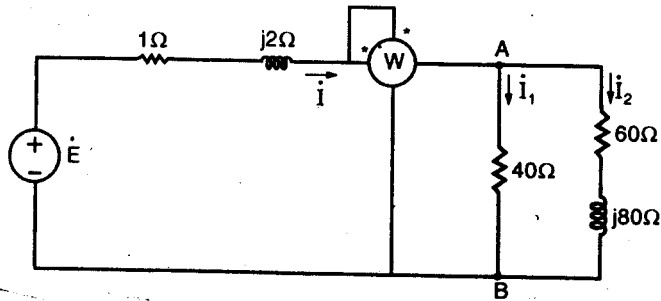


a) Đo công suất tác dụng cung cấp cho hai cực b) Đo công suất tác dụng phát ra bởi hai cực

Hình 2.60: Cách mắc watt-mét đo công suất

Nếu đã mắc đúng như H.2.60a mà kim quay ngược thì có nghĩa là công suất âm (hai cực thực sự phát ra công suất tác dụng). Bởi vì hầu hết các watt-mét không thể đọc khi kim quay ngược, nên cần phải đảo đầu nối của một trong hai cuộn dây (ví dụ đảo đầu cuộn áp như H.2.60b).

Ví dụ 2.12: Xét mạch điện H.2.61 với $E = 240 \angle 0^\circ$ (hiệu dụng phức). Tính số chỉ của watt-mét, công suất tác dụng tiêu thụ trên mỗi điện trở 40Ω và 60Ω .



Hình 2.61

Giải. Trong bài này ta sử dụng hiệu dụng phức.

Trở kháng tương đương của hai nhánh 40Ω và $(60 + j80)\Omega$ mắc song song giữa hai nút A và B là:

$$Z_{AB} = \frac{40(60 + j80)}{40 + (60 + j80)} = 30,24 + j7,8\Omega = 31,23 \angle 14^\circ 46'$$

Do đó từ định luật K2 suy ra:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{1 + j2 + Z_{AB}} = \frac{240 \angle 0^\circ}{1 + j2 + 30,24 + j7,8} = \frac{240}{31,24 + j9,8}$$

$$\Rightarrow \dot{I} = 7,33 \angle -17^\circ 42' A$$

$$\text{Do đó: } \dot{U}_{AB} = z_{AB} \dot{I} = 31,23 \angle 14^\circ 46' \cdot 7,33 \angle -17^\circ 42' = 229 \angle -2^\circ 96' V$$

Theo cách mắc của watt-mét trên H.2.61 thì số chỉ của nó, theo (2.85) là:

$$P = \text{Re}(\dot{U}_{AB} \dot{I}) = 229 \times 7,33 \times \cos(-2^\circ 96' + 17^\circ 42') = 1625 \text{ W}$$

(Chú ý, là ở đây dùng hiệu dụng phức nên không có thừa số 1/2 ở trước $\dot{U}_{AB} \dot{I}$)

$$\text{Các dòng điện: } \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{AB}}{40} = 5,726 \angle -2^\circ 96' A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{AB}}{60 + j80} = 2,29 \angle -56^\circ 09' A$$

Suy ra công suất tác dụng trên trở 40Ω là:

$$P_1 = 40 I_1^2 = 40 (5,725)^2 = 1311 \text{ W}$$

Công suất tác dụng trên trở 60Ω là:

$$P_2 = 60 I_2^2 = 60 (2,29)^2 = 314 \text{ W}$$

Có thể nghiệm lại rằng số chỉ của watt-mét: $P = P_1 + P_2$.

2.7 PHỐI HỢP TRỞ KHÁNG GIỮA TẢI VÀ NGUỒN

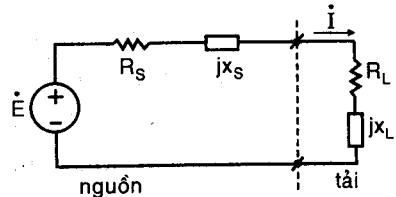
Giả sử nguồn có sức điện động:

$\dot{E} = E_m \angle \Psi_e$, trở kháng trong là:

$$Z_s = R_s + jX_s$$

cung cấp cho một tải có trở kháng là:

$$Z_L = R_L + jX_L \text{ (H.2.62).}$$



Hình 2.62

Ta hãy xét sự phối hợp trở kháng giữa tải và nguồn để tải nhận được công suất tác dụng là lớn nhất.

$$\text{Dòng điện } I \text{ qua tải: } \dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z_s + Z_L} = \frac{\dot{E}}{(R_s + R_L) + j(X_s + X_L)}$$

$$\text{có biên độ: } I_m = \frac{E_m}{\sqrt{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2}}$$

Suy ra công suất tác dụng trên tải là:

$$P = \frac{1}{2} R_L I_m^2 = \frac{\frac{1}{2} R_L E_m^2}{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2} \quad (2.86)$$

Ta tìm các giá trị của R_L và X_L sao cho P là lớn nhất.

Bởi vì điện kháng tải X_L có thể dương hoặc âm nên ta chọn $X_L = -X_S$ để sao cho dòng I_m và công suất tác dụng P trên tải có giá trị lớn nhất ($\cos\phi$ của toàn mạch bằng 1). Với điều kiện này, công suất tác dụng bằng:

$$P = \frac{R_L E_m^2}{2(R_S + R_L)^2} \quad (2.87)$$

Ta tìm giá trị của R_L để P lớn nhất.

$$\text{Ta có: } \frac{dP}{dR_L} = \frac{(R_S - R_L)E_m^2}{2(R_S + R_L)^3} = 0 \Rightarrow R_L = R_S$$

Có thể nghiệm lại rằng giá trị của $\frac{d^2P}{dR_L^2}$ tại $R_L = R_S$ thì âm.

Vậy (2.87) sẽ đạt cực đại tại $R_L = R_S$ là:

$$P_{\max} = \frac{E_m^2}{8R_S} \quad (2.88)$$

Tóm lại điều kiện để công suất tác dụng trên tải cực đại là:

$$X_L = -X_S \quad (2.89a)$$

$$R_L = R_S \quad (2.89b)$$

$$\text{hay: } Z_L = Z_S^* \quad (2.90)$$

trong đó: $Z_S^* = R_S - jX_S$ - là trở kháng liên hợp với trở kháng nguồn.

Khi điều kiện này thỏa mãn, công suất tác dụng trên tải cho bởi (2.88) bằng 50% công suất nguồn, còn một nửa công suất tiêu hao trên điện trở trong của nguồn.

Một trường hợp khác cũng thường gặp là trở kháng tải chỉ có thể thay đổi về môđun còn argumen không thay đổi được.

$$\text{Đặt: } Z_L = |Z_L| e^{j\phi_L}, \text{ và: } Z_S = |Z_S| e^{j\phi_S}$$

Công suất tác dụng trên tải là:

$$P = \frac{0,5 E_m^2 |Z_L| \cos\phi_L}{(R_S + |Z_L| \cos\phi_L)^2 + (X_S + |Z_L| \sin\phi_L)^2}$$

Xem P là hàm của $|Z_L|$ và khảo sát sự biến thiên của P theo $|Z_L|$ ta sẽ thấy P lớn nhất khi:

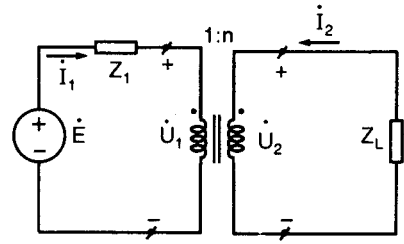
$$|Z_L| = \sqrt{R_S^2 + X_S^2} = |Z_S| \quad (2.91)$$

Đó là điều kiện phối hợp môđun trở kháng giữa tải và nguồn để công suất tác dụng trên tải là lớn nhất. Công suất này nhỏ hơn kết quả từ (2.88).

Ví dụ 2.13: Nguồn hình sin có sức điện động biên độ: $E_m = 100V$

trở kháng trong: $Z_1 = R_1 = 3000\Omega$

(thuần trở) cung cấp cho tải là hai cực có trở kháng: $Z_L = 3 + j1\Omega$.



Hình 2.63: Phối hợp trở kháng tải với nguồn lý tưởng.

Để phối hợp trở kháng giữa nguồn và tải người ta dùng một biến thế lý tưởng mắc như H.2.63. Tính tỉ số vòng n để công suất truyền đến tải là lớn nhất. Tính công suất đó.

Giải. Trở kháng tải đối với mạch nguồn (mạch sơ cấp): $Z'_L = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$

từ (1.34) và (1.35) suy ra: $\dot{U}_1 = \frac{1}{n} \dot{U}_2$; $\dot{I}_1 = -n \dot{I}_2$

Ta có:
$$Z'_L = \frac{\frac{1}{n} \dot{U}_2}{-n \dot{I}_2} = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}; \quad Z'_L = \frac{Z_L}{n^2}$$

trong đó: n - là tỉ số vòng.

Từ điều kiện phối hợp (2.91) ta có:

$$|Z'_L| = |Z_1| \Rightarrow \frac{|Z_L|}{n^2} = |Z_1| \Rightarrow n = \sqrt{\frac{|Z_L|}{|Z_1|}}$$

thay số: $|Z_L| = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3,16 \Omega$; $|Z_1| = 3000\Omega$

do đó:
$$n = \sqrt{\frac{3,16}{3.000}} = \frac{1}{30,8}$$

Trở kháng tải đối với mạch nguồn:

$$Z'_L = \frac{Z_L}{n^2} = (30,8)^2 (3 + j1) = 2846 + j948,7\Omega$$

Công suất tác dụng trên tải là:

$$P = \frac{0,5(100)^2 \cdot 2846}{(3000 + 2846)^2 + (948,7)^2} = 0,406 \text{ W}$$

Nhận xét rằng công suất này nhỏ hơn giá trị tính theo (2.88):

$$\frac{E_m^2}{8R_1} = \frac{(100)^2}{8 \times 3000} = 0,417 \text{ W}$$

2.8 MẠCH CỘNG HƯỞNG

Mạch cộng hưởng là mạch điện trong đó xuất hiện *hiện tượng cộng hưởng*. Cộng hưởng xảy ra trong mạch tại tần số mà ở đó (tổng) điện kháng $X(\omega)$ hay (tổng) điện nạp $B(\omega)$ của mạch triệt tiêu. Như vậy điều kiện cần để xảy ra cộng hưởng là trong mạch có chứa các phần tử điện kháng là điện cảm và điện dung.

Trong các mục trước, tính chất cộng hưởng cũng đã được nhắc tới ở một vài ví dụ. Cộng hưởng xảy ra trong mạch rLC nối tiếp (xem ví dụ 2.2 mục 2.3.2) được gọi là cộng hưởng nối tiếp hay cộng hưởng điện áp, khi ấy xuất hiện sự bù điện kháng giữa x_L và x_C nghĩa là điện kháng tổng $X = x_L + x_C$ của mạch triệt tiêu. Còn cộng hưởng xảy ra trong mạch rLC mắc song song (ví dụ 2.3 mục 2.3.2) hay mạch $rL//rC$ (ví dụ 2.8 mục 2.4) được gọi là cộng hưởng song song hay cộng hưởng dòng điện, khi ấy điện nạp tổng của mạch bằng không.

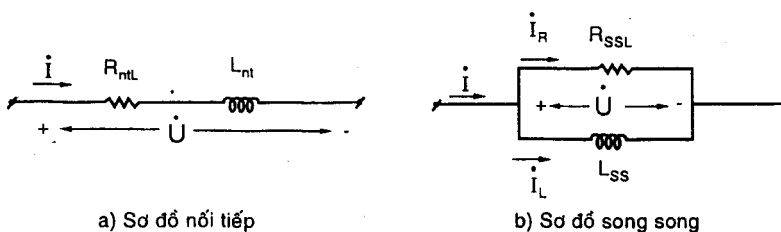
Tần số mà ở đó xảy ra cộng hưởng gọi là tần số cộng hưởng. Ở trạng thái cộng hưởng, dòng điện và điện áp trên các cực của mạch được xét là đồng pha với nhau, độ lệch pha giữa chúng bằng không, nghĩa là trong mạch có sự cộng hưởng pha ($\varphi = 0$). Ngoài ra lúc đó, công suất phản kháng của mạch bằng không nghĩa là xuất hiện hiện tượng bù công suất phản kháng.

Trong kỹ thuật vô tuyến điện, mạch cộng hưởng thường được dùng để tách riêng các tần số tín hiệu mong muốn nào đó.

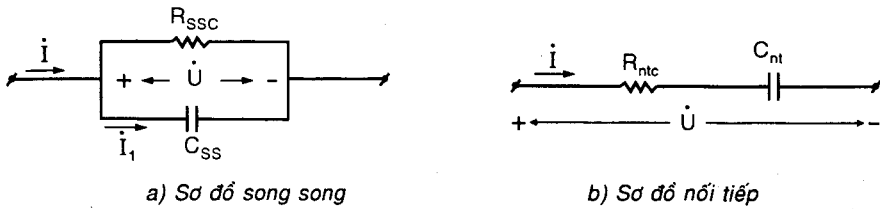
2.8.1 Phẩm chất của các phần tử thực cuộn dây và tụ điện

Trong phân tích mạch cộng hưởng ta phải xét đến các mô hình thực của các phần tử điện cảm và điện dung tức là cuộn dây và tụ điện.

Trong cuộn dây (tụ điện) ngoài hiện tượng chủ yếu là tích phóng năng lượng từ trường (điện trường) còn xảy ra hiện tượng tiêu tán. Mô hình gần đúng với thực tế của cuộn dây là điện cảm L_{nt} mắc nối tiếp với điện trở R_{ntL} (H.2.64a) hoặc điện cảm L_{ss} mắc song song với điện trở R_{ssL} (H.2.64b).



Hình 2.64. Sơ đồ tương đương của cuộn dây



Hình 2.65: Sơ đồ tương đương của tụ điện

Tương tự tổn hao trong tụ điện được biểu thị bởi một điện trở mắc song song hoặc nối tiếp với phần tử điện dung (H.2.65a,b).

Ở một tần số nào đó thì sơ đồ song song và nối tiếp tương đương với nhau nếu trở kháng hoặc dẫn nạp của hai sơ đồ là bằng nhau. Như vậy tại một tần số đã cho khi đã biết R_{ntL} , L_{nt} (R_{ntc} , C_{nt}) của mạch nối tiếp ta có thể suy ra R_{ssL} , L_{ss} (R_{ssc} , C_{ss}) của mạch song song hoặc ngược lại.

Ví dụ đối với H.2.64a:

$$Z_{nt} = R_{ntL} + j\omega L_{nt}$$

và:
$$Y_{nt} = \frac{1}{Z_{nt}} = \frac{1}{R_{ntL} + j\omega L_{nt}} = \frac{R_{ntL} - j\omega L_{nt}}{R_{ntL}^2 + \omega^2 L_{nt}^2}$$

còn đối với H.2.64b:
$$Y_{ss} = \frac{1}{R_{ssL}} - j \frac{1}{\omega L_{ss}}$$

vì:
$$Y_{nt} = Y_{ss} \Rightarrow R_{ssL} = R_{ntL} + \frac{\omega^2 L_{nt}^2}{R_{ntL}}$$

và:
$$L_{ss} = L_{nt} + \frac{R_{ntL}^2}{\omega^2 L_{nt}}$$

Trong thực tế, đối với cuộn dây người ta thường dùng sơ đồ nối tiếp còn đối với tụ điện thường dùng sơ đồ song song, vì chúng gần đúng với thực tế hơn.

Để đặc trưng khả năng tích lũy năng lượng của cuộn dây hoặc tụ điện, người ta dùng đại lượng hệ số phẩm chất Q được định nghĩa như sau:

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{Năng lượng cực đại tích lũy được } W_{tl\max}}{\text{Năng lượng tổn hao trong một chu kỳ } W_T} \quad (2.92)$$

Đối với sơ đồ nối tiếp của cuộn dây (H.2.64a), năng lượng trường từ tích lũy trong cuộn dây là:

$$W_M(t) = \frac{1}{2} L_{nt} i^2(t) = \frac{1}{2} L_{nt} I_m^2 \sin^2(\omega t + \Psi_i)$$

$$\Rightarrow W_{tl\max} = \frac{1}{2} L_{nt} I_m^2$$

Còn năng lượng tổn hao trong một chu kỳ

$$W_T = \frac{1}{2} R_{ntL} I_m^2 \cdot T = \frac{1}{2} R_{ntL} I_m^2 \frac{2\pi}{\omega}.$$

suy ra:
$$Q_L = 2\pi \cdot \frac{W_{tl\max}}{W_T} = \frac{\omega L_{nt}}{R_{ntL}}.$$

Đối với sơ đồ song song của cuộn dây (H.2.64b) thì:

$$W_{tl\max} = \frac{1}{2} L_{ss} I_{Lm}^2; \text{ với: } I_{Lm} - \text{ là biên độ của dòng qua } L_{ss}.$$

Vì:
$$I_{Lm} = \frac{U_m}{\omega L_{ss}} \Rightarrow W_{tl\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_m^2}{\omega^2 L_{ss}}$$

còn:
$$W_T = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{R_{ssL}} \cdot T = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_m^2}{R_{ssL}} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$$

suy ra:
$$Q_L = \frac{R_{ssL}}{\omega L_{ss}}$$

Tóm lại hệ số phẩm chất của cuộn dây là:

$$Q_L = \frac{\omega L_{nt}}{R_{ntL}} = \frac{R_{ssL}}{\omega L_{ss}} \quad (2.93)$$

Một cách tương tự từ định nghĩa (2.92) suy ra hệ số phẩm chất của tụ điện là:

$$Q_C = \frac{1}{\omega C_{nt} R_{ntc}} = \omega R_{ssc} C_{ss} \quad (2.94)$$

Đại lượng nghịch đảo của Q gọi là hệ số tổn hao d:

$$d_L = \frac{1}{Q_L} = \frac{R_{ntL}}{\omega L_{nt}} = \frac{\omega L_{ss}}{R_{ssL}} \quad (2.95)$$

$$d_C = \frac{1}{Q_C} = \omega C_{nt} R_{ntc} = \frac{1}{\omega R_{ssc} C_{ss}} \quad (2.96)$$

Hệ số phẩm chất cũng như hệ số tổn hao là hàm của tần số. Từ (2.93), (2.94) ta thấy hệ số phẩm chất bằng tang của góc trở kháng (trị tuyệt đối của argumen của trở kháng, hay góc lệch pha giữa dòng điện và điện áp trên hai cực của cuộn dây hoặc tụ điện) trong sơ đồ nối tiếp hay bằng tang của góc dẫn nạp trong sơ đồ song song.

Người ta còn định nghĩa:

góc tổn hao bằng 90° trừ đi góc trở kháng trong sơ đồ nối tiếp

(hoặc góc dẫn nạp trong sơ đồ song song).

Dễ thấy rằng hệ số tổn hao bằng tang của góc tổn hao.

Hệ số phẩm chất của cuộn dây không lõi trong thực tế cỡ vài trăm, còn của tụ điện thường rất lớn cỡ hàng ngàn.

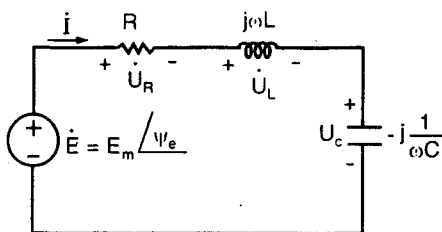
2.8.2 Mạch cộng hưởng nối tiếp

Mạch cộng hưởng nối tiếp gồm ba phần tử R , L , C mắc nối tiếp (H.2.66) trong đó: $R = R_1 + R_{ntL} + R_{ntC}$ (2.97)

với: R_1 - là điện trở được mắc vào mạch R_{ntL} , R_{ntC} - là các điện trở tổn hao trong mô hình nối tiếp của cuộn dây và tụ điện.

Mạch được kích thích bởi nguồn sức điện động hình sin tần số ω có biên độ phức:

$$\dot{E} = E_m \angle \Psi_e V$$



Hình 2.66

và xét mạch ở chế độ xác lập.

Trở kháng của mạch:

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

$$Z(j\omega) = R + jX(\omega) \quad (2.98)$$

với: $X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ - là điện kháng của mạch (2.99)

môđun trở kháng: $|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ (2.100)

argumen trở kháng: $\varphi(\omega) = \tan^{-1} \frac{X}{R} = \tan^{-1} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$ (2.101)

Dẫn nạp của mạch:

$$Y(j\omega) = \frac{\dot{I}}{\dot{E}} = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (2.102)$$

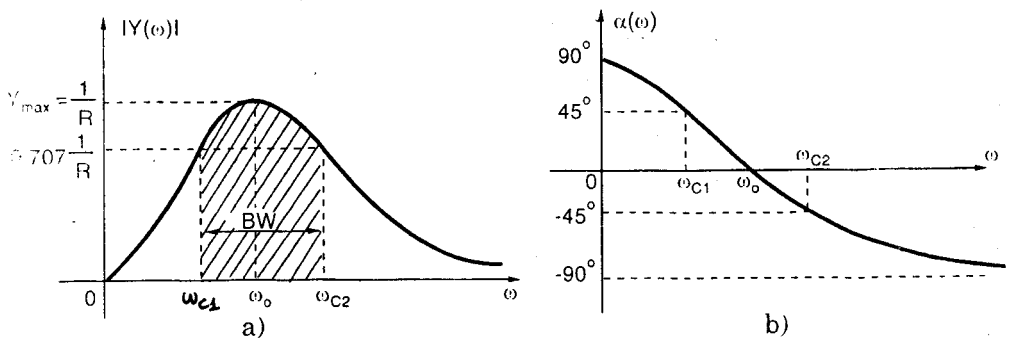
môđun của dẫn nạp: $|Y(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ (2.103)

argumen của dẫn nạp:

$$\alpha(\omega) = -\varphi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (2.104)$$

* Từ đường cong biểu diễn $|Y|$ theo ω trên H.2.67a, ta thấy, tại tần số $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $|Y|$ đạt giá trị cực đại là $Y_{\max} = 1/R$ tương ứng với khi dòng

điện trong mạch có biên độ lớn nhất bằng E_m/R . Ở các tần số chung quanh gần ω_0 thì $|Y|$ (và do đó biên độ dòng I_m) tương đối lớn, còn ở các tần số cách xa ω_0 thì $|Y|$ và I_m giảm dần. Như vậy các nguồn tác động có tần số ở gần tần số ω_0 có thể tạo nên trong mạch dòng điện lớn nên được coi như đi qua được, còn các nguồn có tần số ở xa tần số ω_0 chỉ gây ra trong mạch dòng điện nhỏ nên coi như bị chặn lại. Ta nói mạch có tính chất lọc thông dải (dải qua) nghĩa là cho qua một dải tần số chung quanh ω_0 và chặn lại dải tần còn lại.



Hình 2.67

Hai tần số ω_{C1} và ω_{C2} mà tại đó $|Y(\omega_{C1})| = |Y(\omega_{C2})| = \frac{1}{\sqrt{2}} y_{\max}$ được gọi là hai tần số cắt. Theo qui ước dải tần số: $\omega_{C1} \leq \omega \leq \omega_{C2}$ gọi là dải thông.

$BW = \omega_{C2} - \omega_{C1}$ được gọi là độ rộng dải thông (*bandwidth*).

Từ điều kiện: $|Y(\omega_{C1})| = |Y(\omega_{C2})| = \frac{Y_{\max}}{\sqrt{2}}$

suy ra hai tần số cắt ω_{C1} và ω_{C2} là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{R}$$

$$\text{suy ra: } \omega_{C1} = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 + \frac{4L}{C}} \quad (2.105a)$$

$$\omega_{C2} = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 + \frac{4L}{C}} \quad (2.105b)$$

$$\text{Do đó: } BW = \omega_{C2} - \omega_{C1} = \frac{R}{L} \quad (2.106)$$

$$\text{ta có hệ thức: } \omega_{C1} \cdot \omega_{C2} = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (2.107)$$

Từ (2.106) ta thấy dải thông tỉ lệ với giá trị điện trở R của mạch. R càng nhỏ, dải thông càng hẹp, mạch coi như có tính chọn lọc tần số tốt hơn. Để đo mức độ lựa chọn tần số, người ta định nghĩa hệ số phẩm chất của mạch theo biểu thức sau:

$$Q = \frac{\omega_o}{BW} \quad (2.108)$$

Nếu dải thông BW càng hẹp thì Q càng lớn, mạch có tính chọn lọc càng cao. Từ (2.106) và chú ý $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ta suy ra:

$$Q = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{\omega_o RC} = \frac{\rho}{R} \quad (2.109)$$

với: $\rho = \omega_o L = \frac{1}{\omega_o C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ - gọi là trở kháng đặc tính của mạch.

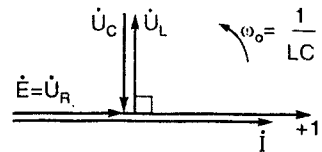
* Từ H.2.67b ta thấy, tại tần số: $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\alpha = 0$, nghĩa là điện kháng và điện nạp của mạch bằng không, dẫn nạp và trở kháng chỉ có phần thực, dòng điện $i(t)$ cùng pha với điện áp kích thích $e(t)$ của mạch: ta nói mạch ở trạng thái cộng hưởng và tần số $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ gọi là tần số cộng hưởng. Ở cộng hưởng:

$$\dot{U}_L + \dot{U}_C = j\omega_o L \dot{I} - j\frac{1}{\omega_o C} \dot{I} = j\left(\omega_o L - \frac{1}{\omega_o C}\right) \dot{I} = 0$$

$\dot{E} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{U}_R = R\dot{I}$: toàn bộ áp nguồn $\dot{E}$ đặt lên R .

Đồ thị vectơ dòng, áp như H.2.68

$\dot{U}_C$ chậm pha sau $\dot{E}$ góc 90° còn $\dot{U}_L$ nhanh pha hơn $\dot{E}$ góc 90° , nên chúng ngược pha với nhau và có biên độ bằng nhau:



Hình 2.68

$$\begin{aligned} U_{Lm} &= U_{Cm} = \omega_o L I_m = \frac{1}{\omega_o C} I_m \\ \Rightarrow \frac{U_{Lm}}{E_m} &= \frac{U_{Cm}}{E_m} = \frac{\omega_o L I_m}{R I_m} = \frac{\omega_o L}{R} = Q \end{aligned} \quad (2.110)$$

Nếu Q rất lớn thì ở cộng hưởng U_{Lm} và U_{Cm} rất lớn hơn E_m (Q lần) nên cộng hưởng trong mạch RLC nối tiếp còn gọi là cộng hưởng áp.

Ở cộng hưởng giả sử $i(t) = I_m \cos \omega_o t$ thì $u_C(t) = \frac{I_m}{\omega_o C} \cos(\omega_o t - 90^\circ)$, do

đó tổng năng lượng điện từ chứa trong L và C là:

$$\begin{aligned} W_E(t) + W_M(t) &= \frac{1}{2} C u_C^2(t) + \frac{1}{2} L i^2(t) \\ &= \frac{1}{2} C \left(\frac{I_m}{\omega_0 C} \right)^2 \cos^2(\omega_0 t - 90^\circ) + \frac{1}{2} L I_m^2 \cos^2 \omega_0 t \\ \Rightarrow W_E(t) + W_M(t) &= \frac{1}{2} L I_m^2 = \text{hằng số} \end{aligned} \quad (2.111)$$

Vậy ở cộng hưởng, tổng năng lượng điện từ chứa trong L và C thì không thay đổi theo thời gian. Năng lượng này dao động giữa dạng năng lượng từ trong cuộn dây và năng lượng điện trong tụ điện. Giả sử trong 1/4 chu kỳ này, năng lượng đó được chuyển từ cuộn dây sang tụ điện thì trong 1/4 chu kỳ kế nó lại được chuyển từ tụ điện sang cuộn dây. Có sự trao đổi năng lượng nội tại vừa hết giữa L và C. Còn công suất tức thời nguồn cung cấp cho mạch được biến đổi hoàn toàn thành nhiệt năng trên R.

Năng lượng biến thành nhiệt năng trong một chu kỳ ở cộng hưởng là:

$$W_T = \frac{1}{2} R I_m^2 T = \frac{1}{2} R I_m^2 \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Để nghiệm lại rằng:

$$Q = 2\pi \cdot \frac{W_E + W_M \text{ ở cộng hưởng}}{W_T \text{ ở cộng hưởng}} = \frac{\rho}{R} \quad (2.112)$$

Đại lượng nghịch đảo của hệ số phẩm chất Q gọi là hệ số tổn hao d:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{W_T \text{ cộng hưởng}}{W_E + W_M \text{ cộng hưởng}} = \frac{R}{\rho} \quad (2.113)$$

Nếu giả thiết: $R_L = 0$, tức: $R = R_{ntC} + R_{ntL}$

$$\text{khi đó: } d = \frac{R_{ntL} + R_{ntC}}{\rho} = \frac{R_{ntL}}{\omega_0 L} + \omega_0 C R_{ntC} \Rightarrow d = d_L + d_C \quad (2.114)$$

trong đó: d_L, d_C - là hệ số tổn hao của cuộn dây và tụ điện ở tần số cộng hưởng (xem lại biểu thức 2.95 và 2.96).

$$\text{vì: } d_L = \frac{1}{Q_L}; \quad d_C = \frac{1}{Q_C}$$

$$\text{nên cũng có: } \frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C} \quad (2.115)$$

trong đó: Q_L, Q_C - là hệ số phẩm chất của cuộn dây, tụ điện ở tần số ω_0 .

Ta thấy hệ số phẩm chất của mạch nhỏ hơn hệ số phẩm chất của cuộn dây và tụ điện.

* Sự thay đổi của biên độ các điện áp trên L, C, R theo tần số được khảo sát như sau:

$$K_R = \frac{\dot{U}_R}{\dot{E}} = \frac{R\dot{I}}{\dot{E}} = RY = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

$$K_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{E}} = \frac{j\omega L\dot{I}}{\dot{E}} = j\omega LY = \frac{j\omega L}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

$$K_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{E}} = \frac{-j\frac{1}{\omega C}\dot{I}}{\dot{E}} = -j\frac{1}{\omega C}Y = \frac{-j1/\omega C}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

suy ra:

$$|K_L| = \frac{U_{Lm}}{E_m} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

$$|K_C| = \frac{U_{Cm}}{E_m} = \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

$$|K_R| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = RY(\omega)$$

Bằng cách khảo sát các đạo hàm $\frac{d|K_L|}{d\omega}$, $\frac{d|K_C|}{d\omega}$, ta dễ chứng minh được rằng nếu $Q > 1/\sqrt{2}$ thì:

$$|K_L| \text{ sẽ có cực đại } |K_L|_{\max} = Q / \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \text{ tại tần số: } \omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}}$$

$$\text{và: } |K_C| \text{ có cực đại } |K_C|_{\max} = |K_L|_{\max} \text{ tại tần số: } \omega_c = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2 - 1}{2Q^2}}.$$

Có thể nghiệm lại các quan hệ sau:

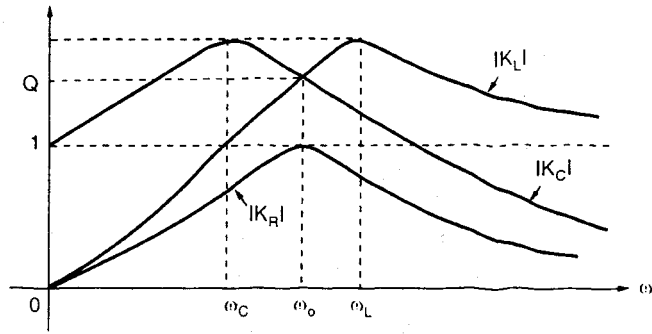
$$\omega_L > \omega_0 > \omega_c \quad (2.116)$$

$$\omega_L \omega_c = \omega_0^2 \quad (2.117)$$

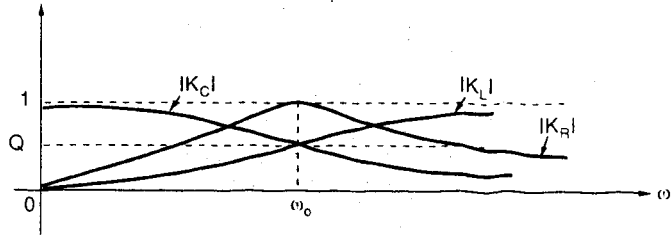
H.2.69a,b trình bày sự thay đổi của $|K_R|$, $|K_L|$, $|K_C|$ theo tần số ω trong hai trường hợp: $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ và $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

• Trong thực tế, việc nghiên cứu mạch cộng hưởng thường giới hạn ở lân cận tần số cộng hưởng. Vì vậy, để tiện lợi người ta định nghĩa các đại lượng sau:

$$- \text{độ lệch cộng hưởng tuyệt đối: } \Delta\omega = \omega - \omega_0 \quad (2.118)$$



$$a) Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$b) Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hình 2.69

- độ lệch cộng hưởng tương đối: $v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}$ (2.119)

- độ lệch cộng hưởng tổng quát: $\xi = \frac{X(\omega)}{R}$ (2.120)

tại tần số cộng hưởng thì các độ lệch cộng hưởng bằng không.

Giữa hai độ lệch cộng hưởng ξ và v có quan hệ:

$$\xi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\rho}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

vì: $\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \xi = Qv$ (2.121)

Nếu độ lệch cộng hưởng nhỏ $\omega \approx \omega_0$ thì quan hệ của ξ và v với $\Delta\omega$ có thể được viết gần đúng như sau:

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega_0 \omega} \approx \frac{2\omega(\omega - \omega_0)}{\omega_0 \omega} \Rightarrow v \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$$
 (2.122)

Do đó: $\xi = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ (2.123)

ta có: $Z = R + jX = R \left(1 + j \frac{X}{R} \right) \Rightarrow Z = R (1 + j\xi)$

$$|Z| = R \sqrt{1 + \xi^2}; \quad \varphi = \tan^{-1} \xi$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R(1 + j\xi)} \quad (2.124)$$

$$|Y| = \frac{1}{R\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \alpha = -\tan^{-1} \xi \quad (2.125)$$

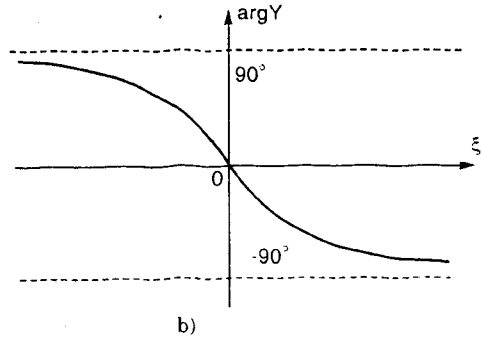
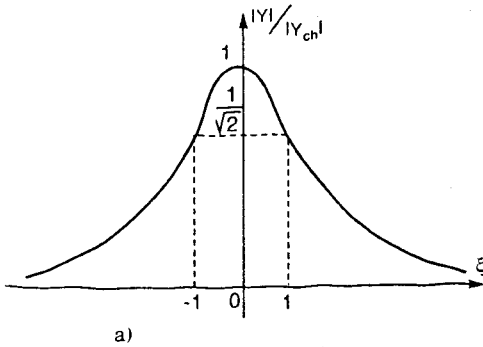
Ở cộng hưởng $\xi = 0$ nên:

$$Y_{ch} = \frac{1}{R} \quad (2.126)$$

$$\text{Do đó:} \quad \frac{Y}{Y_{ch}} = \frac{1}{1 + j\xi}; \quad \frac{|Y|}{|Y_{ch}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad \arg Y = -\tan^{-1} \xi \quad (2.127)$$

Đồ thị đặc trưng biên độ $\frac{|Y|}{|Y_{ch}|}$ và $\arg Y$ theo ξ được biểu diễn trên

H.2.70a,b. Các đồ thị này đều phù hợp chung cho các mạch cộng hưởng nối tiếp nên có tên là: *các đường cộng hưởng vận năng*.



Hình 2.70: Đường cong cộng hưởng vận năng

Dòng điện trong mạch: $\dot{I} = \dot{E} Y$

$$\text{ở cộng hưởng:} \quad \dot{I}_{ch} = \dot{E} Y_{ch} \Rightarrow \frac{\dot{I}}{\dot{I}_{ch}} = \frac{Y}{Y_{ch}} \quad (2.128)$$

Sự phụ thuộc này giống hệt (2.127) do đó các đường cộng hưởng trên H.2.70 cũng đặc trưng cho biên độ và pha của dòng điện.

Dải thông của mạch cộng hưởng là dải tần số mà $\frac{|Y|}{|Y_{ch}|} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$, nên tại hai tần số cắt ω_{c1} và ω_{c2} (tần số giới hạn của dải thông), độ lệch cộng hưởng tổng quát ξ có giá trị ± 1 còn độ lệch cộng hưởng tương đối

$$v = \pm \frac{1}{Q} \text{ (vì } \xi = Qv \text{)}.$$

Từ quan hệ (2.123) suy ra:

$$\frac{2Q(\omega_{C_2} - \omega_0)}{\omega_0} = 1; \quad \frac{2Q(\omega_{C_1} - \omega_0)}{\omega_0} = -1$$

$$\text{Từ đó suy ra độ rộng dải thông là: } BW = \omega_{C_2} - \omega_{C_1} = \frac{\omega_0}{Q}$$

Ta tìm lại được quan hệ (2.108).

Có thể thấy rằng, độ rộng dải thông càng lớn nếu tần số cộng hưởng càng lớn và phẩm chất mạch càng nhỏ và ngược lại. Ở một tần số cộng hưởng xác định, mạch sẽ có tính chất chọn lọc tốt hơn nếu phẩm chất lớn hơn.

Ví dụ 2.14: Mạch cộng hưởng nối tiếp có $r = 20 \Omega$, $C = 60 \text{ pF}$, tần số cộng hưởng $f_0 = 3 \text{ MHz}$ được kích thích bởi nguồn sức điện động hình sin biên độ 1 V tần số f với độ lệch cộng hưởng (tuyệt đối) $\Delta f = f - f_0 = 6 \text{ KHz}$. Hãy xác định: biên độ dòng điện trong mạch, điện kháng của mạch, biên độ điện áp trên tụ điện, góc lệch pha giữa dòng điện và sức điện động.

Giải. Vì độ lệch cộng hưởng nhỏ: $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{6 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^{-3} \ll 1$ nên ta có thể tính toán gần đúng độ lệch cộng hưởng tổng quát ξ dùng công thức (2.123).

Hệ số phẩm chất của mạch:

$$Q = \frac{1}{\omega_0 r C} = \frac{1}{2\pi f_0 r C} = \frac{1}{2\pi \times 3 \times 10^6 \times 20 \times 60 \times 10^{-12}} = 44,21$$

$$\Rightarrow \xi \approx \frac{2Q\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2Q\Delta f}{f_0} = 0,1768$$

$$\text{Biên độ dòng điện ở cộng hưởng: } I_{mch} = \frac{E_m}{r} = \frac{1}{20} = 50 \text{ mA}.$$

Từ (2.128) suy ra:

$$\frac{I_m}{I_{mch}} = \frac{|Y|}{|Y_{ch}|} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \Rightarrow I_m = \frac{I_{mch}}{\sqrt{1+\xi^2}} \approx 49,236 \text{ mA}$$

$$\text{Điện kháng của mạch: } X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \xi r \approx 3,537$$

Biên độ điện áp trên tụ:

$$U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C} \approx \frac{I_m}{\omega_0 C} = \frac{I_{mch}}{\omega_0 C \sqrt{1+\xi^2}} = \frac{E_m}{\omega_0 r C \sqrt{1+\xi^2}} \approx \frac{QE_m}{\sqrt{1+\xi^2}} = 43,5 \text{ V}$$

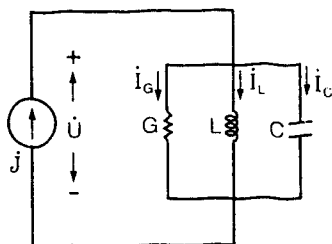
Theo (2.124) độ lệch pha giữa nguồn sức điện động $e(t)$ và dòng điện $i(t)$:
 $\varphi = \Psi_e - \Psi_i = \tan^{-1} \xi \approx 10^\circ$ (mạch có tính chất cảm).

2.8.3 Mạch cộng hưởng song song

Mạch cộng hưởng nối tiếp được đặc trưng bởi môđun dẫn nạp có giá trị lớn trong dải tần số hẹp quanh tần số cộng hưởng, hay có thể nói cách khác là môđun trở kháng nhỏ nhất ở cộng hưởng. Trong nhiều ứng dụng thực tế, thường cần những mạch có tính chất ngược lại. Mạch cộng hưởng song song sẽ cho phép thỏa mãn các yêu cầu đó.

1- Mạch cộng hưởng song song ba nhánh

Gồm ba phần tử điện trở, điện cảm, điện dung mắc song song (H.2.71). Giả sử mạch được kích thích bởi nguồn dòng hình sin tần số ω có biên độ phức: $\dot{J} = J_m \angle \Psi_j$ A, và mạch ở chế độ xác lập.



Hình 2.71: Mạch cộng hưởng song song ba nhánh

Dẫn nạp của mạch:

$$Y(j\omega) = G + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{-j\frac{1}{\omega C}} = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = G + jB$$

với: $B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}; G = \frac{1}{R}.$

Trở kháng của mạch: $Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}$

Tần số cộng hưởng của mạch cũng là: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ được xác định từ điều kiện $B(\omega) = 0$.

Môđun của trở kháng: $|Z| = \frac{U_m}{J_m} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}}$

Argumen trở kháng: $\varphi = -\tan^{-1} \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$

. Đường cong biểu diễn $|Z|$, φ theo ω cũng có dạng giống như $|Y|$, α trên H.2.67 ở mạch cộng hưởng nối tiếp. Tại ω_0 , $|Z|$ đạt cực đại là $|Z|_{\max} = 1/G$ ứng với điện áp có biên độ lớn nhất bằng J_m/G . Mạch cũng có tính chất lọc thông dải, cho qua một dải tần số chung quanh ω_0 và chặn lại dải tần còn lại.

Hai tần số cắt ω_{C_1} và ω_{C_2} (giới hạn dải thông) được xác định từ điều kiện: $|Z|(\omega_{C_1}) = |Z|(\omega_{C_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} |Z|_{\max}$, mà từ đó ta suy ra:

$$\omega_{C_1} = -\frac{G}{2C} + \frac{1}{2C} \sqrt{G^2 + \frac{4C}{L}}$$

$$\omega_{C_2} = \frac{G}{2C} + \frac{1}{2C} \sqrt{G^2 + \frac{4C}{L}}$$

cũng nghiệm đúng quan hệ: $\omega_{C_1} \cdot \omega_{C_2} = \omega_0^2$

Suy ra độ rộng dải thông:

$$BW = \omega_{C_2} - \omega_{C_1} = \frac{G}{C} \quad (2.129)$$

G càng nhỏ tức điện trở càng lớn thì dải thông càng hẹp, mạch có tính chọn lọc tần số tốt hơn.

Hệ số phẩm chất:

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 GL} = \frac{1}{G\rho} = \frac{R}{\rho} \quad (2.130)$$

trong đó: $\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ - là trở kháng đặc tính của mạch.

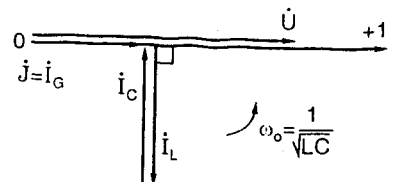
. Ở cộng hưởng, áp $u(t)$ cùng pha với nguồn dòng $j(t)$.

$$\text{Ta có ở cộng hưởng: } \dot{I}_L + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{j\omega_0 L} + \frac{\dot{U}}{-j \frac{1}{\omega_0 C}} = j(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}) \dot{U} = 0$$

$\Rightarrow \dot{J} = \dot{I}_G = G \dot{U}$: toàn bộ nguồn dòng chảy qua điện trở.

Đồ thị vectơ dòng, áp như H.2.72. $\dot{I}_L$ chậm pha sau $\dot{J}$ góc 90° , còn $\dot{I}_C$ nhanh pha hơn $\dot{J}$ góc 90° , nên chúng ngược pha nhau và có biên độ bằng nhau:

$$\frac{I_{Lm}}{J_m} = \frac{I_{Cm}}{J_m} = \frac{\omega_0 C U_m}{G U_m} = Q$$



Hình 2.72

Nếu Q rất lớn thì ở cộng hưởng I_{Lm} và I_{Cm} rất lớn hơn J_m (Q lần) nên cộng hưởng trong mạch RLC song song còn gọi là cộng hưởng dòng điện.

Cũng dễ chứng minh rằng ở cộng hưởng tổng năng lượng điện từ chứa trong L và C thì không thay đổi theo thời gian:

$$W_E(t) + W_M(t) = \frac{1}{2} C U_m^2 = \text{hằng số.}$$

và hệ số phẩm chất:

$$Q = 2\pi \cdot \frac{W_E + W_M \text{ ở cộng hưởng}}{\text{Năng lượng tổn hao trong một chu kỳ ở cộng hưởng}}$$

• Để tiện lợi, người ta cũng định nghĩa độ lệch cộng hưởng tuyệt đối, tương đối giống như ở mạch cộng hưởng nối tiếp. Còn độ lệch cộng hưởng tổng quát được định nghĩa như sau:

$$\xi = \frac{B(\omega)}{G} \quad (2.131)$$

Ta cũng có mối quan hệ giữa $\xi, v, \Delta\omega$ như ở mạch cộng hưởng nối tiếp:

$$\xi = Qv, \text{ và: } \xi \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}; \quad v \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$$

ta cũng có: $Y = G + jB = G(1 + j\xi); \quad Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G(1 + j\xi)}$

ở cộng hưởng: $Z_{ch} = \frac{1}{G}, \text{ và } \xi = 0$

$$\Rightarrow \frac{Z}{Z_{ch}} = \frac{1}{1 + j\xi}, \quad \frac{|Z|}{|Z_{ch}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \arg Z = -\tan^{-1} \xi$$

Điện áp: $\dot{U} = Z\dot{I}, \text{ ở cộng hưởng: } \dot{U}_{ch} = Z_{ch}\dot{I}$

Suy ra: $\frac{\dot{U}}{\dot{U}_{ch}} = \frac{1}{1 + j\xi}$

Ta thấy đồ thị đặc trưng cho môđun: $\frac{|Z|}{|Z_{ch}|} = \frac{|U|}{|\dot{U}_{ch}|}$

và argumen của $\frac{Z}{Z_{ch}}, \frac{\dot{U}}{\dot{U}_{ch}}$, cũng được biểu diễn bởi đường cong cộng hưởng

H.2.70 giống như ở mạch cộng hưởng nối tiếp.

• So sánh các kết quả nhận được khi xét mạch cộng hưởng R, L, C song song với mạch cộng hưởng RLC nối tiếp, ta thấy có thể suy ra các kết quả ở mạch song song từ các kết quả ở mạch nối tiếp bằng cách thực hiện phép đổi lẩn các thông số như sau:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &\Leftrightarrow \dot{J} \\ \dot{U} &\Leftrightarrow \dot{I} \\ L &\Leftrightarrow C \\ R &\Leftrightarrow G \\ Z &\Leftrightarrow Y \end{aligned} \right\} \quad (2.132)$$

Sở dĩ như vậy vì các phương trình mạch trong hai trường hợp là tương tự nhau.

Đối với mạch cộng hưởng nối tiếp RLC: $\dot{E} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$

với: $\dot{U}_R = R\dot{I}, \dot{U}_L = j\omega L\dot{I}; \dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}; Y = \frac{\dot{I}}{\dot{E}}$

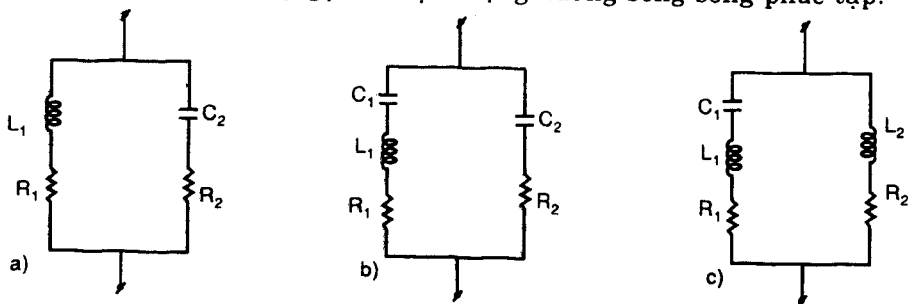
Đối với mạch cộng hưởng song song R, L, C: $\dot{J} = \dot{I}_G + \dot{I}_L + \dot{I}_C$

với: $\dot{I}_G = G\dot{U}, \dot{I}_C = j\omega C\dot{U}; \dot{I}_L = \frac{1}{j\omega L}\dot{U}; Z = \frac{\dot{U}}{\dot{J}}$

Nếu thực hiện phép đổi lẫn (2.132) ta sẽ chuyển được từ phương trình này sang phương trình kia. Hai mạch này gọi là mạch đối ngẫu. Với các mạch đối ngẫu ta chỉ cần phân tích một mạch và có thể suy ra kết quả cho mạch kia khi dùng nguyên lý đối lẫn ở trên.

2- Mạch cộng hưởng song song hai nhánh

Mạch cộng hưởng song song ba nhánh H.2.71 phần nào có tính chất lý thuyết. Trong thực tế ta thường gặp các mạch song song hai nhánh (H.2.73), mỗi nhánh có thể gồm một phần tử điện kháng (L, C) nối nối tiếp với điện trở tổn hao của nó (H.2.73a) hoặc một nhánh là mạch cộng hưởng nối tiếp (H.2.73b,c) còn nhánh thứ hai chỉ có một phần tử điện kháng (L hoặc C). Các mạch này gọi là mạch cộng hưởng song song phức tạp.



Hình 2.73: a) Mạch hai nhánh thông thường;

b) Mạch hai điện dung (ba điểm điện dung); c) Mạch hai điện cảm (ba điểm điện cảm).

Để phân tích các mạch cộng hưởng phức tạp, người ta thường chuyển các mạch trên về dạng song song ba nhánh để có thể áp dụng kết quả của nó. Mạch cộng hưởng hai nhánh là mô hình đúng của các mạch thực tế thường dùng với điều kiện tổn hao của các phần tử nhỏ.

• Để đưa mạch song song hai nhánh về dạng mạch song song ba nhánh ta hãy so sánh dẫn nạp của chúng:

Với mạch ba nhánh (H.2.71):

$$Y = G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \quad (2.133)$$

Với mạch hai nhánh (H.2.73a):

$$Y' = \frac{1}{R_1 + j\omega L_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \quad (2.134)$$

Với các giả thiết: $R_1 \ll \omega L_1$; $R_2 \ll \frac{1}{\omega C_2}$ (điều này luôn luôn đạt được trong mạch thực tế), ta sẽ viết được:

$$Y' = \frac{R_1 + R_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_2}}{(R_1 + j\omega L_1) \left(R_2 + \frac{1}{\omega C_2} \right)} \approx \frac{R_1 + R_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_2}}{(L_1 / C_2)} \approx \frac{RC_2}{L_1} + j\omega C_2 - j \frac{1}{\omega L_1} \quad (2.135)$$

với: $R = R_1 + R_2$

So sánh (2.133) và (2.135) ta được:

$$G = \frac{RC_2}{L_1}; \quad C = C_2; \quad L = L_1 \quad (2.136)$$

Đó là điều kiện để hai mạch H.2.71 và H.2.73a tương đương nhau.

$$\text{Gọi } R_{td} = \frac{1}{G} = \frac{L_1}{RC_2} = \frac{\rho^2}{R} \quad (2.137)$$

trong đó: $\rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}$ - là trở kháng đặc tính của mạch

Theo (2.130), hệ số phẩm chất của mạch là:

$$Q = \frac{R_{td}}{\rho} \quad (2.138)$$

Suy ra ta cũng có: $R_{td} = Q^2 R$ (2.139)

R_{td} - được gọi là điện trở tương đương của mạch H.2.73a.

• Xét mạch trên H.2.73b,c là các mạch ba điểm điện dung và ba điểm

điện cảm; để rút chúng về dạng mạch H.2.71 trước hết ta chú ý đến điện kháng của nhánh một. Trong cả hai trường hợp đều có:

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \quad (2.140)$$

là điện kháng của mạch cộng hưởng nối tiếp, nó là hàm của tần số. Ở những dải tần số khác nhau, X_1 có tính chất thay đổi.

- Nếu gọi ω_{Ch1} là tần số cộng hưởng của nhánh một thì với:

$$0 < \omega < \omega_{Ch1} \left(= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \right) \quad (2.141)$$

ta có $X_1 < 0$: nhánh một khi đó có tính chất dung

Trong dải tần này nhánh một tương đương với một điện dung C_{td} được xác định như sau:

$$-\frac{1}{\omega C_{td}} = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \Rightarrow \frac{1}{C_{td}} = \frac{1}{C_1} - \omega^2 L_1 \quad (2.142)$$

- Trong dải tần số: $\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} < \omega < \infty$ (2.143)

ta có $X_1 > 0$: nhánh một có tính chất cảm và nó tương đương với một điện cảm L_{td} được xác định bởi:

$$\omega L_{td} = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \Rightarrow L_{td} = L_1 - \frac{1}{\omega^2 C_1} \quad (2.144)$$

Như vậy trong dải tần số thứ nhất, mạch ba điểm điện cảm sẽ xảy ra cộng hưởng giữa C_{td} với L_2 ở tần số $\omega_0 = \omega_{Chss}$ được xác định bởi:

$$\omega_{chss}^2 = \frac{1}{L_2 C_{td}} = \frac{1}{L_2} \left(\frac{1}{C_1} - \omega_{chss}^2 L_1 \right)$$

Suy ra:
$$\omega_{chss} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L C_1}} \quad (2.145)$$

trong đó: $L = L_1 + L_2$ - là điện cảm tổng xét theo mạch vòng tạo nên bởi hai nhánh song song của mạch.

Thay (2.145) vào (2.142) ta được giá trị của C_{td} của nhánh một ở tần số cộng hưởng song song ω_{chss} của mạch ba điểm điện cảm:

$$C_{tdss} = \frac{L_1 + L_2}{L_2} \cdot C_1 = \frac{C_1}{p} \quad (2.146)$$

trong đó:
$$p = \frac{L_2}{L_1 + L_2} = \frac{L_2}{L} \quad (2.147)$$

p - được gọi là hệ số phân bố điện cảm giữa hai nhánh.

Trong dải tần số thứ hai, trong mạch ba điểm điện dung sẽ xảy ra cộng hưởng song song của nhánh một với C_2 ở tần số:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{chss}}^2 &= \frac{1}{L_{\text{td}} C_2} = \frac{1}{\left(L_1 - \frac{1}{\omega_{\text{chss}}^2 C_1} \right) C_2} \\ \Rightarrow \omega_{\text{chss}} &= \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}} \end{aligned} \quad (2.148)$$

trong đó: $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ - là điện dung của toàn mạch xét theo mạch vòng tạo nên bởi hai nhánh song song.

Thay (2.148) vào (2.144) ta được giá trị của L_{td} của nhánh một tại tần số ω_{chss} của mạch ba điểm điện dung:

$$L_{\text{tdss}} = L_1 \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} = p L_1 \quad (2.149)$$

với:
$$p = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{C}{C_2} \quad (2.150)$$

gọi là hệ số phân bố điện dung của mạch.

Bây giờ ta xét điện trở tương đương của hai mạch song song phức tạp H.2.73b, c. Trong dải tần số thứ nhất ($0 < \omega < 1/\sqrt{L_1 C_1}$) nhánh một của mạch H.2.73c tương đương với điện dung C_{td} nên ở dải tần số này mạch H.2.73c tương đương với mạch H.2.73a. Tương tự trong dải tần số thứ hai ($1/\sqrt{L_1 C_1} < \omega < \infty$) mạch H.2.73b tương đương với mạch H.2.73a. Do đó ta vẫn dùng được công thức tính R_{td} của mạch hai nhánh thông thường (2.137), trong đó L hoặc C của nhánh một được thay bằng các giá trị tương đương ở tần số cộng hưởng, còn điện cảm và điện dung của nhánh hai vẫn giữ nguyên.

Như vậy đối với mạch ba điểm điện cảm:

$$R_{\text{td}} = \frac{L_2}{RC_{\text{tdss}}} = p^2 \frac{L}{RC_1} \quad (2.151)$$

trong đó:
$$R = R_1 + R_2, \quad p = \frac{L_2}{L} = \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$

Với mạch ba điểm điện dung:

$$R_{td} = \frac{L_{tdss}}{RC_2} = p^2 \cdot \frac{L_1}{RC} \quad (2.152)$$

trong đó:
$$p = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{C}{C_2}$$

Các kết quả (2.151) và (2.152) cho thấy điện trở tương đương của mạch ba điểm điện cảm và điện dung có thể viết dưới dạng chung:

$$R_{td} = p^2 R'_{td} \quad (2.153)$$

trong đó: R'_{td} - là điện trở tương đương của mạch H.2.73a có cùng điện trở, còn điện cảm và điện dung là các điện cảm và điện dung tính theo mạch vòng của các mạch 3 điểm điện cảm và ba điểm điện dung.

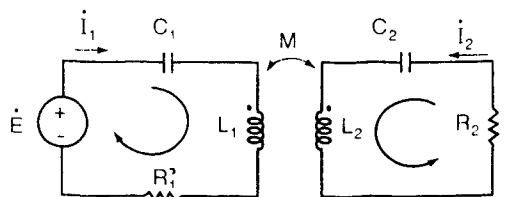
Kết quả (2.153) chứng tỏ rằng ở mạch ba điểm điện cảm và ba điểm điện dung có thể làm thay đổi điện trở tương đương của nó bằng cách thay đổi hệ số phân bố p trong khi vẫn giữ nguyên không làm thay đổi tần số cộng hưởng song song.

2.8.4 Mạch cộng hưởng ghép

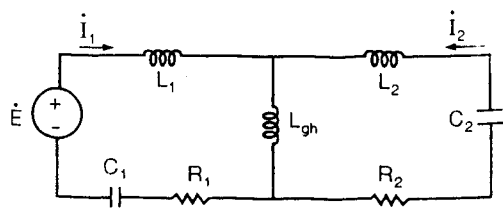
Các mạch cộng hưởng được xét ở trên là các mạch cộng hưởng đơn. Trong thực tế còn gặp các mạch cộng hưởng ghép nhằm để có đường cộng hưởng tốt hơn. Mạch ghép là những mạch có khả năng ảnh hưởng lẫn nhau. Việc xét chúng ở đây chỉ hạn chế trong trường hợp hai mạch ghép với nhau và ít nhất một trong chúng phải là mạch cộng hưởng.

Trong thực tế ta thường gặp trường hợp trong mạch chỉ có một nguồn năng lượng. Mạch được nối với nguồn năng lượng ta gọi là mạch sơ cấp. Mạch ghép với mạch sơ cấp gọi là mạch thứ cấp.

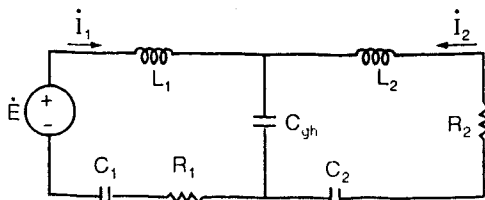
Phần tử tham gia cả trong mạch sơ cấp và thứ cấp ta gọi là phần tử ghép.



a) Mạch ghép hồ cảm



b) Mạch ghép điện cảm



c) Mạch ghép điện dung

Hình 2.74: Mạch cộng hưởng ghép

Tùy theo loại phần tử ghép mà ta chia các mạch ghép thành các loại

thông dụng như H.2.74a,b,c:

Xét mạch ghép hồ cảm H.2.74a, viết định luật K2 cho hai mạch sơ cấp và thứ cấp ta được:

$$\left. \begin{aligned} e(t) &= \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 &= M \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

Chuyển sang dạng phức ta được:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &= \frac{1}{j\omega C_1} \dot{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ 0 &= j\omega M \dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega C_2} \dot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\}$$

Hai phương trình trên có thể viết ở dạng:

$$\dot{E} = Z_{11} \dot{I}_1 + jX_{th} \dot{I}_2 \quad (2.154)$$

$$0 = jX_{th} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2$$

Đối với hai mạch H.2.74b,c. phương trình mạch cũng có dạng như là (2.154). Ta có:

$$\text{H.2.74a:} \quad X_{th} = \omega M \quad (2.155)$$

$$\text{H.2.74b:} \quad X_{th} = \omega L_{gh}$$

$$\text{H.2.74c:} \quad X_{th} = -\frac{1}{\omega C_{gh}}$$

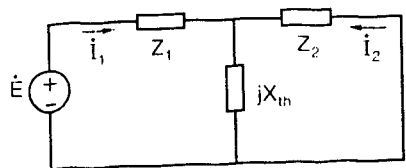
$$\text{Còn: } Z_{11} = Z_1 + jX_{th}, \text{ và: } Z_{22} = Z_2 + jX_{th} \quad (2.156)$$

$$\text{với: } \left. \begin{aligned} Z_1 &= R_1 + j \left[\omega(L_1 - M) - \frac{1}{\omega C_1} \right] \\ Z_2 &= R_2 + j \left[\omega(L_2 - M) - \frac{1}{\omega C_2} \right] \end{aligned} \right\} \text{ đối với H.2.74a} \quad (2.157)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \\ Z_2 &= R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \end{aligned} \right\} \text{ đối với H.2.74b, c} \quad (2.158)$$

Từ các phương trình trên ta thấy có thể biểu diễn cả ba mạch H.2.74 bởi một mạch tương đương có dạng tổng quát như H.2.75.

Trở kháng Z_{11} , Z_{22} của mạch sơ



Hình 2.75: Mạch tương đương tổng quát của các mạch ghép H.2.74

cấp và mạch thứ cấp có thể viết lại:

$$Z_{11} = R_1 + jX_{11} = R_1 + j\left(\omega L_{11} - \frac{1}{\omega C_{11}}\right)$$

$$Z_{22} = R_2 + jX_{22} = R_2 + j\left(\omega L_{22} - \frac{1}{\omega C_{22}}\right)$$

trong đó:

$$\left. \begin{array}{l} L_{11} = L_1; L_{22} = L_2 \\ C_{11} = C_1; C_{22} = C_2 \end{array} \right\} \quad \text{đối với H.2.74a}$$

$$\left. \begin{array}{l} L_{11} = L_1 + L_{gh}; C_{11} = C_1 \\ L_{22} = L_2 + L_{gh}; C_{22} = C_2 \end{array} \right\} \quad \text{đối với H.2.74b}$$

$$\left. \begin{array}{l} L_{11} = L_1; C_{11} = \frac{C_1 C_{gh}}{C_1 + C_{gh}} \\ L_{22} = L_2; C_{22} = \frac{C_2 C_{gh}}{C_2 + C_{gh}} \end{array} \right\} \quad \text{đối với H.2.74c}$$

• Tương tự như đối với mạch cộng hưởng đơn nối tiếp, đối với mạch sơ cấp và mạch thứ cấp ta cũng định nghĩa các khái niệm tần số cộng hưởng, độ lệch cộng hưởng tuyệt đối (xem lại các biểu thức từ (2.118) đến (2.123) ở mục 2.8.2).

Đối với mạch sơ cấp:

- tần số cộng hưởng: $\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_{11}C_{11}}}$ xác định từ điều kiện $X_{11} = 0$

- độ lệch cộng hưởng tuyệt đối: $\Delta\omega_1 = \omega - \omega_{01}$

- độ lệch cộng hưởng tổng quát: $\xi_1 = \frac{X_{11}}{R_1}$

và ta có quan hệ: $\xi_1 \approx \frac{2L_{11}}{R_1} \Delta\omega_1$, nếu: $\omega \approx \omega_{01}$ (tức: $|\Delta\omega_1| \ll \omega_{01}$)

Tương tự đối với mạch thứ cấp:

- tần số cộng hưởng: $\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_{22}C_{22}}}$ xác định từ điều kiện $X_{22} = 0$

- độ lệch cộng hưởng tuyệt đối: $\Delta\omega_2 = \omega - \omega_{02}$

- độ lệch cộng hưởng tổng quát: $\xi_2 = \frac{X_{22}}{R_2}$

nếu độ lệch cộng hưởng $\Delta\omega_2$ nhỏ thì: $\xi_2 \approx \frac{2L_{22}}{R_2} \Delta\omega_2$.

Bây giờ ta khảo sát đặc tính tần số của dẫn nạp tương hỗ Y_{21} của

mạch cộng hưởng ghép: $Y_{21} = \dot{I}_2 / \dot{E}$. Từ (2.154) ta suy ra được:

$$Y_{21} = \frac{-jX_{th}}{Z_{11}Z_{22} + X_{th}^2} \quad (2.159)$$

mà có thể viết lại ở dạng sau đây:

$$Y_{21} = -\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \cdot \frac{jA}{(1 + A^2 - \xi_1 \xi_2) + j(\xi_1 + \xi_2)} \quad (2.160)$$

trong đó: ξ_1, ξ_2 - là các độ lệch cộng hưởng tổng quát của mạch sơ cấp và mạch thứ cấp.

Còn:
$$A = \frac{X_{th}}{\sqrt{R_1 R_2}} \quad (2.161)$$

• Trường hợp đơn giản và thường gặp trong thực tế là trường hợp hai mạch cộng hưởng giống hệt nhau được ghép với nhau tức là:

$$R_1 = R_2 = R; \quad L_1 = L_2 = L; \quad C_1 = C_2 = C$$

khi đó:

$$\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0; \quad \Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \Delta\omega = \omega - \omega_0$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi; \quad A = \frac{X_{th}}{R}$$

trường hợp mạch cộng hưởng ghép hồ cảm ($X_{th} = \omega M$) và với độ lệch cộng hưởng nhỏ:

$$A = \frac{\omega M}{R} = \frac{\omega L}{R} \cdot \frac{M}{L} \approx \frac{\omega_0 L}{R} \cdot \frac{M}{L} = Qk \quad (2.162)$$

trong đó: Q - hệ số phẩm chất; $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{M}{L}$ - là hệ số ghép.

Dẫn nạp tương hỗ Y_{21} trong trường hợp này trở thành:

$$Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{E}} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{jA}{(1 + A^2 - \xi^2) + j2\xi} \quad (2.163)$$

tại $\xi = 0$ (cộng hưởng), thì: $Y_{21} = Y_0 = -\frac{1}{R} \cdot \frac{jA}{1 + A^2} \quad (2.164)$

ta có: $|Y_0| = \frac{A}{R(1 + A^2)}$; môđun $|Y_0|$ phụ thuộc giá trị của A và có trị số cực

đại là $|Y_0|_{\max} = \frac{1}{2R}$ tại $A = 1$.

Ta có:
$$f(\xi) = \frac{|Y_{21}|}{|Y_0|_{\max}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}} \quad (2.165)$$

Xét:
$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = 0 \Rightarrow \xi(\xi^2 - A^2 + 1) = 0 \quad (2.166)$$

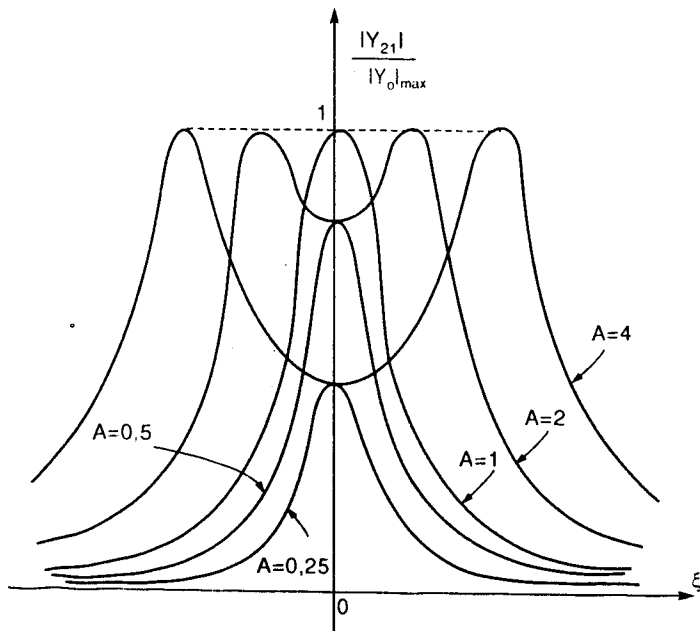
Do đó nếu:

- $A \leq 1$, phương trình (2.166) chỉ có một nghiệm $\xi = 0$.
- $A > 1$, (2.166) có ba nghiệm là: $\xi = 0, \xi = \pm\sqrt{A^2 - 1}$

Đường cong biểu diễn $\frac{|Y_{21}|}{|Y_o|_{\max}}$ theo ξ và phụ thuộc tham số A là họ

đường cong cộng hưởng (H.2.76). Từ đồ thị ta thấy khi:

- $A \leq 1$, đường cong chỉ có một bướu tại $\xi = 0$, hình dạng của nó thường được dùng do có độ bằng phẳng lớn trong dải thông và độ suy giảm lớn hơn ngoài dải thông so với mạch cộng hưởng đơn;
- $A > 1$, đường cong có hai bướu và các giá trị cực đại xảy ra tại hai điểm: $\xi = \pm\sqrt{A^2 - 1}$.



Hình 2.76: Đường cong cộng hưởng vận năng của mạch ghép

CÁC PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH MẠCH

Trong hai chương trước, mạch điện được xét thường thuộc loại đơn giản, để giải chúng ta đã chủ yếu áp dụng trực tiếp hai định luật Kirchhoff 1, 2, cũng như các phép biến đổi mạch tương đương để làm đơn giản mạch trước khi giải. Đối với các mạch phức tạp, cơ sở của việc phân tích vẫn là hai định luật Kirchhoff, tuy nhiên có những phương pháp cho phép áp dụng các định luật này một cách hệ thống hơn, hiệu quả hơn và giải mạch nhanh hơn sẽ được trình bày trong chương này. Các phương pháp, định lý, tính chất được trình bày đối với mạch điện tuyến tính ở chế độ xác lập hình sin; hầu hết có thể áp dụng cho các mạch điện tuyến tính thuần trở (chỉ chứa các phần tử điện trở, ngoài các nguồn áp, nguồn dòng) có kích thích bất kỳ hoặc các mạch tuyến tính ở chế độ xác lập DC, chỉ cần thay các khái niệm anh phức dòng áp bởi các biến tức thời, thay trở kháng bởi điện trở và dẫn nạp bởi điện dẫn.

3.1 PHƯƠNG PHÁP DÒNG NHÁNH

Giả sử mạch điện có d nút, n nhánh. Theo phương pháp dòng nhánh, đầu tiên tìm n dòng điện nhánh bằng cách viết hệ n phương trình độc lập đối với n dòng nhánh gồm:

- . $(d-1)$ phương trình viết cho $(d-1)$ nút dùng định luật K1.
- . $(n-d+1)$ phương trình viết cho $(n-d+1)$ vòng hoặc mắt lưới (nếu là mạch phẳng) dùng định luật K2.

Giải hệ n phương trình đại số tuyến tính này ta tìm được dòng điện trong các nhánh. Từ đó có thể suy ra điện áp trên các phần tử, các nhánh v.v.

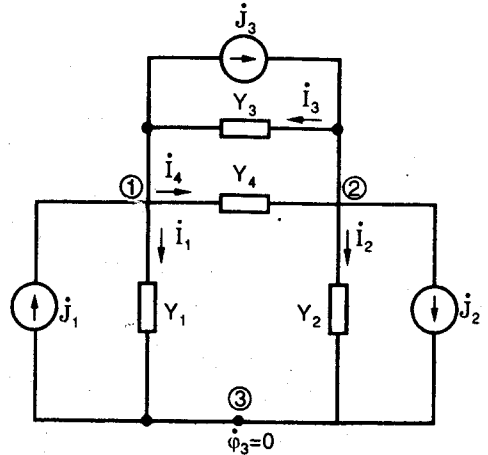
Trong hai chương trước chúng ta đã dùng phương pháp dòng nhánh để giải một số mạch điện trong các ví dụ 2, 3, 4, 5 và 6 ở mục 1.6 chương một và ví dụ 1, 2 ở mục 2.4 chương hai.

3.2 PHƯƠNG PHÁP THỂ NÚT

- Chọn một nút trong mạch và gọi nó là nút gốc (có thể chọn một nút

tùy ý làm nút gốc, nhưng thường người ta chọn nút có nhiều nhánh nối tới nhất làm nút gốc).

Ví dụ trên mạch điện H.3.1, nút 3 được chọn làm nút gốc. Điện thế (hoặc gọi tắt là thế) của một nút được định nghĩa là điện áp của nút đó so với nút gốc: Vậy thế của nút gốc bằng không. Từ định luật K2 (mà về mặt ý nghĩa vật lý nói lên tính chất thế của trường điện) suy ra có thể biểu diễn điện áp giữa hai nút i và j bằng hiệu thế nút i với thế nút j :



Hình 3.1

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{\text{nút gốc}} = 0 & (3.1) \\ \dot{U}_{ij} = \dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_j & (3.2) \end{cases}$$

Thật vậy có thể nghiệm lại rằng với việc biểu diễn các điện áp qua hiệu thế giữa hai nút như (3.2) thì định luật K2 được tự động làm thỏa mãn.

Ví dụ xét sự cân bằng áp trong vòng gồm các dẫn nạp Y_1, Y_3, Y_2 ở H.3.1 ta có: $u_{12} + u_{23} + u_{31} = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - 0) + (0 - \varphi_1) = 0$ nghĩa là thỏa định luật K2 viết cho vòng đó.

• Theo phương pháp thế nút, các biến cần tìm đầu tiên là $(d-1)$ thế của $(d-1)$ nút (trừ nút gốc). Dùng định luật K1 viết $(d-1)$ phương trình mà các ẩn số là $(d-1)$ thế nút cho $(d-1)$ nút. Giải hệ phương trình đó ta tìm được các thế nút. Từ đó suy ra điện áp, rồi dòng điện trên các nhánh. Số phương trình phải giải ở phương pháp thế nút này là $(d-1)$ ít hơn số phương trình phải giải ở phương pháp dòng nhánh vì $(d-1) < n$.

Ví dụ xét mạch điện H.3.1 với nút 3 chọn làm nút gốc.

Ta lập hai phương trình K1 đối với hai biến là thế $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ của nút 1, 2.

Viết K1 cho nút 1:

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = \dot{J}_1 - \dot{J}_3$$

thay:

$$\dot{I}_1 = Y_1 \dot{U}_{13} = Y_1 \dot{\varphi}_1, \quad \dot{I}_4 = Y_4 \dot{U}_{12} = Y_4 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$$

và

$$\dot{I}_3 = Y_3 \dot{U}_{21} = Y_3 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$$

Viết K1 cho nút 2: $\dot{I}_2 + \dot{I}_3 - \dot{I}_4 = -\dot{J}_2 + \dot{J}_3$

Thay $\dot{I}_2 = Y_2 \dot{U}_{23} = Y_2 \dot{\phi}_2$, $\dot{I}_3 = Y_3(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)$ và $\dot{I}_4 = Y_4(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)$

ta được $-(Y_3 + Y_4)\dot{\phi}_1 + (Y_2 + Y_3 + Y_4)\dot{\phi}_2 = -\dot{J}_2 + \dot{J}_3$ (3.3b)

Hệ 2 phương trình (3.3a) và (3.3b) có thể trình bày ở dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 + Y_4 & -(Y_3 + Y_4) \\ -(Y_3 + Y_4) & Y_2 + Y_3 + Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{J}_1 - \dot{J}_3 \\ -\dot{J}_2 + \dot{I}_3 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Ta rút ra các nhận xét sau:

- Các phương trình (3.3a), (3.3b), (3.4) không phụ thuộc vào việc chọn chiều dương của dòng điện trong các nhánh.

- Trong phương trình K1 cho nút 1 tức phương trình (3.3a): hệ số của $\dot{\phi}_1$ là $(Y_1 + Y_3 + Y_4)$ bằng tổng các dẫn nạp của các nhánh nối với nút 1; hệ số của $\dot{\phi}_2$ là $-(Y_3 + Y_4)$ bằng số đối của tổng các dẫn nạp của các nhánh nối giữa nút 1 với nút 2; số hạng ở vế phải là $(\dot{J}_1 - \dot{J}_3)$ bằng tổng đại số của nguồn dòng chảy vào nút 1.

Trong phương trình K1 viết cho nút 2 tức (3.3b): hệ số của $\dot{\phi}_2$ là $(Y_2 + Y_3 + Y_4)$ bằng tổng dẫn nạp các nhánh nối với nút 2; hệ số của $\dot{\phi}_1$ là $-(Y_3 + Y_4)$ bằng số đối của tổng dẫn nạp các nhánh nối giữa nút 2 và nút 1; số hạng ở vế phải là $(-J_2 + J_3)$ bằng tổng đại số các nguồn dòng chảy vào nút 2.

Trong trường hợp tổng quát đối với mạch có d nút, người ta chứng minh được hệ phương trình đối với $(d-1)$ thế nút có dạng sau:

[illegible]

hoặc trình bày ở dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \dots & Y_{1,d-1} \\ Y_{21} & Y_{22} \dots & Y_{2,d-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{d-1,1} & Y_{d-1,2} \dots & Y_{d-1,d-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_{d-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{J}_{d1} \\ \dot{J}_{d2} \\ \vdots \\ \dot{J}_{dd-1} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

trong đó

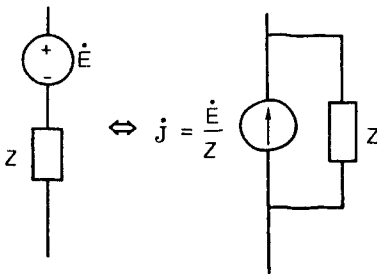
$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{ii} (i=1+d-1) = \text{tổng các dẫn nạp của các nhánh nối với nút } i \\ Y_{ij} = Y_{ji} (i=1+d-1, j=1+d-1, j \neq i) = - (\text{tổng các dẫn nạp của các nhánh} \\ \text{nối giữa 2 nút } i \text{ và } j) \\ \dot{J}_{di} = \text{tổng đại số các nguồn dòng chảy vào nút } i, \text{ mang dấu "+"} \\ \text{nếu nguồn dòng chảy vào nút } i, \text{ ngược lại mang dấu "-"} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Trong trường hợp mạch có chứa nguồn áp mắc nối tiếp với một trở kháng thì ta có thể biến đổi chúng thành nguồn dòng như H.3.2 trước khi dùng quy tắc (3.7).

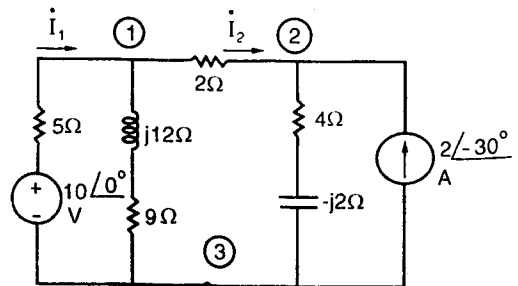
Ví dụ 3.1: Tìm các dòng điện $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ trong mạch điện H.3.3 dùng phương pháp thế nút.

Giải

Biến đổi nguồn áp $10\angle 0^\circ \text{ V}$ nối tiếp điện trở 5Ω thành nguồn dòng $\frac{10\angle 0^\circ}{5} = 2\angle 0^\circ \text{ A}$ mắc song song điện trở 5Ω , ta được H.3.4.



Hình 3.2



Hình 3.3

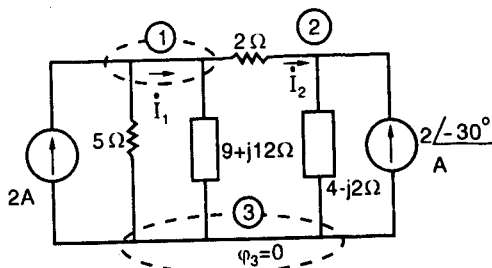
Chọn nút 3 làm nút gốc. Theo quy tắc (3.7) ta viết được hệ phương trình K1 đối với các biến thế nút $\dot{\varphi}_1$ và $\dot{\varphi}_2$ như sau:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9+j12} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4-j2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2\angle 30^\circ \end{bmatrix}$$

Nhận xét: ma trận đối xứng

Rút gọn lại:

$$\begin{bmatrix} 0,74 - j0,0533 - 0,5 & \\ -0,5 & 0,7 + j0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1,732 - j \end{bmatrix}$$



Hình 3.4

Suy ra:

$$\dot{\phi}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -0,5 \\ 1,732 - j & 0,7 + j0,1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,74 - j0,0533 & -0,5 \\ -0,5 & 0,7 + j0,1 \end{vmatrix}} = \frac{2,266 - j0,3}{0,273 + j0,0367} = 8 - j2,17V$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0,74 - j0,0533 & 2 \\ -0,5 & 1,732 - j \end{vmatrix}}{0,273 + j0,0367} = \frac{2,228 - j0,832}{0,273 + j0,0367} = 7,6 - j4,07V$$

Từ đó:

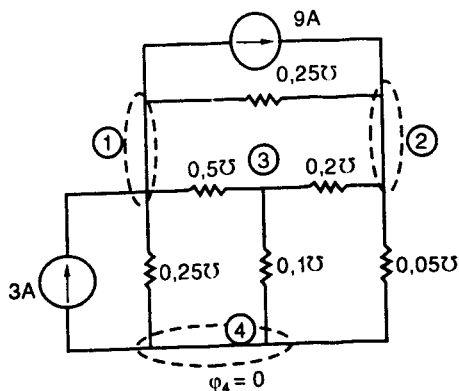
$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{12}}{2} = \frac{\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2}{2} = 0,2 + j0,95 = 0,97\angle 78^\circ 11A$$

$$\dot{I}_1 = 2 + \frac{\dot{U}_{31}}{5} = 2 - \frac{\dot{\phi}_1}{5} = 0,4 + j0,434 = 0,59\angle 47^\circ 33A$$

Ví dụ 3.2: Xét mạch điện DC (dòng không đổi) như H.3.5, tính công suất phát bởi mỗi nguồn dòng dùng phương pháp thế nút.

Giải

Chọn nút 4 làm nút gốc. Viết hệ phương trình K1 đối với các biến thế nút ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 theo quy tắc (3.7) ta được:



Hình 3.5

$$\begin{bmatrix} 0,25+0,5+0,25 & -0,25 & -0,5 \\ -0,25 & 0,05+0,2+0,25 & -0,2 \\ -0,5 & -0,2 & 0,5+0,1+0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

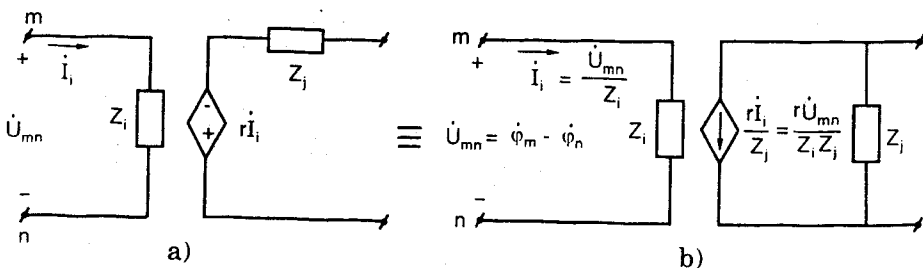
Nhận xét. ma trận đối xứng

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 - 0,25\varphi_2 - 0,5\varphi_3 = -6 \\ -0,25\varphi_1 + 0,5\varphi_2 - 0,2\varphi_3 = 9 \\ -0,5\varphi_1 - 0,2\varphi_2 + 0,8\varphi_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ba phương trình trên ta được: $\varphi_1 = 4\text{V}$; $\varphi_2 = 23,3\text{V}$; $\varphi_3 = 8,33\text{V}$.

Công suất phát bởi nguồn dòng 3A là: $p_1 = 3u_{14} = 3\varphi_1 = 12\text{W}$.

Công suất phát bởi nguồn dòng 9A là: $p_2 = 9u_{21} = 9(\varphi_2 - \varphi_1) = 173,7\text{W}$.



Hình 3.6

• Trường hợp mạch điện có chứa các nguồn phụ thuộc, có thể dùng các phép biến đổi mạch tương đương (ví dụ như H.3.6) đưa chúng về dạng nguồn dòng phụ thuộc áp. Khi áp dụng quy tắc (3.7) có thể đối xử các nguồn phụ thuộc như là nguồn độc lập.

Ví dụ 3.3: Tìm $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ ở mạch

H.3.7 dùng phương pháp thế nút.

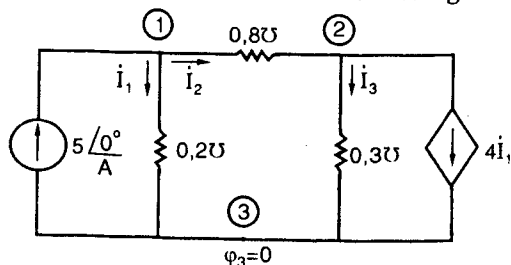
Giải

Chọn nút 3 làm nút gốc.

Mạch có nguồn dòng phụ thuộc

$$4\dot{I}_1 = 4 \times 0,2 \times \dot{U}_{13} = 0,8\dot{\varphi}_1$$

Áp dụng quy tắc (3.7), đối xử nguồn dòng phụ thuộc như là nguồn dòng độc lập ta được:



Hình 3.7

$$\begin{bmatrix} 0,8+0,2 & -0,8 \\ -0,8 & 0,8+0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -0,8\dot{\varphi}_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_1 - 0,8\dot{\varphi}_2 &= 5 \\ -0,8\dot{\varphi}_1 + 1,1\dot{\varphi}_2 &= -0,8\dot{\varphi}_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_1 - 0,8\dot{\varphi}_2 &= 5 \\ 1,1\dot{\varphi}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ hoặc dạng ma trận: } \begin{bmatrix} 1-0,8 & \\ 0 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nhận xét: khi có nguồn phụ thuộc, ma trận hệ số của thế nút tức ma trận $\begin{bmatrix} 1-0,8 & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ không đối xứng.

Từ hai phương trình trên suy ra: $\dot{\varphi}_1 = 5V$; $\dot{\varphi}_2 = 0V$

Do đó:

$$\dot{I}_1 = 0,2\dot{\varphi}_1 = 1A; \dot{I}_2 = 0,8\dot{U}_{12} = 0,8(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = 4A; \dot{I}_3 = 0,3\dot{\varphi}_2 = 0A$$

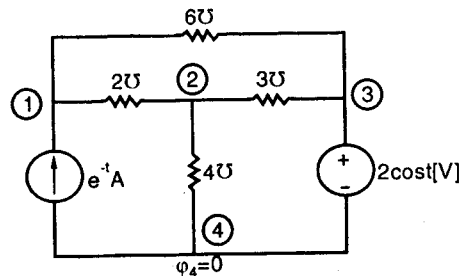
* Ta xét trường hợp mạch có nhánh chứa nguồn áp lý tưởng.

Ví dụ 3.4: Tìm thế của các nút ở mạch điện H.3.8 dùng phương pháp thế nút.

Giải

Mạch có một nhánh chỉ chứa nguồn áp $2 \cos t$ [V] (nguồn áp lý tưởng) không thể biến đổi thành nguồn dòng được.

Ta chọn một trong hai đầu của nguồn áp lý tưởng làm nút gốc, ở đây ta chọn nút 4.



Hình 3.8

$$\text{Vậy } \varphi_3 = 2 \cos t \text{ [V]} \quad (1)$$

Hai biến còn lại cần tìm là φ_1 và φ_2 , do đó ta chỉ cần dùng quy tắc (3.7) viết hai phương trình K1 cho hai nút 1 và 2 (ta tránh nút 3 là nút có nối với nhánh chứa nguồn áp lý tưởng $2 \cos t$ [V]):

$$\begin{cases} (2+6)\varphi_1 - 2\varphi_2 - 6\varphi_3 = e^{-t} & (2) \leftarrow \text{Phương trình K1 viết cho nút 1} \\ -2\varphi_1 + (2+3+4)\varphi_2 - 3\varphi_3 = 0 & (3) \leftarrow \text{Phương trình K1 viết cho nút 2} \end{cases}$$

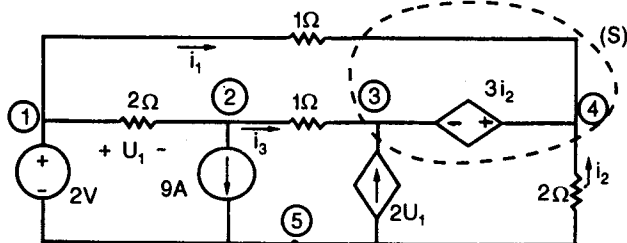
Từ 3 phương trình (1), (2), (3) suy ra:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{9}{68}e^{-t} + \frac{30}{17}\cos t [\text{V}] \\ \varphi_2 = \frac{1}{34}e^{-t} + \frac{18}{17}\cos t [\text{V}] \\ \varphi_3 = 2\cos t [\text{V}] \end{cases}$$

Ví dụ 3.5: Tìm thế của các nút ở mạch điện DC (H.3.9) dùng phương pháp thế nút.

Giải

Chọn một trong hai đầu của nguồn áp lý tưởng 2V làm nút gốc. Ví dụ chọn nút 5 làm nút gốc. Khi đó $\varphi_5 = 0$, $\varphi_1 = 2\text{V}$.



Hình 3.9

Vậy ta có 3 biến $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ chưa biết nên cần ba phương trình.

Chú ý nguồn áp lý tưởng ($3i_2$) mắc giữa nút 4 và 3 nên:

$$\varphi_4 - \varphi_3 = 3i_2 = 3 \cdot \frac{u_{54}}{2} = -1,5\varphi_4$$

$$\Rightarrow 2,5\varphi_4 - \varphi_3 = 0. \quad (1)$$

Vậy ta chỉ còn cần thêm hai phương trình nữa.

Dùng quy tắc (3.7) viết phương trình K1 cho nút 2 ta được:

$$-\frac{1}{2}\varphi_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right)\varphi_2 - \frac{1}{1}\varphi_3 = -9 \quad (2)$$

Ta tránh viết luật K1 cho các nút 1, 3 và 4 mà có nối với các nhánh chứa nguồn áp lý tưởng. Thay vào đó ta chọn viết định luật K1 cho mặt kín (S) là mặt mà các nhánh đi vào nó không chứa nguồn áp lý tưởng:

$$i_1 + i_3 + i_2 + 2u_1 = 0 \leftarrow \text{định luật K1 cho mặt kín S.}$$

thay $i_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{1}$, $i_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{1}$, $i_2 = \frac{-\varphi_4}{2}$, $u_1 = \varphi_1 - \varphi_2$ ta được:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_4}{1} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{1} - \frac{\varphi_4}{2} + 2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (3)$$

Từ ba phương trình (1), (2), (3), suy ra:

$$\varphi_1 = 2\text{V}, \varphi_2 = -2\text{V}, \varphi_3 = 5\text{V}, \varphi_4 = 2\text{V}$$

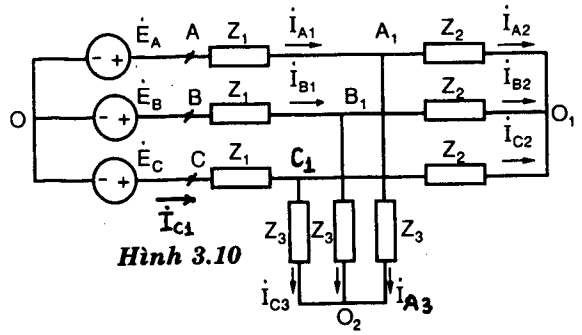
Ví dụ 3.6: Xét mạch điện như H.3.10 trong đó

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$$

a) Thử dùng phương pháp thế nút tìm $\dot{\varphi}_{O_1}, \dot{\varphi}_{O_2}$.

Chọn $\dot{\varphi}_O = 0$ (O là nút gốc).

Nhận xét.



Hình 3.10

b) Áp dụng bằng số với: $\dot{E}_A = 120 \angle 90^\circ \text{V}$, $\dot{E}_B = 120 \angle -30^\circ \text{V}$,

$\dot{E}_C = 120 \angle -150^\circ \text{V}$ và $Z_1 = 2 + j3\Omega$, $Z_2 = 3 + j3\Omega$, $Z_3 = -j3\Omega$.

Tính $\dot{\varphi}_{A_1}, \dot{\varphi}_{B_1}, \dot{\varphi}_{C_1}$ và dòng điện trong các nhánh.

Giải

a) Ta có: $\dot{\varphi}_A = \dot{E}_A$, $\dot{\varphi}_B = \dot{E}_B$, $\dot{\varphi}_C = \dot{E}_C$.

Đặt $Y_\Sigma = Y_1 + Y_2 + Y_3$ với $Y_1 = \frac{1}{Z_1}$, $Y_2 = \frac{1}{Z_2}$, $Y_3 = \frac{1}{Z_3}$

Viết phương trình K1 cho 5 nút A_1, B_1, C_1, O_1, O_2 ta được:

$$Y_\Sigma \dot{\varphi}_{A_1} - Y_2 \dot{\varphi}_{O_1} - Y_3 \dot{\varphi}_{O_2} = Y_1 \dot{E}_A \quad (1)$$

$$Y_\Sigma \dot{\varphi}_{B_1} - Y_2 \dot{\varphi}_{O_1} - Y_3 \dot{\varphi}_{O_2} = Y_1 \dot{E}_B \quad (2)$$

$$Y_\Sigma \dot{\varphi}_{C_1} - Y_2 \dot{\varphi}_{O_1} - Y_3 \dot{\varphi}_{O_2} = Y_1 \dot{E}_C \quad (3)$$

$$3Y_2 \dot{\varphi}_{O_1} - Y_2 \dot{\varphi}_{A_1} - Y_2 \dot{\varphi}_{B_1} - Y_2 \dot{\varphi}_{C_1} = 0 \quad (4)$$

$$3Y_3 \dot{\varphi}_{O_2} - Y_3 \dot{\varphi}_{A_1} - Y_3 \dot{\varphi}_{B_1} - Y_3 \dot{\varphi}_{C_1} = 0 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4)} \Rightarrow \dot{\varphi}_{O_1} = \frac{1}{3}(\dot{\varphi}_{A_1} + \dot{\varphi}_{B_1} + \dot{\varphi}_{C_1}) \quad (6)$$

$$\text{Từ (5)} \Rightarrow \dot{\varphi}_{O_2} = \frac{1}{3}(\dot{\varphi}_{A_1} + \dot{\varphi}_{B_1} + \dot{\varphi}_{C_1}) \quad (7)$$

Cộng (1), (2) và (3) lại ta được:

$$Y_\Sigma (\dot{\varphi}_{A_1} + \dot{\varphi}_{B_1} + \dot{\varphi}_{C_1}) - 3Y_2 \dot{\varphi}_{O_1} - 3Y_3 \dot{\varphi}_{O_2} = Y_1 (\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C) \quad (8)$$

Thay $\dot{\varphi}_{O_1}, \dot{\varphi}_{O_2}$ bởi (6) và (7) vào (8) ta suy được

$$\dot{\phi}_{A_1} + \dot{\phi}_{B_1} + \dot{\phi}_{C_1} = \dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C \quad (9)$$

Thay (9) vào (6), (7) ta được:

$$\dot{\phi}_{o_1} = \dot{\phi}_{o_2} = \frac{\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C}{3} = 0 \quad (10)$$

Vì các nút O, O₁, O₂ có cùng thế nên có thể nối chúng lại với nhau thành một mà không làm thay đổi tình trạng của mạch.

Từ đó ta có thể tách sơ đồ H.3.10 thành ba sơ đồ H.3.11a, b, c.

Để tính $\dot{\phi}_{A_1}, \dot{I}_{A_1}, \dot{I}_{A_2}, \dot{I}_{A_3}$ có thể dùng sơ đồ H.3.11a; để tính $\dot{\phi}_{B_1}, \dot{I}_{B_1}, \dot{I}_{B_2}, \dot{I}_{B_3}$ có thể dùng sơ đồ H.3.11b, và sơ đồ H.3.11c được dùng để tính $\dot{\phi}_{C_1}, \dot{I}_{C_1}, \dot{I}_{C_2}, \dot{I}_{C_3}$. Các sơ đồ H.3.11 thường được gọi là các sơ đồ một sợi, và phương pháp như trên gọi là phương pháp một sợi.

b) Vì:

$$\begin{aligned} \dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C \\ = 120 \angle 90^\circ + 120 \angle -30^\circ + 120 \angle -150^\circ = 0^\circ \end{aligned}$$

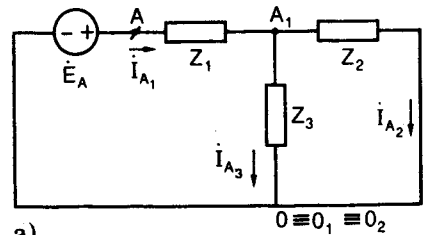
nên có thể áp dụng kết quả câu a.

Ta dùng sơ đồ một sợi H.3.11a để tính $\dot{\phi}_{A_1}, \dot{I}_{A_1}, \dot{I}_{A_2}, \dot{I}_{A_3}$. Ta có:

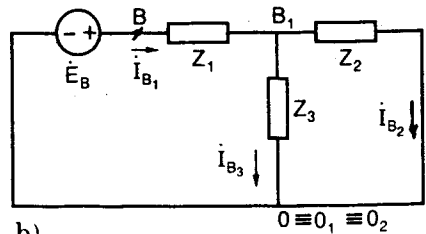
$$\dot{I}_{A_1} = \frac{\dot{E}_A}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{120 \angle 90^\circ}{(2 + j3) + \frac{(3 + j3)(-j3)}{(3 + j3) + (-j3)}} = \frac{120 \angle 90^\circ}{(2 + j3) + (3 - j3)} = 24 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$\dot{\phi}_{A_1} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \cdot \dot{I}_{A_1} = (3 - j3)(j24) = 72(1 + j) = 72\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ V}$$

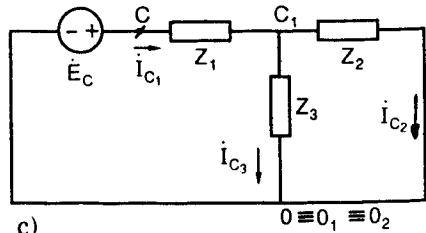
$$I_{A_2} = \frac{\dot{\phi}_{A_1}}{Z_2} = \frac{72(1 + j)}{3 + j3} = 24 \text{ A}$$



a)



b)



c)

Hình 3.11

$$\dot{I}_{A_3} = \frac{\dot{\Phi}_{A_1}}{Z_3} = \frac{72(1+j)}{-j3} = 24(-1+j)A = 24\sqrt{2}\angle 135^\circ A$$

Bởi vì $\dot{E}_B$ có biên độ bằng với $\dot{E}_A$ nhưng chậm pha sau $\dot{E}_A$ một góc 120° , nên suy ra $\dot{I}_{B_1}, \dot{I}_{B_2}, \dot{I}_{B_3}, \dot{\Phi}_{B_1}$ theo thứ tự có biên độ bằng nhưng chậm pha sau $\dot{I}_{A_1}, \dot{I}_{A_2}, \dot{I}_{A_3}, \dot{\Phi}_{A_1}$ một góc 120° , nghĩa là:

$$\dot{I}_{B_1} = \dot{I}_{A_1} e^{-j120^\circ} = 24\angle -30^\circ A$$

$$\dot{I}_{B_2} = \dot{I}_{A_2} e^{-j120^\circ} = 24\angle -120^\circ A$$

$$\dot{I}_{B_3} = \dot{I}_{A_3} e^{-j120^\circ} = 24\sqrt{2}\angle 15^\circ A \text{ và } \dot{\Phi}_{B_1} = \dot{\Phi}_{A_1} e^{-j120^\circ} = 72\sqrt{2}\angle -75^\circ V$$

Tương tự vì $\dot{E}_C$ có biên độ bằng nhưng nhanh pha hơn $\dot{E}_A$ góc 120° nên suy ra $\dot{I}_{C_1}, \dot{I}_{C_2}, \dot{I}_{C_3}, \dot{\Phi}_{C_1}$ theo thứ tự có biên độ bằng nhưng nhanh pha hơn $\dot{I}_{A_1}, \dot{I}_{A_2}, \dot{I}_{A_3}, \dot{\Phi}_{A_1}$ một góc 120° , nghĩa là:

$$\dot{I}_{C_1} = \dot{I}_{A_1} e^{j120^\circ} = 24\angle 210^\circ = 24\angle -150^\circ A$$

$$\dot{I}_{C_2} = \dot{I}_{A_2} e^{j120^\circ} = 24\angle 120^\circ A$$

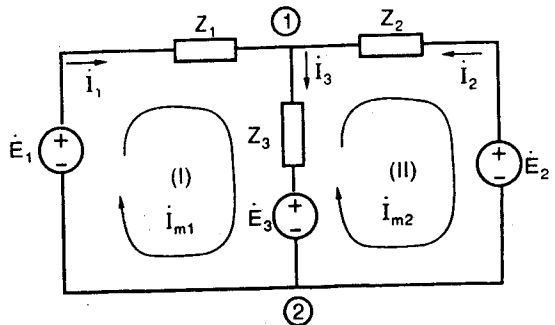
$$\dot{I}_{C_3} = \dot{I}_{A_3} e^{j120^\circ} = 24\sqrt{2}\angle 255^\circ = 24\sqrt{2}\angle -105^\circ A$$

$$\text{và } \dot{\Phi}_{C_1} = \dot{\Phi}_{A_1} e^{j120^\circ} = 72\sqrt{2}\angle 165^\circ V$$

3.3 PHƯƠNG PHÁP DÒNG MẮT LƯỚI

Phương pháp này chỉ áp dụng được cho các mạch điện phẳng mà ở đó ta có thể định nghĩa khái niệm mắt lưới.

* Theo phương pháp này, đối với mỗi mắt lưới ta gán cho nó một biến (không có ý nghĩa vật lý) gọi là dòng điện mắt lưới, tưởng tượng chảy dọc theo các nhánh thuộc mắt lưới. Ví dụ ở mạch điện H.3.12 ứng với hai mắt lưới ta gán cho chúng hai biến gọi là



Hình 3.12

dòng mất lưới $\dot{I}_{m1}$ và $\dot{I}_{m2}$.

Chiều của các dòng mất lưới có thể chọn tùy ý, nhưng thường ta chọn chúng cùng chiều với nhau (hoặc cùng chiều kim đồng hồ hoặc cùng ngược chiều kim đồng hồ).

Từ định luật Kirchhoff 1 (về tính liên tục của dòng điện), người ta thấy rằng có thể biểu diễn dòng điện chảy trong một nhánh bằng tổng đại số các dòng mất lưới chảy qua nhánh đó:

$$\dot{I}_s = \pm \dot{I}_{m1} \pm \dot{I}_{mj} \quad (3.8)$$

trong đó $\dot{I}_s$ là dòng điện chảy trên nhánh s chung cho hai mất lưới thứ i và j , dòng điện mất lưới nào cùng chiều với dòng nhánh sẽ mang dấu "+", ngược chiều sẽ mang dấu "-".

Ví dụ ở mạch H.3.12 ta sẽ có:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_3 &= \dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2} \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_{m1} \\ \dot{I}_2 &= -\dot{I}_{m2} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Do tính chất liên tục của dòng điện mất lưới, một dòng điện mất lưới chảy vào một nút nào đó thì sau đó lại chảy ra khỏi nút đó nghĩa là dòng điện mất lưới luôn thỏa luật K1 tại một nút mà nó chảy qua. Vì vậy, nếu biểu diễn các dòng điện nhánh theo các dòng mất lưới bởi (3.8) thì định luật K1 sẽ được tự động thỏa mãn. Ví dụ, xét sự cân bằng của các dòng nhánh tại nút 1:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 &= \dot{I}_{m1} + (-\dot{I}_{m2}) - (\dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2}) \\ &= 0 \text{ thỏa luật K1.} \end{aligned}$$

* Với mạch có d nút, n nhánh thì số mất lưới là $n-d+1$.

Theo phương pháp dòng mất lưới, các biến cần tìm trước tiên là $(n-d+1)$ dòng điện mất lưới. Viết $(n-d+1)$ phương trình mà các ẩn số là $(n-d+1)$ dòng mất lưới cho $(n-d+1)$ mất lưới dùng định luật K2. Giải hệ phương trình đó ta tìm được các dòng mất lưới. Từ (3.8) sẽ suy ra được các dòng điện nhánh v.v.

Ví dụ, xét mạch điện H.3.12. Ta lập hai phương trình K2 đối với hai biến là dòng mất lưới $\dot{I}_{m1}, \dot{I}_{m2}$.

Viết K2 cho mất lưới (I):

thay

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{m1}, \dot{I}_3 = \dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2} \text{ vào ta được:}$$

$$(Z_1 + Z_3) \dot{I}_{m1} - Z_3 \dot{I}_{m2} = \dot{E}_1 - \dot{E}_3 \quad (3.10a)$$

$$-Z_2 \dot{I}_2 - Z_3 \dot{I}_3 = \dot{E}_3 - \dot{E}_2$$

thay $\dot{i}_2 = -\dot{i}_{m2}, \dot{i}_3 = \dot{i}_{m1} - \dot{i}_{m2}$ vào ta được:

$$-Z_3 \dot{I}_{m1} + (Z_2 + Z_3) \dot{I}_{m2} = \dot{E}_3 - \dot{E}_2 \quad (3.10b)$$

Hệ hai phương trình (3.10a), (3.10b) có thể viết ở dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{m1} \\ \dot{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 - \dot{E}_3 \\ \dot{E}_3 - \dot{E}_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Trong phương trình K2 viết cho mắt lưới (I) tức phương trình (3.10a):

hệ số của $\dot{I}_{m1}$ là $(Z_1 + Z_3)$ bằng tổng các trở kháng của các nhánh thuộc mắt lưới (I); hệ số của $\dot{I}_{m2}$ là $(-Z_3)$ bằng số đối của trở kháng của nhánh chung cho hai mắt lưới (I) và (II); số hạng ở vế phải là $(\dot{E}_1 - \dot{E}_3)$ bằng tổng đại số các nguồn sức điện động thuộc mắt lưới (I).

Trong phương trình K2 viết cho mắt lưới (II) tức (3.10b): hệ số của $\dot{I}_{m2}$ là $(Z_2 + Z_3)$ bằng tổng các trở kháng thuộc mắt lưới (II); hệ số của $\dot{I}_{m1}$ là $(-Z_3)$ bằng số đối của trở kháng nhánh chung giữa hai mắt lưới (I) và (II); số hạng ở vế phải là $(\dot{E}_1 - \dot{E}_2)$ bằng tổng đại số các sức điện động thuộc mắt lưới (II).

Trong trường hợp tổng quát đối với mạch có d nút, n nhánh, số mắt lưới $L = n - d + 1$ người ta chứng minh được hệ phương trình đối với $(n - d + 1)$ dòng mắt lưới có dạng sau:

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{i}_{m1} + Z_{12}\dot{i}_{m2} + \dots + Z_{1L}\dot{i}_{mL} = \dot{E}_{m1} & \leftarrow \text{phương trình K2 viết cho mắt lưới 1} \\ Z_{21}\dot{i}_{m1} + Z_{22}\dot{i}_{m2} + \dots + Z_{2L}\dot{i}_{mL} = \dot{E}_{m2} & \leftarrow -nt- \quad \text{mắt lưới 2} \\ \vdots & \\ Z_{L1}\dot{i}_{m1} + Z_{L2}\dot{i}_{m2} + \dots + Z_{LL}\dot{i}_{mL} = \dot{E}_{mL} & \leftarrow -nt- \quad \text{mắt lưới L} \end{cases}$$

(3.12)

hoặc ở dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \dots Z_{1L} \\ Z_{21} & Z_{22} \dots Z_{2L} \\ \dots\dots\dots \\ Z_{L1} & Z_{L2} \dots Z_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{m1} \\ \dot{I}_{m2} \\ \vdots \\ \dot{I}_{mL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{m1} \\ \dot{E}_{m2} \\ \vdots \\ \dot{E}_{mL} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

trong đó:

Z_{ii} = tổng các trở kháng của các nhánh thuộc mắt lưới i ($i = 1 \div L$)

$Z_{ij} = Z_{ji}$ ($i \neq j$) = $\pm$ (tổng các trở kháng của các nhánh chung giữa hai mắt lưới i và j) ($i = 1 \div L, j = 1 \div L$) lấy dấu “+” nếu trên các nhánh chung hai dòng mắt lưới chảy cùng chiều nhau, lấy dấu “-” trong trường hợp ngược lại. Nếu chúng ta chọn tất cả các dòng mắt lưới ~~có~~ cùng chiều với nhau thì trên nhánh chung giữa hai mắt lưới hai dòng điện mắt lưới luôn chảy ngược chiều nhau, do đó luôn lấy dấu “-”.

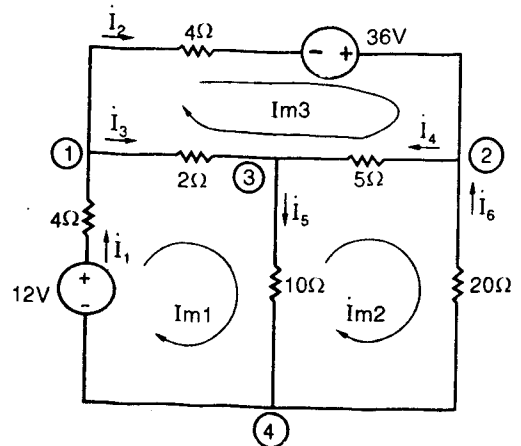
$\dot{E}_{mi}$ = tổng đại số các sức điện động thuộc mắt lưới i , nếu chiều dòng mắt lưới i đi từ cực - đến cực + của một nguồn sức điện động thì nguồn sức điện động đó mang dấu “+”, ngược lại lấy dấu “-”. (3.14)

Trong trường hợp mạch có chứa nguồn dòng mắc song song một trở kháng thì có thể dùng phép biến đổi H.3.2 để biến thành nguồn áp trước khi lập hệ phương trình (3.12).

Ví dụ 3.7: Giải lại ví dụ 3.2 ở mục 3.2 (mạch điện H.3.5) dùng phương pháp dòng mắt lưới.

Giải

Biến đổi các nguồn dòng thành các nguồn áp, thay các trị số điện dẫn (S) bởi trị số điện trở (Ω) ta được mạch như H.3.13. Mạch có ba mắt lưới được gán cho ba dòng mắt lưới I_{m1}, I_{m2}, I_{m3} có chiều được chọn như hình vẽ. Viết hệ phương trình K2 đối với I_{m1}, I_{m2}, I_{m3} dùng quy tắc (3.14) ta được:



Hình 3.13

$$\begin{bmatrix} 4+2+10 & -10 & -2 \\ -10 & 10+5+20 & -5 \\ -2 & -5 & 4+2+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Nhận xét: ma trận đối xứng

$$\Rightarrow \begin{cases} 16I_{m1} - 10I_{m2} - 2I_{m3} = 12 \\ -10I_{m1} + 35I_{m2} - 5I_{m3} = 0 \\ -2I_{m1} - 5I_{m2} + 11I_{m3} = 36 \end{cases}$$

Giải hệ ba phương trình trên ta tìm được:

$$I_{m1} = 2A; I_{m2} = \frac{7}{6}A; I_{m3} = \frac{25}{6}A$$

Suy ra dòng điện trên các nhánh ở mạch H.3.13:

$$I_1 = I_{m1} = 2A; I_2 = I_{m3} = \frac{25}{6}A; I_3 = I_{m1} - I_{m3} = 2 - \frac{25}{6} = -\frac{13}{6}A$$

$$I_4 = I_{m3} - I_{m2} = \frac{25}{6} - \frac{7}{6} = 3A; I_5 = I_{m1} - I_{m2} = 2 - \frac{7}{6} = \frac{5}{6}A$$

$$I_6 = -I_{m2} = -\frac{7}{6}A$$

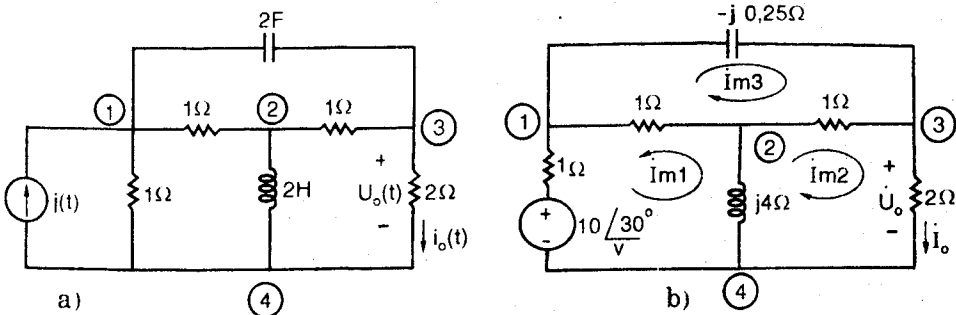
$$u_{21} = 36 - 4I_2 = 36 - 4 \times \frac{25}{6} = \frac{58}{3}V$$

$\Rightarrow$ công suất phát bởi nguồn dòng 9A là: $p_1 = 9u_{21} = 174W$

$$u_{14} = -4I_1 + 12 = -4 \times 2 + 12 = 4V$$

$\Rightarrow$ công suất phát bởi nguồn dòng 3A là: $p_2 = 3u_{14} = 12W$

Ví dụ 3.8: Xét mạch điện H.3.14a trong đó nguồn dòng $j(t) = 10 \cos(2t + 30^\circ)$. Tìm $u_o(t)$ ở xác lập.



Hình 3.14

Giải

Tần số góc $\omega = 2\text{rad/s}$. Biên độ phức của $j(t)$ là $\dot{J} = 10 \angle 30^\circ A$

Trở kháng của $2F$ là $-j\frac{1}{2 \times 2} = -j0,25\Omega$

$2H$ là $j2 \times 2 = j4\Omega$.

Sơ đồ mạch phức của mạch điện H.3.14a được vẽ trên H.3.14b trong đó nguồn dòng $\dot{J}$ đã được biến đổi thành nguồn áp $\dot{E} = 1 \cdot \dot{J} = 10 \angle 30^\circ V = 8,66 + j5V$.

Viết hệ phương trình K2 đối với $\dot{I}_{m1}, \dot{I}_{m2}, \dot{I}_{m3}$ (với chiều chọn như hình vẽ) dùng quy tắc (3.14) ta được:

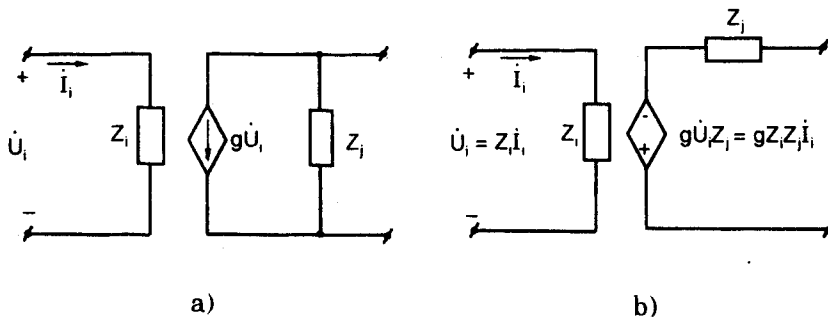
$$\begin{bmatrix} 2+j4 & j4 & 1 \\ j4 & 3+j4 & -1 \\ 1 & -1 & 2-j0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{m1} \\ \dot{I}_{m2} \\ \dot{I}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,66-j5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nhận xét: ma trận đối xứng

$$\Rightarrow \dot{I}_o = \dot{I}_{m2} = \frac{\begin{vmatrix} 2+j4 & -8,66-j5 & 1 \\ j4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2-j0,25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j4 & j4 & 1 \\ j4 & 3+j4 & -1 \\ 1 & -1 & 2-j0,25 \end{vmatrix}} = \frac{-22,68 + j79,28}{12 + j22,5} = 3,23 \angle 44^\circ A$$

$$\Rightarrow \dot{U}_o = 2\dot{I}_o = 6,46 \angle 44^\circ V \Rightarrow \dot{\phi}_o(t) = 6,46 \cos(2t + 44^\circ) V$$

• Trường hợp mạch điện có chứa các nguồn phụ thuộc, có thể dùng các phép biến đổi mạch (ví dụ như H.3.15) đưa chúng về dạng nguồn áp phụ thuộc dòng. Khi áp dụng quy tắc (3.14) có thể đối xử các nguồn áp phụ thuộc như là nguồn áp độc lập.



Hình 3.15

Ví dụ 3.9: Tìm $\dot{I}$ ở mạch H.3.16 dùng phương pháp dòng mắt lưới.

Giải

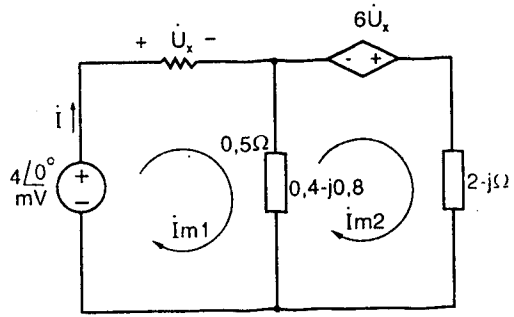
Mạch chứa nguồn áp phụ thuộc

$$6\dot{U}_x = 6 \times 0,5\dot{I} = 3\dot{I}$$

Áp dụng quy tắc (3.14), đối xử

nguồn áp phụ thuộc $6\dot{U}_x = 3\dot{I} = 3\dot{I}_{m1}$

như nguồn áp độc lập ta được:



Hình 3.16

$$\begin{bmatrix} 0,5+0,4-j0,8 & -0,4+j0,8 \\ -0,4+j0,8 & 2-j+0,4-j0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{m1} \\ \dot{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 10^{-3} \\ 3\dot{I}_{m1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (0,9-j0,8)\dot{I}_{m1} + (-0,4+j0,8)\dot{I}_{m2} = 4 \cdot 10^{-3} \\ (-0,4+j0,8)\dot{I}_{m1} + (2,4-j1,8)\dot{I}_{m2} = 3\dot{I}_{m1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (0,9-j0,8)\dot{I}_{m1} + (-0,4+j0,8)\dot{I}_{m2} = 4 \cdot 10^{-3} \\ (-3,4+j0,8)\dot{I}_{m1} + (2,4-j1,8)\dot{I}_{m2} = 0 \end{cases}$$

hoặc dạng ma trận:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0,9-j0,8 & -0,4+j0,8 \\ -3,4+j0,8 & 2,4-j1,8 \end{bmatrix}}_{\text{Không đối xứng}} \begin{bmatrix} \dot{I}_{m1} \\ \dot{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nhận xét: khi có nguồn phụ thuộc ma trận các hệ số của dòng mắt lưới không còn đối xứng.

Từ hệ hai phương trình trên suy ra:

$$\begin{aligned} \dot{I} = \dot{I}_{m1} &= \frac{\begin{vmatrix} 4 \cdot 10^{-3} & -0,4+j0,8 \\ 0 & 2,4-j1,8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,9-j0,8 & -0,4+j0,8 \\ -3,4+j0,8 & 2,4-j1,8 \end{vmatrix}} \\ &= 24 \cdot 10^{-3} \angle 53^\circ 13' = 24 \angle 53^\circ 13' \text{ mA} \end{aligned}$$

* Ta xét trường hợp mạch có chứa nguồn dòng lý tưởng.

Ví dụ 3.10: Xét lại mạch điện H.3.8 ở ví dụ 3.4 (mục 3.2). Dùng phương pháp dòng mắt lưới, tìm dòng điện chảy qua nguồn áp 2 cost và điện áp ở hai đầu nguồn dòng e^{-t} .

Giải

Mạch có một nhánh chỉ chứa nguồn dòng $e^{-t}A$ (nguồn dòng lý tưởng), không biến đổi thành nguồn áp được.

Chọn chiều của ba dòng mắt lưới như hình vẽ. Ta có:

$$I_{m1} = e^{-t}A \quad (1)$$

Hai biến còn lại là $I_{m2}, I_{m3} \rightarrow$ cần có thêm hai phương trình.

Ta dùng quy tắc (3.14) viết hai phương trình K2 cho hai mắt lưới

II và III (ta tránh mắt lưới I có chứa nguồn dòng lý tưởng):

$$-\frac{1}{4}I_{m1} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)I_{m2} - \frac{1}{3}I_{m3} = -2\cos t \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2}I_{m1} - \frac{1}{3}I_{m2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)I_{m3} = 0 \quad (3)$$

Từ ba phương trình (1), (2), (3) suy ra:

$$\begin{cases} I_{m1} = e^{-t}A \\ I_{m2} = \frac{15}{17}e^{-t} - \frac{72}{17}\cos t \text{ A} \\ I_{m3} = \frac{27}{34}e^{-t} - \frac{24}{17}\cos t \text{ A} \end{cases}$$

Vậy dòng điện chảy qua nguồn áp $2\cos t$ là:

$$I_1 = -I_{m2} = -\frac{15}{17}e^{-t} + \frac{72}{17}\cos t \text{ A}$$

và điện áp ở hai đầu nguồn dòng e^{-t} là:

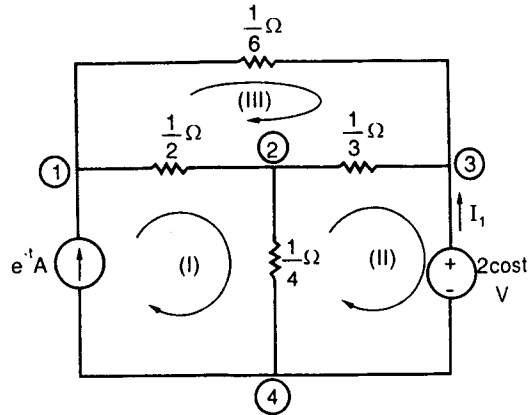
$$u_{14} = \frac{1}{6}I_{m3} + 2\cos t = \frac{9}{68}e^{-t} + \frac{30}{17}\cos t \text{ V}$$

Ví dụ 3.11: Tìm các dòng điện I_1, I_2, I_3 ở mạch DC H.3.18 dùng phương pháp dòng mắt lưới.

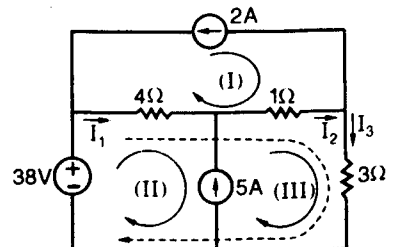
Giải

Ta có: $I_{m1} = -2A \quad (1)$

$$I_{m3} - I_{m2} = 5A \quad (2)$$



Hình 3.17



Hình 3.18

Viết phương trình K2 cho vòng không chứa nguồn dòng gồm nguồn áp 38V, các phần tử trở 4Ω , 1Ω và 3Ω ta được:

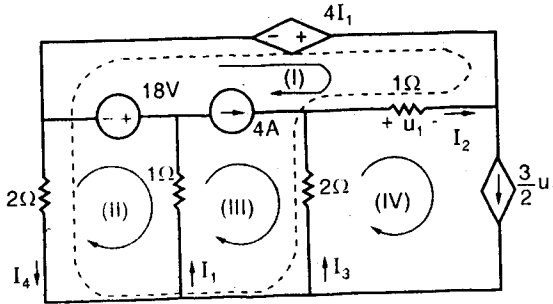
$$4I_1 + 1I_2 + 3I_3 = 38$$

$$\Rightarrow 4(I_{m2} - I_{m1}) + 1(I_{m3} - I_{m1}) + 3I_{m3} = 38 \quad (3)$$

Từ ba phương trình (1), (2), (3) $\Rightarrow I_{m1} = -2A$, $I_{m2} = 1A$, $I_{m3} = 6A$

Do đó: $I_1 = I_{m2} - I_{m1} = 3A$; $I_2 = I_{m3} - I_{m1} = 8A$; $I_3 = I_{m3} = 6A$

Ví dụ 3.12: Tìm u_1 ở mạch điện DC H.3.19 dùng phương pháp dòng mắt lưới.



Hình 3.19

Giải

Với chiều của các dòng mắt lưới như hình vẽ ta được:

$$I_{m3} - I_{m1} = 4A \quad (1)$$

$$I_{m4} = \frac{3}{2}u_1 = \frac{3}{2} \times 1 \times I_2 = \frac{3}{2} \times 1 \times (I_{m4} - I_{m1})$$

$$\Rightarrow 3I_{m1} - I_{m4} = 0 \quad (2)$$

Dùng quy tắc (3.14) viết phương trình K2 cho mắt lưới II ta được:

$$(1+2)I_{m2} - 1I_{m3} = 18 \quad (3)$$

Viết phương trình K2 cho vòng không chứa nguồn dòng gồm nguồn áp $4I_1$, nhánh có dòng I_2 , nhánh có dòng I_3 và nhánh có dòng I_4 , ta được:

$$2I_4 + 2I_3 + 1I_2 = -4I_1$$

$$\Rightarrow 2(-I_{m2}) + 2(I_{m4} - I_{m3}) + 1(I_{m4} - I_{m1}) = -4(I_{m3} - I_{m1}) \quad (4)$$

Giải hệ bốn phương trình (1), (2), (3), (4) ta được

$$I_{m1} = \frac{9}{2}A, I_{m4} = \frac{27}{2}A$$

$$\text{Suy ra: } u_1 = 1.I_2 = 1.(I_{m4} - I_{m1}) = 9V$$

* Số phương trình phải giải đồng thời ở phương pháp dòng mắt lưới là $n-d+1$ ít hơn so với phương pháp dòng nhánh ($n-d+1 < n$)

- Nếu $n < 2(d-1) \Rightarrow n-d+1 < d-1$ tức phương pháp dòng mắt lưới có số phương trình phải giải đồng thời ít hơn phương pháp thế nút.

- Nếu $n > 2(d-1)$ thì phương pháp thế nút có số phương trình ít hơn phương pháp dòng mắt lưới.

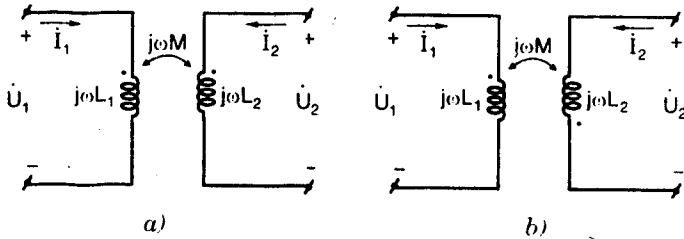
3.4 MẠCH CÓ GHÉP HỖ CẢM

• Trong mục 1.3.2 ở Chương 1 đã trình bày vấn đề hai cuộn dây có ghép hồ cảm. Nếu bỏ qua điện trở của hai cuộn dây và các điện dung ký sinh, thì mô hình mạch của chúng như H.1.21. Các phương trình liên hệ giữa áp và dòng cho bởi (1.31a), (1.31b):

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (1.31a)$$

$$\begin{cases} u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (1.31b)$$

Trong đó M là hệ số hồ cảm giữa hai cuộn dây, dấu “+” ứng với hình (1.21a), dấu “-” ứng với hình (1.21b). Việc xác định dấu “+” hoặc “-” trước M đã trình bày trong mục 1.3.2 (chương 1).



Hình 3.20

Trường hợp mạch ở chế độ xác lập điều hòa thì:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \end{cases} \quad (3.15a)$$

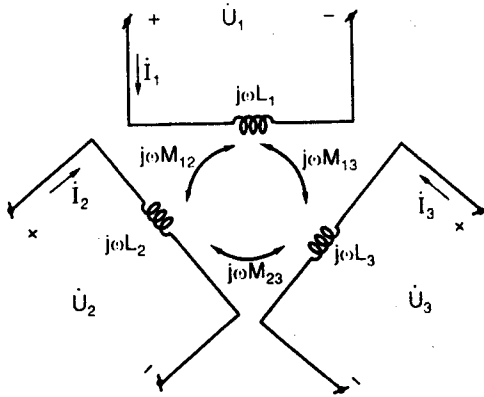
$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{cases} \quad (3.15b)$$

Trong đó dấu “+” ứng với sơ đồ phức H.3.20a, dấu “-” ứng với H.3.20b.

Tổng quát ta có n cuộn dây ghép hồ cảm với nhau. Ví dụ với $n = 3$ (H.3.21)

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2}{dt} \pm M_{13} \frac{di_3}{dt} \\ u_2 = \pm M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M_{23} \frac{di_3}{dt} \\ u_3 = \pm M_{31} \frac{di_1}{dt} \pm M_{32} \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} \end{cases} \quad (3.16)$$

mà ở xác lập điều hòa trở thành:



Hình 3.21

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M_{12} \dot{I}_2 \pm j\omega M_{13} \dot{I}_3 \\ \dot{U}_2 = \pm j\omega M_{21} \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M_{23} \dot{I}_3 \\ \dot{U}_3 = \pm j\omega M_{31} \dot{I}_1 \pm j\omega M_{32} \dot{I}_2 + j\omega L_3 \dot{I}_3 \end{cases} \quad (3.17)$$

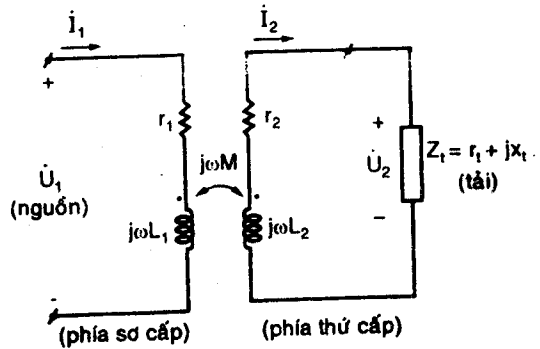
trong đó $M_{12} = M_{21}$: hệ số hồ cảm giữa cuộn dây 1 và 2

$M_{23} = M_{32}$: -nt- 2 và 3

$M_{13} = M_{31}$: -nt- 3 và 1

• Sau đây là vài ví dụ minh họa cách phân tích mạch có hồ cảm dùng phương pháp dòng nhánh, phương pháp dòng mắt lưới. Phương pháp thế nút và các phương pháp khác để phân tích mạch hồ cảm được trình bày trong mục 3.8

Ví dụ 3.13: H.3.22 là mô hình mạch của biến áp tuyến tính gồm hai cuộn dây (cuộn sơ cấp nối với nguồn và cuộn thứ cấp nối với tải) ghép hồ cảm quán trên một lõi chung bằng vật liệu từ tuyến tính. Cuộn sơ cấp có điện trở r_1 , điện cảm L_1 ; cuộn thứ cấp có điện trở r_2 , điện cảm L_2 ; trở kháng tải là $Z_t = r_t + jX_t$. Chiều dương dòng, áp chọn như H.3.22.



Hình 3.22: Biến áp tuyến tính

Tính:

- trở kháng vào $Z_v = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$

- tỉ số áp $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$, tỉ số dòng $\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$.

và khảo sát sự cân bằng công suất tác dụng.

Giải

Với chiều dương dòng, áp và vị trí các cực cùng tên của hai cuộn dây như hình vẽ ta được:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 & (1) \\ \dot{U}_2 = -Z_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 & (2) \\ \dot{U}_2 = Z_t \dot{I}_2 & (3) \end{cases}$$

trong đó: $Z_1 = r_1 + j\omega L_1$ là trở kháng riêng của cuộn sơ cấp.

$Z_2 = r_2 + j\omega L_2$ là trở kháng riêng của cuộn thứ cấp.

Từ các phương trình (1), (2), (3) dễ dàng suy ra:

Trở kháng vào $Z_v = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_1 + Z_R$ (4)

với $Z_R = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2 + Z_t} = \frac{\omega^2 M^2 (r_2 + r_t)}{(r_2 + r_t)^2 + (\omega L_2 + x_t)^2} + j \frac{-\omega^2 M^2 (\omega L_2 + x_t)}{(r_2 + r_t)^2 + (\omega L_2 + x_t)^2}$ (5)

Z_R là thành phần xuất hiện do có ghép hồ cảm, gọi là trở kháng quy đổi về phía sơ cấp của mạch thứ cấp.

Điện kháng quy đổi $X_R = \text{Im}(Z_R) = \frac{-\omega^2 M^2 (\omega L_2 + x_t)}{(r_2 + r_t)^2 + (\omega L_2 + x_t)^2}$

ngược dấu với điện kháng tổng $(x_t + \omega L_2)$ của mạch thứ cấp.

- Nếu $x_t > 0$ (tải có tính chất cảm) $\Rightarrow x_R < 0$: trở kháng quy đổi có tính chất dung.

- Nếu $x_t < 0$ (tải có tính chất dung) nhưng $|x_t| < \omega L_2 \Rightarrow x_R < 0$: trở kháng quy đổi có tính chất dung.

- Nếu $x_t < 0$ (tải có tính chất dung) nhưng $|x_t| > \omega L_2 \Rightarrow x_R > 0$: trở kháng quy đổi có tính chất cảm.

- Nếu $x_t = -\omega L_2 \Rightarrow x_R = 0$, $Z_R = \frac{\omega^2 M^2}{r_2 + r_t}$ là thuần trở.

Cũng nhận xét rằng Z_R phụ thuộc vào M^2 (chứ không phải M) do đó Z_R không phụ thuộc vào vị trí của các cực cùng tên của hai cuộn dây.

$$\text{. Tỉ số dòng } \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{j\omega M}{Z_2 + Z_t}$$

phụ thuộc tải Z_t và vị trí các cực cùng tên của hai cuộn dây.

$$\text{. Tỉ số áp } \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \cdot \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \cdot \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{Z_t}{Z_v} \cdot \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \Rightarrow \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{j\omega M Z_t}{\omega^2 M^2 + Z_1(Z_2 + Z_t)} \quad (7)$$

phụ thuộc tải Z_t và vị trí các cực cùng tên của hai cuộn dây.

Nếu có thể xem gần đúng $r_1 = r_2 = 0$ (bỏ qua điện trở của hai cuộn dây) và $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$ (ghép lý tưởng, toàn bộ các đường sức từ móc vòng một cuộn dây đều móc vòng cuộn dây kia) thì $Z_1 = j\omega L_1$; $Z_2 = j\omega L_2$; $Z_1 Z_2 = -\omega^2 L_1 L_2 = -\omega^2 M^2$. Khi đó (7) trở thành:

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{j\omega M}{Z_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \quad (8)$$

người ta chứng minh được rằng: $L_1 = \alpha \omega_1^2$, $L_2 = \alpha \omega_2^2$ trong đó ω_1 là số vòng cuộn sơ cấp, ω_2 là số vòng cuộn thứ cấp, α là hằng số phụ thuộc vào tính chất vật lý của biến áp. Do đó:

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \text{tỉ số vòng} \quad (3.18)$$

. Công suất tác dụng do nguồn cung cấp từ phía sơ cấp:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{U}_1 \dot{I}_1^*) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[Z_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \right] \dot{I}_1^* \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}(Z_1 \dot{I}_1 \dot{I}_1^*) + \frac{1}{2} \text{Re}(-j\omega M \dot{I}_2 \dot{I}_1^*) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}(Z_1 \dot{I}_1 \dot{I}_1^*) + \frac{1}{2} \text{Re} \left(-j\omega M \dot{I}_2 \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_t}{-j\omega M} \dot{I}_2^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}(Z_1 \dot{I}_1 \dot{I}_1^*) + \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{Z}_2 \dot{I}_2 \dot{I}_2^* + \dot{Z}_t \dot{I}_2 \dot{I}_2^*) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{2} r_1 I_{1m}^2 + \frac{1}{2} r_2 I_{2m}^2 + \frac{1}{2} r_t I_{2m}^2$$

với $\frac{1}{2} r_1 I_{1m}^2$: công suất tổn hao trên điện trở cuộn sơ cấp

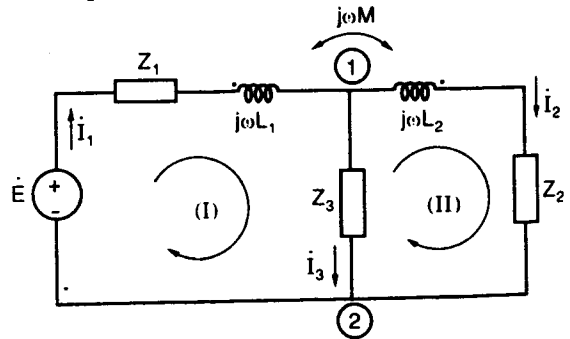
$\frac{1}{2} r_2 I_{2m}^2$: công suất tổn hao trên điện trở cuộn thứ cấp

$\frac{1}{2} r_t I_{2m}^2$: công suất tác dụng tiêu thụ bởi tải.

$P_{12} = P_1 - \frac{1}{2} r_1 I_{1m}^2 = \frac{1}{2} r_2 I_{2m}^2 + \frac{1}{2} r_t I_{2m}^2$ là phần công suất tác dụng được truyền từ mạch sơ cấp sang mạch thứ cấp do hồ cảm.

Ví dụ 3.14: Xét mạch có hồ cảm như H.3.23.

• Theo phương pháp dòng nhánh, lập hệ phương trình đối với biến là các dòng nhánh $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ với chiều dương chọn như H.3.23.



Hình 3.23

Viết luật K1 cho nút (1):

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \quad (1)$$

Viết luật K2 cho mắt lưới (I):

$$Z_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 + Z_3 \dot{I}_3 = \dot{E} \quad (2)$$

Viết luật K2 cho mắt lưới (II):

$$j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 - Z_3 \dot{I}_3 = 0 \quad (3)$$

Giải hệ ba phương trình trên suy ra được $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$

• Theo phương pháp dòng mắt lưới, lập hệ phương trình đối với hai dòng mắt lưới $\dot{I}_{m1}$ và $\dot{I}_{m2}$ có chiều như H.3.23. Ta có:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{m1}; \dot{I}_2 = \dot{I}_{m2}; \dot{I}_3 = \dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2} \quad (4)$$

Thay (4) vào hai phương trình (2) và (3) ta được:

$$Z_1 \dot{I}_{m1} + j\omega L_1 \dot{I}_{m1} - j\omega M \dot{I}_{m2} + Z_3 (\dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2}) = \dot{E}$$

$$j\omega L_2 \dot{I}_{m2} - j\omega M \dot{I}_{m1} + Z_2 \dot{I}_{m2} - Z_3 (\dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2}) = 0$$

sắp xếp lại ta được:

$$\begin{cases} (Z_1 + j\omega L_1 + Z_3) \dot{I}_{m1} - (Z_3 + j\omega M) \dot{I}_{m2} = \dot{E} \\ -(Z_3 + j\omega M) \dot{I}_{m1} + (Z_2 + Z_3 + j\omega L_2) \dot{I}_{m2} = 0 \end{cases} \quad (5a)$$

$$\begin{cases} (Z_1 + j\omega L_1 + Z_3) \dot{I}_{m1} - (Z_3 + j\omega M) \dot{I}_{m2} = \dot{E} \\ -(Z_3 + j\omega M) \dot{I}_{m1} + (Z_2 + Z_3 + j\omega L_2) \dot{I}_{m2} = 0 \end{cases} \quad (5b)$$

hoặc dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} Z_1 + j\omega L_1 + Z_3 & -Z_3 - j\omega M \\ -Z_3 - j\omega M & Z_2 + j\omega L_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{m1} \\ \dot{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Nhận xét rằng ma trận các hệ số của dòng mắt lưới có tính đối xứng.

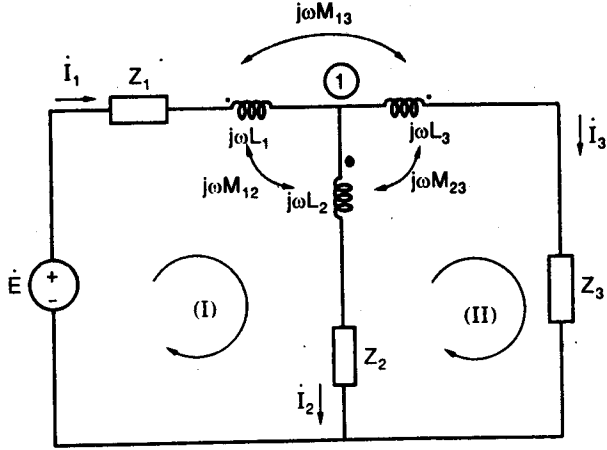
Ví dụ 3.15: Xét mạch có hồ cảm H.3.24.

Giải. Theo phương pháp dòng nhánh, ta lập hệ phương trình cho ba dòng nhánh $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$.

Viết luật K1 cho nút (1):

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \quad (1)$$

Viết luật K2 cho mắt lưới (I):



Hình 3.24

$$Z_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M_{12} \dot{I}_2 - j\omega M_{13} \dot{I}_3 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M_{12} \dot{I}_1 - j\omega M_{23} \dot{I}_3 + Z_2 \dot{I}_2 = \dot{E} \quad (2)$$

Viết luật K2 cho mắt lưới (II):

$$-Z_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M_{12} \dot{I}_1 + j\omega M_{23} \dot{I}_3 + j\omega L_3 \dot{I}_3 - j\omega M_{23} \dot{I}_2 - j\omega M_{13} \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_3 = 0 \quad (3)$$

Theo phương pháp dòng mắt lưới, ta lập hệ phương trình với các ẩn số là hai dòng mắt lưới $\dot{I}_{m1}$ và $\dot{I}_{m2}$ có chiều như H.3.24. Ta có:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{m1}; \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_{m2}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2} \quad (4)$$

Thay (4) vào (2) và (3), sắp xếp lại cuối cùng ta được:

$$\begin{cases} (Z_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + Z_2 + 2j\omega M_{12}) \dot{I}_{m1} - (j\omega L_2 + Z_2 + j\omega M_{12} + j\omega M_{13} + j\omega M_{23}) \dot{I}_{m2} = \dot{E} \\ -(j\omega L_2 + Z_2 + j\omega M_{12} + j\omega M_{13} + j\omega M_{23}) \dot{I}_{m1} + (Z_2 + j\omega L_2 + j\omega L_3 + Z_3 + 2j\omega M_{23}) \dot{I}_{m2} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

hoặc dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} Z_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + Z_2 + 2j\omega M_{12} & -j\omega L_2 - Z_2 - j\omega M_{12} - j\omega M_{13} - j\omega M_{23} \\ -j\omega L_2 - Z_2 - j\omega M_{12} - j\omega M_{13} - j\omega M_{23} & Z_2 + j\omega L_2 + j\omega L_3 + Z_3 + 2j\omega M_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{m1} \\ \dot{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Nhận xét rằng ma trận các hệ số của dòng mắt lưới có tính đối xứng.

Tổng quát, có thể thành lập trực tiếp hệ phương trình đối với dòng mắt lưới theo như quy tắc (3.14) nhưng trong Z_{ii} , Z_{ij} bổ sung thêm các trở kháng hồ cảm theo cách sau:

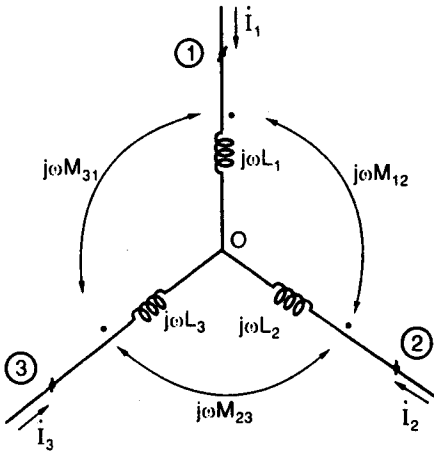
- Nếu có ghép hồ cảm giữa hai phần tử điện cảm trong cùng một mắt lưới i thì trong trở kháng Z_{ii} sẽ bổ sung thêm số hạng bằng hai lần trở kháng hồ cảm. Trở kháng hồ cảm lấy dấu “+” nếu chiều của dòng mắt lưới i cùng đi vào (hoặc cùng đi ra) các cực cùng tên của hai phần tử điện cảm, lấy dấu “-” trong trường hợp ngược lại.
- Nếu có ghép hồ cảm giữa hai phần tử thuộc hai mắt lưới i và j thì trong trở kháng Z_{ij} có thêm thành phần trở kháng hồ cảm. Trở kháng hồ cảm này lấy dấu “+” nếu chiều của dòng mắt lưới i và chiều của dòng mắt lưới j cùng đi vào (hoặc cùng đi ra) các cực cùng tên, lấy dấu “-” trong trường hợp ngược lại.

(3.19)

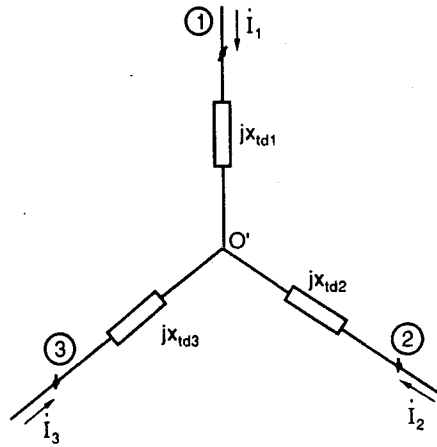
Ví dụ, mạch H.3.24 của ví dụ 3.15, trong mắt lưới (I) có hai phần tử L_1 và L_2 ghép hồ cảm, chiều của mắt lưới (I) cùng đi vào hai dấu chấm của L_1 và L_2 nên trong Z_{11} ngoài số hạng $Z_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + Z_2$ như thường lệ còn có thêm số hạng $2j\omega M_{12}$; trong mắt lưới (I) có phần tử L_1 ghép hồ cảm với phần tử L_2 và phần tử L_3 của mắt lưới (II) nên trong số hạng Z_{12} có thêm hai thành phần $-j\omega M_{12}$ và $-j\omega M_{13}$ (dấu “-” vì chiều của $\dot{I}_{m1}$ đi vào dấu chấm của L_1 trong khi chiều của $\dot{I}_{m2}$ đi ra khỏi dấu chấm của L_2 và L_3), ngoài ra trong mắt lưới (I) còn có phần tử L_2 cũng ghép hồ cảm với phần tử L_3 của mắt lưới (II) nên trong Z_{12} còn có thêm thành phần $-j\omega M_{23}$ (dấu “-” vì chiều của $\dot{I}_{m1}$ đi vào dấu chấm của L_2 trong khi $\dot{I}_{m2}$ đi ra khỏi dấu chấm của L_3).

* Trong một vài trường hợp, có thể biến đổi mạch có hồ cảm thành mạch tương đương không hồ cảm. Ví dụ xét trường hợp ba phần tử cảm mắc hình sao có ghép hồ cảm với nhau như H.3.25, có thể được thay tương đương bởi ba trở kháng jx_{td1} , jx_{td2} và jx_{td3} mắc hình sao và không có

ghép hồ cảm với nhau như H.3.26.



Hình 3.25



Hình 3.26

Hãy tìm biểu thức của x_{td1} , x_{td2} , x_{td3} tính theo $L_1, L_2, L_3, M_{12}, M_{23}, M_{31}$.

Đối với H.3.25 ta có:

$$\dot{U}_{13} = \dot{U}_{10} + \dot{U}_{03} \text{ và } \dot{U}_{23} = \dot{U}_{20} + \dot{U}_{03}.$$

Do đó:

$$\dot{U}_{13} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M_{12} \dot{I}_2 + j\omega M_{31} \dot{I}_3 - j\omega L_3 \dot{I}_3 - j\omega M_{31} \dot{I}_1 - j\omega M_{23} \dot{I}_2 \quad (3.20a)$$

$$\dot{U}_{23} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M_{12} \dot{I}_1 + j\omega M_{23} \dot{I}_3 - j\omega L_3 \dot{I}_3 - j\omega M_{31} \dot{I}_1 - j\omega M_{23} \dot{I}_2 \quad (3.20b)$$

Thay $\dot{I}_3 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_2$ vào (3.20a) và (3.20b) ta được:

$$\dot{U}_{13} = j\omega(L_1 + L_3 - 2M_{31})\dot{I}_1 + j\omega(L_3 + M_{12} - M_{23} - M_{31})\dot{I}_2 \quad (3.21a)$$

$$\dot{U}_{23} = j\omega(L_2 + L_3 - 2M_{23})\dot{I}_2 + j\omega(L_3 + M_{12} - M_{23} - M_{31})\dot{I}_1 \quad (3.21b)$$

Mặt khác đối với H.3.26 ta có:

$$\dot{U}_{13} = \dot{U}_{10'} + \dot{U}_{0'3} \text{ và } \dot{U}_{23} = \dot{U}_{20'} + \dot{U}_{0'3}. \text{ Do đó:}$$

$$\dot{U}_{13} = jx_{td1} \dot{I}_1 - jx_{td3} \dot{I}_3 \quad (3.22a)$$

$$\dot{U}_{23} = jx_{td2} \dot{I}_2 - jx_{td3} \dot{I}_3 \quad (3.22b)$$

Thay $\dot{I}_3 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_2$ vào (3.22a), (3.22b) ta được:

$$\dot{U}_{13} = j(x_{td1} + x_{td3})\dot{I}_1 + jx_{td3} \dot{I}_2 \quad (3.23a)$$

$$\dot{U}_{23} = jx_{td3} \dot{I}_1 + j(x_{td2} + x_{td3})\dot{I}_2 \quad (3.23b)$$

So sánh (3.21a) với (3.23a) và (3.21b) với (3.23b) ta suy ra được:

$$\begin{cases} x_{td3} = \omega(L_3 + M_{12} - M_{23} - M_{31}) \end{cases} \quad (3.24a)$$

$$\begin{cases} x_{td2} = \omega(L_2 + M_{31} - M_{12} - M_{23}) \end{cases} \quad (3.24b)$$

$$\begin{cases} x_{td1} = \omega(L_1 + M_{23} - M_{31} - M_{12}) \end{cases} \quad (3.24c)$$

Tổng quát ta có:

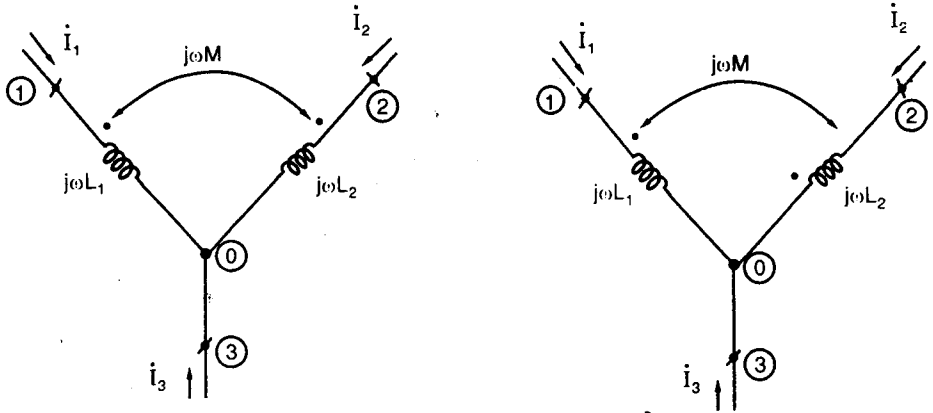
$$\begin{cases} x_{td1} = \omega(L_1 + M'_{23} - M'_{31} - M'_{12}) \end{cases} \quad (3.25a)$$

$$\begin{cases} x_{td2} = \omega(L_2 + M'_{31} - M'_{12} - M'_{23}) \end{cases} \quad (3.25b)$$

$$\begin{cases} x_{td3} = \omega(L_3 + M'_{12} - M'_{23} - M'_{31}) \end{cases} \quad (3.25c)$$

trong đó $M'_{12} = \pm M_{12}$, $M'_{23} = \pm M_{23}$, $M'_{31} = \pm M_{31}$

M'_{ij} lấy dấu “+” nếu các cực cùng tên của L_i và L_j nằm cùng về một phía so với nút chung (O), lấy dấu “-” trong trường hợp ngược lại.



Hình 3.27

Trường hợp chỉ có hai phần tử ghép hồ cảm như H.3.27a hoặc H.3.27b thì cũng có thể được thay tương đương bởi ba trở kháng jx_{td1} , jx_{td2} và jx_{td3} mắc hình sao và không có ghép hồ cảm với nhau như H.3.26.

Đối với H.3.27a thì:

$$\begin{cases} x_{td1} = \omega(L_1 - M) \end{cases} \quad (3.26a)$$

$$\begin{cases} x_{td2} = \omega(L_2 - M) \end{cases} \quad (3.26b)$$

$$\begin{cases} x_{td3} = \omega M \end{cases} \quad (3.26c)$$

Đối với 3.27b thì:

$$\begin{cases} x_{td1} = \omega(L_1 + M) \end{cases} \quad (3.27a)$$

$$\begin{cases} x_{td2} = \omega(L_2 + M) \end{cases} \quad (3.27b)$$

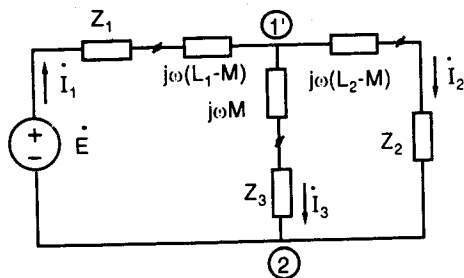
$$\begin{cases} x_{td3} = -\omega M \end{cases} \quad (3.27c)$$

Các công thức (3.26) và (3.27) có thể được suy ra từ (3.25) bằng cách cho $L_3 = 0$; $M_{23} = M_{31} = 0$; $M_{12} = M_{21} = M$.

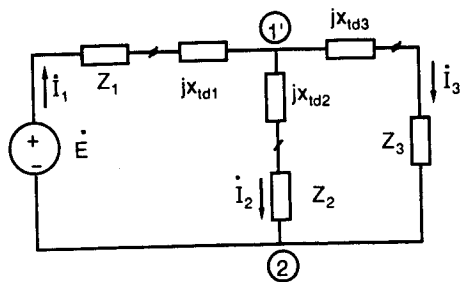
Ví dụ áp dụng công thức (3.26) mạch có hồ cảm H.3.23 có thể được

biến đổi thành mạch tương đương không hồ cảm H.3.28. Tương tự áp dụng công thức (3.25), mạch H.3.24 có thể được đưa về mạch tương đương H.3.29 trong đó:

$$\begin{cases} x_{td1} = \omega(L_1 - M_{23} - M_{13} + M_{12}) \\ x_{td2} = \omega(L_2 + M_{13} + M_{12} + M_{23}) \\ x_{td3} = \omega(L_3 - M_{12} + M_{23} - M_{13}) \end{cases}$$



Hình 3.28



Hình 3.29

• Cách phân tích mạch điện chứa phần tử biến áp lý tưởng

Biến áp lý tưởng đã được giới thiệu ở mục 1.3.2 (chương 1). Hình 1.23 là ký hiệu của biến áp lý tưởng với n gọi là hệ số biến áp hoặc tỉ số vòng. Các phương trình mô tả được cho bởi (1.34) và (1.35). Trường hợp mạch ở chế độ xác lập điều hòa thì (1.34) và (1.35) trở thành:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = n \dot{U}_1 \end{cases} \quad (3.28a)$$

$$\begin{cases} \dot{I}_2 = -\frac{1}{n} \dot{I}_1 \end{cases} \quad (3.28b)$$

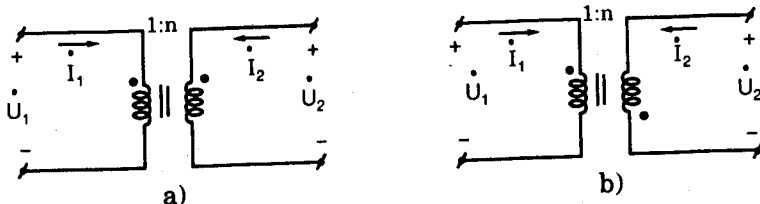
trong đó chiều dương dòng áp và vị trí của cực cùng tên như H.3.30a.

Nếu vị trí các cực cùng tên ngược lại như H.3.30b thì:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = -n \dot{U}_1 \end{cases} \quad (3.29a)$$

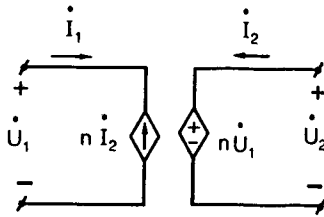
$$\begin{cases} \dot{I}_2 = \frac{1}{n} \dot{I}_1 \end{cases} \quad (3.29b)$$

Chú ý rằng nếu trong (3.28a) và (3.28b) thay n bởi $-n$ thì sẽ được (3.29a) và (3.29b).

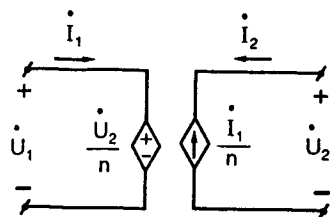


Hình 3.30

Từ các biểu thức (3.28a) và (3.28b) ta thấy có thể thay thế biến áp lý tưởng H.3.30a bởi một trong hai mạch tương đương H.3.31 hoặc H.3.32.



Hình 3.31



Hình 3.32

Ví dụ 3.16: Tìm điện áp $u_2(t)$ ở xác lập của mạch điện H.3.32

Giải

$$16 \cos 3t \Leftrightarrow 16 \angle 0^\circ$$

Chọn $\dot{\varphi}_4 = 0$

Suy ra $\dot{\varphi}_3 = 16V$ (1)

Theo (3.28) ta được:

$$I_2 = -\frac{\dot{I}_1}{2} \text{ và } \dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{\varphi}_2}{2} \quad (2)$$

Viết K1 cho nút 2 ta được:

$$\dot{I}_3 - \dot{I}_4 - \dot{I}_2 = 0$$

Thay $\dot{I}_2 = -\frac{\dot{I}_1}{2}$ vào suy ra:

$$\dot{I}_3 - \dot{I}_4 + \frac{\dot{I}_1}{2} = 0$$

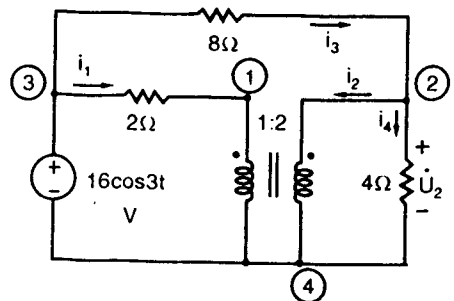
$$\Rightarrow \frac{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2}{8} - \frac{\dot{\varphi}_2}{4} + \frac{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1}{4} = 0 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \dot{\varphi}_2 = \dot{U}_2 = 12V$

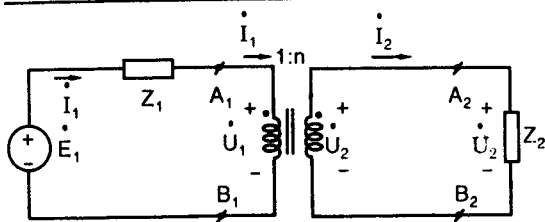
Do đó $u_2(t) = 12 \cos 3t \text{ V}$

• Trường hợp mạch điện có thể phân thành hai mạch sơ cấp và thứ cấp tách biệt nhau (không có dòng điện chảy qua lại giữa mạch sơ cấp và thứ cấp) thì có thể dùng các phép quy đổi sau:

1- Quy đổi mạch thứ cấp về phía sơ cấp



Hình 3.33



Hình 3.34

Xét mạch H.3.34. Ta có:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2/n$$

$$\dot{I}_1 = n \dot{I}_2$$

Trở kháng vào nhìn từ hai đầu phía sơ cấp:

$$Z_v = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2/n}{n \dot{I}_2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$$

$$\Rightarrow Z_v = \frac{Z_2}{n^2} \quad (3.30)$$

Nhận xét:

- Biến áp lý tưởng có thể dùng để biến đổi môđun trở kháng tải: trở kháng tải Z_2 đã được biến đổi thành $\frac{Z_2}{n^2}$ nhờ biến áp lý tưởng.

- Có thể thay biến áp lý tưởng và mạch thứ cấp bởi một mạch tương đương bằng cách:

$$\begin{cases} - \text{Chia mỗi điện áp ở thứ cấp cho } n \\ - \text{Nhân mỗi dòng điện ở thứ cấp cho } n \\ - \text{Chia mỗi trở kháng cho } n^2 \end{cases} \quad (3.31)$$

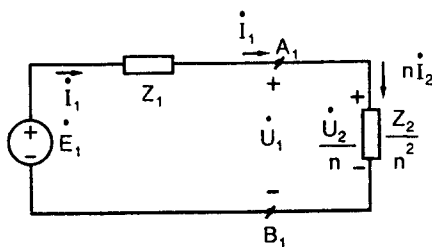
Nếu vị trí của hai cực cùng tên đảo ngược lại thì thay n bởi $(-n)$.

Ví dụ 3.17: Mạch chứa biến áp lý tưởng H.3.36 có thể được thay bằng mạch tương đương không chứa biến áp lý tưởng như H.3.37 bằng cách dùng phép quy đổi (3.31). Ở đây $n = 2$.

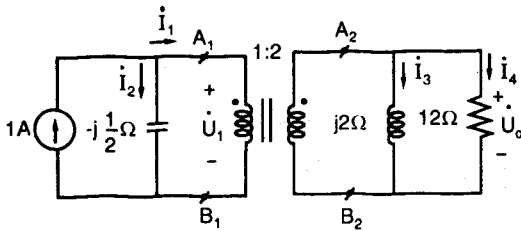
Giải. Mạch H.3.37 có lời giải là:

$$\dot{U}'_o = 3V; \dot{I}_4 = 1A; \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}'_o}{j \frac{1}{2}} = -j6A$$

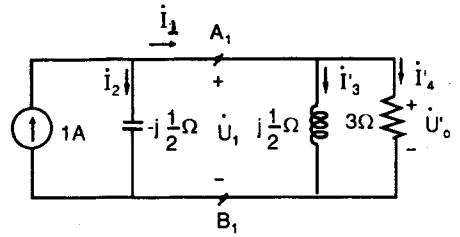
$$\text{Từ đó suy ra: } \dot{U}_o = 2\dot{U}'_o = 6V; \dot{I}_4 = \frac{\dot{I}_4}{2} = 0,5A; \dot{I}_3 = \frac{\dot{I}_3}{2} = -j3A$$



Hình 3.35



Hình 3.36



Hình 3.37

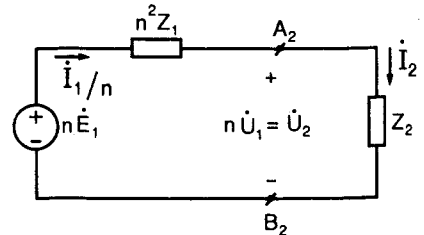
Chú ý phép quy đổi (3.31) bảo toàn công suất, ví dụ công suất trên điện trở 12Ω ở mạch H.3.36 bằng công suất trên điện trở 3Ω ở mạch đã quy đổi H.3.37.

2- Quy đổi mạch sơ cấp về phía thứ cấp

Xét lại mạch H.3.34. Ta có:

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= n \dot{U}_1 = n(-Z_1 \dot{I}_1 + \dot{E}_1) \\ &= -nZ_1 \dot{I}_1 + n \dot{E}_1 \\ &= -nZ_1 (n \dot{I}_2) + n \dot{E}_1\end{aligned}$$

$$\dot{U}_2 = -n^2 Z_1 \dot{I}_2 + n \dot{E}_1 \quad (3.32)$$



Hình 3.38

Từ (3.32) có thể thay mạch H.3.34 bởi mạch tương đương H.3.38.

Tổng quát, có thể thay biến áp lý tưởng và mạch sơ cấp bởi một mạch tương đương bằng cách:

$$\begin{cases} - \text{Nhân mỗi điện áp, mỗi nguồn sức điện động cho } n \\ - \text{Chia mỗi dòng điện, mỗi nguồn dòng cho } n \\ - \text{Nhân mỗi trở kháng cho } n^2 \end{cases} \quad (3.33)$$

Nếu vị trí của hai cực cùng tên đảo ngược lại thì thay n bởi $(-n)$.

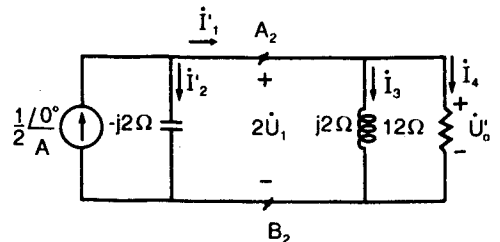
Ví dụ 3.18: Mạch H.3.36 có thể được thay tương đương bởi mạch H.3.39 bằng phép quy đổi (3.33).

Giải. Mạch H.3.39 có lời giải:

$$\dot{U}_o = \frac{1}{2} \angle 0^\circ \times 12 = 6 \angle 0^\circ \text{V}$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_o}{12} = 0,5 \text{V}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_o}{j2} = -j3 \text{A}$$



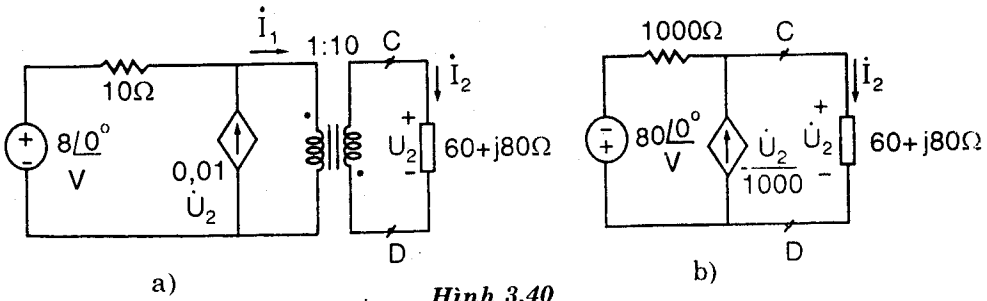
Hình 3.39

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_4 + \dot{I}_3 = 0,5 - j3A \Rightarrow \dot{I}_1 = 2\dot{I}_1 = 1 - j6A$$

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_3 = j3A \Rightarrow \dot{I}_2 = 2\dot{I}_2 = j6A$$

Chú ý rằng phép quy đổi (3.33) bảo toàn công suất, ví dụ công suất phát bởi nguồn dòng $1\angle 0^\circ A$ ở H.3.36 bằng công suất phát của nguồn dòng $\frac{1}{2}\angle 0^\circ A$ ở mạch đã quy đổi H.3.39.

Ví dụ 3.19: Tìm $\dot{U}_2$ mạch điện H.3.40a.



Hình 3.40

Giải

Dùng phép quy đổi (3.33) ta được mạch tương đương H.3.40b (chú ý $n = 10$). Dùng phương pháp thế nút cho H.3.40b ta được:

$$\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{60 + j80} \right) \dot{U}_2 = \frac{-80}{1000} - 0,001 \dot{U}_2$$

Suy ra: $\dot{U}_2 = 5\sqrt{2} \angle -135^\circ V$

3.5 MẠCH CHỨA KHUẾCH ĐẠI THUẬT TOÁN (OP-AMP)

Khuếch đại thuật toán (operational amplifier) thường được gọi với tên thông dụng là op-amp, là một phần tử nhiều cực. Ký hiệu của op-amp như trên H.3.41, ở đó chỉ trình bày năm cực chính của op-amp gồm:

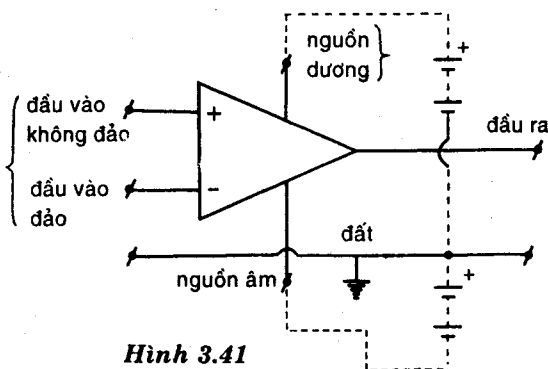
- Hai cực để cung cấp hai nguồn dc trái cực tính. Điểm nối chung của hai nguồn này được xem như là đất (là nút gốc hoặc nút chuẩn để tính thế, quy ước thế của đất bằng không, trên sơ đồ được ký hiệu bởi $\perp$). Thông thường cấp nguồn được cung cấp đối xứng $\pm V$ (khoảng từ 10V đến 15V).

- Một đầu ra.

- Hai đầu vào: một đầu vào được ký hiệu bằng dấu - gọi là đầu vào đảo, còn đầu kia được ký hiệu bằng dấu + gọi là đầu vào không đảo. Nếu đặt một điện thế dương ở đầu vào đảo còn đầu vào kia nối đất (tức có thế

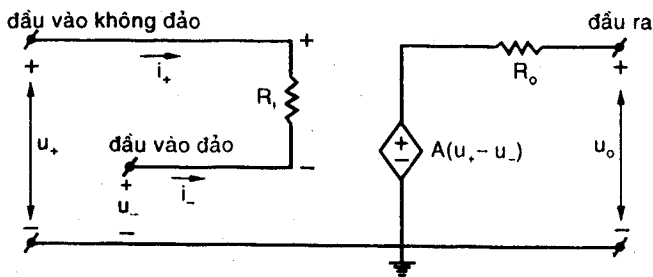
bằng không) thì đầu ra sẽ có thể âm. Ngược lại nếu đặt một thế dương ở đầu vào không đảo còn đầu vào đảo nối đất thì đầu ra sẽ có thể dương.

Ngoài năm cực chính trên, op-amp còn có một số cực nữa dùng để hiệu chỉnh đặc tính làm việc của op-amp cho tốt hơn, mà ta không vẽ trên H.3.41.



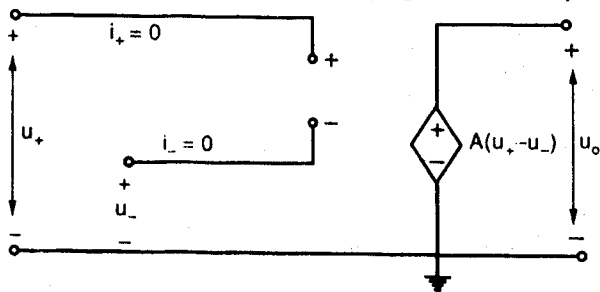
Hình 3.41

Bởi vì ở đây ta chỉ quan tâm đến đặc tuyến vào - ra của phần tử nên trên mô hình mạch chỉ quan tâm đến đầu ra và hai đầu vào, không cần để ý đến hai cực để cung cấp nguồn. H.3.42 là một mô hình mạch gần đúng của op-amp. Điện trở vào R_i rất lớn (thường $> 1\text{M}\Omega$), điện trở ra R_o rất nhỏ (thường $< 100\Omega$) và độ lợi A rất cao (thường $> 10^5$).



Hình 3.42: Mạch tương đương của op-amp

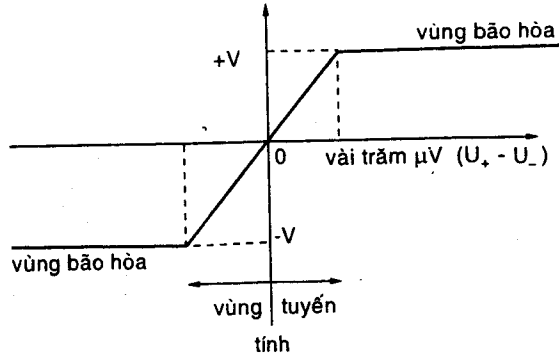
Các giá trị đặc biệt đó của R_i , R_o , A khiến người ta có thể đưa ra các mô hình đơn giản hơn nữa cho op-amp. Ví dụ vì điện trở R_o rất bé nên có thể xem bằng không; điện trở R_i rất lớn nên dòng điện vào i_+ và i_- có thể xem như gần đúng bằng không, nghĩa là ngõ vào hở mạch (H.3.43)



Hình 3.43: Một mô hình mạch đơn giản của op-amp (xem $R_o = 0, R_i = \infty$)

Giá trị lớn nhất của $|u_o|$ bị giới hạn bởi giá trị của nguồn cung cấp như trên H.3.44.

Vì độ lợi A rất lớn nên chỉ cần $|u_+ - u_-|$ lớn hơn một trị số rất nhỏ cỡ vài trăm μV (microvolt) thì đầu ra sẽ bị lái đến vùng bão hòa dương $u_o = V =$ trị số nguồn cung cấp dương nếu $u_+ > u_-$, còn nếu $u_- > u_+$ thì sẽ bị lái đến vùng bão hòa âm $u_o = -V =$ trị số nguồn cung cấp âm.



Hình 3.44

Do đó nếu mạch có chứa op-amp được thiết kế để op-amp làm việc ở vùng tuyến tính hoặc không quá sâu trong vùng bão hòa thì có thể xem gần đúng.

$$u_+ - u_- = 0$$

hay $u_+ = u_-$

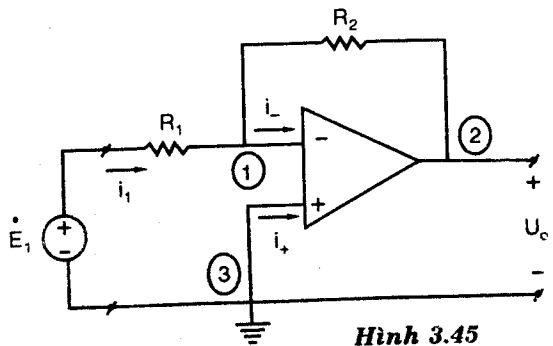
Mô hình mạch của op-amp trong đó ta xem gần đúng

$$\begin{cases} i_+ = i_- = 0 \\ u_+ = u_- \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.34a) \\ (3.34b) \end{matrix}$$

gọi là mô hình lý tưởng của op-amp.

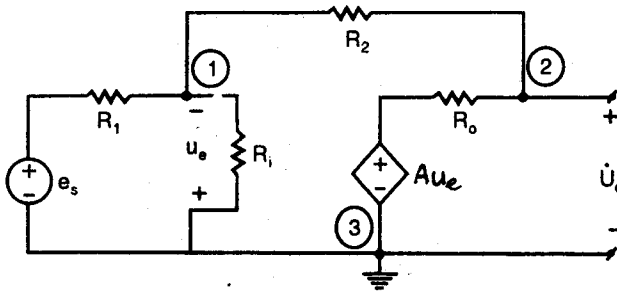
Ví dụ 3.20: Xét mạch chứa op-amp như H.3.45. Nếu thay op-amp bởi mô hình ở H.3.42 ta được mạch tương đương H.3.46.

Các phương trình K1 cho nút (1) và nút (2) dùng quy tắc (3.7) là:



Hình 3.45

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i} \right) \phi_1 - \frac{1}{R_2} \phi_2 = \frac{e_s}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} \phi_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \right) \phi_2 = \frac{A u_e}{R_o} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$



Hình 3.46

Thay $u_e = -\varphi_1$ vào (1), (2) và sắp xếp lại ta được hệ phương trình như sau:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i} & -\frac{1}{R_2} \\ \frac{A}{R_o} - \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_s}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Giải (3) ta tìm được điện áp ra u_o :

$$\begin{aligned} u_o = \varphi_2 &= \frac{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_o} \right) \left(\frac{e_s}{R_1} \right)}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i} \right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \right) - \left(\frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_o} \right)} \\ \Rightarrow \frac{u_o}{e_s} &= \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 - \frac{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i} \right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \right)}{\left(\frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_o} \right)}} \quad (4) \end{aligned}$$

Giả sử $A = 10^5$, $R_i = 10^8 \Omega$, $R_o = 10 \Omega$, $R_1 = 1k\Omega$ và $R_2 = 5k\Omega$ thì độ lợi điện áp của mạch bằng:

$$\frac{u_o}{e_s} = -4,9996994 \approx -5,000$$

Chú ý rằng: nếu trong biểu thức (4) cho $A \rightarrow \infty$, ta được:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{u_o}{e_s} \right) = -\frac{R_2}{R_1} = -5,000 \quad (5)$$

Bây giờ ta thử giải lại mạch H.3.45 dùng mô hình lý tưởng của op-amp. Trong mô hình này:

$$i_+ = i_- = 0 \quad (3.35a)$$

$$u_+ = u_- \quad (3.35b)$$

Trong mạch H.3.45, ta có $u_+ = 0 \Rightarrow u_- = \varphi_1 = 0$. Viết phương trình K1 cho nút (1) với chú ý $i_- = 0$ ta được:

$$\frac{0 - e_s}{R_1} + \frac{0 - u_o}{R_2} = 0$$

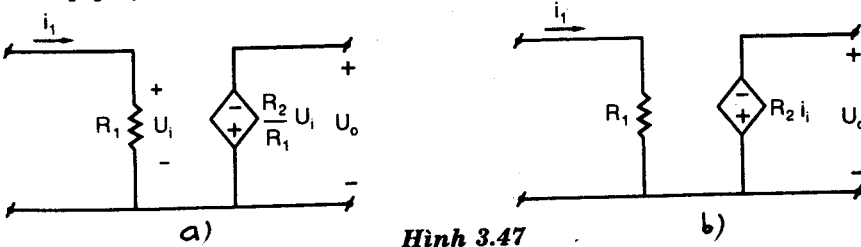
ta suy ra được ngay:

$$\frac{u_o}{e_s} = -\frac{R_2}{R_1} < 0 \quad (3.36)$$

Kết quả này trùng với biểu thức (5).

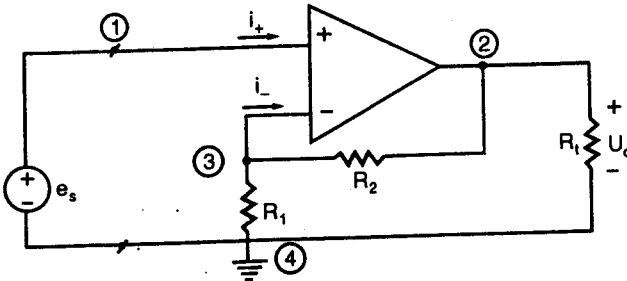
Bởi vì dùng mô hình lý tưởng của op-amp khi phân tích mạch thì dễ hơn nhiều nhưng vẫn cho kết quả gần chính xác so với khi dùng mô hình thực (3.42), nên người ta thường dùng mô hình lý tưởng khi phân tích mạch chứa op-amp.

Do $e_s = R_1 i_1$ và $u_o = -\frac{R_2}{R_1} e_s$ nên op-amp và 2 điện trở R_1, R_2 mắc như H.3.45 có thể xem là một nguồn áp phụ thuộc áp như H.3.47a hoặc một nguồn áp phụ thuộc dòng như H.3.47b.



Hình 3.47

Ví dụ 3.21: Xét mạch chứa op-amp như H.3.48. Tìm độ lợi u_o/e_s .



Hình 3.48

Dùng mô hình lý tưởng của op-amp, ta có $i_+ = i_- = 0$

$$\varphi_3 = \varphi_1 = e_s$$

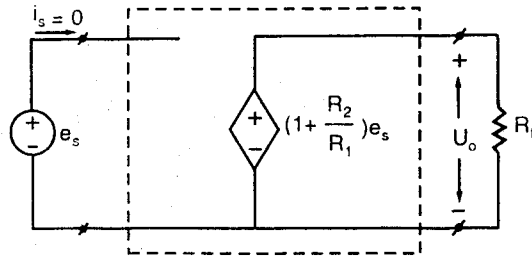
Viết phương trình K1 cho nút (3), chú ý $i_- = 0$ ta được:

$$\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_2} + \frac{\varphi_3}{R_1} = 0 \Rightarrow u_o = \varphi_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \varphi_3$$

$$\Rightarrow \frac{u_o}{e_s} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \geq 1 \quad (3.37)$$

Nhận xét rằng u_o không phụ thuộc vào tải R_t .

Cũng nhận xét rằng op-amp với hai điện trở R_1 và R_2 mắc như H.3.48 có thể xem là một nguồn áp phụ thuộc áp như H.3.49.



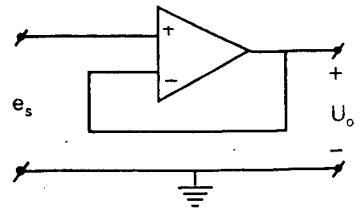
Hình 3.49

Bây giờ ta xét mạch H.3.50.

Đó là trường hợp đặc biệt của mạch H.3.48 khi $R_2 = 0$ (ngắn mạch) và $R_1 = \infty$ (hở mạch).

Khi đó độ lợi của mạch là $\frac{u_o}{e_s} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 1$

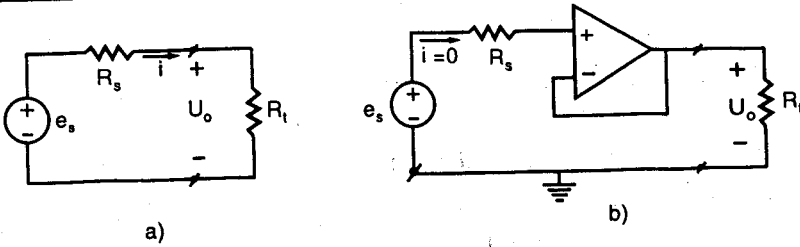
nghĩa là $u_o = e_s$. Vì vậy mạch H.3.50 gọi là mạch lặp điện áp bởi vì điện áp ra luôn bằng điện áp vào. Mạch H.3.50 cũng được gọi là mạch khuếch đại đệm bởi vì nó thường được dùng để cách ly một phần mạch này với một phần mạch khác. Ví dụ xét hai mạch H.3.51: ở H.3.51a điện áp hai đầu tải R_t là



Hình 3.50

dùng để cách ly một phần mạch này với một phần mạch khác. Ví dụ xét hai mạch H.3.51: ở H.3.51a điện áp hai đầu tải R_t là $u_o = e_s - iR_s = e_s \cdot \frac{R_t}{R_s + R_t} < e_s$, còn ở mạch H.3.51b nhờ có mạch đệm op-amp

cách ly nguồn e_s với tải R_t (hầu như không có dòng điện chạy từ nguồn e_s vào đầu vào không đảo của op-amp) nên điện áp hai đầu tải R_t là $u_o = e_s$. Ở trường hợp đầu (H.3.51a) năng lượng cung cấp cho tải là lấy từ nguồn e_s , còn ở trường hợp H.3.51b năng lượng đó hầu như không lấy từ nguồn e_s mà lấy từ các nguồn cung cấp của op-amp.



Hình 3.51

Ví dụ 3.22: Xét mạch chứa op-amp H.3.52a.

Dùng mô hình lý tưởng của op-amp ta có:

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 0$$

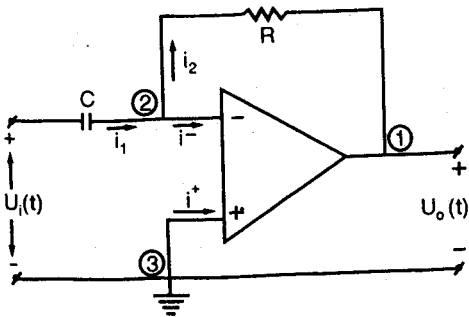
$$i_- = 0$$

Viết luật K1 cho nút 2, chú ý $i_- = 0$ ta được: $i_1 = i_2$

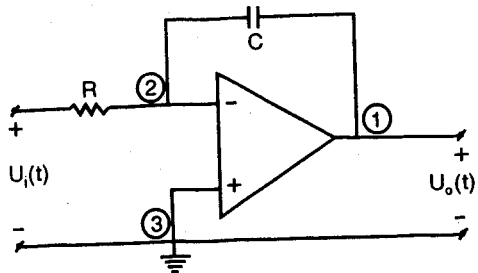
$$\Rightarrow C \frac{d}{dt}(u_i - \varphi_2) = \frac{1}{R}(\varphi_2 - u_o)$$

$$\text{Vì } \varphi_2 = 0 \Rightarrow u_o = -RC \frac{du_i}{dt} \quad (3.38)$$

Tín hiệu ra tỉ lệ với đạo hàm của tín hiệu vào, vì vậy mạch H.3.52a gọi



Hình 3.52a



Hình 3.52b

là mạch lấy vi phân.

Ví dụ 3.23: Xét mạch chứa op-amp H.3.52b

Viết luật K1 cho nút 2 ta được:

$$C \frac{d}{dt}(\varphi_2 - u_o) = \frac{1}{R}(u_i - \varphi_2)$$

Vì $\varphi_2 = 0$ suy ra:

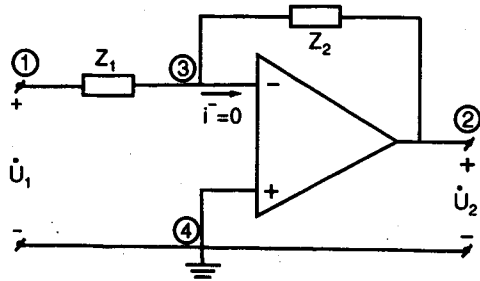
$$u_i = -RC \frac{du_o}{dt}$$

$$\text{do đó} \quad u_o(t) = \frac{-1}{RC} \int_0^t u_i(t) dt + u_o(0) \quad (3.39)$$

Nếu tụ C không tích điện tại thời điểm ban đầu $t = 0$ thì $u_o(0) = 0$ do đó:

$$u_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_i(t) dt \quad (3.40)$$

Mạch H.3.52b gọi là mạch lấy tích phân.



Hình 3.53

Ví dụ 3.24: Xét mạch chứa op-amp H.3.53 ở xác lập điều hòa. Tìm $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$

Giải. Dùng mô hình lý tưởng của op-amp ta có: $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}_4 = 0$ và $i_- = 0$

Viết phương trình điện thế nút cho nút 3:

$$-\frac{\dot{U}_1}{Z_1} - \frac{\dot{U}_2}{Z_2} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (3.41)$$

Ví dụ 3.25: Xét mạch điện H.3.54a ở xác

lập điều hòa. Tìm $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$. Dùng mô hình lý

tưởng của op-amp.

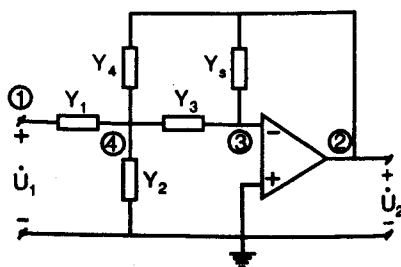
Giải

Ta có: $\dot{\phi}_3 = 0, \dot{\phi}_1 = \dot{U}_1, \dot{\phi}_2 = \dot{U}_2$

Viết phương trình thế nút cho nút 4 và nút 3:

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)\dot{\phi}_4 - Y_1\dot{\phi}_1 - Y_4\dot{\phi}_2 = 0 \quad (3.42a)$$

$$-Y_3\dot{\phi}_4 - Y_5\dot{\phi}_2 = 0 \quad (3.42b)$$

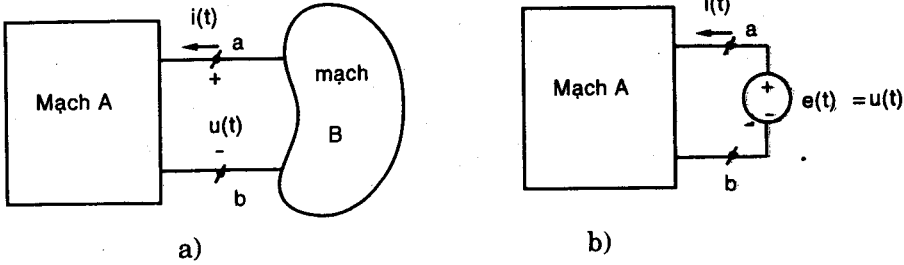


Hình 3.54

Từ hai phương trình trên có thể suy ra:

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{\phi}_2}{\dot{\phi}_1} = \frac{-Y_1 Y_3}{Y_3 Y_4 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)} \quad (3.43)$$

3.6 CÁC ĐỊNH LÝ MẠCH CƠ BẢN

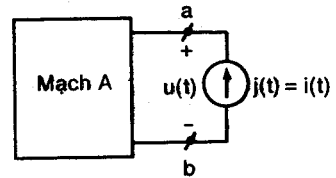


Hình 3.55

3.6.1 Định lý thay thế (substitution theorem)

Xét mạch điện như H.3.55a. Theo định lý thay thế:

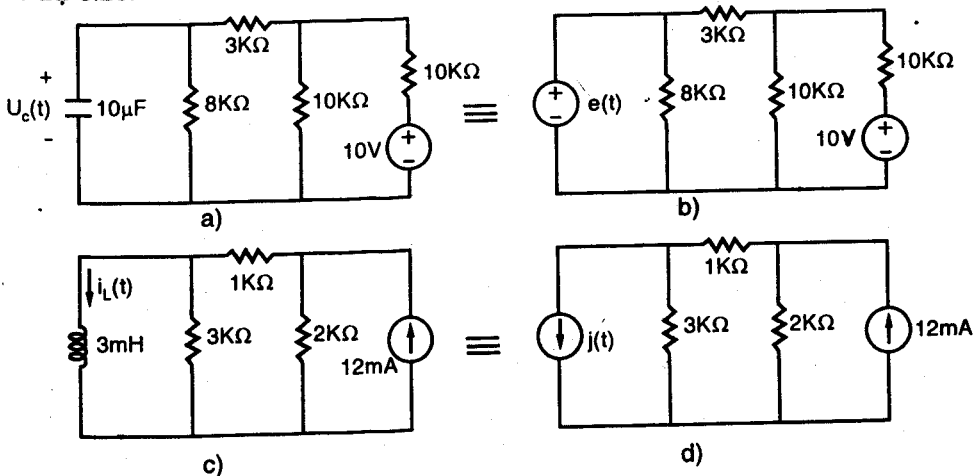
- Nếu đã biết điện áp $u(t)$ giữa hai cực a và b, thì tình trạng của mạch A sẽ không thay đổi nếu ta thay thế phần mạch B bởi nguồn sức điện động $e(t) = u(t)$ như trên H.3.55b.



Hình 3.55c

- Nếu đã biết dòng điện $i(t)$ ở cực a, b thì tình trạng của mạch A sẽ không thay đổi nếu ta thay thế phần mạch B bởi một nguồn dòng $j(t) = i(t)$ như trên H.3.55c.

Ví dụ 3.26:



Hình 3.56

Giả sử ở mạch H.3.56a ta biết được điện áp $u_C(t)$ trên tụ là:

$$u_C(t) = \begin{cases} 30V & , t \leq 0 \\ 2,5 + 27,5e^{-t/0,04} & , t \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó có thể thay thế điện dung $10\mu F$ bởi nguồn áp $e(t)$ như H.3.56b với:

$$e(t) = u_C(t) = \begin{cases} 30V & , t \leq 0 \\ 2,5 + 27,5e^{-t/0,04} & , t \geq 0 \end{cases}$$

Dòng áp trên các nhánh, các phần tử ở H.3.56a,b là như nhau.

Ví dụ 3.27: Phần tử cảm ở H.3.56c với dòng điện chảy qua nó:

$$i_L(t) = \begin{cases} 1mA & , t \leq 0 \\ 8 - 7e^{\frac{t}{2 \cdot 10^{-6}}} mA & , t \geq 0 \end{cases}$$

có thể được thay thế bằng nguồn dòng

$$j(t) = i_L(t) = \begin{cases} 1mA & , t \leq 0 \\ 8 - 7e^{\frac{t}{2 \cdot 10^{-6}}} mA & , t \geq 0 \end{cases}$$

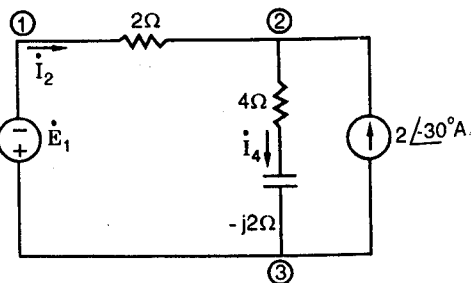
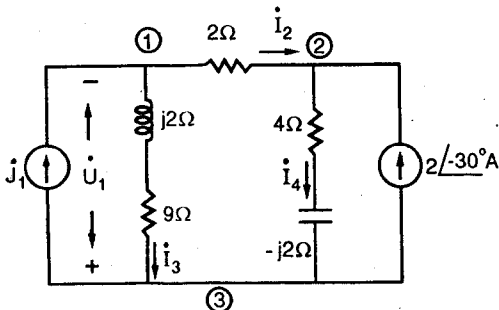
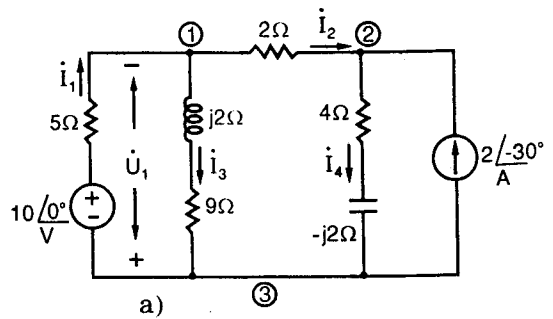
như H.3.56d.

Ví dụ 3.28:

Xét mạch điện H.3.3 được vẽ lại như H.3.57a. Ta đã tính được (ở ví dụ 3.1 mục 3.2):

$$\dot{I}_1 = 0,59 \angle 47^\circ 33A$$

$$\dot{U}_1 = -8 + j2,17 = 8,29 \angle 164^\circ 82V$$



Hình 3.57

Theo định lý thay thế, có thể thay nhánh gồm nguồn áp $10\angle 0^\circ V$ và

điện trở 5Ω bởi nguồn dòng $\dot{J}_1 = 0,59 \angle 47^\circ 33A$ như H.3.57b. Khi đó các dòng điện $\dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4$ v.v. trong các nhánh vẫn không đổi. Cũng theo định lý thay thế, nếu trên mạch H.3.57c, nguồn áp $\dot{E}_1$ có trị số bằng $\dot{E}_1 = 8,29 \angle 164^\circ 82V$ thì dòng $\dot{I}_2, \dot{I}_4$ vẫn như trước tức như H.3.57a.

• **Chứng minh định lý thay thế:**

Tổng quát hệ phương trình mạch (mà các ẩn số là dòng, áp ở các nhánh) là hệ phương trình vi phân. Trường hợp riêng nếu là mạch thuần trở thì là hệ phương trình đại số, nếu là mạch xác lập điều hòa dùng các ảnh phức dòng áp thì là hệ phương trình đại số phức đối với các biến phức. Đối với hệ phương trình đó tồn tại một nghiệm duy nhất (thỏa mãn các điều kiện đầu cho trước, nếu là hệ phương trình vi phân).

Vì cấu trúc của phần mạch A trong H.3.55b và H.3.55c giống như phần mạch A trong H.3.55a nên các nghiệm dòng, áp ở phần mạch A H.3.55a cũng thỏa hai định luật K1 và K2 viết cho phần mạch A H.3.55b và H.3.55c, do đó theo tính duy nhất nghiệm của hệ phương trình mạch, các nghiệm này cũng là nghiệm của phần mạch A H.3.55b và H.3.55c.

3.6.2 Tính chất tuyến tính - nguyên lý xếp chồng và nguyên lý tỉ lệ

1- Quan hệ tuyến tính giữa các biến trong mạch tuyến tính

Xét một mạch tuyến tính ở chế độ xác lập điều hòa. Giả sử ta gọi các nguồn dòng, nguồn áp độc lập là các kích thích, ký hiệu là $\dot{F}$ (ảnh phức) và các dòng điện, điện áp trên các trở kháng, các nguồn phụ thuộc là các đáp ứng, ký hiệu là $\dot{X}$ (ảnh phức).

* Ta có định lý sau:

“Trong một mạch tuyến tính có s nguồn kích thích $\dot{F}_1, \dot{F}_2, \dots, \dot{F}_s$ thì mỗi đáp ứng $\dot{X}_k$ sẽ quan hệ tuyến tính với s kích thích đó dạng:

$$\dot{X}_k = T_{k1} \dot{F}_1 + T_{k2} \dot{F}_2 + \dots + T_{ks} \dot{F}_s = \sum_{l=1}^s T_{kl} \dot{F}_l \quad (3.44)$$

trong đó T_{kl} là các hằng số không phụ thuộc vào các kích thích”.

Thật vậy từ hai định luật Kirchhoff 1, 2 và các phương trình liên hệ giữa dòng và áp trên nhánh ta thấy các đáp ứng và kích thích ở trong các quan hệ tuyến tính có dạng tổng quát:

$$\sum_i K_i \dot{X}_i + \sum_j K'_j \dot{F}_j = 0 \quad (3.45)$$

trong đó K_i, K'_j là các hằng số.

Ví dụ: - Đối với các dòng điện ở một nút, theo định luật K1 ta có:

$$\sum_{\text{nút}} \pm \dot{I} = \sum_{\text{nút}} \pm \dot{J} \quad (3.46)$$

- Đối với các điện áp trong một vòng, theo định luật K2 ta có:

$$\sum_{\text{vòng}} \pm \dot{U} = \sum_{\text{vòng}} \pm \dot{E} \quad (3.47)$$

- Đối với dòng $\dot{I}_i$, áp $\dot{U}_i$ trên trở kháng Z_i ta có quan hệ:

$$\dot{U}_i = Z_i \dot{I}_i \quad (3.48a)$$

với Z_i trong trường hợp tổng quát có dạng $Z_i = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$, đối với mạch tuyến tính r, L, C , và do đó Z_i , không phụ thuộc dòng, áp.

- Đối với nguồn áp phụ thuộc áp: $\dot{U}_i = \alpha_{ij} \dot{U}_j$ (3.48b)

nguồn áp phụ thuộc dòng: $\dot{U}_i = r_{ij} \dot{I}_j$ (3.48c)

nguồn dòng phụ thuộc dòng: $\dot{I}_i = \beta_{ij} \dot{I}_j$ (3.48d)

nguồn dòng phụ thuộc áp: $\dot{I}_i = g_{ij} \dot{U}_j$ (3.48e)

- Đối với hai phần tử cảm có ghép hồ cảm như H.3.20 ta có:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.48f)$$

trong đó đối với mạch tuyến tính $\alpha_{ij}, r_{ij}, \beta_{ij}, g_{ij}, M, L_1, L_2$ không phụ thuộc dòng áp.

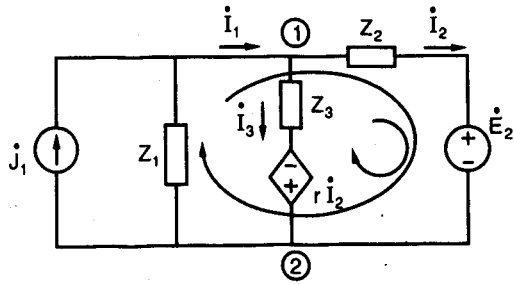
Từ (3.45) có thể suy ra các đáp ứng là nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính có dạng:

$$\begin{cases} A_{11} \dot{X}_1 + A_{12} \dot{X}_2 + \dots + A_{1n} \dot{X}_n = B_{11} \dot{F}_1 + B_{12} \dot{F}_2 + \dots + B_{1s} \dot{F}_s \\ A_{21} \dot{X}_1 + A_{22} \dot{X}_2 + \dots + A_{2n} \dot{X}_n = B_{21} \dot{F}_1 + B_{22} \dot{F}_2 + \dots + B_{2s} \dot{F}_s \\ \dots \\ A_{n1} \dot{X}_1 + A_{n2} \dot{X}_2 + \dots + A_{nn} \dot{X}_n = B_{n1} \dot{F}_1 + B_{n2} \dot{F}_2 + \dots + B_{ns} \dot{F}_s \end{cases} \quad (3.49)$$

trong đó $\dot{X}_k$ là các dòng điện (hoặc các điện áp).

Từ (3.49) có thể suy ra mỗi đáp ứng $\dot{X}_k$ sẽ quan hệ tuyến tính với s kích thích ở dạng (3.44).

Để minh họa ta xét mạch điện H.3.58.



Hình 3.58

Viết luật K1 cho nút 1:

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0$$

Viết luật K2 cho hai vòng như hình vẽ:

$$Z_2 \dot{I}_2 - Z_3 \dot{I}_3 = -\dot{E}_2 - r \dot{I}_2$$

$$Z_2 \dot{I}_2 + Z_1 \dot{I}_1 = -\dot{E}_2 + Z_1 \dot{J}_1$$

Sắp xếp lại ta được hệ phương trình đối với các đáp ứng $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ như sau:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ -(Z_2 + r) \dot{I}_2 + Z_3 \dot{I}_3 = \dot{E}_2 \\ Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 = Z_1 \dot{J}_1 - \dot{E}_2 \end{cases} \quad (3.50)$$

Ví dụ bằng số $Z_1 = 5\Omega$, $Z_2 = 30\Omega$, $Z_3 = 10\Omega$, $r = 30\Omega$. Khi đó:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ -60 \dot{I}_2 + 10 \dot{I}_3 = \dot{E}_2 \\ 5 \dot{I}_1 + 30 \dot{I}_2 = 5 \dot{J}_1 - \dot{E}_2 \end{cases} \quad (3.51)$$

Từ (3.51) suy ra:

$$\dot{I}_1 = \frac{7}{13} \dot{J}_1 - \frac{4}{65} \dot{E}_2 \quad (3.52a)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{13} \dot{J}_1 - \frac{3}{130} \dot{E}_2 \quad (3.52b)$$

$$\dot{I}_3 = \frac{6}{13} \dot{J}_1 - \frac{1}{26} \dot{E}_2 \quad (3.52c)$$

* Từ (3.44) có thể suy ra định lý sau:

Trong mạch tuyến tính có s nguồn kích thích, nếu chỉ có p ($p < s$) nguồn kích thích biến động còn $(s-p)$ kích thích khác giữ nguyên thì mỗi đáp ứng sẽ ở trong quan hệ tuyến tính với p đáp ứng tùy ý khác dạng:

$$\dot{X}_k = C_{k1} \dot{X}_1 + C_{k2} \dot{X}_2 + \dots + C_{kp} \dot{X}_p + \dot{X}_{ko} \quad (3.53)$$

trong đó $\dot{X}_{ko}, C_{k1}, C_{k2}, \dots, C_{kp}$ là các hằng số".

Thật vậy, nếu chỉ có một nguồn kích thích $\dot{F}_1$ biến động, thì theo (3.44) có thể viết:

$$\dot{X}_k = T_{k1} \dot{F}_1 + \dot{X}_k^o \quad (3.54a)$$

$$\dot{X}_l = T_{l1} \dot{F}_1 + \dot{X}_l^o \quad (3.54b)$$

trong đó: $\dot{X}_k^o = T_{k2} \dot{F}_2 + \dots + T_{ks} \dot{F}_s, \dot{X}_l^o = T_{l2} \dot{F}_2 + \dots + T_{ls} \dot{F}_s$

Từ (3.54b) suy ra $\dot{F}_1 = (\dot{X}_l - \dot{X}_l^o) / T_{l1}$, sau đó thay $\dot{F}_1$ vừa tính được vào (3.54a) ta được:

$$\dot{X}_k = A \dot{X}_l + B \quad (3.55)$$

với $A = \frac{T_{k1}}{T_{l1}}, B = \dot{X}_k^o - \frac{T_{k1}}{T_{l1}} \dot{X}_l^o$

Vậy $\dot{X}_k$ quan hệ tuyến tính với một đáp ứng khác là $\dot{X}_l$.

Trở lại mạch điện H.3.58 với $Z_1 = 5\Omega, Z_2 = 30\Omega, Z_3 = 10\Omega, r = 30\Omega$, nếu $\dot{J}_1 = 2\angle 0^\circ A$ giữ nguyên còn kích thích $\dot{E}_2$ biến động thì từ (3.52) ta có:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = -\frac{4}{65} \dot{E}_2 + \frac{14}{13} \end{cases} \quad (3.56a)$$

$$\begin{cases} \dot{I}_2 = -\frac{3}{130} \dot{E}_2 + \frac{2}{13} \end{cases} \quad (3.56b)$$

$$\begin{cases} \dot{I}_3 = -\frac{1}{26} \dot{E}_2 + \frac{12}{13} \end{cases} \quad (3.56c)$$

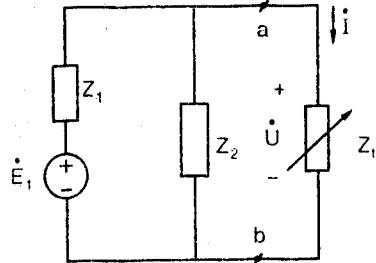
từ (3.56) ta có thể suy được các quan hệ tuyến tính sau đây:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{8}{5} \dot{I}_3 - \frac{2}{5} \\ \dot{I}_2 &= \frac{3}{5} \dot{I}_3 - \frac{2}{5} \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{8}{3}\dot{I}_2 + \frac{2}{3}$$

* Trường hợp mạch tuyến tính có p nhánh có trở kháng biến động quan hệ (3.53) vẫn đúng nghĩa là mỗi đáp ứng cũng ở trong quan hệ tuyến tính với p đáp ứng tùy ý khác. Thật vậy khi có p trở kháng biến động thì các điện áp trên p trở kháng đó cũng biến động theo các quy luật nào đó. Theo định lý thay thế có thể thay p điện áp bằng p nguồn sức điện động biến động theo đúng các quy luật đó, và như vậy ta đã đưa về trường hợp mạch tuyến tính có p kích thích biến động, do đó (3.53) nghiệm đúng.

Ví dụ 3.29: Xét mạch điện H.3.59 với $Z_1 = j10\Omega$, $Z_2 = 30\Omega$, $\dot{E}_1 = 110\angle 0^\circ \text{V}$. Khi trở kháng tải Z_t biến động, dòng áp các nhánh sẽ biến động theo.



Hình 3.59

Tìm quan hệ giữa áp $\dot{U}$ và dòng $\dot{I}$ trên tải.

Giải

Mạch có một trở kháng là Z_t biến động nên ta có quan hệ tuyến tính:

$$\dot{U} = A\dot{I} + B \quad (1)$$

Để tìm A và B chỉ cần xét hai chế độ ứng với hai trị số cụ thể của Z_t .

Ta xét hai trường hợp đặc biệt:

- Khi $Z_t = \infty \Rightarrow \dot{I} = 0$, nghĩa là hai cực a và b hở mạch. Khi đó từ sơ đồ suy ra

$$\dot{U} = \dot{U}_{h\sigma} = \frac{\dot{E}_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{330}{3 + j} = 104,36\angle -18^\circ 43' \text{V}$$

khác từ (1) với $\dot{I} = 0 \Rightarrow \dot{U} = B$

$$\text{Vậy } B = \dot{U}_{h\sigma} = 104,36\angle -18^\circ 43' \text{V}.$$

- Khi $Z_t = 0 \Rightarrow \dot{U} = 0$, nghĩa là hai cực a và b ngắn mạch. Từ sơ đồ suy ra

$$\dot{I} = \dot{I}_{ng} = \frac{\dot{E}_1}{Z_1} = -j11 = 11\angle -90^\circ \text{A}$$

mặt khác từ (1) với $\dot{U} = 0 \Rightarrow A = -\frac{B}{\dot{I}_{ng}} = -\frac{\dot{U}_{h\sigma}}{\dot{I}_{ng}} = -9,5 \angle 71^\circ 57'$

Tóm lại:
$$\dot{U} = \left(-\frac{\dot{U}_{h\sigma}}{\dot{I}_{ng}} \right) \dot{I} + \dot{U}_{h\sigma}$$

$$= -9,5 \angle 71^\circ 57' \dot{I} + 104,36 \angle -18^\circ 43'$$

2- Nguyên lý xếp chồng

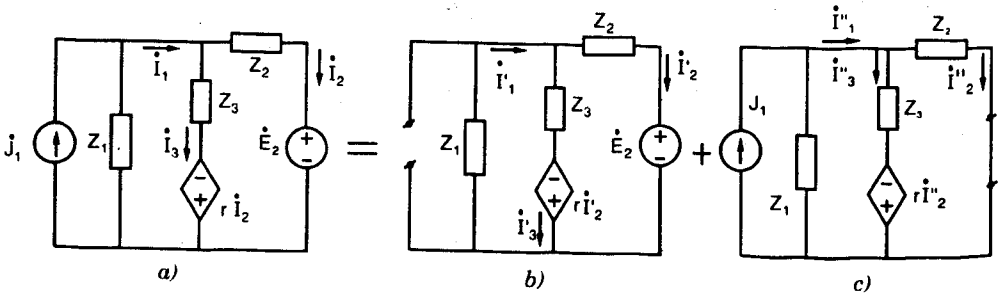
Trong quan hệ tuyến tính (3.44) nếu đặt: $\dot{X}_k^h = T_{kh} \dot{F}_h$ ($h = 1 + s$) thì:

$$\dot{X}_k = \sum_{h=1}^s \dot{X}_k^h \quad (3.58)$$

ta thấy $\dot{X}_k^h = \dot{X}_k$ khi chỉ có $\dot{F}_h \neq 0$ còn $(s - 1)$ nguồn kích thích khác bằng không, nghĩa là $\dot{X}_k^h$ là đáp ứng tạo bởi một nguồn kích thích $\dot{F}_h$ tác động riêng rẽ (các nguồn kích thích khác bằng không). Như vậy, từ (3.58) ta có thể phát biểu tính chất sau:

Đáp ứng tạo bởi nhiều nguồn kích thích tác động đồng thời thì bằng tổng các đáp ứng tạo bởi mỗi nguồn kích thích tác động riêng rẽ.

Tính chất này gọi là tính chất xếp chồng đáp ứng đối với các kích thích, mà thường quen gọi là nguyên lý xếp chồng. Đó là một tính chất cơ bản của mạch điện tuyến tính.



Hình 3.60

Để minh họa xét mạch điện H.3.58 được vẽ lại trên H.3.60a. Mạch có hai nguồn kích thích là nguồn dòng độc lập J_1 và nguồn độc lập $\dot{E}_2$. Nếu chỉ cho một mình $\dot{E}_2$ tác động, triệt tiêu J_1 thì ta có mạch H.3.60b với các đáp ứng là $\dot{I}'_1, \dot{I}'_2, \dot{I}'_3$. Nếu chỉ cho một mình J_1 tác động còn $\dot{E}_2$ triệt tiêu thì ta có mạch H.3.60c với các đáp ứng là $\dot{I}''_1, \dot{I}''_2, \dot{I}''_3$.

Theo nguyên lý xếp chồng:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}'_3 + \dot{I}''_3$$

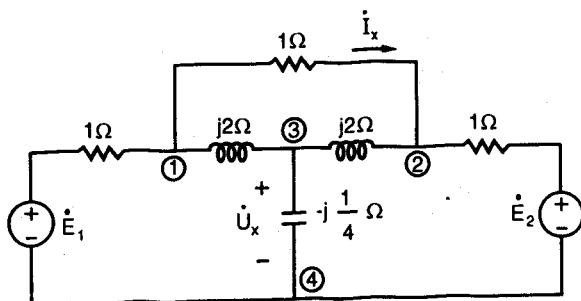
trong đó

$$\dot{I}'_1 = -\frac{4}{65}\dot{E}_2, \dot{I}'_2 = -\frac{3}{130}\dot{E}_2, \dot{I}'_3 = -\frac{1}{26}\dot{E}_2$$

$$\dot{I}''_1 = \frac{7}{13}J_1, \dot{I}''_2 = \frac{1}{13}J_1, \dot{I}''_3 = \frac{6}{13}J_1$$

Ví dụ 3.30: Trong mạch điện H.3.61 tìm $\dot{I}_x$, $\dot{U}_x$ khi:

a) $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{E}$; b) $\dot{E}_1 = -\dot{E}_2 = \dot{E}$; c) $\dot{E}_1 = (1+j)V$ và $\dot{E}_2 = (3+j5)V$

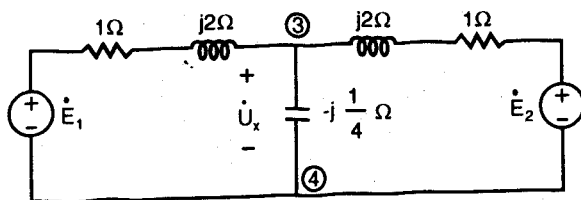


Hình 3.61

Giải

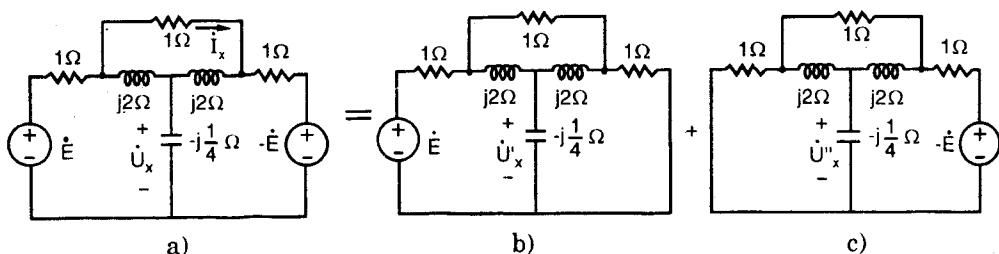
a) Chọn $\phi_4 = 0$. Khi $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{E}$, do tính chất đối xứng ta có $\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow \dot{I}_x = 0$. Do đó theo định lý thay thế có thể hở mạch nhánh $\dot{I}_x$ để được mạch H.3.62. Dùng phương pháp thế nút ta được:

$$\left(\frac{2}{1+j2} + \frac{1}{-j\frac{1}{4}} \right) \dot{U}_x = \frac{2\dot{E}}{1+j2} \Rightarrow \dot{U}_x = \frac{\dot{E}}{-3+j2} \quad (1)$$



Hình 3.62

b) Khi $\dot{E}_1 = \dot{E}$, $\dot{E}_2 = -\dot{E}$, do tính chất đối xứng ta có $\dot{U}_x = 0$. Có thể thấy điều này bằng cách dùng nguyên lý xếp chồng như H.3.63.



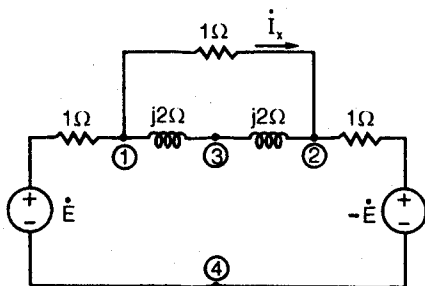
Hình 3.63

Do tính chất đối xứng ta có: $\dot{U}'_x = -\dot{U}''_x \Rightarrow \dot{U}_x = \dot{U}'_x + \dot{U}''_x = 0$

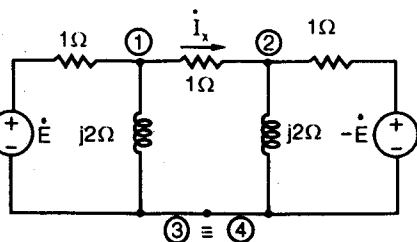
Vì $\dot{U}_x = 0$ nên dòng qua nhánh có phần tử điện dung bằng không, do đó theo định lý thay thế có thể hờ mạch nhánh này để được mạch H.3.64. Phân tích mạch H.3.64, ta dễ dàng suy ra:

$$\dot{I}_x = \frac{j4}{1+j6} \dot{E} \quad (2)$$

Chú ý rằng vì $\dot{U}_x = 0$ nên theo định lý thay thế cũng có thể ngắn mạch nhánh có phần tử điện dung để được H.3.65. Phân tích mạch H.3.65 ta cũng được $\dot{I}_x$ như (2).



Hình 3.64



Hình 3.65

c) Nếu đặt:

$$\dot{E}_3 = \frac{1}{2}(\dot{E}_1 + \dot{E}_2) = \frac{1}{2}(1+j+3+j5) = 2+j3V$$

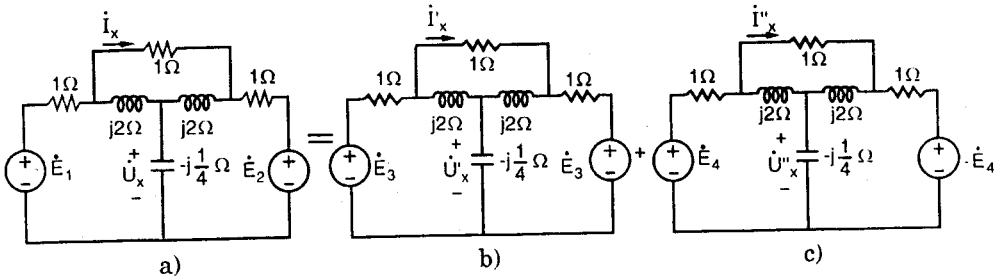
$$\dot{E}_4 = \frac{1}{2}(\dot{E}_1 - \dot{E}_2) = \frac{1}{2}(1+j-3-j5) = -1-j2V$$

ta có:

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_3 + \dot{E}_4$$

$$\dot{E}_2 = \dot{E}_3 - \dot{E}_4$$

Do đó có thể ứng dụng nguyên lý xếp chồng như H.3.66



Hình 3.66

Nhận xét rằng mạch 3.66b là ứng với trường hợp câu a, do đó dùng kết quả ở câu a ta được:

$$\dot{I}'_x = 0; \dot{U}'_x = \frac{\dot{E}_3}{-3+j2} = \frac{2+j3}{-3+j2} = -j1V$$

Mạch H.3.66c là ứng với trường hợp câu b, ta được theo (2):

$$\dot{I}''_x = \frac{j4}{1+j6} \dot{E}_4 = \frac{j4(-1-j2)}{1+j6} = \frac{8-j4}{1+j6} A; \dot{U}''_x = 0$$

Do đó theo nguyên lý xếp chồng:

$$\dot{I}_x = \dot{I}'_x + \dot{I}''_x = \frac{8-j4}{1+j6} A \quad \text{và} \quad \dot{U}_x = \dot{U}'_x + \dot{U}''_x = -j1V$$

3- Nguyên lý tỷ lệ

Từ quan hệ tuyến tính (3.44) có thể suy ra tính chất sau đây:

Nếu tất cả các nguồn kích thích trong một mạch tuyến tính cùng được tăng lên K lần thì tất cả các đáp ứng cũng đều tăng lên K lần. Đặc biệt nếu mạch tuyến tính chỉ có một nguồn kích thích duy nhất thì mỗi đáp ứng sẽ tỷ lệ với kích thích đó. K là hằng số thực hoặc phức.

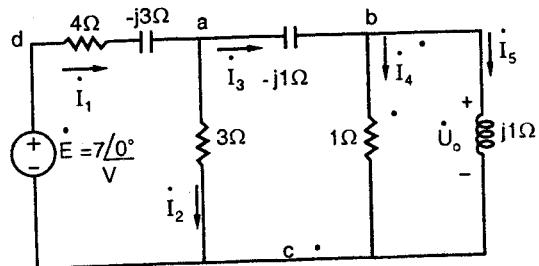
Tính chất trên là một tính chất cơ bản của mạch tuyến tính, gọi là tính chất tỷ lệ hoặc nguyên lý tỷ lệ.

Ví dụ 3.31: Thử dùng tính chất tỷ lệ, xác định điện áp $\dot{U}_o$ ở mạch điện H.3.67.

Giải

Ta xác định sức điện động $\dot{E}'$ tác động lên mạch để cho điện áp $\dot{U}_o$ có một giá trị cho trước chẳng hạn $\dot{U}'_o = j1V$

Trình tự tính như sau:



Hình 3.67

$$\dot{U}'_o = j1V \Rightarrow \dot{I}'_5 = \frac{j1}{j1} = 1A, \dot{I}'_4 = \frac{j1}{1} = j1A$$

$$\dot{I}'_3 = \dot{I}'_4 + \dot{I}'_5 = 1 + j1A$$

$$\dot{U}'_{ab} = -j1\dot{I}'_3 = -j1(1 + j1) = 1 - j1V$$

$$\dot{U}'_{ac} = \dot{U}'_{ab} + \dot{U}'_o$$

$$= 1 - j1 + j1 = 1V \Rightarrow \dot{I}'_2 = \frac{\dot{U}'_{ac}}{3} = \frac{1}{3}A$$

$$\dot{I}'_1 = \dot{I}'_3 + \dot{I}'_2 = 1 + j1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} + j1A$$

$$\dot{U}'_{da} = (4 - j3)\dot{I}'_1 = (4 - j3)\left(\frac{4}{3} + j1\right) = \frac{25}{3}V$$

Cuối cùng $\dot{E}' = \dot{U}'_{dc} = \dot{U}'_{da} + \dot{U}'_{ac} = \frac{25}{3} + 1 = \frac{28}{3}V$

$$K = \frac{\dot{E}}{\dot{E}'} = \frac{7}{28/3} = \frac{3}{4} \text{ lần}$$

Nếu nhân $\dot{E}'$ lên K lần để trở thành $\dot{E}_1 = 7\angle 0^\circ V$ thì $\dot{I}'_1, \dot{I}'_2, \dot{I}'_3, \dot{I}'_4, \dot{I}'_5, \dot{U}'_o$ cũng sẽ tăng lên K lần để trở thành:

$$\dot{I}_1 = K\dot{I}'_1 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} + j1\right) = 1 + j\frac{3}{4}A$$

$$\dot{I}_2 = K\dot{I}'_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}A; \dot{I}_3 = K\dot{I}'_3 = \frac{3}{4}(1 + j1)A$$

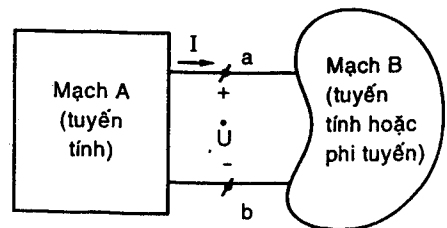
$$\dot{I}_4 = K\dot{I}'_4 = j\frac{3}{4}A; \dot{I}_5 = K\dot{I}'_5 = \frac{3}{4}A; \dot{U}_o = K\dot{U}'_o = j\frac{3}{4}V$$

Phương pháp giải dùng tính chất tỉ lệ như trên tiện dùng cho các mạch có dạng cái thang (ladder network) và chỉ có một nguồn kích thích.

3.6.3 Định lý Thévenin và định lý Norton

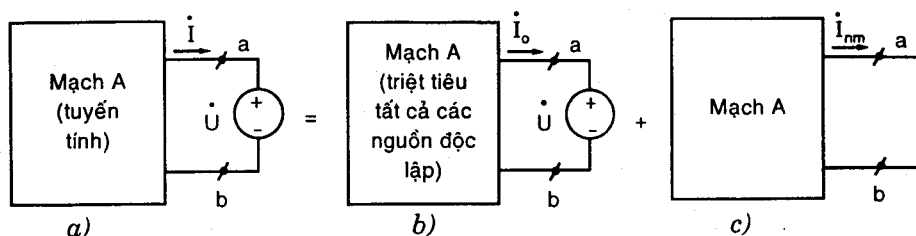
Giả sử một mạch điện có thể được tách ra hai phần như H.3.68. Xét mạch ở chế độ xác lập điều hòa.

Phần mạch A là tuyến tính. Nếu trong mạch A có chứa các nguồn phụ thuộc thì các biến dòng áp điều khiển chúng, giả sử, cũng cùng nằm trong phần mạch A.



Hình 3.68

Gọi I là dòng điện và U là điện áp giữa hai cực a và b với chiều dương như hình vẽ.



Hình 3.69

Theo định lý thay thế, có thể thay thế phần mạch B bởi một nguồn sức điện động có trị số đúng bằng $\dot{U}$ như H.3.69a, khi đó dòng điện $\dot{I}$ ở hai cực a, b cũng như các dòng áp khác trong mạch A là không đổi so với H.3.68. Mạch H.3.69a là mạch tuyến tính, đáp ứng dòng $\dot{I}$ là gây ra bởi các kích thích gồm nguồn áp độc lập $\dot{U}$ ở hai cực a, b và các nguồn độc lập bên trong phần mạch A. Do đó có thể áp dụng nguyên lý xếp chồng để được:

$$\dot{I} = \dot{I}_o + \dot{I}_{nm} \quad (3.59)$$

trong đó: $\dot{I}_o$ là dòng điện gây ra bởi nguồn áp $\dot{U}$, còn tất cả các nguồn độc lập trong mạch A bị triệt tiêu (H.3.69b).

$\dot{I}_{nm}$ là dòng điện gây ra bởi các nguồn độc lập trong mạch A, còn nguồn áp $\dot{U}$ bị triệt tiêu nghĩa là ngắn mạch hai cực a và b (H.3.69c). Dòng $\dot{I}_{nm}$ gọi là dòng điện ngắn mạch.

Vì ở H.3.69b, phần mạch A không chứa nguồn nên giữa $\dot{U}$ và $\dot{I}_o$ có mối liên hệ:

$$\dot{I}_o = -\frac{\dot{U}}{Z_o} \quad (3.60)$$

trong đó Z_o là trở kháng tương đương của mạch A nhìn từ hai cực a và b khi triệt tiêu tất cả các nguồn độc lập bên trong mạch A.

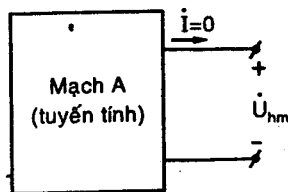
Z_o gọi là trở kháng Thévenin của mạch A.

Thay (3.60) vào (3.59) ta được:

$$\dot{I} = -\frac{\dot{U}}{Z_o} + \dot{I}_{nm} \quad (3.61)$$

Quan hệ (3.61) đúng với mọi chế độ làm việc của mạch. Xét một chế độ đặc biệt ứng với khi hai cực a và b bị hở mạch như H.3.70.

Khi đó $\dot{I}_{1=0}$, $\dot{U} = \dot{U}_{hm}$ gọi là điện áp hở mạch và quan hệ (3.61) trở thành:



Hình 3.70

$$0 = -\frac{\dot{U}_{hm}}{Z_o} + \dot{I}_{nm}$$

$$\Rightarrow \dot{U}_{hm} = Z_o \dot{I}_{nm} \quad (3.62)$$

thay (3.62) vào (3.61) ta được:

$$\dot{I} = -\frac{\dot{U}}{Z_o} + \frac{\dot{U}_{hm}}{Z_o} \Rightarrow \dot{U} = \dot{U}_{hm} - Z_o \dot{I} \quad (3.63)$$

Bây giờ ta khảo sát các mạch mà được mô tả bởi các phương trình (3.61) và (3.63).

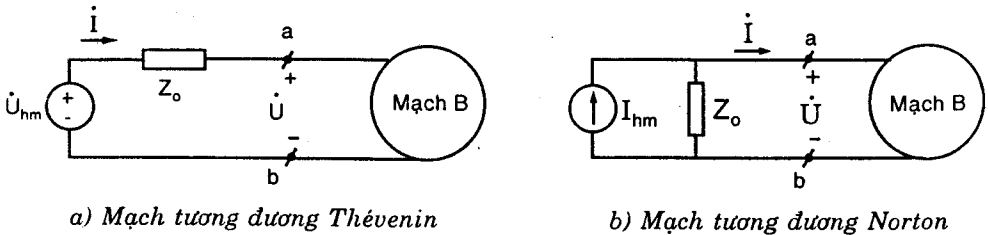
Mạch được mô tả bởi phương trình (3.63) được vẽ trên H.3.71a gồm một nguồn sức điện động có trị số bằng điện áp hở mạch $\dot{U}_{hm}$ nối tiếp với trở kháng Thévenin. Ta gọi đó là mạch tương đương Thévenin của phần mạch tuyến tính A.

Định lý Thévenin được phát biểu như sau:

Có thể thay tương đương một mạng một cửa tuyến tính bởi một nguồn áp bằng điện áp trên cửa khi hở mạch mắc nối tiếp với trở kháng Thévenin của mạng một cửa.

(Phần mạch A gọi là mạng một cửa, vì nó liên lạc trao đổi tín hiệu và năng lượng điện từ với bên ngoài thông qua một cửa gồm cặp cực a và b).

Mạch được mô tả bởi phương trình (3.61) gọi là mạch tương đương Norton của mạng một cửa A, được vẽ trên H.3.71b.



Hình 3.71

Nó gồm một nguồn dòng có trị số bằng dòng điện ngắn mạch $\dot{I}_{nm}$ nối song song với trở kháng Thévenin của mạng một cửa A.

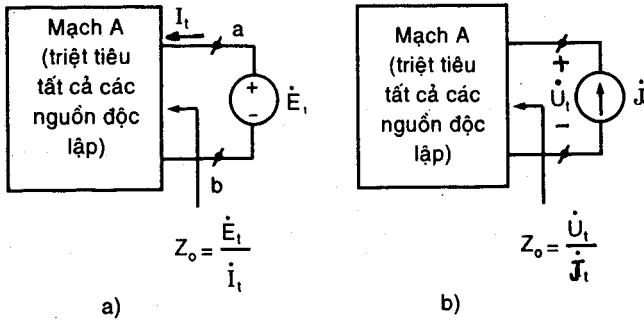
Định lý Norton được phát biểu như sau:

Có thể thay tương đương một mạng một cửa tuyến tính bởi một nguồn dòng bằng dòng điện trên cửa khi ngắn mạch mắc song song với trở kháng tương đương Thévenin của mạng một cửa.

Biết mạch tương đương Thévenin có thể suy ra mạch tương đương Norton và ngược lại nhờ quan hệ (3.62).

Để tìm trở kháng Thévenin Z_o , có thể dùng các cách sau đây:

Cách 1: Triệt tiêu tất cả các nguồn độc lập bên trong mạng một của A.



Hình 3.72

Kích thích ở cửa ab một nguồn áp như H.3.72a (giá trị $\dot{E}_t$ có thể chọn tùy ý, ví dụ $\dot{E}_t = 1V$). Xác định dòng $\dot{I}_t$ chảy vào mạch A từ nguồn $\dot{E}_t$. Theo (3.60) ta tính được $Z_o = \frac{\dot{E}_t}{\dot{I}_t}$. Cũng có thể kích thích ở cửa ab một nguồn dòng $\dot{J}_t$ như H.3.72b (giá trị $\dot{J}_t$ có thể chọn tùy ý, chẳng hạn $\dot{J}_t = 1A$). Xác định điện áp $\dot{U}_t$, từ đó suy ra $Z_o = \frac{\dot{U}_t}{\dot{J}_t}$.

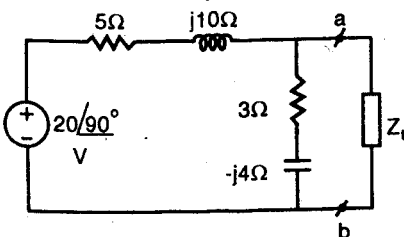
Cách 2: Lần lượt hở mạch và ngắn mạch hai cực a, b để xác định điện áp hở mạch $\dot{U}_{hm}$ và dòng điện ngắn mạch $\dot{I}_{nm}$. Từ (3.62) suy ra:

$$Z_o = \frac{\dot{U}_{hm}}{\dot{I}_{nm}} \quad (3.64)$$

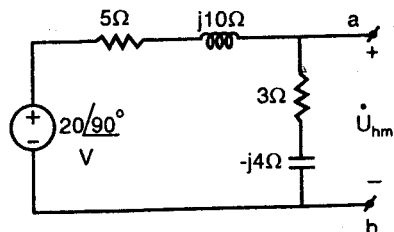
Nếu mạng một của A không chứa nguồn, thì không thể dùng cách này vì khi đó $\dot{U}_{hm} = 0$, $\dot{I}_{nm} = 0$.

Cách 3: Trường hợp mạch A không chứa các nguồn phụ thuộc nào người ta thường tính Z_o bằng cách sau: Triệt tiêu tất cả các nguồn độc lập bên trong mạch A, sau đó dùng các phép biến đổi tương đương (2.54a), (2.55a), (2.55c), (2.57), (2.58), (3.25a,b,c), (3.26a,b,c), (3.27a,b,c) để tính Z_o .

Ví dụ 3.32: Xét mạch điện H.3.73.



Hình 3.73



Hình 3.74

a) Tìm mạch tương đương Thévenin và Norton cho phần mạch bên trái hai cực a và b.

b) Tìm giá trị Z_t để công suất tác dụng trên nó là cực đại. Tính công suất cực đại đó.

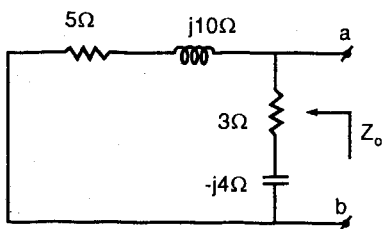
Giải

a) Trước tiên ta tính điện áp hở mạch $\dot{U}_{hm}$ dùng H.3.74.

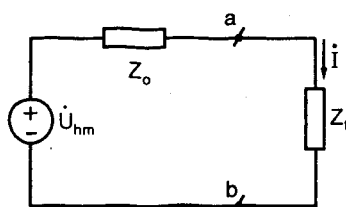
Ta có:
$$\dot{U}_{hm} = \frac{20\angle 90^\circ \cdot (3 - j4)}{(5 + j10) + (3 - j4)} = 10\angle 0^\circ \text{ V}$$

Để tính trở kháng tương đương Z_o , ta triệt tiêu nguồn áp $20\angle 90^\circ$ (H.3.75); dùng các phép biến đổi tương đương (2.54a), (2.55c) ta được:

$$\begin{aligned} Z_o &= \frac{(5 + j10)(3 - j4)}{(5 + j10) + (3 - j4)} \\ &= 5 - j2,5 = 5,59\angle -26^\circ 57' \Omega \end{aligned}$$



Hình 3.75



Hình 3.76

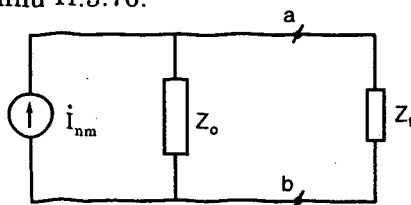
Ta được mạch tương đương Thévenin như H.3.76.

Dòng điện ngắn mạch:

$$\dot{I}_{nm} = \frac{\dot{U}_{hm}}{Z_o} = \frac{10}{5,59\angle -26^\circ 57'}$$

$$\dot{I}_{nm} = 1,79\angle +26^\circ 57' \text{ A}$$

Mạch tương đương Norton như H.3.77.



Hình 3.77

b) Từ H.3.76 ta thấy để công suất tác dụng truyền tới Z_t là cực đại, theo (2.90) ta phải có:

$$Z_t = Z_o^* = 5 + j2,5 = 5,59\angle 26^\circ 57' \Omega$$

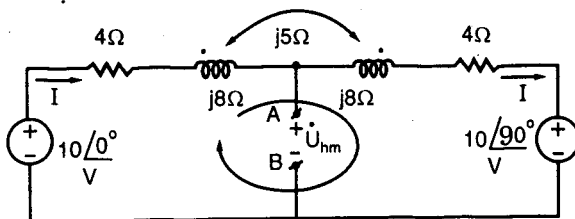
Khi đó dòng điện $\dot{I}$ qua tải là:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{hm}}{Z_o + Z_t} = \frac{\dot{U}_{hm}}{Z_o + Z_o^*} = \frac{10}{(5 - j2,5) + (5 + j2,5)} = 1 \text{ A}$$

Do đó công suất tác dụng cực đại truyền đến tải Z_t là:

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z_o^*) I_m^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times (1)^2 = 2,5 \text{ w}$$

Ví dụ 3.33: Thành lập mạch tương đương Thévenin và Norton đối với hai cực A, B của mạch H.3.78.



Hình 3.78

Giải

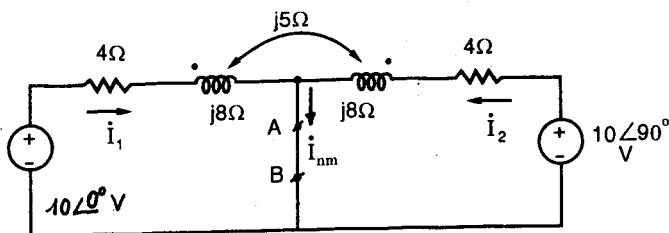
Trước tiên ta tính $\dot{U}_{hm}$. Viết luật K2 cho H.3.78 ta được:

$$(4 + j8 + 4 + j8 - j5 - j5) \dot{I} = 10 - j10$$

$$\Rightarrow \dot{I} = \frac{5(1-j)}{4+j3}$$

$$\Rightarrow \dot{U}_{hm} = \dot{U}_{AB} = (4 + j8 - j5) \dot{I} + j10$$

$$U_{hm} = 5 + j5 = 7,07 \angle 45^\circ \text{ V}$$



Hình 3.79

Để tính $\dot{I}_{nm}$ ta ngắn mạch hai đầu A và B như H.3.79. Viết luật K2 cho hai mắt lưới ta được:

$$(4 + j8) \dot{I}_1 + j5 \dot{I}_2 = 10 \quad (1)$$

$$(4 + j8) \dot{I}_2 + j5 \dot{I}_1 = j10 \quad (2)$$

Giải hệ hai phương trình (1), (2) ta được:

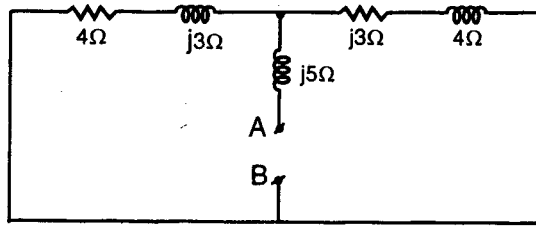
$$\dot{I}_1 = 0,659 - j1,643 \text{ A};$$

$$\dot{I}_2 = 0,259 + j1,157 \text{ A}.$$

Suy ra:

$$\dot{I}_{nm} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0,918 - j0,486 = 1,04 \angle -27,9^\circ \text{ A}$$

Trở kháng tương đương $z_o = \frac{\dot{U}_{hm}}{\dot{I}_{nm}} = \frac{7,07\angle 45^\circ}{1,04\angle -27^\circ 9} = 6,8\angle 72^\circ 9\Omega$



Hình 3.80

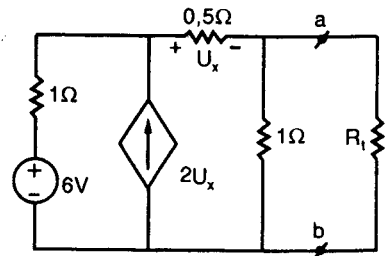
Có thể tính Z_o bằng cách dùng phép biến đổi (3.26a, b, c) biến mạch có hai phần tử cảm có ghép hồ cảm thành mạch không có hồ cảm H.3.80 (ở đó ta đã triệt tiêu hai nguồn áp $10\angle 0^\circ V$ và $10\angle 90^\circ V$). Từ H.3.80 ta dễ dàng suy ra:

$$Z_o = j5 + \frac{(4 + j3)(4 + j3)}{(4 + j3)(4 + j3)} = 2 + j6,5\Omega = 6,8\angle 72^\circ 9\Omega$$

Ví dụ 3.44: Xét mạch điện DC như H.3.81. Xác định giá trị của R_t để công suất trên R_t là cực đại.

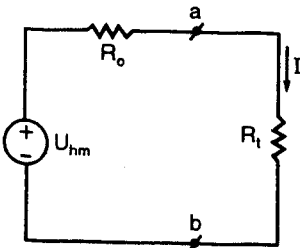
Giải

Nếu thay phần mạch bên trái hai cực a và b bằng mạch tương đương Thévenin, ta được mạch H.3.82.

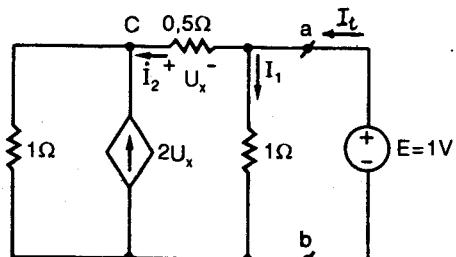


Hình 3.81

Ta có
$$I = \frac{U_{hm}}{R_o + R_t} \quad (3.65)$$



Hình 3.82



Hình 3.83

Công suất thu trên R_t là:

$$P = R_t I^2 = \frac{U_{hm}^2 R_t}{(R_o + R_t)^2} \quad (3.66)$$

Biểu thức này có dạng tương tự với (2.87), nên chứng minh tương tự ta

sẽ được điều kiện để P cực đại là:

$$R_t = R_o \quad (3.67)$$

Để tính điện trở tương đương R_o , ta triệt tiêu nguồn áp 6V, kích thích ở hai cực a, b một nguồn áp $E = 1V$ như H.3.83. Ta xác định dòng I_t cung cấp bởi nguồn áp này.

Chọn $\varphi_b = 0$. Ta được $\varphi_a = E = 1V$

Viết phương trình K1 cho nút C ta được:

$$\frac{\varphi_c}{1} + \frac{\varphi_c - \varphi_a}{0,5} = 2U_x = 2(\varphi_c - \varphi_a)$$

$$\Rightarrow \varphi_c = 0$$

Do đó: $I_1 = \frac{\varphi_a}{1} = 1A, I_2 = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{0,5} = 2A$

$$\Rightarrow I_t = I_1 + I_2 = 3A$$

Do đó $R_o = \frac{E}{I_t} = \frac{1}{3}\Omega$

Vậy giá trị của R_t để công suất truyền đến R_t là lớn nhất là:

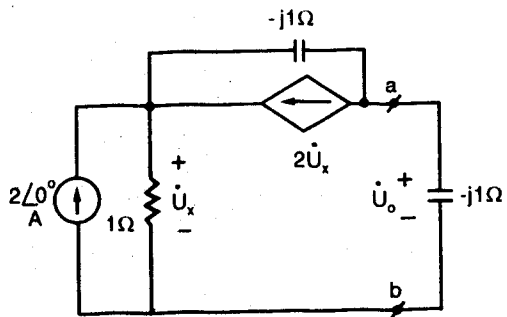
$$R_t = R_o = \frac{1}{3}\Omega$$

Ví dụ 3.35: Tìm U_o ở mạch H.3.84 dùng định lý Thévenin.

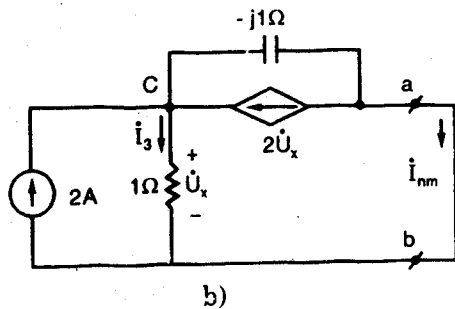
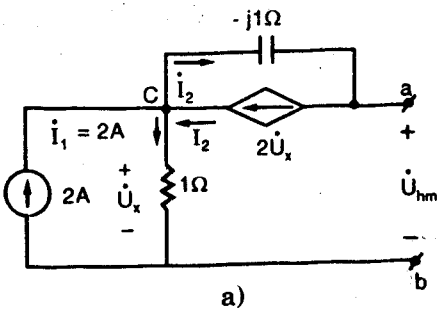
Giải

Ta tìm mạch tương đương Thévenin cho phần bên trái hai cực a và b.

Trước hết tìm $\bar{U}_{hm}$ dùng H.3.85a.



Hình 3.84



Hình 3.85

Dễ thấy rằng: $\dot{I}_1 = 2\angle 0^\circ \text{A}$
 $\Rightarrow \dot{U}_x = 1\dot{I}_1 = 2\angle 0^\circ \text{V}$

$$\dot{I}_2 = 2\dot{U}_x = 4\angle 0^\circ \text{A}$$

Do đó $\dot{U}_{hm} = \dot{U}_{ab} = \dot{U}_{ac} + \dot{U}_{cb} = -(-j1)\dot{I}_2 + 1\dot{I}_1$
 $\dot{U}_{hm} = 2 + j4 \text{V}$

Kế đến ta tìm $\dot{I}_{nm}$ dùng H.3.85b.

Dùng phương pháp thế nút, chọn $\phi_b = \phi_a = 0$

Viết K1 cho nút C:

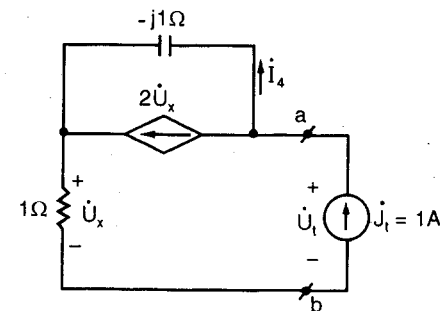
$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{-j1} \right) \phi_c = 2 + 2\dot{U}_x = 2 + 2\phi_c$$

$$\Rightarrow \phi_c = -1 - j \Rightarrow \dot{I}_3 = \frac{\phi_c}{1} = 1 - j$$

Do đó $\dot{I}_{nm} = 2 - \dot{I}_3 = 3 + j1 \text{A}$

Trở kháng tương đương:

$$Z_o = \frac{\dot{U}_{hm}}{\dot{I}_{nm}} = \frac{2 + j4}{3 + j1} = 1 + j1 \Omega$$



Hình 3.86

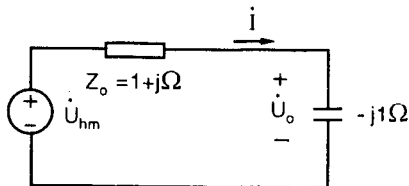
Cũng có thể tìm Z_o bằng cách triệt tiêu nguồn dòng $2\angle 0^\circ \text{A}$ và kích thích ở cửa a, b một nguồn dòng $\dot{J}_t = 1 \text{A}$ như H.3.86. Ta tính $\dot{U}_t$.

Từ H.3.86 $\Rightarrow \dot{U}_x = 1\dot{J}_t = 1 \text{V}$

$$\Rightarrow \dot{I}_4 = \dot{J}_t - 2\dot{U}_x = -1 \text{A}$$

$$\Rightarrow \dot{U}_t = -j1\dot{I}_4 + \dot{U}_x = 1 + j1$$

Do đó $Z_o = \frac{\dot{U}_t}{\dot{J}_t} = 1 + j1 \Omega$



Hình 3.87

Trong H.3.84 thay phần bên trái hai cực a và b bởi mạch tương đương Thévenin ta được H.3.87. Từ đó suy ra:

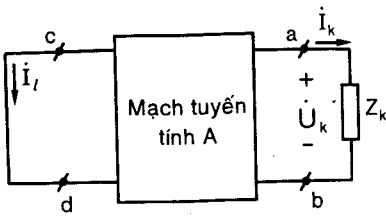
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{hm}}{Z_o + (-j1)} = \frac{2 + j4}{1 + j1 - j1} = 2 + j4 \text{A}$$

$$\Rightarrow \dot{U}_o = -j1\dot{I} = 4 - j2 \text{V} = 2\sqrt{5} \angle -26^\circ 6' \text{V}$$

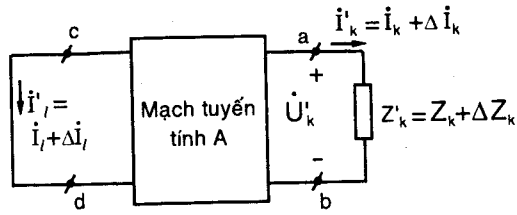
3.6.4 Định lý bù

Xét một mạch điện tuyến tính ở chế độ xác lập điều hòa. Giả sử trở kháng Z_k của nhánh k được tăng một lượng ΔZ_k trở thành $Z'_k = Z_k + \Delta Z_k$; khi đó dòng điện $\dot{I}_k$ trong nhánh k cũng tăng một lượng $\Delta \dot{I}_k$ thành $\dot{I}'_k = \dot{I}_k + \Delta \dot{I}_k$, và dòng điện trong các nhánh khác, ví dụ nhánh l, cũng tăng

một lượng $\Delta \dot{I}_l$ thành $\dot{I}'_l = \dot{I}_l + \Delta \dot{I}_l$ (H.3.89).



Hình 3.88



Hình 3.89

Định lý bù cung cấp cho ta cách tính $\Delta \dot{I}_k, \Delta \dot{I}_l$ mà không cần tính $\dot{I}_k, \dot{I}_l$. Giả sử bây giờ trong H.3.89 ta mắc nối tiếp với Z'_k một nguồn sức điện động $\dot{E}_b$ như H.3.90a, và điều chỉnh trị số $\dot{E}_b$ cho đến khi dòng điện trong nhánh k có trị số bằng $\dot{I}_k$. Khi đó so với mạch H.3.88 phần mạch còn lại (ngoại trừ nhánh k) không thay đổi, dòng điện ở nhánh k cũng không thay đổi, nên chứng minh tương tự như ở định lý thay thế, ta có thể suy ra điện áp giữa hai cực a và b vẫn là $\dot{U}_k$ cũng như điện áp dòng điện trong các nhánh khác, chẳng hạn trong nhánh l, là không thay đổi. Trị số của $\dot{E}_b$ để đạt được tình trạng này, theo H.3.90a, là:

$$\dot{E}_b = -\dot{U}_k + Z'_k \dot{I}_k \quad (3.68)$$

Mặt khác theo H.3.88 thì $\dot{U}_k = Z_k \dot{I}_k$

thay vào:

$$\begin{aligned} \dot{E}_b &= Z_k \dot{I}_k + Z'_k \dot{I}_k \\ \Rightarrow \dot{E}_b &= \Delta Z_k \dot{I}_k \end{aligned} \quad (3.69)$$

$\dot{E}_b$ được gọi là nguồn sức điện động bù, hoặc nguồn áp bù.

Nó bù lại lượng thay đổi ΔZ_k của trở kháng nhánh k, để giữ cho tình trạng của mạch không đổi.

Ở mạch H.3.90a các nguồn kích thích gồm: nguồn áp bù $\dot{E}_b$ và các nguồn bên trong mạch tuyến tính A. Do đó ta có thể sử dụng nguyên lý xếp chồng như H.3.90. Ở H.3.90b chỉ có các nguồn bên trong mạch A tác động, còn nguồn áp bù $\dot{E}_b$ bị triệt tiêu, đó chính là trường hợp của mạch H.3.89 với dòng trên các nhánh là $\dot{I}'_k, \dot{I}'_l$. Ở H.3.90c chỉ có nguồn áp bù $\dot{E}_b$ tác động, triệt tiêu tất cả các nguồn bên trong mạch A, dòng điện trên các nhánh là $\dot{I}''_k, \dot{I}''_l$.

Theo nguyên lý xếp chồng ta có:

$$\dot{I}_k = \dot{I}'_k - \dot{I}''_k$$

$$\dot{I}_l = \dot{I}'_l - \dot{I}''_l$$

(dấu "-" bởi vì ta đặt nguồn áp bù $\dot{E}_b$ ở H.3.90c có cực tính ngược lại ở H.3.90a).

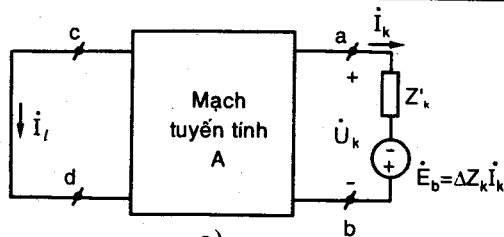
Suy ra:

$$\dot{I}''_k = \dot{I}'_k - \dot{I}_k = \Delta \dot{I}_k$$

$$\dot{I}''_l = \dot{I}'_l - \dot{I}_l = \Delta \dot{I}_l$$

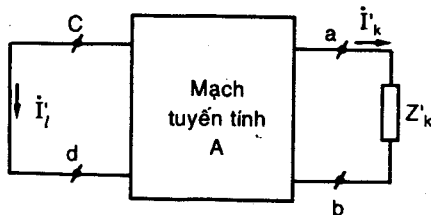
Tóm lại theo định lý bù lượng gia tăng dòng điện trong các nhánh khi trở kháng nhánh k tăng một lượng ΔZ_k được xác định theo cách như sau: triệt tiêu tất cả các nguồn độc lập bên trong mạch, đặt vào trong nhánh k nối tiếp với trở kháng Z'_k một nguồn sức điện động bù có trị số $\dot{E}_b = \Delta Z_k \dot{I}_k$ sao cho chiều dòng điện đâm vào cực tính dương như H.3.90c.

Giải mạch H.3.90c ta sẽ được các lượng tăng dòng điện $\Delta \dot{I}_k, \Delta \dot{I}_l, \dots$



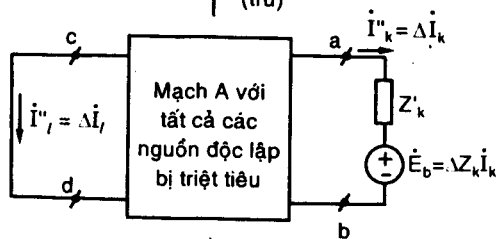
a)

|| (bằng)



b)

| (trừ)



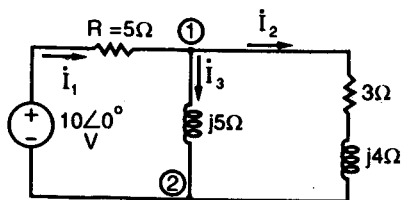
c)

Hình 3.90

Ví dụ 3.36: Xét mạch điện H.3.91

a) Tính dòng I_1 qua trở $R = 5\Omega$.

b) Giả sử R tăng từ 5Ω lên 8Ω , dùng định lý bù tìm độ biến thiên $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ của dòng điện trong các nhánh.



Hình 3.91

Giải

a) Dùng phép biến đổi tương đương ta được:

$$\dot{I}_1 = \frac{10\angle 0^\circ}{5 + \frac{j5(3+j4)}{j5+(3+j4)}} = 1,448 - j0,62 = 1,576\angle -23^\circ 20'A$$

b) $\Delta R = 8\Omega - 5\Omega = 3\Omega$; $\dot{E}_b = \Delta R \dot{I}_1 = 3 \times 1,576\angle -23^\circ 20' = 4,727\angle -23^\circ 20'V$

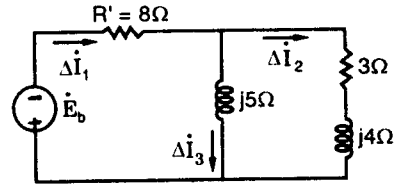
Thành lập mạch điện như H.3.92 (triệt tiêu nguồn áp $10\angle 0^\circ$, thay vào đó là nguồn áp bù $\dot{E}_b$ đã tính ở trên). Giải mạch H.3.92:

$$\Delta \dot{I}_1 = \frac{-\dot{E}_b}{8 + \frac{j5(3+j4)}{j5 + (3+j4)}}$$

$$= -0,4 + j0,324 = 0,515 \angle +141^\circ \text{ A}$$

$$\Delta \dot{I}_2 = \frac{(j5)\Delta \dot{I}_1}{j5 + (3+j4)} = -0,254 + j0,095 = 0,27 \angle +159^\circ 43' \text{ A}$$

$$\Delta \dot{I}_3 = \Delta \dot{I}_1 - \Delta \dot{I}_2 = -0,146 + j0,23 = 0,27 \angle +122^\circ 56' \text{ A}$$

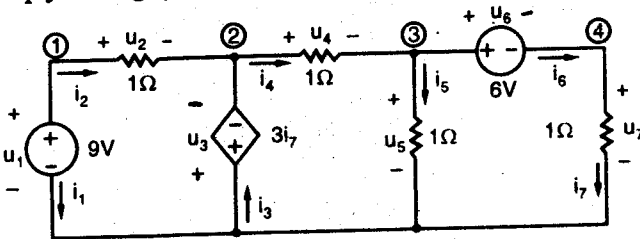


Hình 3.92

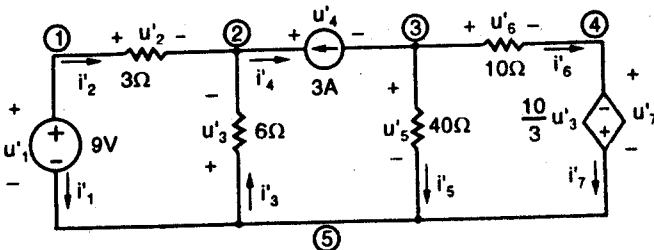
3.6.5 Định lý Tellegen - Cân bằng công suất

1- Định lý Tellegen

• Giả sử ta có hai mạch điện A và A' có số nhánh bằng nhau là n và có cấu trúc hình học (cách thức liên kết giữa các nhánh) hoàn toàn giống nhau mặc dù các nhánh tương ứng trong hai mạch có tính chất vật lý có thể khác nhau. Ví dụ, xét hai mạch H.3.93 và H.3.94, mỗi mạch có bảy phần tử. Nếu xem mỗi phần tử là một nhánh, thì mỗi mạch có năm đỉnh và bảy nhánh. Nếu không để ý đến bản chất vật lý của các nhánh, trong mỗi mạch ta thay một nhánh bằng một đoạn thẳng thì sẽ được cùng một cấu trúc hình học như H.3.95, gọi là graph của hai mạch điện. Vậy hai mạch điện H.3.93 và H.3.94 có cùng cấu trúc hình học, hay nói cụ thể có cùng graph như H.3.95. Gọi u_k , i_k là điện áp, dòng điện ở nhánh k ($k=1+n$) của mạch A. u'_k , i'_k là điện áp, dòng điện ở nhánh k của mạch A'. Giả sử quy ước chiều dương của i_k và u_k (cũng như của i'_k và u'_k) được chọn sao cho chiều dương của dòng điện hướng từ cực dương đến cực âm của điện áp (cũng có thể quy ước ngược lại).



Hình 3.93

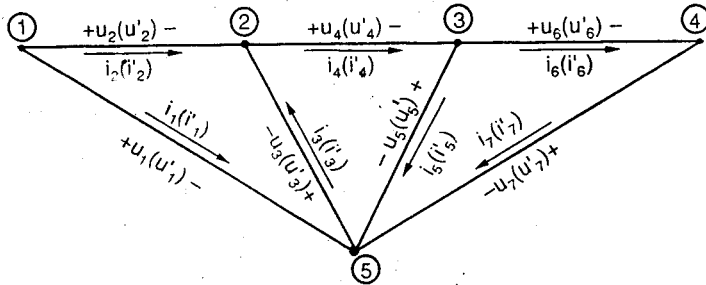


Hình 3.94

Định lý Tellegen được phát biểu như sau:

Với một graph n nhánh nếu có hai tập biến $\{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_n\}$ và $\{u'_1, u'_2, \dots, u'_k, \dots, u'_n\}$ thỏa định luật Kirchhoff 2 đối với tất cả các vòng và có hai tập biến $\{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n\}$ và $\{i'_1, i'_2, \dots, i'_k, \dots, i'_n\}$ thỏa định luật Kirchhoff 1 tại tất cả các nút thì có quan hệ sau:

$$\sum_{k=1}^n u_k i_k = \sum_{k=1}^n u'_k i'_k = \sum_{k=1}^n u_k i'_k = \sum_{k=1}^n u'_k i_k = 0 \quad (3.70)$$



Hình 3.95

Ví dụ ở H.3.93 và H.3.94, dùng các phương pháp phân tích mạch đã biết ta tìm được:

$u_1 = 9V$	$i_1 = 3A$	$u'_1 = 9V$	$i'_1 = 1A$
$u_2 = 3V$	$i_2 = 3A$	$u'_2 = -3V$	$i'_2 = -1A$
$u_3 = -6V$	$i_3 = -1A$	$u'_3 = -12V$	$i'_3 = -2A$
$u_4 = 2V$	$i_4 = 2A$	$u'_4 = 4V$	$i'_4 = -3A$
$u_5 = 4V$	$i_5 = 4A$	$u'_5 = 8V$	$i'_5 = 0,2A$
$u_6 = 6V$	$i_6 = -2A$	$u'_6 = -32V$	$i'_6 = -3,2A$
$u_7 = -2V$	$i_7 = -2A$	$u'_7 = 40V$	$i'_7 = -3,2A$

Từ số liệu trên, có thể nghiệm lại định lý Tellegen:

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 + u_5 i_5 + u_6 i_6 + u_7 i_7 = 0$$

$$u'_1 i'_1 + u'_2 i'_2 + u'_3 i'_3 + u'_4 i'_4 + u'_5 i'_5 + u'_6 i'_6 + u'_7 i'_7 = 0$$

$$u_1 i'_1 + u_2 i'_2 + u_3 i'_3 + u_4 i'_4 + u_5 i'_5 + u_6 i'_6 + u_7 i'_7 = 0$$

$$u'_1 i_1 + u'_2 i_2 + u'_3 i_3 + u'_4 i_4 + u'_5 i_5 + u'_6 i_6 + u'_7 i_7 = 0$$

• Bây giờ ta sẽ chứng minh định lý Tellegen. Hãy chứng minh

$$\sum_{k=1}^n u_k i'_k = 0$$

Bởi vì các điện áp u_k thỏa định luật Kirchhoff 2 nên, như đã đề cập ở mục 3.2, có thể biểu diễn điện áp của một nhánh nối giữa hai nút bằng hiệu thế giữa hai nút đó:

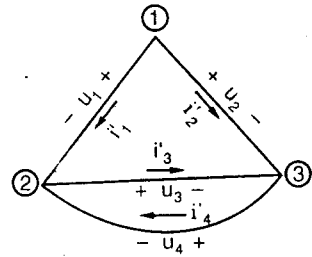
$$u_k = \sum_{i=1}^d a_{ik} \varphi_i \quad (3.71)$$

trong đó d: số nút

$a_{ik} = 0$ nếu nhánh k không nối với nút thứ i;

$a_{ik} = 1$ nếu nhánh k nối với nút i và cực tính + của u_k ở về phía nút i (nghĩa là dòng i_k, i'_k hướng ra khỏi nút i);

$a_{ik} = -1$ nếu nhánh k nối với nút i và cực tính - của u_k ở về phía nút i (nghĩa là dòng i_k, i'_k hướng vào nút i).



Hình 3.96

Ví dụ với graph H.3.96 thì $d = 3, \quad n = 4$ và:

$$\begin{aligned} u_1 = \varphi_1 - \varphi_2 \text{ nghĩa là } & a_{11} = +1, & a_{21} = -1, & a_{31} = 0 \\ u_2 = \varphi_1 - \varphi_3 \text{ nghĩa là } & a_{12} = 1, & a_{22} = 0, & a_{32} = -1 \\ u_3 = \varphi_2 - \varphi_4 \Rightarrow & a_{13} = 0, & a_{23} = 1, & a_{33} = -1 \\ u_4 = \varphi_3 - \varphi_4 \Rightarrow & a_{14} = 0, & a_{24} = -1, & a_{34} = 1 \end{aligned}$$

Từ (3.71) suy ra:

$$\sum_{k=1}^n u_k i'_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^d a_{ik} \varphi_i \right) i'_k = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} i'_k \right) \varphi_i$$

$$\text{Chú ý rằng } \sum_{k=1}^n a_{ik} i'_k = 0 \quad (3.72)$$

bởi vì (3.72) chính là định luật Kirchhoff 1 viết cho nút thứ i.

$$\text{Do đó } \sum_{k=1}^n u_k i'_k = 0$$

Ví dụ với graph H.3.96 thì:

$$\begin{aligned} u_1 i'_1 + u_2 i'_2 + u_3 i'_3 + u_4 i'_4 &= (\varphi_1 - \varphi_2) i'_1 + (\varphi_1 - \varphi_3) i'_2 + (\varphi_2 - \varphi_4) i'_3 + (\varphi_3 - \varphi_4) i'_4 \\ &= (i'_1 + i'_2) \varphi_1 + (-i'_1 + i'_3 - i'_4) \varphi_2 + (-i'_2 - i'_3 + i'_4) \varphi_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{vì } i'_1 + i'_2 &= 0 & (\text{luật K1 ở nút 1}) \\ -i'_1 + i'_3 - i'_4 &= 0 & (\text{luật K1 ở nút 2}) \\ -i'_2 - i'_3 + i'_4 &= 0 & (\text{luật K1 ở nút 3}) \end{aligned}$$

$$\text{nên } u_1 i'_1 + u_2 i'_2 + u_3 i'_3 + u_4 i'_4 = 0$$

Chúng minh tương tự ta cũng được:

$$\sum_{k=1}^n u_k i_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n u'_k i'_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n u'_k i_k = 0$$

2- Cân bằng công suất

• Xét một mạch điện có n nhánh. Dòng điện, điện áp ở nhánh thứ k là $i_k(t)$ và $u_k(t)$. Với chiều dương dòng chảy từ cực + đến cực âm của điện áp thì tích $u_k(t)i_k(t)$ là công suất tức thời tiêu thụ bởi nhánh k , còn $-u_k(t)i_k(t)$ là công suất tức thời phát bởi nhánh k .

Theo định lý Tellegen ta có:

$$\sum_{k=1}^n u_k(t)i_k(t) = \sum_{k=1}^n -u_k(t)i_k(t) = 0 \quad (3.73)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n P_k(\text{phát}) = 0 \quad (3.74a)$$

$$\text{và} \quad \sum_{k=1}^n P_k(\text{thu}) = 0 \quad (3.74b)$$

Vậy tổng công suất thu (hoặc tổng công suất phát) tức thời trên các nhánh trong một mạch điện luôn bằng không.

Nếu xem mỗi phần tử mạch là một nhánh và phân các nhánh ra làm hai nhóm (nhóm gồm các nguồn, và nhóm gồm các phần tử khác) thì có thể viết (3.73) ở dạng:

$$\sum_{\text{các nguồn}} -u_k(t)i_k(t) = \sum_{\text{các phần tử khác}} u_l(t)i_l(t) \quad (3.75)$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{các nguồn}} P_{k(\text{phát})} = \sum_{\text{các phần tử khác}} P_{l(\text{thu})} \quad (3.76)$$

Vậy trong một mạch điện, tổng công suất tức thời phát bởi các nguồn bằng tổng công suất tức thời tiêu thụ trên các phần tử khác.

Các định lý (3.74a), (3.74b), (3.76) gọi là luật cân bằng công suất tức thời.

• Bây giờ ta xét một mạch điện ở chế độ xác lập hình sin, có n nhánh. Biên độ phức dòng điện, điện áp ở nhánh k là $\dot{I}_k$, $\dot{U}_k$. Gọi $\dot{I}_k$ là số phức liên hợp của $\dot{I}_k$.

Vì tập biến $\{\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_k, \dots, \dot{I}_n\}$ thỏa luật Kirchhoff 1 tại các nút nên suy ra tập biến $\{\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_k, \dots, \dot{I}_n\}$ cũng thỏa định luật Kirchhoff 1.

Do đó theo định lý Tellegen ta được:

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_k \dot{I}_k = - \sum_{k=1}^n \dot{U}_k \dot{I}_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n S_k = 0 \quad (3.77)$$

Vậy tổng công suất phức trên các nhánh trong một mạch điện luôn bằng không.

Từ (3.77) ta cũng suy ra được:

$$\sum_{\text{các nguồn}} S_{k(\text{phát})} = \sum_{\text{các phần tử khác}} S_{l(\text{thu})} \quad (3.78)$$

Vậy trong một mạch điện, tổng công suất phức phát ở các nguồn bằng tổng công suất phức thu ở các phần tử khác.

Các biểu thức (3.77), (3.78) là các luật cân bằng công suất phức. Lấy phần thực hai vế của các biểu thức (3.77), (3.78) ta sẽ được luật cân bằng công suất tác dụng như sau:

$$\sum_{k=1}^n P_k = 0 \quad (3.79a)$$

$$\text{hoặc} \quad \sum_{\text{các nguồn}} P_{k(\text{phát})} = \sum_{\text{các phần tử khác}} P_{l(\text{thu})} \quad (3.79b)$$

Tương tự lấy phần ảo của hai vế các biểu thức (3.77), (3.78) ta sẽ được luật cân bằng công suất phản kháng như sau:

$$\sum_{k=1}^n Q_k = 0 \quad (3.80a)$$

$$\text{hoặc} \quad \sum_{\text{các nguồn}} Q_{k(\text{phát})} = \sum_{\text{các phần tử khác}} Q_{l(\text{thu})} \quad (3.80b)$$

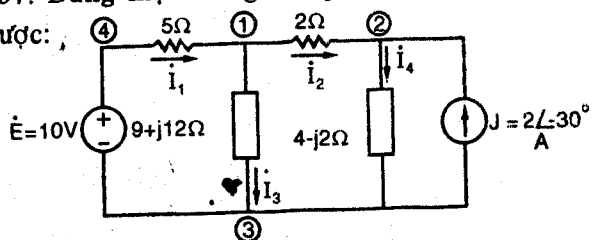
Ví dụ 3.37: Xét mạch điện H.3.97. Dùng một trong các phương pháp phân tích mạch đã trình bày, ta tính được:

$$\dot{I}_1 = 0,59 \angle 47^\circ 33' \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = 0,97 \angle 78^\circ 11' \text{ A}$$

$$\dot{I}_3 = 0,553 \angle -68^\circ 81' \text{ A}$$

$$\dot{I}_4 = 1,93 \angle -1^\circ 48' \text{ A}$$



Hình 3.97

$$\dot{U}_{41} = 5\dot{I}_1 = 2,95\angle 47^\circ 33' \text{V}$$

$$\dot{U}_{12} = 2\dot{I}_2 = 1,94\angle 78^\circ 11' \text{V}$$

$$\dot{U}_{13} = 8,29\angle -15^\circ 18' \text{V}$$

$$\dot{U}_{23} = 8,62\angle -28^\circ 17' \text{V}$$

$$\sum S_{\text{phát}} = \frac{1}{2} \dot{E} \dot{I}_1^* + \frac{1}{2} \dot{U}_{23} \dot{J}^* = 2,95\angle -47^\circ 33' + 8,62\angle 1^\circ 83'$$

$$= 10,615 - j1,894 \text{ VA}$$

$$= 10,78\angle -10^\circ 11' \text{ VA}$$

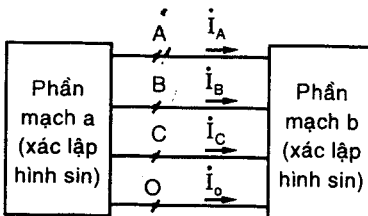
$$\sum S_{\text{thu}} = \frac{1}{2} \dot{U}_{41} \dot{I}_1^* + \frac{1}{2} \dot{U}_{12} \dot{I}_2^* + \frac{1}{2} \dot{U}_{13} \dot{I}_3^* + \frac{1}{2} \dot{U}_{23} \dot{I}_4^*$$

$$= 10,602 - j1,891 \text{ VA} = 10,77\angle -10^\circ 11' \text{ VA}$$

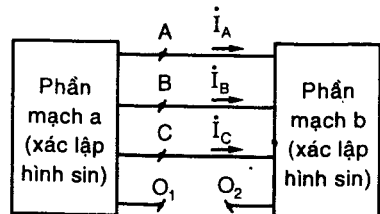
$$\text{Vậy: } \sum S_{\text{phát}} = \sum S_{\text{thu}}$$

Ví dụ 3.38: a) Xét mạch điện xác lập điều hòa như H.3.98. Chứng tỏ công suất tác dụng hấp thụ bởi phần mạch b là:

$$P = \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{U}_{A_0} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{B_0} \dot{I}_B^* + \dot{U}_{C_0} \dot{I}_C^*)$$



Hình 3.98



Hình 3.99

b) Xét mạch xác lập điều hòa như H.3.99. Chứng tỏ công suất tác dụng hấp thụ bởi phần mạch b là:

$$P = \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{U}_{AC} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{BC} \dot{I}_B^*)$$

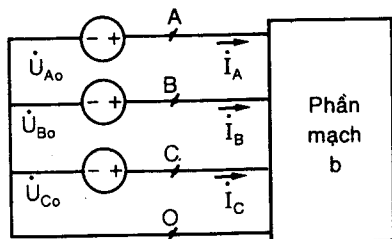
$$= \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{U}_{A_01} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{B_01} \dot{I}_B^* + \dot{U}_{C_01} \dot{I}_C^*)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{U}_{A_02} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{B_02} \dot{I}_B^* + \dot{U}_{C_02} \dot{I}_C^*)$$

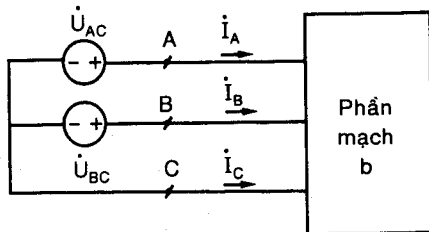
Giải

a) Theo định lý thay thế, có thể thay phần mạch a bởi ba nguồn sức điện động $\dot{U}_{A_0}$, $\dot{U}_{B_0}$, $\dot{U}_{C_0}$ như H.3.100. Tổng công suất tác dụng phát bởi ba nguồn này là:

$$P = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \dot{U}_{A_0} \dot{I}_A^* \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \dot{U}_{B_0} \dot{I}_B^* \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \dot{U}_{C_0} \dot{I}_C^* \right) \quad (1)$$



Hình 3.100



Hình 3.101

Theo luật cân bằng công suất tác dụng (3.79b) thì P cho bởi (1) cũng chính bằng công suất tác dụng hấp thu bởi phần mạch b .

b) Theo định lý thay thế có thay thế phần mạch a bởi hai nguồn sức điện động $\dot{U}_{AC}$, $\dot{U}_{BC}$ như H.3.101. Tổng công suất tác dụng phát bởi hai nguồn sdd này là:

$$P = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \dot{U}_{AC} \dot{I}_A^* \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \dot{U}_{BC} \dot{I}_B^* \right) \quad (2)$$

Theo luật cân bằng công suất, (2) cũng là công suất tác dụng hấp thu bởi phần mạch b .

Nếu thay $\dot{U}_{AC} = \dot{U}_{A_01} - \dot{U}_{C_01}$, $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{B_01} - \dot{U}_{C_01}$ vào (2):

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_{A_01} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{B_01} \dot{I}_B^* - \dot{U}_{C_01} (\dot{I}_A + \dot{I}_B)^* \right\}$$

vì $\dot{I}_C = -(\dot{I}_A + \dot{I}_B)$ nên suy ra:

$$P = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \dot{U}_{A_01} \dot{I}_A^* \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \dot{U}_{B_01} \dot{I}_B^* \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \dot{U}_{C_01} \dot{I}_C^* \right) \quad (3)$$

Tương tự nếu thay $\dot{U}_{AC} = \dot{U}_{A_02} - \dot{U}_{C_02}$, $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{B_02} - \dot{U}_{C_02}$ vào (2) cũng suy ra:

$$P = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \dot{U}_{A_02} \dot{I}_A^* \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \dot{U}_{B_02} \dot{I}_B^* \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \dot{U}_{C_02} \dot{I}_C^* \right) \quad (4)$$

Nếu chú ý biểu thức (2.85) ở mục 2.6.4 (chương 2) thì từ các biểu thức (1), (2), (3), (4) có thể suy ra cách mắc các Wattmet để đo công suất hấp thu bởi phần mạch b trong các H.3.98, và H.3.99.

3.6.6 Định lý tương hỗ

• Giả sử có một mạch điện tuyến tính ở xác lập điều hòa ngoài p nguồn áp độc lập và S nguồn dòng độc lập chỉ chứa các phần tử điện trở, điện dung, điện cảm và hồ cảm. Xét hai trạng thái của mạch:

- *Trạng thái 1:* Các nguồn áp có sức điện động $\dot{E}'_k$, dòng điện chảy qua nguồn áp $\dot{E}'_k$ là $\dot{I}'_k (k=1+p)$; các nguồn dòng có trị số J'_l , điện áp giữa hai đầu nguồn dòng J'_l là $\dot{U}'_l (l=1+s)$.

- *Trạng thái 2:* Các nguồn áp có sức điện động $\dot{E}''_k$, dòng điện chảy qua nguồn áp $\dot{E}''_k$ là $\dot{I}''_k (k=1+p)$; các nguồn dòng có trị số J'_l , điện áp giữa hai đầu nguồn dòng J'_l là $\dot{U}''_l (l=1+s)$.

Chiều dương dòng điện được chọn hướng từ cực âm đến cực dương nguồn áp; cực tính dương của điện áp trên nguồn dòng được chọn nằm ở phía đầu mũi tên (trong ký hiệu nguồn dòng).

Khi đó theo định lý tương hỗ, ta có hệ thức sau đây:

$$\sum_{k=1}^p \dot{E}'_k \dot{I}''_k + \sum_{l=1}^s \dot{U}'_l J'_l = \sum_{k=1}^p \dot{E}''_k \dot{I}'_k + \sum_{l=1}^s \dot{U}''_l J'_l \quad (3.81)$$

• Trước khi chứng minh định lý, ta xét ví dụ minh họa sau:

Ví dụ 3.39: Tìm dòng điện $\dot{I}_5$ ở mạch điện H.3.102. Cho biết $\dot{E}_1 = 2V$, $\dot{E}_3 = 2V$, $J_4 = 1.5A$ và $r_1 = r_2 = 6\Omega$, $r_3 = 2\Omega$, $r_4 = 2\Omega$, $r_5 = 3\Omega$.

Giải

Ta thử áp dụng định lý tương hỗ.

Xét các mạch điện H.3.102, H.3.103 và H.3.104.

- Mạch H.3.103 có thể xem là trạng thái 1 của mạch H.3.104 với:

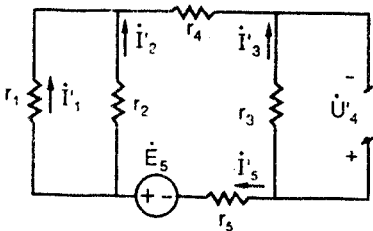
$$\dot{E}'_1 = 0, \dot{E}'_3 = 0, J'_4 = 0$$

Giả sử

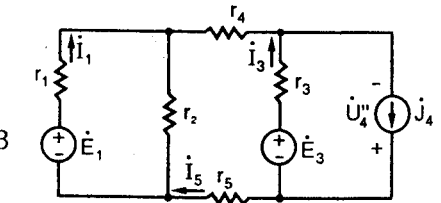
$$\dot{I}'_1 = 1A$$

$$\Rightarrow \dot{I}'_2 = 1A \Rightarrow \dot{I}'_5 = -\dot{I}'_3 = \dot{I}'_1 + \dot{I}'_2 = 2A$$

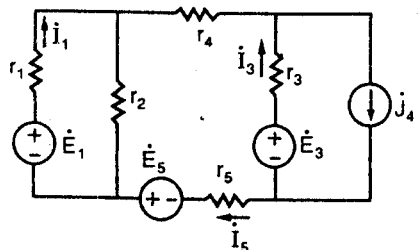
$$\Rightarrow \dot{E}'_5 = r_2 \dot{I}'_2 + (r_4 + r_3 + r_5) \dot{I}'_5 = 20V, \dot{U}'_4 = -4V$$



Hình 3.103



Hình 3.102



Hình 3.104

- Mạch H.3.102 có thể xem là trạng thái 2 của mạch H.3.104 với:

$$\dot{E}'_1 = \dot{E}_1 = 2V, \dot{E}''_3 = \dot{E}_3 = 2V, \dot{J}'_4 = \dot{J}_4 = 1,5A, \dot{E}''_5 = 0, \dot{I}'_5 = \dot{I}_5$$

Do đó theo định lý tương hỗ (3.81):

$$\dot{E}'_1 \dot{I}_1 + \dot{E}'_3 \dot{I}_3 + \dot{E}'_5 \dot{I}_5 + \dot{U}'_4 \dot{J}_4 = \dot{E}''_1 \dot{I}'_1 + \dot{E}''_3 \dot{I}'_3 + \dot{E}''_5 \dot{I}'_5 + \dot{U}''_4 \dot{J}'_4$$

$$\Rightarrow \dot{E}'_5 \dot{I}_5 + \dot{U}'_4 \dot{J}_4 = \dot{E}_1 \dot{I}'_1 + \dot{E}_3 \dot{I}'_3 \Rightarrow \dot{I}_5 = 0,2A$$

• Bây giờ ta chứng minh định lý tương hỗ (3.81). Giả sử mạch có n phần tử trong đó: từ phần tử 1 đến phần tử thứ m là m phần tử điện cảm có ghép hồ cảm với nhau; từ phần tử thứ $m+1$ đến phần tử thứ $c=m+b$ là b phần tử điện trở, điện dung hoặc điện cảm (không có ghép hồ cảm); từ phần tử thứ $c+1$ đến phần tử thứ $a=c+p$ là p phần tử nguồn áp độc lập; từ phần tử thứ $a+1$ đến phần tử $n=a+s$ là s phần tử nguồn dòng độc lập. Xét hai trạng thái của mạch:

- *Trạng thái 1*: Dòng điện và điện áp trên phần tử thứ i là $\dot{I}_i, \dot{U}'_i (i=1+n)$.

- *Trạng thái 2*: Dòng điện và điện áp trên phần tử thứ i là $\dot{I}''_i, \dot{U}''_i (i=1+n)$.

Nếu phần tử thứ i là nguồn áp độc lập thì chọn cực tính điện áp sao cho $\dot{U}_i = -\dot{E}_i$, nếu phần tử thứ i là nguồn dòng độc lập thì chọn chiều dương dòng điện sao cho $\dot{I}_i = -\dot{J}_i$.

Áp dụng định lý Tellegen (3.70) ta được:

$$\sum_1^n \dot{U}'_i \dot{I}''_i = \sum_1^n \dot{U}''_i \dot{I}_i = 0 \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_1^m \dot{U}'_i \dot{I}''_i + \sum_{m+1}^{m+b} \dot{U}'_i \dot{I}''_i - \sum_{c+1}^{c+p} \dot{E}'_i \dot{I}''_i - \sum_{a+1}^{a+s} \dot{U}'_i \dot{J}''_i \\ = \sum_1^m \dot{U}'_i \dot{I}'_i + \sum_{m+1}^{m+b} \dot{U}'_i \dot{I}'_i - \sum_{c+1}^{c+p} \dot{E}''_i \dot{I}'_i - \sum_{a+1}^{a+s} \dot{U}''_i \dot{J}'_i \end{aligned} \quad (3.83)$$

Xét số hạng thứ hai ở vế trái và vế phải mà tương ứng với b phần tử điện trở, điện dung, hoặc điện cảm (không ghép hồ cảm). Ta có:

$$\dot{U}'_i = Z_i \dot{I}'_i \text{ và } \dot{U}''_i = Z_i \dot{I}''_i$$

trong đó:

$$Z_i = \begin{cases} r_i & , \text{phần tử điện trở} \\ j\omega L_i & , \text{phần tử điện cảm} \\ -j\frac{1}{\omega C_i} & , \text{phần tử điện dung} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{m+1}^{m+b} \dot{U}'_i \dot{I}''_i = \sum_{m+1}^{m+b} \dot{U}''_i \dot{I}'_i = \sum_{m+1}^{m+b} Z_i \dot{I}'_i \dot{I}''_i \quad (3.84)$$

Xét số hạng thứ nhất ở vế trái và vế phải mà tương ứng với m phần tử điện cảm ghép hồ cảm với nhau. Ta có (theo 3.17):

$$\dot{U}'_i = \sum_{j=1}^m \pm j\omega M_{ij} \cdot \dot{I}'_j \quad (i = 1+m)$$

trong đó quy ước $\pm M_{ji} = L_i$

$$\Rightarrow \sum_1^m \dot{U}'_i \dot{I}''_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \pm j\omega M_{ij} \dot{I}'_j \dot{I}''_i \quad (3.85a)$$

Tương tự ta cũng có:

$$\sum_1^m \dot{U}''_i \dot{I}'_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \pm j\omega M_{ij} \dot{I}''_j \dot{I}'_i \quad (3.85b)$$

Vì $M_{ij} = M_{ji}$ nên từ (3.85a) và (3.85b) suy ra:

$$\sum_1^m \dot{U}'_i \dot{I}''_i = \sum_1^m \dot{U}''_i \dot{I}'_i \quad (3.86)$$

Từ (3.83), (3.84), (3.86) suy ra:

$$\sum_{c+1}^{c+p} \dot{E}'_i \dot{I}''_i + \sum_{a+1}^{a+s} \dot{U}'_i \dot{J}''_i = \sum_{c+1}^{c+p} \dot{E}''_i \dot{I}'_i + \sum_{a+1}^{a+s} \dot{U}''_i \dot{J}'_i \quad (3.87)$$

Biểu thức (3.87) chính là (3.81).

Trường hợp mạch có chứa nguồn phụ thuộc, thì nói chung định lý tương hỗ không thỏa. Ví dụ, giả sử mạch có thêm một phần tử thứ $n+1$ là phần tử nguồn áp phụ thuộc vào dòng điện $\dot{I}_c$ trên phần tử thứ $c = m+b$.

Khi đó ở vế trái của (3.83) có thêm số hạng $\dot{U}'_{n+1} \dot{I}''_{n+1}$, còn ở vế phải có thêm số hạng $\dot{U}''_{n+1} \dot{I}'_{n+1}$. Ta có:

$$\dot{U}'_{n+1} \dot{I}''_{n+1} = r \dot{I}'_c \dot{I}''_{n+1} \quad \text{và} \quad \dot{U}''_{n+1} \dot{I}'_{n+1} = r \dot{I}''_c \dot{I}'_{n+1}$$

Nói chung $\dot{U}'_{n+1} \dot{I}''_{n+1} \neq \dot{U}''_{n+1} \dot{I}'_{n+1} \Rightarrow (3.87)$ hay (3.81) không thỏa mãn.

• Định lý tương hỗ còn được trình bày ở hai dạng thông dụng sau đây:

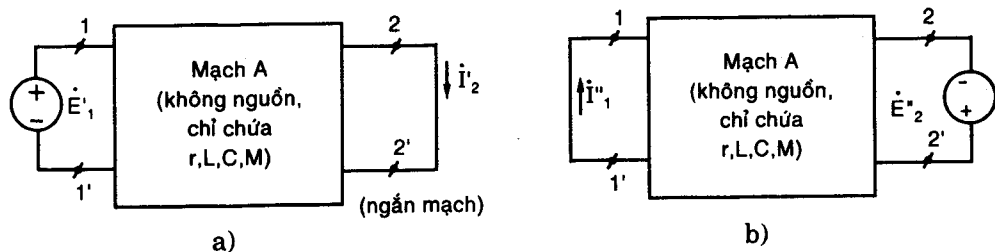
Nếu áp dụng (3.81) cho H.3.105, với trạng thái 1 ứng với H.3.105a và trạng thái 2 ứng với H.3.105b, ta được:

$$\dot{E}'_1 \dot{I}''_1 + \dot{E}'_2 \dot{I}''_2 = \dot{E}''_1 \dot{I}'_1 + \dot{E}''_2 \dot{I}'_2$$

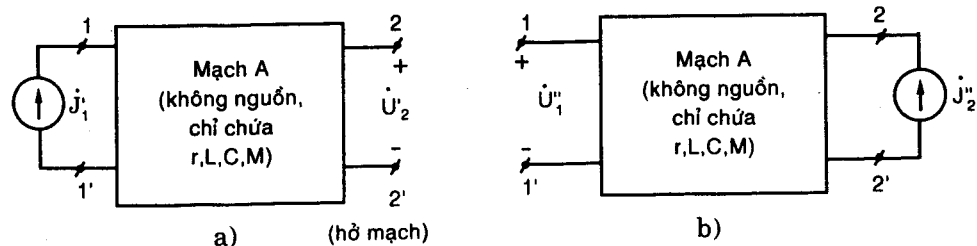
vì $\dot{E}'_2 = 0, \dot{E}''_1 = 0 \Rightarrow \dot{E}'_1 \dot{I}'_1 = \dot{E}''_2 \dot{I}'_2$ (3.88)

Do đó với H.3.105 nếu: $\dot{E}'_1 = \dot{E}''_2 \Rightarrow \dot{I}'_2 = \dot{I}'_1$ (3.89)

(3.89) là một dạng thông dụng của định lý tương hỗ.



Hình 3.105



Hình 3.106

Áp dụng (3.81) cho H.3.106 ta được:

$$\dot{U}'_1 \dot{J}''_1 + \dot{U}'_2 \dot{J}''_2 = \dot{U}''_1 \dot{J}'_1 + \dot{U}''_2 \dot{J}'_2$$

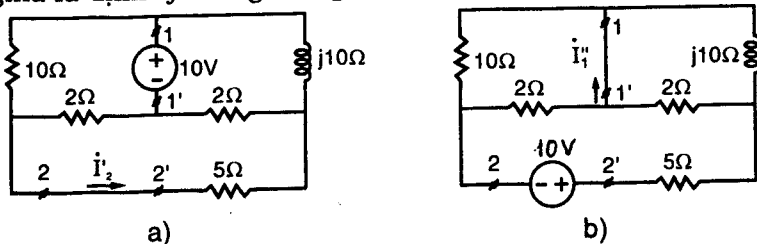
vì $\dot{J}''_1 = 0, \dot{J}'_2 = 0 \Rightarrow \dot{U}'_2 \dot{J}''_2 = \dot{U}''_1 \dot{J}'_1$ (3.90)

Do đó với H.3.106 nếu $\dot{J}'_1 = \dot{J}''_2 \Rightarrow \dot{U}'_2 = \dot{U}''_1$ (3.91)

(3.91) cũng là một dạng khác của định lý tương hỗ.

Ví dụ 3.40: Dùng các phương pháp phân tích mạch đã biết, có thể tính được dòng $\dot{I}'_2$ ở H.3.107a bằng với dòng $\dot{I}'_1$ ở H.3.107b: $\dot{I}'_2 = \dot{I}'_1 = 0,27 \angle 53^\circ 75A$

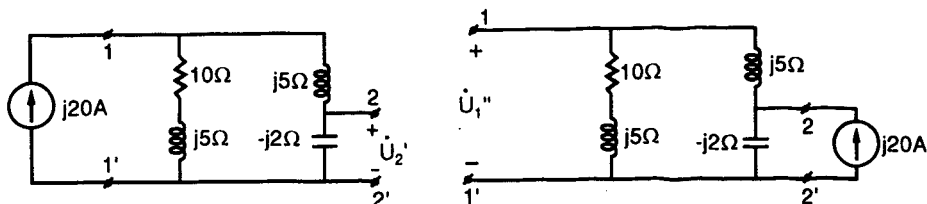
Nghĩa là định lý tương hỗ nghiệm đúng.



Hình 3.107

Ví dụ 3.4.1: Ở H.3.108, có thể nghiệm lại định lý tương hỗ:

$$\dot{U}'_2 = \dot{U}''_1 = 35 \angle -12^\circ \text{V}$$



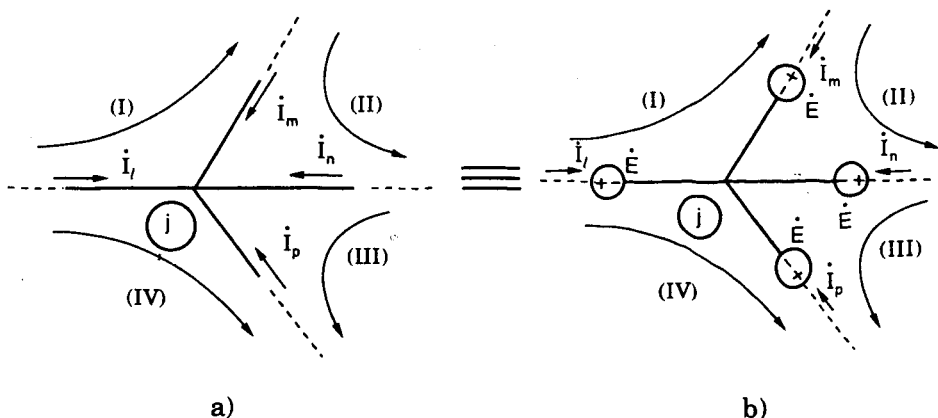
Hình 3.108

3.6.7 Định lý chuyển vị nguồn

1- Chuyển vị nguồn áp

Ta có định lý sau:

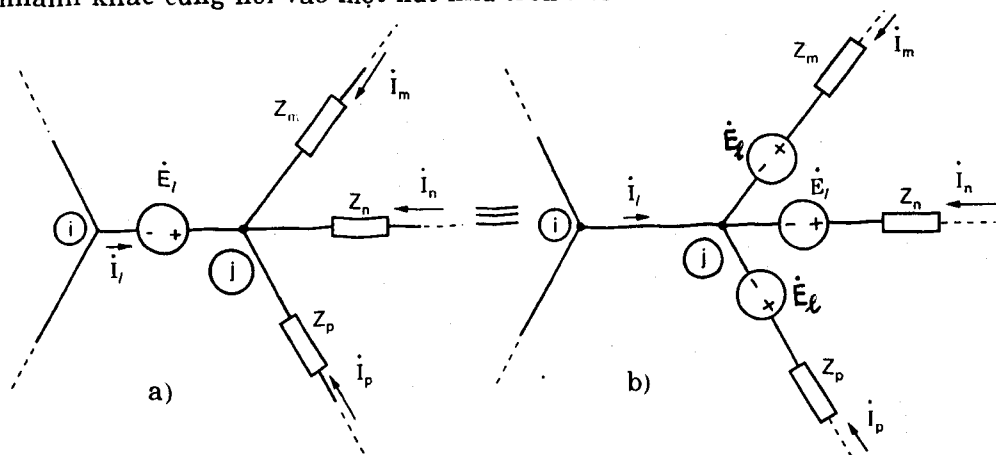
Dòng điện chảy trong các nhánh của mạch điện sẽ không thay đổi nếu trong tất cả các nhánh cùng tới một nút ta nối vào các nguồn điện áp giống hệt nhau và có cực tính dương đều ở cùng về một phía so với nút đó như trên H.3.109.



Hình 3.109

Trên H.3.109a, nút j nối với các nhánh l, m, n, p . Theo định lý trên, nếu trên mỗi nhánh đó ta mắc thêm vào một nguồn sức điện động E như H.3.109b thì dòng điện chảy trong các nhánh các phần tử của mạch sẽ không thay đổi. Thật vậy, các phương trình K2 viết cho các vòng thì như nhau ở hai mạch H.3.109a và H.3.109b, đó là do các sức điện động xuất hiện thêm, nếu có, hai lần trong mỗi vòng, một lần chiều vòng đâm vào cực "+" và một lần chiều vòng đâm vào cực "-", do đó chúng sẽ tự khử nhau và không làm thay đổi tổng đại số các sức điện động trong vòng. Từ đó suy ra phép biến đổi không làm thay đổi dòng điện trong mạch.

Định lý này cho phép chuyển nguồn áp lý tưởng từ một nhánh đến các nhánh khác cùng nối vào một nút như trên H.3.110.

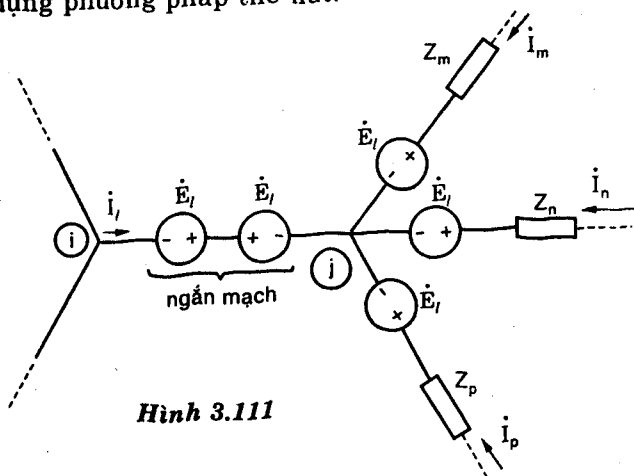


Hình 3.110. *Phép chuyển vị nguồn áp*

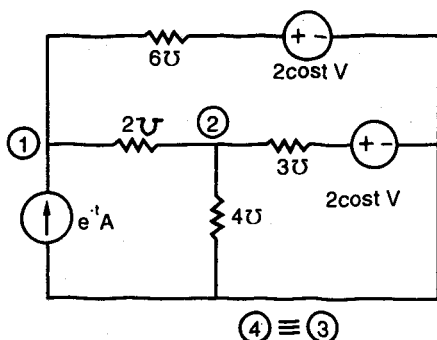
Trên H.3.110a, nhánh l chỉ có nguồn áp lý tưởng $\dot{E}_l$. Theo định lý trên dòng điện trong mạch sẽ không thay đổi nếu trên các nhánh l, m, n (nối với nút j) ta mắc thêm vào nguồn áp có trị số bằng $\dot{E}_l$ và cực tính như trên H.3.111. Khi đó trên nhánh l tổng đại số nguồn áp là $\dot{E}_l - \dot{E}_l = 0$ tương đương với ngắn mạch, do đó có thể xem như nguồn áp $\dot{E}_l$ ở nhánh l đã được chuyển đến các nhánh m, n, p như H.3.110b.

Trong phương pháp thế nút, nếu trong mạch có nhánh chỉ chứa nguồn áp lý tưởng thì không thể biến đổi thành nguồn dòng tương đương được để áp dụng quy tắc (3.7). Khi đó có thể dùng phép chuyển vị nguồn áp H.3.110 để khử đi nhánh chứa nguồn áp lý tưởng.

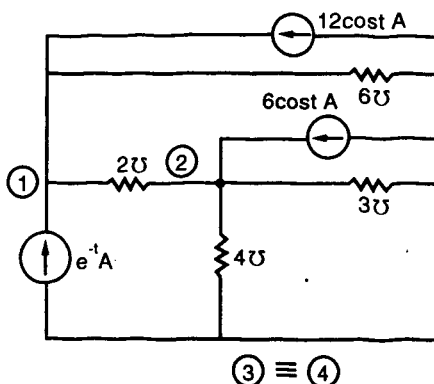
Ví dụ 3.42: Giải lại ví dụ 3.4 (H.3.8 mục 3.2) dùng phép chuyển vị nguồn áp trước khi áp dụng phương pháp thế nút.



Hình 3.111



Hình 3.112



Hình 3.113

Giải

Chọn $\varphi_4 = 0$

Dùng phép chuyển vị nguồn áp, dời nguồn áp lý tưởng $2\cos t$ sang hai nhánh 6Ω và nhánh 3Ω ta được mạch H.3.112. Khi đó nút 3 sẽ trùng với nút 4:

$$\varphi_3 = \varphi_4 = 0$$

Biến đổi các nguồn áp thành nguồn dòng tương đương ta được mạch H.3.113. Viết phương trình thế nút cho hai nút 1 và 2:

$$(2+6)\varphi_1 + 2\varphi_2 = e^{-t} + 12\cos t \quad (1)$$

$$-2\varphi_1 + (2 + 3 + 4)\varphi_2 = 6\cos t \quad (2)$$

Giải (1) và (2) suy ra:

$$\varphi_1 = \frac{9}{68}e^{-t} + \frac{30}{17}\cos t \text{ V}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{34}e^{-t} + \frac{18}{17}\cos t \text{ V}$$

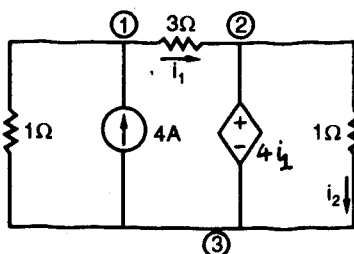
Chú ý rằng trước khi dùng phép dời nguồn áp thì nút ba có thể là $\varphi_3 = 2\cos t \text{ V}$ còn sau khi biến đổi thì $\varphi_3 = 0$.

Ví dụ 3.43: Tìm dòng i_1, i_2 ở mạch điện H.3.114.

Giải

• Dùng phép dời nguồn áp ta được mạch H.3.115a. Chú ý nguồn áp phụ thuộc $4i_1$ phụ thuộc vào dòng điện chạy qua nó nên tương đương với điện trở 4Ω (H.3.115b).

Viết K2 cho vòng (I):

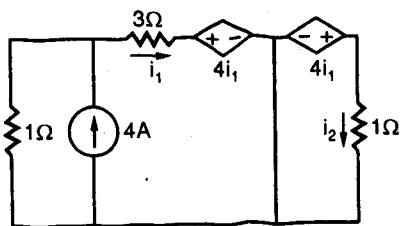


Hình 3.114

$$(1 + 3 + 4)i_1 = 4 \Rightarrow i_1 = 0,5A$$

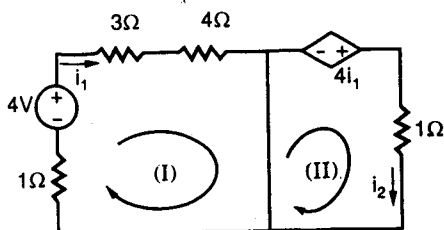
Viết K2 cho vòng (II):

$$1i_2 = 4i_1 \Rightarrow i_2 = 2A$$



a)

Hình 3.115



b)

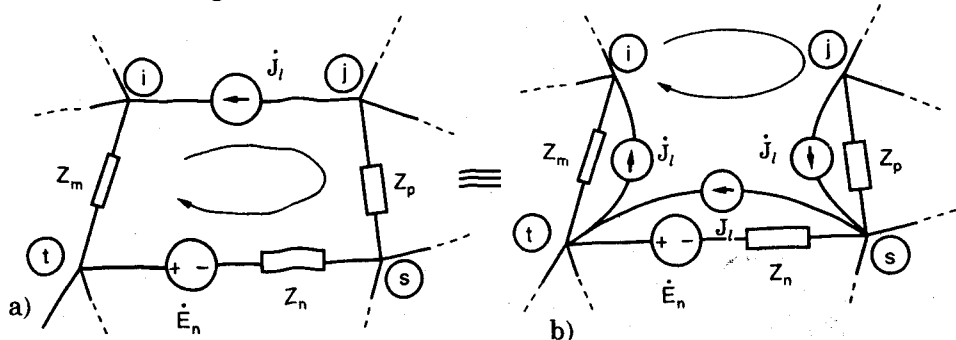
2) Chuyển vị nguồn dòng:

Ta có định lý sau:

Điện áp trên các nhánh của mạch sẽ không đổi nếu song song với mỗi một nhánh của một vòng kín ta mắc vào một nguồn dòng lý tưởng giống hệt nhau và cùng có chiều thuận với (hoặc cùng có chiều ngược với) chiều của vòng.

Thật vậy bởi vì tổng đại số các nguồn dòng chảy vào mỗi nút đều không đổi nên theo phương pháp thế nút suy ra thế của các nút không thay đổi.

Định lý này cho phép chuyển dịch một nguồn dòng lý tưởng đến các nhánh khác trong vòng như trên H.3.116.

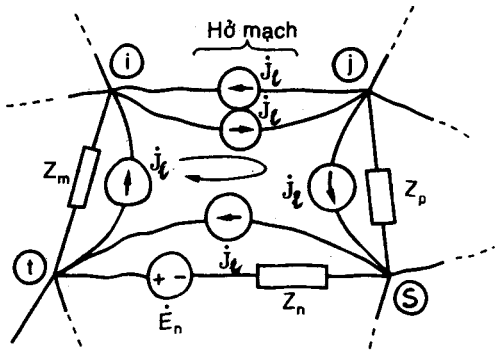


Hình 3.116: Phép dời nguồn dòng

Trên H.3.116a, giữa nút i và j có nguồn dòng lý tưởng J_l . Theo định lý trên, nếu song song với mỗi nhánh m, n, p, l thuộc vòng kín (như hình vẽ) ta mắc vào các nguồn dòng J_l như H.3.117 thì các điện áp trong mạch không thay đổi. Khi đó giữa hai nút i và j có hai nguồn dòng trị số bằng nhau nhưng ngược chiều nhau nên tương đương với một nguồn dòng ở mạch nhánh l , do

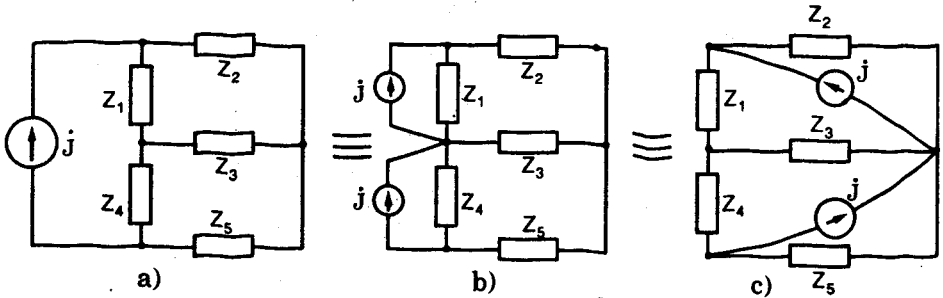
đó có thể xem như nguồn dòng lý tưởng $\vec{J}_l$ được chuyển vị tới các nhánh p, m, n thuộc vòng như H.3.116b.

Trong phương pháp dòng mắt lưới, nếu trong mạch có nhánh chỉ chứa nguồn dòng lý tưởng không thể biến đổi thành nguồn áp tương đương để áp dụng quy tắc (3.14) được, thì có thể dùng phép dời nguồn dòng H.3.116 để khử đi nhánh đó.



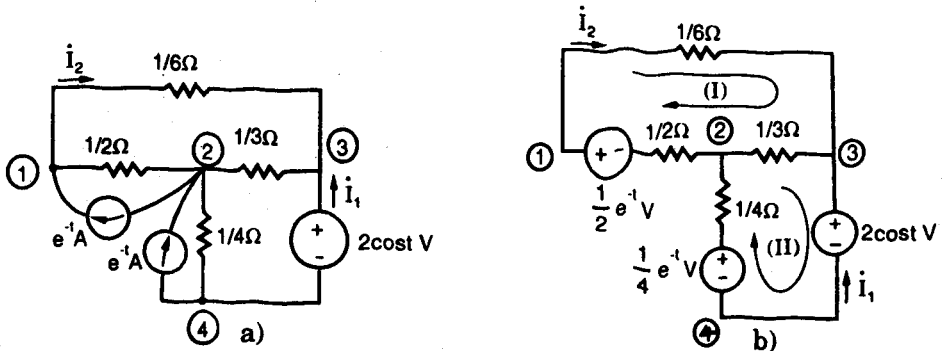
Hình 3.117

Ví dụ, đối với mạch H.3.118a, có thể dùng phép chuyển vị nguồn dòng như H.3.118b, c.



Hình 3.118

Ví dụ 3.44: Giải lại ví dụ 3.10 (H.3.17) ở mục 3.3, dùng phép chuyển vị nguồn dòng trước khi áp dụng phương pháp dòng mắt lưới.



Hình 3.119

Giải

Áp dụng phép dời nguồn dòng đối với mạch H.3.17 ta được mạch H.3.119a.

Sau đó biến đổi các nguồn dòng thành các nguồn áp tương đương ta được mạch H.3.119b.

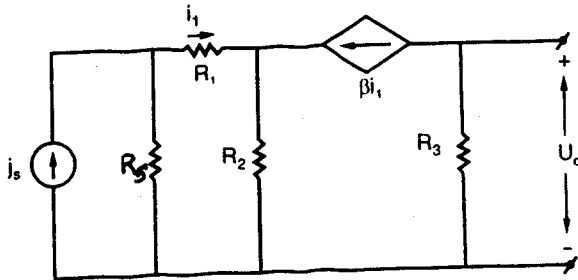
Viết phương trình K2 cho hai mắt lưới (I) và (II):

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) I_{m1} - \frac{1}{3} I_{m2} = \frac{1}{2} e^{-t} \\ -\frac{1}{3} I_{m1} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) I_{m2} = \frac{1}{4} e^{-t} - 2 \cos t \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{m1} = \frac{27}{34} e^{-t} - \frac{24}{17} \cos t A = I_2$$

$$I_{m2} = \frac{15}{17} e^{-t} - \frac{72}{17} \cos t A = -I_1$$

Ví dụ 3.45: Tìm tỉ số $\frac{u_o}{j_s}$ trong mạch điện H.3.120



Hình 3.120

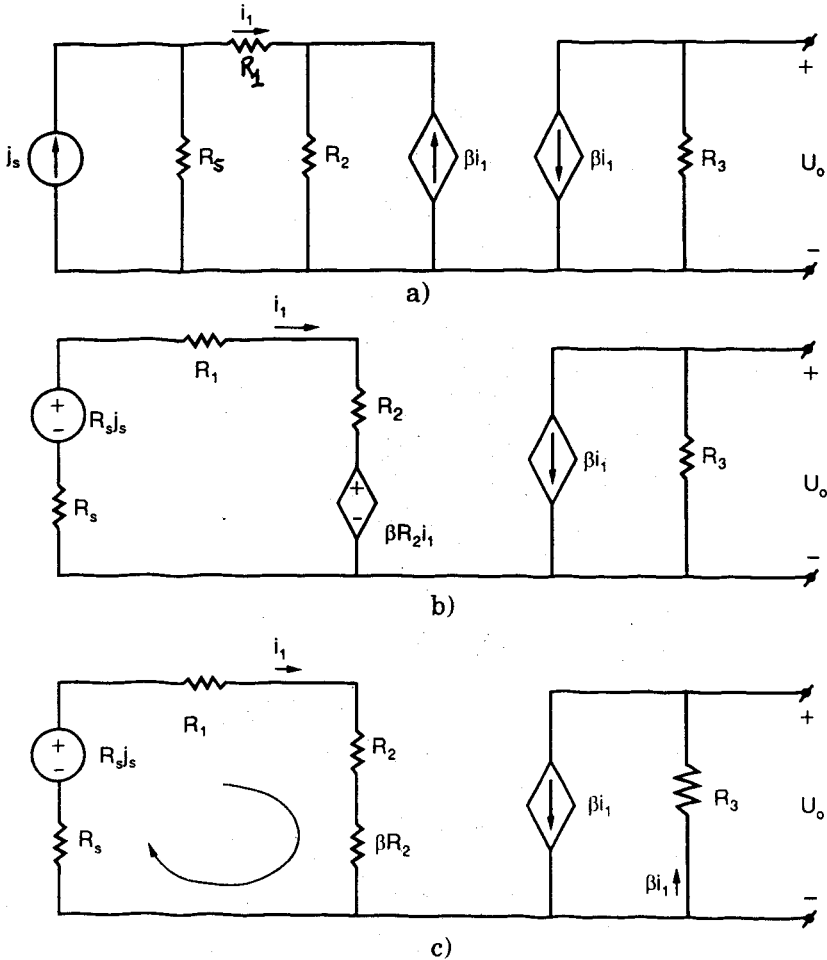
Giải

Áp dụng phép chuyển vị nguồn dòng ta được mạch H.3.121a. Biến đổi các nguồn dòng thành nguồn áp tương đương ta được mạch H.3.121b.

Nếu thay nguồn áp phụ thuộc $\beta R_2 i_1$ bị điều khiển bởi chính dòng điện i_1 chảy qua nó bằng điện trở βR_2 ta được mạch H.3.121c.

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{R_s j_s}{R_s + R_1 + (\beta + 1) R_2} \\ u_o &= -R_3 \beta i_1 = \frac{-\beta R_s R_3 j_s}{R_s + R_1 + (\beta + 1) R_2} \\ \Rightarrow \frac{u_o}{j_s} &= \frac{-\beta R_s R_3}{R_s + R_1 + (\beta + 1) R_2} \end{aligned}$$



Hình 3.121

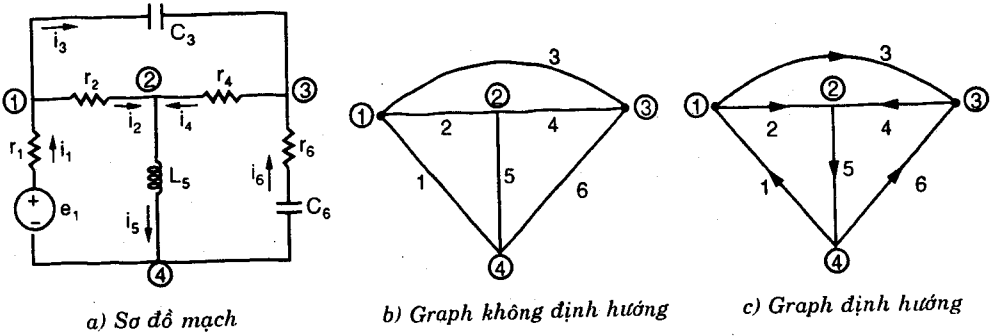
3.7 GRAPH VÀ TẬP Ô MẠCH

Các phương trình viết theo hai định luật Kirchhoff chỉ biểu diễn quan hệ giữa điện áp trên các nhánh và quan hệ giữa dòng điện chảy trong các nhánh, chúng không phụ thuộc vào loại và tính chất của phần tử cấu trúc nên nhánh, mà chỉ phụ thuộc vào cách thức liên kết giữa các phần tử. Từ đó nảy sinh vấn đề nghiên cứu tính chất của mạch liên quan đến cách thức nối các phần tử với nhau. Để nghiên cứu cấu trúc hình học của mạch và ảnh hưởng của nó đến tính chất mạch người ta dùng lý thuyết tập ô mạch, một ứng dụng của lý thuyết graph vào kỹ thuật điện.

3.7.1 Graph của mạch điện

- Nếu trong sơ đồ mạch thay mỗi nhánh bởi một đoạn thẳng ta sẽ được một cấu trúc hình học gọi là graph của mạch. Đoạn thẳng ứng với các

nhánh của sơ đồ mạch gọi là *nhánh* của graph. Biên (đầu nút) của nhánh gọi là *nút* (*đỉnh*) của graph.

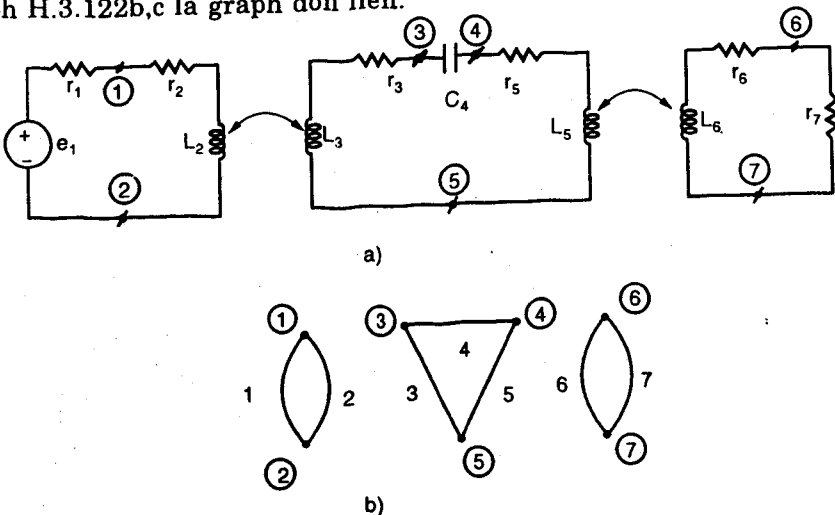


Hình 3.122: Mạch điện và graph

Với mỗi nhánh, nút của graph ta có thể đánh số hoặc ký hiệu theo nhánh, nút của sơ đồ mạch. Nhánh của graph có thể được định hướng bằng các mũi tên. Khi tất cả các nhánh đều được định hướng, ta có *graph định hướng*. Ngược lại là *graph không định hướng*.

Ví dụ: mạch điện H.3.122a có graph như H.3.122b và H.3.122c. Chiều của nhánh (chiều mũi tên trên nhánh) có thể được chọn tùy ý, ví dụ có thể chọn trùng với chiều dương của dòng điện trên nhánh tương ứng trong sơ đồ mạch như H.3.122c.

- Ta định nghĩa một số khái niệm cần thiết về graph:
- **Graph con** của graph là một phần của graph, bao gồm một tập nhánh - đỉnh bất kỳ nào đó của graph.
- **Graph đơn liên** là graph mà mọi đỉnh đều liên thông với nhau. Ví dụ graph H.3.122b,c là graph đơn liên.

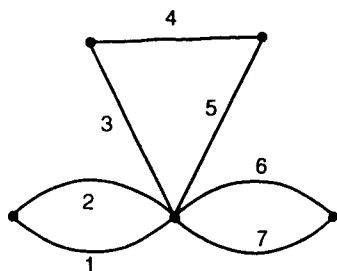


Hình 3.123: Mạch ghép hồ cảm và graph của nó

- **Graph đa liên** là graph gồm m (>1) graph đơn liên không liên thông nhau. Mỗi graph đơn liên ấy là một graph con. m gọi là số liên thông của graph và graph đa liên này gọi là graph m - liên thông.

Ví dụ: graph của mạch ghép hồ cảm H.3.123 là graph 3 - liên thông.

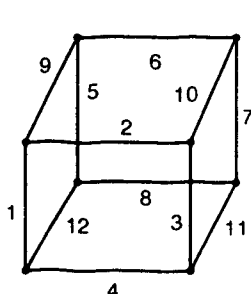
Nếu trong mạch H.3.123a, các đỉnh, (2), (5) và (7) nối lại với nhau thì graph của nó trở thành đơn liên như H.3.124. Việc nối các đỉnh (2), (5), (7) lại làm cho chúng có cùng điện thế, graph trở nên đơn giản hơn (chỉ còn 5 nút), nhưng không làm thay đổi dòng áp trong mạch.



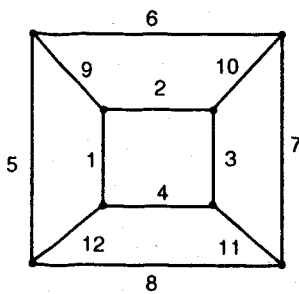
Hình 3.124: Graph đơn giản của mạch H.3.123

- Graph phẳng là graph có thể vẽ trên một mặt phẳng sao cho không có nhánh nào cắt nhau.

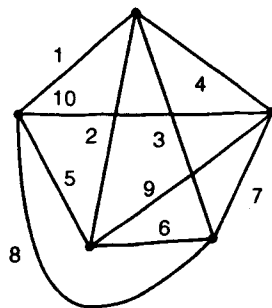
Ví dụ: graph H.3.125a là graph phẳng vì có thể vẽ lại nó như H.3.125b trong đó không có nhánh nào cắt nhau. H.3.126 là graph không phẳng.



a)



b)



c)

Hình 3.125: Graph phẳng

Hình 3.126: Graph không phẳng

Dưới đây là định nghĩa của một số graph con quan trọng: đường, vòng, tập cắt, cây, bù cây v.v.

- **Vòng (tập kín)** là một tập đủ các nhánh khép thành một vòng kín (nếu bỏ đi một nhánh thuộc vòng thì tập nhánh còn lại không tạo thành vòng kín nữa).

Ví dụ ở graph H.3.127, các tập nhánh (1,2,5), (4,5,6), (2,3,4), (1,3,6), (1,3,4,5), (1,2,4,6) và (2,3,6,5) là các vòng. (1,2,4,5) không phải là một vòng, nó thừa nhánh 4.

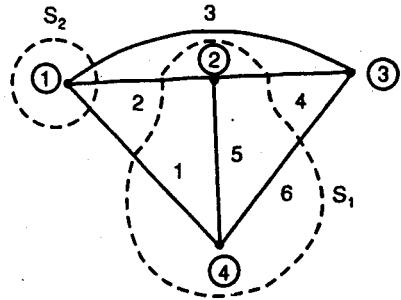
- **Đường:** một đường giữa hai đỉnh là một tập nhánh liên thông giữa hai đỉnh đó và không tạo thành một tập kín nào. Trên đường gặp một

nhánh hay một nút bất kỳ chỉ một lần.

Ví dụ ở graph H.3.127, giữa hai đỉnh (1) và (2) ta có năm đường: 2, 3-4, 1-5, 3-6-5, 1-6-4.

- **Tập cắt** là một tập đủ các nhánh mà nếu vật bỏ chúng đi sẽ làm tăng số liên thông (đối với graph đơn liên thì sẽ chia graph thành hai graph con không liên thông).

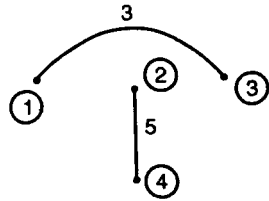
Ví dụ: đối với graph H.3.127 thì tập nhánh (1,2,4,6) là một tập cắt, nếu vật bỏ chúng thì graph sẽ còn lại hai phần cô lập (không liên thông) nhau như H.3.128. Để dễ hình dung hơn, có thể làm tương ứng một tập cắt với một *mặt kín* cắt ngang các nhánh của tập cắt và bao hoàn toàn một số nhánh nút khác. Ví dụ tập cắt (1,2,4,6) tương ứng với mặt kín S_1 (H.3.127) cắt ngang các nhánh 1,2,4,6 và bao hoàn toàn nhánh 5 và hai nút ② và ④; các nhánh 1,2,4,6 có tính chất là liên thông giữa các đỉnh bên ngoài S_1 với các đỉnh bên trong S_1 , do đó nếu vật bỏ chúng đi thì sẽ tách graph thành hai phần cô lập nhau.



Hình 3.127

Một số tập cắt khác của graph H.3.127 là (1,5,4,3), (3,2,5,6) v.v..

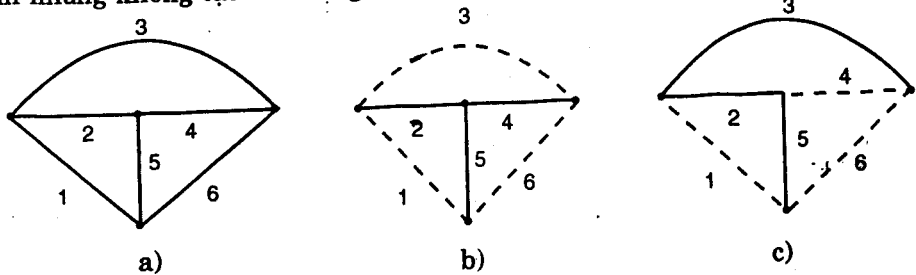
Nếu mặt kín bao chỉ một đỉnh thì ta có một tập cắt đặc biệt gọi là *tập cắt đỉnh*. Ví dụ tập nhánh (1,2,3) ở H.3.127 là một tập cắt đỉnh tương ứng với mặt kín S_2 bao duy nhất đỉnh ① và cắt ngang các nhánh 1,2,3. Tương tự tập nhánh (2,4,5) là một tập cắt ứng với đỉnh ②.



Hình 3.128

- **Cây, bù cây:**

Cây của một graph đơn liên là một tập nhánh của graph nối đủ tất cả các đỉnh nhưng không tạo nên vòng nào. Các nhánh của một cây gọi là *cành*.



Hình 3.129: Graph và các cây, bù cây

Một graph có thể có nhiều cây. H.3.129 vẽ một graph và hai trong các cây của nó: cây (2,4,5) gồm ba cạnh 2,4,5 (H.3.129b) và cây (3,2,5) gồm ba cạnh 3, 2 và 5 (H.3.129c).

Với graph đa liên thì cây của graph m - liên gồm m cây con của m graph con.

Bù cây: là một tập nhánh lắp vào một cây để thành graph đã cho. Các nhánh của một bù cây gọi là *bù cạnh*.

Ví dụ với graph H.3.129 ứng với cây (2,4,5) ta có bù cây (1,3,6) gồm ba bù cạnh 1, 3, 6 vẽ bằng nét đứt ở H.3.129b; ứng với cây (3,2,5) H.3.129c ta có bù cây (1,4,6) gồm ba bù cạnh 1,4,6.

- Từ định nghĩa của cây, bù cây suy ra một số tính chất sau đây:

- *Cây không chứa vòng.* Tính chất này suy từ định nghĩa của cây.

- *Bù cây không chứa tập cắt.* Thật vậy, ngay cả khi vật hết các bù cạnh chỉ còn lại cây thì theo định nghĩa tất cả các đỉnh vẫn liên thông bởi cây nên graph chưa có phần nào bị tách cô lập ra cả.

- *Mỗi bù cạnh khép riêng một vòng xác định qua một số cạnh của cây, gọi là vòng chính hoặc vòng cơ bản.*

Ví dụ xét cây H.3.129c, bù cạnh 1 cùng với hai cạnh 2, 5 tạo thành vòng chính (1,2,5), bù cạnh 4 cùng với hai cạnh 2, 3 tạo thành vòng chính (4,2,3) và bù cạnh 6 tạo thành vòng chính (6,5,2,3) cùng với ba cạnh 5,2,3.

Tính chất này suy ra từ nhận xét rằng giữa hai nút (của bù cạnh) luôn tồn tại một đường trên cây và đường này là duy nhất (nếu tồn tại hai đường khác nhau thì cây sẽ chứa vòng, trái với định nghĩa).

- *Mỗi cạnh lập riêng một tập cắt xác định cùng với một số bù cạnh, gọi là tập cắt chính hoặc tập cắt cơ bản.*

Thật vậy, nếu vật bỏ cạnh đó ra khỏi cây thì cây sẽ bị tách làm hai phần cô lập do đó nếu vật bỏ thêm một số bù cạnh thích hợp thì graph sẽ bị tách làm đôi.

Ví dụ xét graph với cây H.3.130, cạnh 3 cùng với hai bù cạnh 4 và 6 lập thành tập cắt đỉnh ứng với mặt kín S_1 , cạnh 2 và ba bù cạnh 1, 4 và 6 tạo thành tập cắt S_2 , cạnh 5 và hai bù cạnh 1 và 6 tạo tập cắt đỉnh S_3 .

- Về số lượng cạnh, bù cạnh của một graph ta có định lý sau:

- *Graph đơn liên có d đỉnh, n nhánh thì số cạnh là $c = d-1$ và số bù cạnh là $b = n-d + 1$.*

- *Graph m - liên thông có d đỉnh, n nhánh thì số cạnh là $c = d-m$ và số bù cạnh là $b = n-d + m$.*

Chứng minh: Xét graph đơn liên d đỉnh, n nhánh.

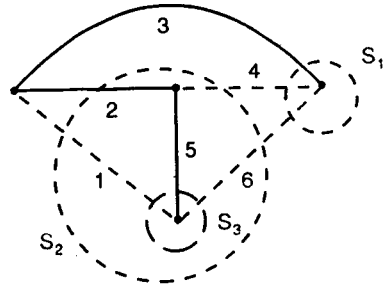
Cành đầu tiên nối giữa hai đỉnh; sau đó muốn nối thêm một đỉnh thì cần thêm một cành. Cứ thế suy ra số cành $C = d - 1$.

Do đó số bù cành $b = n - c = n - d + 1$.

Xét graph m - liên thông gồm m graph con: graph con thứ k có d_k đỉnh và n_k nhánh và do đó có số cành là $c_k = d_k - 1$ và số bù cành là $b_k = n_k - d_k + 1$

$$\text{Suy ra: } c = \sum_{k=1}^m c_k = \sum_{k=1}^m (d_k - 1) = \sum_{k=1}^m d_k - m = d - m$$

$$\Rightarrow b = n - c = n - d + m$$



Hình 3.130

3.7.2 Hệ đủ phương trình độc lập viết theo hai định luật Kirchhoff

1- Hệ đủ phương trình độc lập viết theo định luật Kirchhoff 2

Xét một mạch điện với graph định hướng. Gọi điện áp trên mỗi nhánh thứ k là u_k , và giả sử chọn cực tính sao cho chiều mũi tên của nhánh k của graph hướng từ cực tính + đến cực tính - của u_k (H.3.131).

Đối với mỗi vòng, theo định luật K2 thì tổng đại số các điện áp trên các nhánh thuộc vòng bằng không:

$$\sum_{\text{vòng}} \pm u_k = 0$$

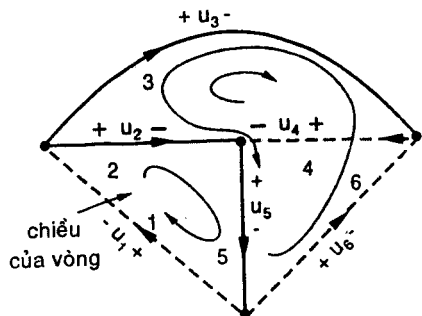
trong đó lấy dấu + nếu chiều của nhánh cùng chiều với chiều của vòng. Chiều của vòng có thể chọn tùy ý, tuy nhiên ta quy ước chiều của một vòng chính là chiều của bù cành ứng với vòng chính đó.

• Xét graph định hướng H.3.132 với cây gồm ba nhánh 3, 2 và 5. Ứng với ba bù cành 1, 4 và 6 ta có ba vòng chính (1,2,5), (4,2,3), (6,3,2,5).

Viết luật K2 cho ba vòng chính trên ta được ba phương trình:



Hình 3.131: Chiều của nhánh graph và cực tính điện áp trên nhánh.



Hình 3.132

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_5 = 0 & (3.92a) \\ u_4 - u_2 + u_3 = 0 & (3.92b) \\ u_6 - u_3 + u_2 + u_5 = 0 & (3.92c) \end{cases}$$

Từ đó ta thấy các áp bù cành u_1, u_4, u_6 có thể tính theo (phụ thuộc vào) các áp cành u_2, u_3, u_5 theo các phương trình:

$$\begin{cases} u_1 = -u_2 - u_5 \\ u_4 = u_2 - u_3 \\ u_6 = u_3 - u_2 - u_5 \end{cases}$$

Ta có định lý sau:

Các áp cành trên cây làm thành một tập đủ áp nhánh độc lập. Mọi áp nhánh khác (áp bù cành) có thể biểu diễn theo các áp cành.

Thật vậy, vì cây không chứa vòng nào nên các áp cành không bị ràng buộc bởi định luật K2 do đó chúng độc lập với nhau. Vì mỗi bù cành khép một vòng qua một số cành xác định, nên từ luật K2 viết cho vòng chính đó suy ra áp bù cành phụ thuộc vào các áp cành.

• Như đã đề cập ở chương 1, trong các phương trình viết theo định luật K2 cho tất cả các vòng chỉ có một số phương trình là độc lập với nhau, số phương trình còn lại có thể suy ra được từ các phương trình độc lập kia. Lý thuyết tô pô mạch cung cấp cho ta một phương pháp có hệ thống chọn các vòng để viết được hệ đủ phương trình độc lập K2, như được nêu trong định lý sau:

Với graph m - liên thông n nhánh d đỉnh thì $(n-d+m)$ phương trình cân bằng áp K2 viết cho các vòng chính làm thành một hệ đủ phương trình độc lập.

Thật vậy, vì mỗi vòng chính chứa riêng một bù cành nên mỗi phương trình K2 viết cho vòng chính sẽ chứa một biến riêng là áp bù cành ứng với vòng chính ấy. Do đó các phương trình độc lập nhau. Số phương trình này bằng số bù cành và bằng $(n-d+m)$. Hệ phương trình này là đủ vì số phương trình vừa bằng số biến phụ thuộc (áp bù cành).

Ví dụ với graph và cây H.3.132 viết luật K2 cho ba vòng chính ta được hệ đủ phương trình độc lập K2 là (3.92a), (3.92b) và (3.92c).

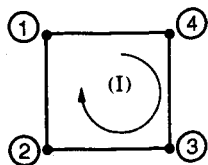
• Đối với graph phẳng, có một cách khác đơn giản hơn để viết được hệ đủ phương trình độc lập K2 cho bởi định lý sau:

Với graph phẳng có n nhánh d đỉnh thì sẽ có $(n-d+m)$ mắt lưới và $(n-d+m)$ phương trình cân bằng áp K2 viết cho các mắt lưới sẽ làm thành hệ đủ phương trình độc lập.

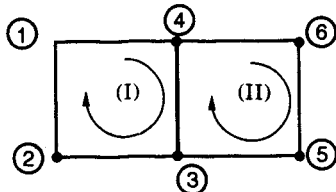
Đối với graph phẳng được vẽ trên một mặt phẳng mặt lưới được định nghĩa là vòng mà không chứa vòng nào bên trong nó. Ví dụ đối với graph phẳng H.3.132, các vòng (1,2,5), (4,5,6) và (2,3,4) là mặt lưới; các vòng (1,2,4,6), (2,3,6,5), (1,3,4,5) không phải là mặt lưới.

Xét một graph phẳng đơn liên có n nhánh, d đỉnh. Ta chứng minh số mặt lưới $L = n - d + 1$. Thật vậy, ta tưởng tượng khi tháo rời graph ra và xây dựng lại graph từng mặt lưới một. Mặt lưới đầu tiên cần k_1 nút và k_1 nhánh. Mặt lưới thứ hai được xây dựng kế tiếp mặt lưới thứ nhất sẽ cần k_2 nhánh và $(k_2 - 1)$ nút, mặt lưới thứ ba cần k_3 nhánh và $(k_3 - 1)$ nút. Cứ tiếp tục cho đến mặt lưới cuối cùng là mặt lưới thứ L cần k_L nhánh và $(k_L - 1)$ nút.

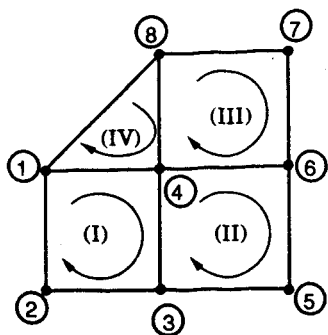
Ví dụ quá trình xây dựng graph H.3.133 được minh họa trên H.3.134



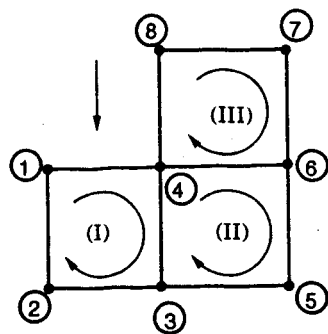
a) mặt lưới (I) cần 4 nhánh, 4 nút



b) mặt lưới (II) cần thêm 3 nhánh, 2 nút (nút 5 và 6)



d) mặt lưới (IV) cần 1 nhánh, 0 nút



c) mặt lưới (III) cần thêm 3 nhánh, 2 nút (nút 7 và 8)

Hình 3.134: Quá trình xây dựng graph H.3.133

Vậy số nhánh tổng cộng là

$$n = k_1 + k_2 + \dots + k_L$$

Số nút tổng cộng là

$$d = k_1 + (k_2 - 1) + \dots + (k_L - 1)$$

$$= k_1 + k_2 + \dots + k_L - (L - 1)$$

$$\Rightarrow d = n - (L - 1)$$

Từ đó suy ra: $L = n - d + 1$

Với graph phẳng m - liên thông gồm m graph con, gọi n_i là số nhánh và d_i là số đỉnh của graph con thứ i thì số mắt lưới của graph con thứ i là $L_i = n_i - d_i + 1$. Suy ra số mắt lưới tổng cộng của graph là:

$$L = \sum_{i=1}^m L_i = \sum_{i=1}^m (n_i - d_i + 1) = \sum_{i=1}^m n_i - \sum_{i=1}^m d_i + m$$

$$\Rightarrow L = n - d + m$$

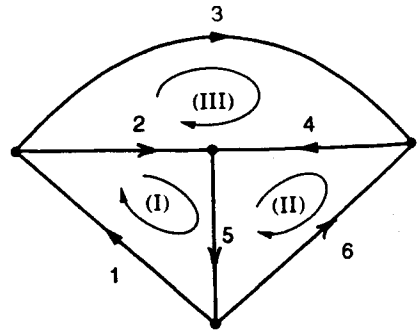
Như vậy số mắt lưới bằng số bù cạnh.

Từ quá trình xây dựng graph phẳng như trên ta thấy mỗi mắt lưới mới (được thêm vào) chứa ít nhất một nhánh không có mặt trong các mắt lưới trước, do đó $(n-d+m)$ phương trình cân bằng áp K2 viết cho các mắt lưới tạo thành hệ đủ phương trình độc lập.

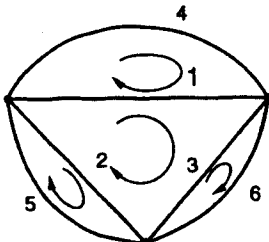
Ví dụ, hệ phương trình K2 độc lập và đủ viết cho ba mắt lưới của graph phẳng H.3.135 là:

$$\left. \begin{aligned} \text{Mắt lưới(I)} : u_1 + u_2 + u_5 &= 0 \\ \text{Mắt lưới(II)} : -u_4 - u_5 - u_6 &= 0 \\ \text{Mắt lưới(III)} : -u_3 + u_2 + u_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

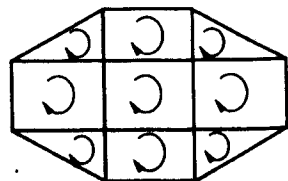
Cuối cùng, đối với khái niệm mắt lưới ta có nhận xét rằng: với một số graph phẳng có thể chọn cây sao cho tất cả các vòng chính đều là các mắt lưới, ví dụ với graph phẳng H.3.135 nếu chọn cây $(2,4,5)$ thì ba vòng chính $(1,2,5)$, $(6,4,5)$, $(3,2,4)$ là ba mắt lưới; tuy nhiên cũng có graph phẳng mà không tồn tại cách chọn cây nào để cho mọi vòng chính đều là mắt lưới, ví dụ graph H.3.136 và H.3.137.



Hình 3.135



Hình 3.136



Hình 3.137

2- Hệ đủ phương trình độc lập viết theo định luật Kirchhoff 1

Xét một graph định hướng của một mạch điện. Gọi dòng điện trên mỗi nhánh thứ k là i_k , giả sử quy ước chiều của nhánh trùng với chiều dương của dòng trên nhánh (H.3.138).

Đối với mỗi tập cắt (ứng với một mặt kín), theo định luật K1 thì tổng đại số các dòng điện trên các nhánh thuộc tập cắt (tức chảy vào hoặc ra mặt kín ứng với tập cắt) bằng không:

$$\sum_{\substack{\text{tập cắt} \\ (\text{mặt kín})}} \pm i_k = 0$$

trong đó lấy dấu + nếu chiều của nhánh cùng chiều với chiều của tập cắt, ngược lại lấy dấu -. Chiều của tập cắt có thể chọn là chiều đi vào hoặc đi ra mặt kín ứng với tập cắt đó. Tuy nhiên ta quy ước chiều của một tập cắt chính là chiều của cạnh ứng với tập cắt chính đó

Xét graph định hướng H.3.139, chọn cây (3,2,5). Ứng với ba cạnh 2, 3 và 5 ta có ba tập cắt chính (2,1,4,6), (3,4,6) và (5,1,6).

Tập cắt chính (2,1,4,6) ứng với mặt kín S_1 , chiều của tập cắt chính này là chiều của cạnh 2 tức đi vào mặt kín S_1 . Viết định luật K1 cho tập cắt chính này ta được:

$$i_2 - i_1 + i_4 - i_6 = 0$$

i_1 và i_6 mang dấu - vì chiều của cạnh 1 và cạnh 6 đi ra khỏi mặt kín S_1 tức ngược với chiều của tập cắt. Viết định luật K1 cho hai tập cắt chính còn lại, kết quả ta được hệ ba phương trình:

$$\begin{cases} i_2 - i_1 + i_4 - i_6 = 0 \\ i_3 - i_4 + i_6 = 0 \\ i_5 - i_1 - i_6 = 0 \end{cases}$$

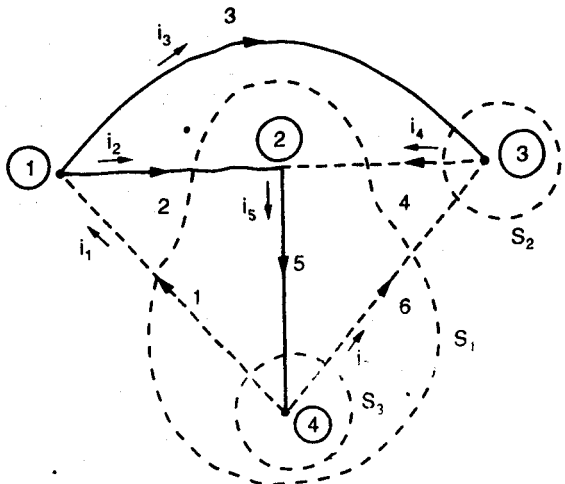
(3.93a)

(3.93b)

(3.93c)



Hình 3.138: Chiều nhánh graph và chiều dương dòng điện trong nhánh



Hình 3.139

Ta thấy các dòng cành i_2 , i_3 và i_5 có thể tính theo các dòng bù cành i_1 , i_4 và i_6 theo các phương trình:

$$\begin{cases} i_2 = i_1 - i_4 + i_6 \\ i_3 = i_4 - i_6 \\ i_5 = i_1 + i_6 \end{cases}$$

Ta có định lý sau:

Các dòng bù cành trên bù cây làm thành một tập đủ dòng nhánh độc lập. Mọi dòng nhánh khác (dòng cành) có thể được biểu diễn tính theo các dòng bù cành.

Thật vậy, vì bù cây không chứa tập cắt nào nên các dòng bù cành không bị ràng buộc bởi định luật K1 do đó chúng độc lập với nhau. Vì mỗi cành luôn cùng với một số bù cành nào đó tạo thành một tập cắt chính, nên từ định luật K1 viết cho tập cắt chính đó suy ra dòng cành phụ thuộc vào các dòng bù cành.

Trong các phương trình K1 viết cho tất cả các tập cắt chỉ có một số là độc lập với nhau, số phương trình còn lại có thể suy ra được từ các phương trình độc lập trên. Định lý sau đây nêu lên một cách chọn các tập cắt để viết được hệ đủ phương trình độc lập K1:

Với graph m - liên thông d đỉnh thì $(d-m)$ phương trình cân bằng dòng K1 viết cho các tập cắt chính làm thành một hệ đủ phương trình độc lập.

Thật vậy, vì mỗi tập cắt chính chứa riêng một cành nên mỗi phương trình K1 viết cho tập cắt chính sẽ chứa một biến riêng là dòng cành ứng với tập cắt chính đó. Do đó các phương trình độc lập nhau. Số lượng các phương trình bằng số lượng tập cắt chính tức số cành $d-m$. Hệ phương trình này là đủ vì số phương trình vừa bằng số biến phụ thuộc (dòng cành). Ví dụ với graph và cây H.3.139, viết luật K1 cho ba tập cắt chính ta được hệ đủ phương trình độc lập K1 là (3.93a,b,c).

Một cách khác đơn giản hơn để viết được hệ phương trình độc lập K1 là viết cho $(d-m)$ đỉnh (như ta đã biết trong chương 1), cho bởi định lý sau:

Với graph đơn liên d đỉnh thì $(d-1)$ phương trình K1 viết cho $(d-1)$ nút làm thành hệ đủ phương trình độc lập.

Thật vậy, trước tiên ta nhận xét rằng phương trình K1 viết cho một tập cắt bất kỳ có thể được suy ra bằng cách lấy tổ hợp tuyến tính các phương trình K1 viết cho các đỉnh nằm bên trong mặt kín ứng với tập cắt đó. Ví dụ, tập cắt (2,1,4,6) của graph H.3.139 ứng với mặt kín S_1 chứa hai đỉnh là (4) và (2); viết K1 cho hai đỉnh (4) và (2) ta được:

$$\text{đỉnh (2): } i_2 + i_4 - i_5 = 0$$

$$\text{đỉnh (4): } -i_1 - i_6 + i_5 = 0$$

Cộng hai phương trình trên ta được: $i_2 + i_4 - i_1 - i_6 = 0$, đây chính là phương trình K1 viết cho tập cắt (2,1,4,6).

Như vậy hệ đủ phương trình độc lập K1 viết cho các tập cắt chính gồm (d-1) phương trình có thể được suy ra từ các phương trình K1 viết cho các đỉnh. Do đó số phương trình độc lập K1 viết cho các đỉnh phải bằng với số phương trình độc lập K1 viết cho các tập cắt chính, tức bằng (d-1). Với graph đa liên m - liên thông gồm m graph con, thì với mỗi graph con thứ k có d_k đỉnh ta viết được $(d_k - 1)$ phương trình K1 độc lập. Tổng cộng sẽ được (d-m) phương trình độc lập K1.

3.7.3 Ma trận tô pô

Cùng với cách mô tả bằng hình vẽ, cấu trúc của một graph có thể được mô tả bởi các ma trận tô pô. Đó là cách mô tả cấu trúc graph bằng các bảng số. Các ma trận tô pô quan trọng nhất là ma trận đỉnh A, ma trận tập cắt Q, ma trận vòng B. Như sẽ thấy các định luật Kirchhoff 1 và 2 có thể được trình bày ở dạng ma trận nhờ các ma trận tô pô này.

Xét một graph định hướng có d đỉnh, n nhánh và đơn liên ($m = 1$).

1- Ma trận nút (đỉnh) A

Chọn một nút bất kỳ trong d nút làm nút gốc (nút chuẩn). Ma trận nút A được định nghĩa là ma trận có (d-1) hàng và n cột với phần tử ma trận a_{ij} được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{nếu nhánh } j \text{ nối với nút } i \text{ và hướng ra khỏi nút} \\ a_{ij} = -1 & \text{nếu nhánh } j \text{ nối với nút } i \text{ và hướng vào nút} \\ a_{ij} = 0 & \text{nếu nhánh } j \text{ không nối với nút } i \end{cases}$$

Như vậy số cột của A bằng với số nhánh n, mỗi cột ứng với một nhánh. Số hàng của A bằng d-1, mỗi hàng ứng với một nút (không kể nút gốc).

Nếu ma trận nút được viết cho tất cả các nút thì được ký hiệu là ma trận A' (có d hàng và n cột).

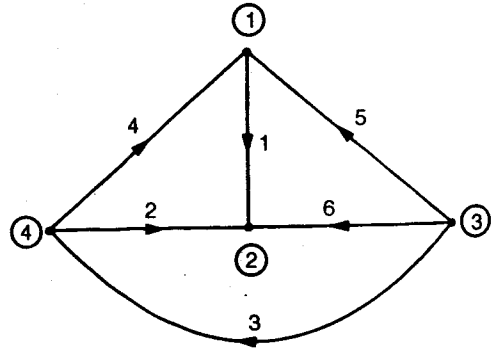
Ví dụ: ma trận A' của graph định hướng H.3.140 là:

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{c} \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{nút (1)} \\ \leftarrow \text{nút (2)} \\ \leftarrow \text{nút (3)} \\ \leftarrow \text{nút (4)} \end{array} \\
 \begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} & \begin{array}{l} \text{Nhánh } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array}
 \end{array}$$

Nhận xét rằng tổng các phần tử trên mỗi cột của ma trận $\mathbf{A}'$ luôn bằng không, bởi vì mỗi nhánh đều nối hai nút nếu chiều của nhánh hướng vào nút này thì sẽ hướng ra khỏi nút kia.

Nếu xóa bất kỳ một hàng nào của ma trận $\mathbf{A}'$ thì sẽ được ma trận nút $\mathbf{A}$ với nút gốc là nút ứng với hàng bị xóa. Ví dụ, nếu chọn nút ④ làm nút gốc thì trong $\mathbf{A}'$ ta xóa đi hàng 4:

$$\begin{array}{cccccc}
 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{nút (1)} \\ \leftarrow \text{nút (2)} \\ \leftarrow \text{nút (3)} \end{array} \\
 \begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} & \begin{array}{l} \text{Nhánh } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array}
 \end{array} \quad (3.94)$$



Hình 3.140

Nếu đặt: $\mathbf{i}_n = [i_{1n} \ i_{2n} \ \dots \ i_{nn}]^T$ là ma trận cột của tất cả các dòng nhánh thì từ định nghĩa của ma trận nút $\mathbf{A}$ ta thấy định luật K1 có thể viết ở dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_n = 0 \quad (3.95)$$

phương trình ma trận (3.95) tương đương với hệ đủ phương trình độc lập gồm $(d-1)$ phương trình K1 viết cho các nút.

Ví dụ với graph H.3.140 và $\mathbf{A}$ cho bởi biểu thức (3.94) ta có:

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_4 - i_5 \\ -i_1 - i_2 - i_6 \\ i_3 + i_5 + i_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{i}_n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} i_1 - i_4 - i_5 = 0 \leftarrow \text{K1 viết cho nút (1)} \\ -i_1 - i_2 - i_6 = 0 \leftarrow \text{K1 viết cho nút (2)} \\ i_3 + i_5 + i_6 = 0 \leftarrow \text{K1 viết cho nút (3)} \end{cases}$$

• Giả sử với mỗi nút thứ k ta gán cho nó một biến gọi là thế của nút k và ký hiệu là φ_k . Quy ước thế của nút gốc (chọn tùy ý) bằng không, và điện áp u_{ij} giữa nút thứ i với nút thứ j được tính theo thế của nút i và j theo biểu thức sau:

$$u_{ij} = \varphi_i - \varphi_j \quad (3.96)$$

Ví dụ: với graph H.3.140 điện áp trên các nhánh sẽ là:

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1 - \varphi_2 & \text{vì } u_1 \text{ là điện áp giữa đỉnh (1) với đỉnh (2)} \\ u_2 = \varphi_4 - \varphi_2 = -\varphi_2 & \text{vì đỉnh (4) chọn làm đỉnh gốc nên } \varphi_4 = 0 \\ u_3 = \varphi_3 - \varphi_4 = \varphi_3 \\ u_4 = \varphi_4 - \varphi_1 = -\varphi_1 \\ u_5 = \varphi_3 - \varphi_1 \\ u_6 = \varphi_3 - \varphi_2 \end{cases}$$

có thể viết sáu phương trình trên ở dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

trong đó $\mathbf{A}^T$ là ma trận chuyển vị của ma trận nút $\mathbf{A}$ cho bởi (3.94).

Tổng quát nếu đặt: $\mathbf{u}_n = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$ là ma trận cột các áp nhánh và $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_{k-1} \ \varphi_{k+1} \ \dots \ \varphi_d]^T$ là ma trận cột các thế đỉnh với đỉnh k được chọn làm đỉnh gốc ($\varphi_k = 0$) thì ta có quan hệ ma trận sau:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} \quad (3.97)$$

2- Ma trận tập cắt $\mathbf{Q}$

Xét một graph định hướng có d nút, n nhánh, đơn liên và đã chọn một cây xác định.

Ma trận tập cắt $\mathbf{Q}$ được định nghĩa là ma trận có $(d-1)$ hàng và n cột với phần tử ma trận q_{ij} được xác định như sau:

$$\begin{cases} q_{ij} = 1 \text{ nếu nhánh } j \text{ thuộc tập cắt chính thứ } i \text{ và cùng} \\ \quad \text{chiều với chiều của tập cắt chính thứ } i \\ q_{ij} = -1 \text{ nếu nhánh } j \text{ thuộc tập cắt chính thứ } i \text{ và ngược} \\ \quad \text{chiều với chiều tập cắt chính } i \\ q_{ij} = 0 \text{ nếu nhánh } j \text{ không thuộc tập cắt chính } i \end{cases}$$

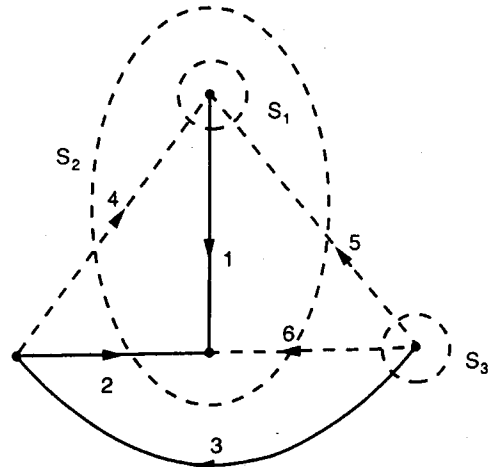
Cột ở ma trận $\mathbf{Q}$ ứng với nhánh, còn hàng ứng với tập cắt chính. Số cột bằng số nhánh n , số hàng bằng số tập cắt chính tức số cạnh $(d-1)$. Nhắc lại rằng chiều tập cắt chính, theo quy ước, là chiều của cạnh ứng với tập cắt chính đó.

Các nhánh có thể được đánh số thứ tự tùy ý, tuy nhiên để tiện lợi thường người ta đánh số thứ tự các cạnh của cây trước, kể đó đến các bù cạnh. Số thứ tự các tập cắt chính trùng với số thứ tự của cạnh.

Ví dụ: Xét graph H.3.141 với cây (1,2,3)

Ở đây các cạnh đã được đánh số thứ tự trước 1, 2, 3 kể đến là các bù cạnh 4, 5, 6. Ứng với ba cạnh ta có ba tập cắt chính:

- Tập cắt chính I là (1,4,5) ứng với mặt kín S_1 ;
- Tập cắt chính II là (2,4,5,6) ứng với mặt kín S_2 ;
- Tập cắt chính III là (3,5,6) ứng với mặt kín S_3 .



Hình 3.141

Dựa vào định nghĩa, ta lập được ma trận tập cắt $\mathbf{Q}$ như sau:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{tập cắt chính I (1,4,5)} \\ \leftarrow \text{tập cắt chính II (2,4,5,6)} \\ \leftarrow \text{tập cắt chính III (3,5,6)} \end{matrix}$$

$\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$
 Nhánh $\underbrace{1 \ 2 \ 3}_{\text{cạnh}} \quad \underbrace{4 \ 5 \ 6}_{\text{bù cạnh}}$

(3.98)

Nhận xét rằng với cách đánh số thứ tự các cạnh trước, ma trận tập cắt $\mathbf{Q}$ có thể được phân hoạch theo các cạnh và bù cạnh dưới dạng sau:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{1}_c \ \mathbf{Q}_b] \quad (3.99)$$

trong đó: $\mathbf{1}_c$ là ma trận con đơn vị bậc $(d-1)$ bằng số cạnh, $\mathbf{Q}_b$ là ma trận

con có số hàng bằng $(d-1)$, số cột bằng số bù cạnh tức $(n-d+1)$.

Ở ví dụ trên thì $\mathbf{1}_c$ là ma trận đơn vị bậc 3: $\mathbf{1}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{và } \mathbf{Q}_b = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{tập cắt chính I} \\ \leftarrow \text{tập cắt chính II} \\ \leftarrow \text{tập cắt chính III} \end{array} \quad (3.100)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{bù cạnh} & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Từ định nghĩa của ma trận tập cắt $\mathbf{Q}$ ta thấy hệ đủ phương trình độc lập K1 viết cho $(d-1)$ tập cắt chính có thể viết ở dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{Q} \mathbf{i}_n = 0 \quad (3.101)$$

Ví dụ với graph H.3.141 và $\mathbf{Q}$ cho bởi biểu thức (3.98) ta có:

$$\mathbf{Q} \mathbf{i}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_4 - i_5 \\ i_2 + i_4 + i_5 + i_6 \\ i_3 + i_5 + i_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{i}_n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} i_1 - i_4 - i_5 = 0 & \leftarrow \text{K1 viết cho tập cắt chính I} \\ i_2 + i_4 + i_5 + i_6 = 0 & \leftarrow \text{K1 viết cho tập cắt chính II} \\ i_3 + i_5 + i_6 = 0 & \leftarrow \text{K1 viết cho tập cắt chính III} \end{cases}$$

Nhận xét rằng với cách đánh số thứ tự các cạnh trước, ma trận dòng nhánh $\mathbf{i}_n$ có thể được phân hoạch dưới dạng sau:

$$\mathbf{i}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{i}_b \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

trong đó $\mathbf{i}_c$ là ma trận con dòng cạnh và $\mathbf{i}_b$ là ma trận con dòng bù cạnh; cả hai là ma trận cột.

Thay (3.99) và (3.102) vào (3.101) ta được:

$$\begin{aligned} [\mathbf{1}_c \mathbf{Q}_b] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{i}_b \end{bmatrix} &= 0 \Rightarrow \mathbf{i}_c + \mathbf{Q}_b \mathbf{i}_b = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{i}_c &= -\mathbf{Q}_b \mathbf{i}_b \end{aligned} \quad (3.103)$$

Vậy từ định luật K1 suy ra các dòng cạnh có thể biểu diễn theo các dòng bù cạnh ở dạng ma trận (3.103)

Ví dụ với graph H.3.141 thì $\mathbf{i}_c = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{i}_b = \begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}$

và $\mathbf{Q}_b$ cho bởi biểu thức (3.100)

Theo (3.103):

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} i_1 = i_4 + i_5 \\ i_2 = -i_4 - i_5 - i_6 \\ i_3 = -i_5 - i_6 \end{cases}$$

3- Ma trận vòng B

Ma trận vòng **B** là ma trận có $(n-d+1)$ hàng và n cột với phần tử b_{ij} được xác định như sau:

$$\begin{cases} b_{ij} = 1 \text{ nếu nhánh } j \text{ thuộc vòng chính } i \text{ và cùng chiều} \\ \quad \text{với chiều của vòng chính } i \\ b_{ij} = -1 \text{ nếu nhánh } j \text{ thuộc vòng chính } i \text{ và ngược chiều} \\ \quad \text{với chiều của vòng chính } i \\ b_{ij} = 0 \text{ nếu nhánh } j \text{ không thuộc vòng chính } i \end{cases}$$

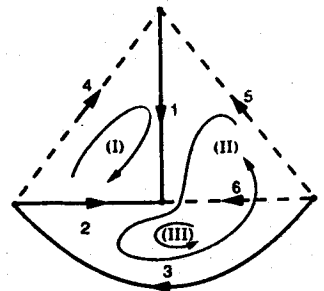
Mỗi cột ứng với một nhánh, còn mỗi hàng ứng với một vòng chính. Số cột bằng số nhánh, số hàng bằng số vòng chính tức số bù cành.

Cũng giống như ở ma trận tập cắt **Q**, đối với ma trận vòng **B** để tiện lợi cũng đánh số thứ tự các cành của cây trước, kể đó mới đến các bù cành.

Ví dụ: Xét graph H.3.141 với cây (1,2,3) mà ta vẽ lại ở H.3.142, ứng với ba bù cành 4, 5, 6 ta có ba vòng chính:

- vòng chính I là (4,1,2);
- vòng chính II là (5,1,2,3);
- vòng chính III là (6,2,3).

Chiều của một vòng chính là chiều của bù cành ứng với vòng chính đó (chiều của các vòng chính như trên hình vẽ).



Hình 3.142

Dựa vào định nghĩa, ta lập được ma trận vòng **B** như sau:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{vòng chính I (4,12)} \\ \leftarrow \text{vòng chính II (5,1,2,3)} \\ \leftarrow \text{vòng chính III (6,2,3)} \end{array} \quad (3.104)$$

$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$
 Nhánh 1 2 3 4 5 6
 cành bù cành

Nhận xét rằng với cách đánh số thứ tự các cành trước, ma trận vòng $\mathbf{B}$ có thể được phân hoạch theo các cành và bù cành dưới dạng:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_c \mathbf{1}_b] \quad (3.105)$$

trong đó $\mathbf{1}_b$ là ma trận đơn vị bậc $(n-d+1)$ bằng số bù cành, $\mathbf{B}_c$ là ma trận con có số hàng bằng $(n-d+1)$, số cột bằng số cành tức $(d-1)$.

Ở ví dụ trên thì $\mathbf{1}_b$ là ma trận đơn vị bậc 3:

$$\text{và } \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{vòng chính I} \\ \leftarrow \text{vòng chính II} \\ \leftarrow \text{vòng chính III} \end{array} \quad (3.106)$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{cành } 1 & 2 & 3 \end{array}$

Nhận xét giữa hai ma trận $\mathbf{Q}_b$ và $\mathbf{B}_c$ có quan hệ:

$$\mathbf{B}_c = -\mathbf{Q}_b^T \quad (3.107a)$$

$$\text{hay } \mathbf{Q}_b = -\mathbf{B}_c^T \quad (3.107b)$$

Quan hệ này cũng đúng trong trường hợp tổng quát.

Từ định nghĩa của ma trận vòng $\mathbf{B}$ suy ra hệ đủ phương trình độc lập K2 viết cho $(n-d+1)$ vòng chính có thể viết ở dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{B} \mathbf{u}_n = 0 \quad (3.108)$$

trong đó $\mathbf{u}_n = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$ là ma trận cột các áp nhánh.

Ví dụ: với graph H.3.142 và $\mathbf{B}$ cho bởi biểu thức (3.104) ta có:

$$\mathbf{B} \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 + u_4 \\ u_1 - u_2 - u_3 + u_5 \\ -u_2 - u_3 + u_6 \end{bmatrix}$$

$$\text{do đó: } \mathbf{B}\mathbf{u}_n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 + u_4 = 0 & \leftarrow \text{K2 viết cho vòng chính I} \\ u_1 - u_2 - u_3 + u_5 = 0 & \leftarrow \text{K2 viết cho vòng chính II} \\ -u_2 - u_3 + u_6 = 0 & \leftarrow \text{K2 viết cho vòng chính III} \end{cases}$$

Cũng với các đánh số thứ tự các cạnh trước, ma trận áp nhánh $\mathbf{u}_n$ được phân hoạch dưới dạng sau:

$$\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

trong đó $\mathbf{u}_c$ là ma trận con áp cạnh, $\mathbf{u}_b$ là ma trận con áp bù cạnh; cả hai là ma trận cột.

Thay (3.105) và (3.109) vào (3.108) ta được:

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}_c \mathbf{1}_b] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = 0 &\Rightarrow \mathbf{B}_c \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_b = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{u}_b = -\mathbf{B}_c \mathbf{u}_c \end{aligned} \quad (3.110)$$

Vậy từ định luật K2 suy ra các áp bù cạnh có thể biểu diễn theo các áp cạnh ở dạng ma trận như (3.110).

Ví dụ với graph đã chọn cây như H.3.142 thì:

$$\mathbf{u}_c = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_b = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{B}_c \text{ cho bởi (3.106)}$$

Theo (3.110) ta được:

$$\begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_4 = -u_1 + u_2 \\ u_5 = -u_1 + u_2 + u_3 \\ u_6 = u_2 + u_3 \end{cases}$$

4- Ma trận mắt lưới $\mathbf{M}$ của graph phẳng

Xét một graph phẳng được vẽ trên một mặt phẳng như H.3.143a gồm ba mắt lưới (1,2,4), (1,5,6) và (2,3,6). Vòng ngoài cùng (3,4,5) được gọi là *mắt lưới ngoài (outer mesh)*.

Cũng với graph phẳng trên nhưng nếu vẽ lại như H.3.143b thì (3,4,5) trở thành mắt lưới, còn (2,3,6) trở thành mắt lưới ngoài.

Cũng có nhận xét tương tự khi graph phẳng được vẽ lại như H.3.143c và H.3.143d.

Với một graph phẳng có d nút, n nhánh ta định nghĩa được $(n-d+1)$ mắt lưới, do đó cũng có thể định nghĩa ma trận mắt lưới $\mathbf{M}$ như sau:

Ma trận $\mathbf{M}$ có $(n-d+1)$ hàng và n cột với phần tử m_{ij} được xác định như

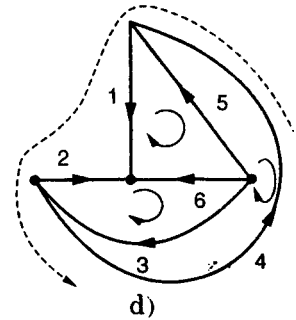
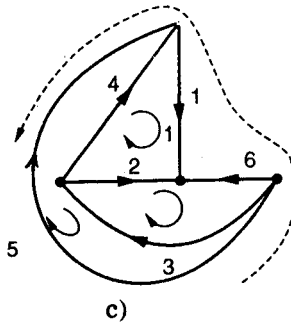
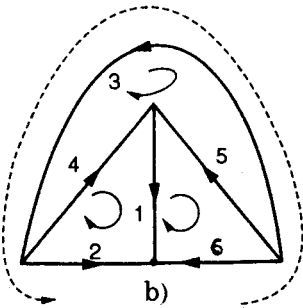
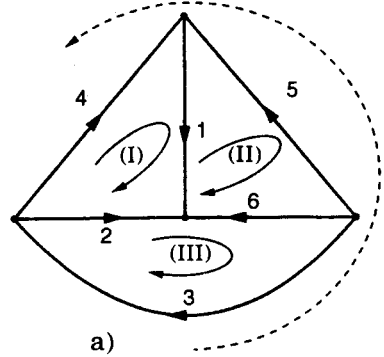
sau:

$$\begin{cases} m_{ij} = 1 \text{ nếu nhánh } j \text{ thuộc mắt lưới thứ } i \text{ và cùng chiều} \\ \text{với chiều của mắt lưới } i \\ m_{ij} = -1 \text{ nếu nhánh } j \text{ thuộc mắt lưới thứ } i \text{ và ngược chiều} \\ \text{với chiều của mắt lưới } i \\ m_{ij} = 0 \text{ nếu nhánh } j \text{ không thuộc mắt lưới } i \end{cases}$$

Mỗi cột ứng với một nhánh, còn mỗi hàng ứng với một mắt lưới.

Chiều của mỗi mắt lưới về nguyên tắc có thể chọn tùy ý, tuy nhiên để đơn giản ta quy ước chọn chiều của tất cả mắt lưới là như nhau (cùng chiều với nhau).

Nếu ma trận mắt lưới được viết thêm cho mắt lưới ngoài (nghĩa là có n cột và $n-d+2$ hàng) thì được ký hiệu là ma trận M' .



Hình 3.143

Ta quy ước chọn chiều của mắt lưới ngoài ngược với chiều của các mắt lưới (trong).

Ví dụ: nếu chọn chiều các mắt lưới là cùng chiều kim đồng hồ, còn chiều của mắt lưới ngoài là ngược chiều kim đồng hồ thì theo định nghĩa ta lập được ma trận M' của các graph phẳng H.3.143a, b, c, d như sau:

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{mắt lưới (1,2,4)} \\ \leftarrow \text{mắt lưới (1,5,6)} \\ \leftarrow \text{mắt lưới (2,6,3)} \\ \leftarrow \text{mắt lưới (3,5,4)} \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 Nhánh 1 2 3 4 5 6

Trong số bốn mắt lưới trên thì có một cái là mắt lưới ngoài, tùy theo cách vẽ graph lên trên mặt phẳng. Ví dụ ở H.3.143a thì (3,4,5) là mắt lưới ngoài, ở H.3.143b thì (2,6,3) là mắt lưới ngoài, v.v..

Nhận xét rằng tổng các phần tử trên mỗi cột của ma trận M' luôn bằng không. Đó là vì mỗi nhánh đều thuộc về hai mắt lưới (trong) hoặc một mắt lưới (trong) và mắt lưới ngoài, và nếu chiều của nhánh cùng chiều với mắt lưới này thì sẽ ngược chiều với mắt lưới kia.

Nếu xóa bất kỳ một hàng nào của ma trận M' thì sẽ được ma trận mắt lưới M với mắt lưới ngoài là mắt lưới ứng với hàng bị xóa. Ví dụ nếu chọn (3,5,4) là mắt lưới ngoài tức ứng với H.3.143a thì trong M' xóa đi hàng thứ bốn ta sẽ được ma trận mắt lưới M của H.3.143a:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{mắt lưới (1,2,4)} \\ \leftarrow \text{mắt lưới (1,5,6)} \\ \leftarrow \text{mắt lưới (2,6,3)} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Nhánh} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \quad (3.111)$$

Tương tự nếu trong M' xóa đi hàng thứ nhất thì sẽ được ma trận mắt lưới M của H.3.143d với (1,2,4) là mắt lưới ngoài, còn nếu xóa đi hàng 2 của M' thì sẽ được ma trận mắt lưới của H.3.143c với (1,5,6) là mắt lưới ngoài, v.v..

Từ định nghĩa của ma trận mắt lưới M , suy ra hệ đủ phương trình độc lập K2 viết cho $(n-d+1)$ mắt lưới có thể viết ở dạng ma trận như sau;

$$Mu_n = 0 \quad (3.112)$$

trong đó $u_n = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$ là ma trận áp nhánh.

Ví dụ: với graph H.3.143a và M cho bởi biểu thức (3.111) ta có:

$$Mu_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 + u_4 \\ -u_1 - u_5 + u_6 \\ u_2 + u_3 - u_6 \end{bmatrix}$$

$$\text{do đó: } Mu_n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 + u_4 = 0 & \leftarrow \text{K2 viết cho mắt lưới (1,2,4)} \\ -u_1 - u_5 + u_6 = 0 & \leftarrow \text{K2 viết cho mắt lưới (1,5,6)} \\ u_2 + u_3 - u_6 = 0 & \leftarrow \text{K2 viết cho mắt lưới (2,6,3)} \end{cases}$$

• Trong phần xét về ma trận nút A , đối với mỗi nút có thể được gán cho một biến gọi là thế (nút) với quy ước thế của nút gốc bằng không và

điện áp u_l của nhánh l nối từ nút i đến nút j bằng $\varphi_i - \varphi_j$. Một cách tương tự, đối với mỗi mắt lưới thứ k của một graph phẳng có thể gán cho một biến (không có ý nghĩa vật lý) gọi là dòng điện mắt lưới (mesh current) ký hiệu là i_{mk} , với quy ước như sau: dòng mắt lưới ngoài bằng không, và dòng điện i_l chảy trên nhánh thứ l chung cho hai mắt lưới thứ i và j bằng tổng đại số hai dòng mắt lưới do:

$$i_l = +i_{m1} - i_{m2}$$

trong đó lấy dấu + nếu chiều nhánh l (tức chiều dương của i_l) cùng chiều với chiều của mắt lưới, lấy dấu - trong trường hợp ngược lại.

Ví dụ: xét graph phẳng H.3.143a với mắt lưới I (1,2,4) ta gán cho dòng điện mắt lưới i_{m1} , mắt lưới II (1,5,6) được gán dòng mắt lưới i_{m2} và mắt lưới III (2,6,3) được gán dòng mắt lưới i_{m3} .

Nhánh 1 là nhánh chung của hai mắt lưới I và II trong đó nhánh 1 cùng chiều với chiều mắt lưới I và ngược chiều với chiều mắt lưới II do đó:

$$i_1 = i_{m1} - i_{m2}$$

một cách tương tự ta có: $i_2 = i_{m3} - i_{m1}$

$$i_6 = i_{m2} - i_{m3}$$

Nhánh 3 chung cho mắt lưới III và mắt lưới ngoài trong đó nhánh 3 cùng chiều với chiều mắt lưới III còn dòng điện mắt lưới ngoài theo quy ước bằng không nên:

$$i_3 = i_{m3}$$

tương tự ta được $i_4 = i_{m1}$

$$i_5 = -i_{m2}$$

sáu phương trình trên có thể được viết lại ở dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^T \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \end{bmatrix}$$

trong đó $\mathbf{M}^T$ là ma trận chuyển vị của ma trận mắt lưới $\mathbf{M}$ cho bởi (3.111).

Tổng quát nếu đặt: $\mathbf{i}_{m1} = [i_{m1} \ i_{m2} \ \dots \ i_{m, n-d+1}]^T$ là ma trận cột $(n-d+1)$ hàng mà các phần tử là các dòng điện mắt lưới, thì ta có quan hệ:

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{M}^T \mathbf{i}_m \quad (3.113)$$

3.7.4 Quan hệ giữa các ma trận tô pô

Định lý 1: Nếu ma trận vòng $\mathbf{B}$ và ma trận tập cắt $\mathbf{Q}$ được xây dựng đối với cùng một cây của một graph thì:

$$\mathbf{QB}^T = 0 \text{ hoặc } \mathbf{BQ}^T = 0 \quad (3.114)$$

Chứng minh: Gọi n là số nhánh, d là số đỉnh. Số tập cắt chính bằng số cạnh $d-1$; số vòng chính bằng số bù cạnh $n-d+1$. Ma trận $\mathbf{Q}$ có $(d-1)$ hàng và n cột; ma trận $\mathbf{B}$ có $(n-d+1)$ hàng và n cột.

Đặt $\mathbf{S} = \mathbf{QB}^T \Rightarrow$ phần tử của ma trận $\mathbf{S}$ là:

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^n q_{ik} b_{jk} \quad (3.115)$$

trong đó:

$$i = 1 + (d-1)$$

$$j = 1 + (n-d+1)$$

q_{ik} là phần tử của $\mathbf{Q}$ ứng với tập cắt chính thứ i (của cạnh m) và nhánh k .

b_{jk} là phần tử của $\mathbf{B}$ ứng với vòng chính thứ j (của bù cạnh p) và nhánh k .

Vì vậy tích $q_{ik} b_{jk}$ trong tổng (3.115) chỉ khác không khi nhánh k là nhánh chung của tập cắt chính i và vòng chính j . Nếu nhánh chung là cạnh thì nó phải là cạnh m (bởi vì tập cắt chính i chỉ chứa một cạnh duy nhất là cạnh m , còn ngoài ra là các bù cạnh), còn nếu nhánh chung là bù cạnh thì nó phải là bù cạnh p (bởi vì vòng chính j chỉ chứa một bù cạnh duy nhất là bù cạnh p , còn ngoài ra là các cạnh). Mặt khác nếu tập cắt chính i chứa bù cạnh p (tức là mặt kín S_i cắt bù cạnh p) thì vòng chính j (ứng với bù cạnh p) sẽ chứa cạnh m (ứng với tập cắt chính i), ngược lại nếu vòng chính j chứa cạnh m thì tập cắt chính i sẽ chứa bù cạnh p .

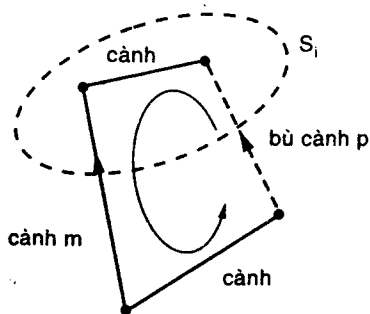
Tóm lại giữa tập cắt chính i và vòng chính j có hai trường hợp xảy ra:

- Không có nhánh chung nào, khi đó

$$s_{ij} = 0$$

- Có hai nhánh chung là cạnh m và bù cạnh p , khi đó

$$s_{ij} = q_{im} b_{jm} + q_{ip} b_{jp} = b_{jm} + q_{ip}$$



Hình 3.144

vì $q_{im} = 1, b_{jp} = 1$

Có thể nghiệm lại rằng với bất kỳ chiều nào của cạnh m , bù cạnh p ta đều có $b_{jm} + q_{ip} = 0$. Ví dụ, với chiều như ở H.3.144 thì nhánh m ngược chiều với chiều vòng chính j nên $b_{jm} = -1$ còn nhánh p cùng chiều với chiều tập cắt chính i (nhánh p cũng đi vào S_i như là cạnh m) nên $q_{ip} = 1$, do đó

$$s_{ij} = b_{jm} + q_{ip} = 0$$

Vậy trong cả hai trường hợp đều có $s_{ij} = 0$. Do đó:

$$\mathbf{S} = \mathbf{QB}^T = 0 \Rightarrow (\mathbf{QB}^T)^T = \mathbf{BQ}^T = 0$$

Hệ quả: Nếu đánh số thứ tự các cạnh trước để cho $\mathbf{B}$ và $\mathbf{Q}$ được phân hoạch ở dạng $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_c \mathbf{1}_b]$ và $\mathbf{Q} = [\mathbf{1}_c^T \mathbf{Q}_b^T]$ thì:

$$\mathbf{B}_c = -\mathbf{Q}_b^T \text{ hoặc } \mathbf{Q}_b = -\mathbf{B}_c^T \quad (3.107)$$

$$\text{Thật vậy } \mathbf{QB}^T = [\mathbf{1}_c^T \mathbf{Q}_b^T] \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c^T \\ \mathbf{1}_b \end{bmatrix} = \mathbf{B}_c^T + \mathbf{Q}_b = 0 \Rightarrow \mathbf{Q}_b = -\mathbf{B}_c^T$$

$$\Rightarrow \mathbf{Q}_b^T = (-\mathbf{B}_c^T)^T \Rightarrow \mathbf{B}_c = -\mathbf{Q}_b^T$$

Định lý 2: Nếu các ma trận $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$ được xây dựng cho cùng một graph thì:

$$\mathbf{AB}^T = 0 \text{ hoặc } \mathbf{BA}^T = 0 \quad (3.116)$$

$$\text{Chứng minh: Đặt } \mathbf{S} = \mathbf{AB}^T \Rightarrow s_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{jk}$$

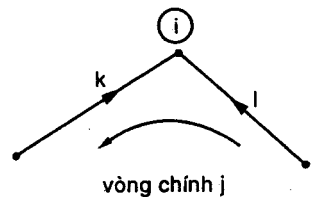
a_{ik} là phần tử của $\mathbf{A}$ ứng với nút i và nhánh k , b_{jk} là phần tử của $\mathbf{B}$ ứng với vòng chính j và nhánh k . Do đó $a_{ik} b_{jk}$ chỉ khác không khi nhánh k nối với nút i và thuộc vòng chính j . Mặt khác nhận xét rằng nếu vòng j chứa nhánh k nối với nút i thì nó phải chứa thêm một nhánh l ($l \neq k$) nữa cũng nối với nút i .

Vậy có hai trường hợp:

- Không có nhánh nào nối với nút i và thuộc vòng chính j , khi ấy $s_{ij} = 0$
- Có hai nhánh k và l nối với nút i và thuộc vòng j

$$s_{ij} = a_{ik} b_{jk} + a_{il} b_{jl} \quad (*)$$

Có thể nghiệm lại rằng với bất kỳ chiều nào của các nhánh k , nhánh l , vòng chính j ta đều có tổng (*) bằng không. Ví dụ với chiều như H.3.145



Hình 3.145

ta có

$$a_{ik} = -1, a_{il} = -1, b_{jk} = -1, b_{jl} = 1 \text{ nên suy ra } s_{ij} = 0.$$

Tóm lại, trong cả hai trường hợp ta đều có $s_{ij} = 0$

$$\Rightarrow \mathbf{S} = \mathbf{AB}^T = 0$$

$$\Rightarrow (\mathbf{AB}^T)^T = \mathbf{BA}^T = 0$$

Hệ quả: Nếu đánh số thứ tự các cạnh trước để cho $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$ có dạng $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_c \mathbf{A}_b]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_c \mathbf{1}_b]$, $\mathbf{Q} = [1_c \mathbf{Q}_b]$ thì:

$$\mathbf{Q}_b = -\mathbf{B}_c^T = \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{A}_b \quad (3.117)$$

trong đó $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{A}_b$ là các ma trận con của $\mathbf{A}$ ứng với các cạnh và các bù cạnh.

Thật vậy, từ (3.116) suy ra:

$$\mathbf{AB}^T = [\mathbf{A}_c \mathbf{A}_b] \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c^T \\ \mathbf{1}_b \end{bmatrix} = \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c^T + \mathbf{A}_b = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c^T = -\mathbf{A}_b \Rightarrow \mathbf{B}_c^T = -\mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{A}_b$$

Vậy nếu biết ma trận $\mathbf{A}$ thì có thể suy ra các ma trận $\mathbf{Q}$ và $\mathbf{B}$

Định lý 3: Nếu các ma trận $\mathbf{A}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}$ được xây dựng cho cùng một graph phẳng thì:

$$\mathbf{AM}^T = 0 \text{ hoặc } \mathbf{MA}^T = 0 \quad (3.118)$$

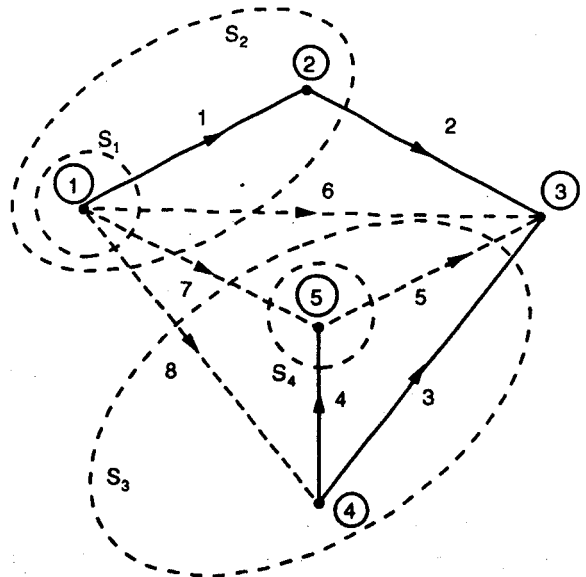
$$\mathbf{QM}^T = 0 \text{ hoặc } \mathbf{MQ}^T = 0 \quad (3.119)$$

Cách chứng minh giống như đối với các quan hệ (3.114) và (3.116)

Ví dụ: Xét graph định hướng như H.3.146 có năm nút và tám nhánh.

Cây được chọn như hình vẽ với các cạnh được đánh số thứ tự trước: cây (1,2,3,4) và bù cây (5,6,7,8).

Có bốn vòng chính ứng với bốn bù cạnh là: (5,3,4), (6,2,1), (7,4,3,2,1) và (8,3,2,1). Ma trận vòng $\mathbf{B}$ là:



Hình 3.146

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{vòng chính (5,3,4)} \\ \leftarrow \text{vòng chính (6,2,1)} \\ \leftarrow \text{vòng chính (7,4,3,2,1)} \\ \leftarrow \text{vòng chính (8,3,2,1)} \end{array}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

Nhánh $\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}_{\text{cành}} \quad \underbrace{5 \quad 6 \quad 7 \quad 8}_{\text{bù cành}}$ (3.120)

$\mathbf{B}$ có dạng $[\mathbf{B}_c \quad \mathbf{1}_b]$ với: $\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Có bốn tập cắt chính ứng với bốn cành là: (1,6,7,8), (2,6,7,8), (3,5,7,8) và (4,5,7). Ma trận tập cắt $\mathbf{Q}$ là:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{tập cắt chính (1,6,7,8)} \\ \leftarrow \text{tập cắt chính (2,6,7,8)} \\ \leftarrow \text{tập cắt chính (3,5,7,8)} \\ \leftarrow \text{tập cắt chính (4,5,7)} \end{array}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

Nhánh $\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}_{\text{cành}} \quad \underbrace{5 \quad 6 \quad 7 \quad 8}_{\text{bù cành}}$ (3.121)

$\mathbf{Q}$ có dạng $[\mathbf{1}_c \quad \mathbf{Q}_b]$ với $\mathbf{Q}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Có thể nghiệm lại rằng $\mathbf{QB}^T = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}_b = -\mathbf{B}_c^T$.

Ma trận nút $\mathbf{A}$, với nút ⑤ được chọn làm nút gốc, như sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & : & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{nút (1)} \\ \leftarrow \text{nút (2)} \\ \leftarrow \text{nút (3)} \\ \leftarrow \text{nút (4)} \end{array}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

Nhánh $\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}_{\text{cành}} \quad \underbrace{5 \quad 6 \quad 7 \quad 8}_{\text{bù cành}}$ (3.122)

$\mathbf{A}$ có thể phân hoạch ở dạng $[\mathbf{A}_c \mathbf{A}_b]$ với:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ma trận con $\mathbf{A}_c$ có nghịch đảo là $\mathbf{A}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

có thể nghiệm lại các quan hệ $\mathbf{AB}^T = 0$ và $\mathbf{Q}_b = \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{A}_b$.

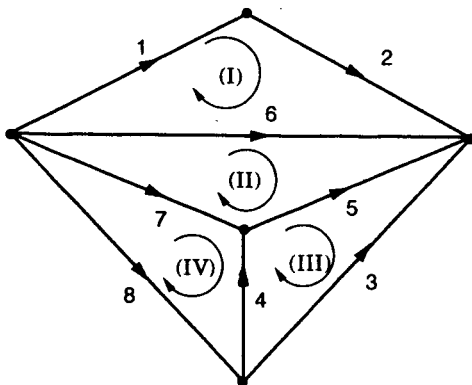
Graph là graph phẳng nên có thể định nghĩa các mắt lưới I(1,2,6), II(6,5,7), III(5,3,4), IV(7,4,8) như H.3.147. Ma trận $\mathbf{M}$ như sau:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{mắt lưới (1,2,6)} \\ \leftarrow \text{mắt lưới (6,5,7)} \\ \leftarrow \text{mắt lưới (5,3,4)} \\ \leftarrow \text{mắt lưới (7,4,8)} \end{matrix}$$

$\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$
 Nhánh 1 2 3 4 5 6 7 8

(3.123)

Có thể nghiệm lại các quan hệ $\mathbf{AM}^T = 0$ và $\mathbf{QM}^T = 0$



Hình 3.147

3.7.5 Các định luật Kirchhoff dạng ma trận

1- Định luật Kirchhoff 1 dạng ma trận

Hệ đủ phương trình độc lập K1 viết cho các nút, theo (3.95) là:

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_n = 0 \quad (3.95)$$

Hệ đủ phương trình độc lập K1 viết cho các tập cắt chính, theo (3.101)

là:

$$\underline{\mathbf{Q}}\mathbf{i}_n = 0 \quad (3.101)$$

(3.101) có thể viết ở dạng:

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_b \quad (3.124)$$

Thật vậy theo (3.103), từ (3.101) suy ra:

$$\mathbf{i}_c = -\mathbf{Q}_b \mathbf{i}_b \quad (3.103)$$

theo (3.107b) thì $\mathbf{Q}_b = -\mathbf{B}_c^T$ nên $\mathbf{i}_c = \mathbf{B}_c^T \mathbf{i}_b$

$$\text{do đó } \mathbf{i}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{i}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c^T \mathbf{i}_b \\ \mathbf{i}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c^T \\ \mathbf{1}_b \end{bmatrix} \mathbf{i}_b = [\mathbf{B}_c \mathbf{1}_b]^T \mathbf{i}_b = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_b$$

Đối với graph phẳng, theo (3.113) có thể biểu diễn các dòng điện trong các nhánh theo các biến dòng mắt lưới:

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{M}^T \mathbf{i}_m \quad (3.113)$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{i}_n = \mathbf{A}\mathbf{M}^T \mathbf{i}_m = 0 \text{ vì } \mathbf{A}\mathbf{M}^T = 0$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{i}_n = \mathbf{Q}\mathbf{M}^T \mathbf{i}_m = 0 \text{ vì } \mathbf{Q}\mathbf{M}^T = 0$$

Vậy đối với graph phẳng, nếu với mỗi mắt lưới ta gán cho một biến gọi là dòng mắt lưới và biểu diễn các dòng nhánh theo các dòng mắt lưới bởi (3.113) thì các dòng nhánh sẽ tự động thỏa định luật Kirchhoff 1.

2- Định luật Kirchhoff 2 dạng ma trận

Hệ đủ phương trình độc lập K2 viết cho các vòng chính, theo (3.108)

là:

$$\underline{\mathbf{B}}\mathbf{u}_n = 0 \quad (3.108)$$

(3.108) có thể viết ở dạng:

$$\underline{\mathbf{u}}_n = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}_c \quad (3.125)$$

Thật vậy theo (3.110), từ (3.108) suy ra được:

$$\mathbf{u}_b = -\mathbf{B}_c \mathbf{u}_c \quad (3.110)$$

theo (3.107a) thì $\mathbf{B}_c = -\mathbf{Q}_b^T$ nên $\mathbf{u}_b = \mathbf{Q}_b^T \mathbf{u}_c$

$$\text{do đó } \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{Q}_b^T \mathbf{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_c \\ \mathbf{Q}_b^T \end{bmatrix} \mathbf{u}_c = [\mathbf{1}_c \mathbf{Q}_b]^T \mathbf{u}_c = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}_c$$

Theo (3.97) ta có:

$$\underline{\mathbf{u}}_n = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} \quad (3.97)$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{u}_n = \mathbf{B}\mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ vì } \mathbf{B}\mathbf{A}^T = 0$$

Vậy nếu với mỗi nút ta gán cho một biến gọi là thế nút và biểu diễn các áp nhánh theo các thế nút bởi (3.97) thì các áp nhánh sẽ tự động thỏa định luật Kirchhoff 2.

Đối với graph phẳng, theo (3.112) hệ đủ phương trình độc lập K2 viết cho các mắt lưới là:

$$\mathbf{Mu}_n = 0 \quad (3.112)$$

Ví dụ 3.46: Xét lại graph với cây đã chọn như H.3.146. Các ma trận $\mathbf{B}$ và $\mathbf{Q}$ cho bởi các biểu thức (3.120), (3.121).

$$\begin{aligned} \text{Ta có:} \quad \mathbf{i}_n &= [i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ i_5 \ i_6 \ i_7 \ i_8]^T \\ \mathbf{i}_b &= [i_5 \ i_6 \ i_7 \ i_8]^T \end{aligned}$$

do đó:

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ \dots \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \dots & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i_1 = -i_6 - i_7 - i_8 \leftarrow \text{K1 viết cho tập cắt } (1, 6, 7, 8) \\ i_2 = -i_6 - i_7 - i_8 \leftarrow \text{K1 viết cho tập cắt } (2, 6, 7, 8) \\ i_3 = -i_5 + i_7 + i_8 \leftarrow \text{K1 viết cho tập cắt } (3, 5, 7, 8) \\ i_4 = i_5 - i_7 \leftarrow \text{K1 viết cho tập cắt } (4, 5, 7) \end{cases}$$

Ta có: $\mathbf{u}_n = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8]^T$ và $\mathbf{u}_c = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$ do đó:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}_c \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \dots \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_5 = u_3 - u_4 & \leftarrow \text{K2 cho vòng (5,3,4)} \\ u_6 = u_1 + u_2 & \leftarrow \text{K2 cho vòng (6,2,1)} \\ u_7 = u_1 + u_2 - u_3 + u_4 & \leftarrow \text{K2 cho vòng (7,4,3,2,1)} \\ u_8 = u_1 + u_2 - u_3 & \leftarrow \text{K2 cho vòng (8,3,2,1)} \end{cases}$$

3.7.6 Đối ngẫu

1- Graph đối ngẫu

Xét hai graph phẳng. Nếu tồn tại cách chọn nút gốc, mắt lưới ngoài (outer mesh) thích hợp và cách đánh số các nút, các nhánh, các mắt lưới thích hợp sao cho ma trận nút của graph phẳng này bằng ma trận mắt lưới của graph phẳng kia và ngược lại:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{M}_2 \quad (3.126)$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{A}_2$$

thì ta nói hai graph phẳng trên đối ngẫu với nhau.

Từ (3.126) ta rút ra các nhận xét:

- Hai graph đối ngẫu có số nhánh bằng nhau là n .
- Nếu gọi d_1, d_2 là số nút của graph 1, graph 2 thì:

$$d_1 - 1 = \text{số mắt lưới } L_2 \text{ của graph 2} = n - d_2 + 1 \quad (3.127a)$$

$$d_2 - 1 = \text{số mắt lưới } L_1 \text{ của graph 1} = n - d_1 + 1 \quad (3.127b)$$

- Nút gốc của graph này thì tương ứng với mắt lưới ngoài của graph kia, và ngược lại.

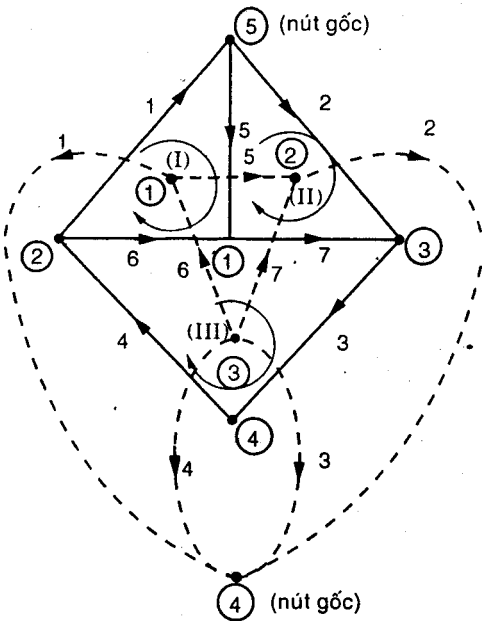
- Nút thứ k của graph này thì tương ứng với mắt lưới thứ k của graph kia và ngược lại. Số nhánh nối với nút thứ k của graph này thì bằng số nhánh thuộc mắt lưới k của graph kia và ngược lại.

Nếu ở graph này, nhánh thứ i nối với nút k và đi ra khỏi (đi vào) nút k thì ở graph kia nhánh thứ i cũng thuộc mắt lưới k và cùng chiều (ngược chiều) với mắt lưới k và ngược lại.

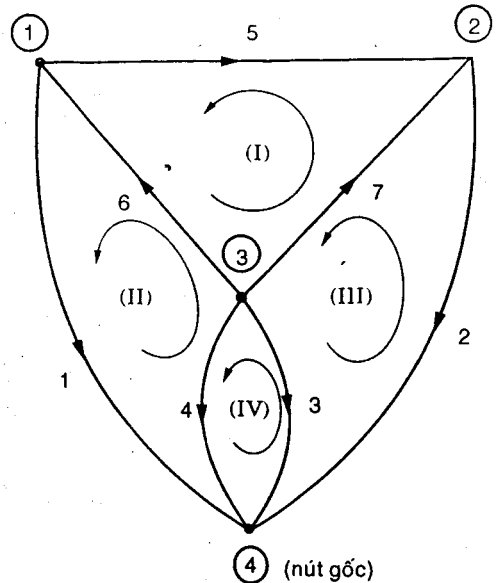
Từ các nhận xét trên có thể suy ra cách thành lập graph đối ngẫu với một graph phẳng cho trước theo cách thức sau đây:

- Đặt trong mỗi mắt lưới của graph ban đầu một đỉnh; ở bên ngoài graph ban đầu ta cũng đặt một đỉnh (đỉnh này là nút gốc của graph đối ngẫu tương ứng với mắt lưới ngoài của graph ban đầu)
 - Nối từng cặp đỉnh mới bởi các nhánh sao cho mỗi nhánh đó đều cắt nhánh của graph ban đầu.
 - Định hướng của graph đối ngẫu theo cách: nếu nhánh của graph ban đầu cùng chiều với chiều mắt lưới thì nhánh đối ngẫu hướng ra khỏi đỉnh đối ngẫu, nếu ngược chiều thì hướng vào.
- (3.128)

Ví dụ, ta xây dựng graph đối ngẫu cho graph H.3.148. Trên đó các đường chấm chấm là graph đối ngẫu được xây dựng theo quy tắc trên. H.3.149 là graph đối ngẫu được vẽ tách riêng. Nhận xét rằng hai nhánh 3 và 4 mắc nối tiếp trong graph ban đầu, còn ở graph đối ngẫu hai nhánh 3 và 4 trở thành mắc song song với nhau.



Hình 3.148



Hình 3.149

Gọi A_1 , M_1 là ma trận nút, ma trận mắt lưới của graph H.3.148

A_2 , M_2 là ma trận nút, ma trận mắt lưới của graph H.3.149 đối ngẫu. Có thể nghiệm lại rằng:

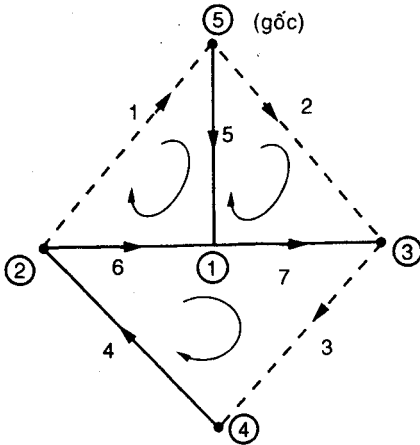
$$M_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.129a)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.129b)$$

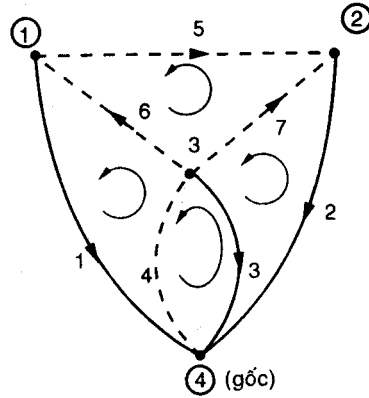
Giả sử ở graph H.3.148 ta chọn cây (4,5,6,7), bù cây (1,2,3) như H.3.150.

Các tập cắt chính là: (4,3), (5,2,1), (6,1,3), (7,2,3).

Các vòng chính là: (1,5,6), (2,7,5), (3,4,6,7).



Hình 3.150



Hình 3.151

Còn ở graph đối ngẫu H.3.151 thì (4,5,6,7) trở thành bù cây; (1,2,3) trở thành cây; (4,3), (5,2,1), (6,1,3), (7,2,3) trở thành vòng chính; (1,5,6), (2,7,5), (3,4,6,7) trở thành các tập cắt chính.

Tổng quát, một cây bất kỳ của graph ban đầu tương ứng với bù cây của graph đối ngẫu và ngược lại. Các tập cắt của graph ban đầu tương ứng với các vòng của graph đối ngẫu và ngược lại. Ma trận vòng của graph này bằng với ma trận tập cắt của graph kia và ngược lại:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

So sánh các phương trình K1 viết cho graph H.3.150 với các phương trình K2 viết cho graph đối ngẫu H.3.151 theo bảng sau đây:

Các định luật K1
viết cho graph H.3.150

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{i}_n = 0$$

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{i}_n = 0$$

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{B}_1^T \mathbf{i}_b$$

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{M}_1^T \mathbf{i}_m$$

 $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow$

Các định luật K2
viết cho graph H.3.151

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{u}_n = 0$$

$$\mathbf{B}_2 \mathbf{u}_n = 0$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{u}_c$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{A}_2^T \boldsymbol{\varphi}$$

Ta thấy rằng:

- Vì $\mathbf{A}_1 = \mathbf{M}_2$, $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{B}_2$ nên: nếu trong các phương trình K1 viết cho các nút (các tập cắt) ở graph ban đầu ta thay các dòng điện nhánh bởi các điện áp nhánh (thay $\mathbf{i}_n$ bởi $\mathbf{u}_n$) thì các phương trình này sẽ trở thành các phương trình K2 viết cho các mắt lưới (các vòng) ở graph đối ngẫu, và ngược lại.

- Vì $\mathbf{B}_1 = \mathbf{Q}_2$ nên nếu trong phương trình $\mathbf{i}_n = \mathbf{B}_1^T \mathbf{i}_b$ thay các dòng bù cành bởi các áp cành, các dòng cành bởi các áp bù cành ta được phương trình $\mathbf{u}_n = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{u}_c$.

- Vì $\mathbf{M}_1 = \mathbf{Q}_2$ nên nếu trong phương trình $\mathbf{i}_n = \mathbf{M}_1^T \mathbf{i}_m$ thay các dòng nhánh bởi các áp nhánh, thay các dòng mắt lưới bởi các thế nút ta được phương trình $\mathbf{u}_n = \mathbf{A}_2^T \boldsymbol{\varphi}$.

Các đại lượng, khái niệm sau đây là đối ngẫu với nhau:

điện áp	$\Leftrightarrow$	dòng điện	cây	$\Leftrightarrow$	bù cây
thế nút	$\Leftrightarrow$	dòng mắt lưới	cành	$\Leftrightarrow$	bù cành
dòng bù cành	$\Leftrightarrow$	áp cành	tập cắt	$\Leftrightarrow$	vòng
dòng cành	$\Leftrightarrow$	áp bù cành	ma trận tập cắt	$\Leftrightarrow$	ma trận vòng
định luật K1	$\Leftrightarrow$	định luật K2	ma trận nút	$\Leftrightarrow$	ma trận mắt lưới
nút gốc	$\Leftrightarrow$	mắt lưới ngoài	nối tiếp	$\Leftrightarrow$	song song
nút	$\Leftrightarrow$	mắt lưới	ngắn mạch	$\Leftrightarrow$	hở mạch
			(u = 0)		(i = 0)

2- Phân tử đối ngẫu

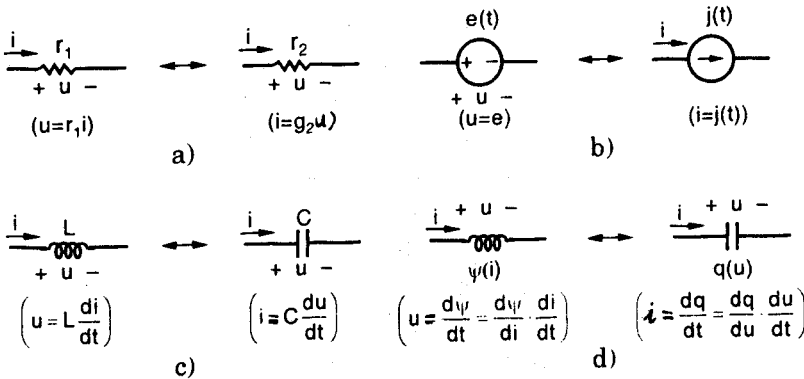
Hai phần tử hai cực được gọi là đối ngẫu với nhau nếu trong phương trình liên hệ giữa u và i của phần tử này ta thay u bởi i, i bởi u thì được phương trình liên hệ giữa i với u của phần tử kia và ngược lại.

- Hai phần tử điện trở r_1 và r_2 là đối ngẫu nhau nếu trị số của r_1 bằng trị số của $g_2 = \frac{1}{r_2}$ (ví dụ $r_1 = 5\Omega$ và $g_2 = \frac{1}{r_2} = 5S$). Thật vậy nếu trong

phương trình quan hệ $u = r_1 i$ của phần tử điện trở r_1 , thay u bởi i và i bởi u ta sẽ được $i = g_2 u$ (vì r_1 bằng với g_2 về trị số) là phương trình quan hệ của phần tử trở r_2 .

- Phần tử điện cảm L và phần tử điện dung C là đối ngẫu nếu trị số của L bằng trị số của C (ví dụ $L = 5H$, $C = 5F$). Thật vậy; phương trình của phần tử điện cảm là $u = L \frac{di}{dt}$. Thay u bởi i , i bởi u , vì $L = C$ (về trị số), nên sau khi thay sẽ được phương trình $i = C \frac{du}{dt}$ của phần tử điện dung.

Trường hợp tổng quát nếu phần tử điện cảm đặc trưng bởi đặc tuyến $\psi(i)$, còn phần tử điện dung đặc trưng bởi đặc tuyến $q(u)$ thì hai phần tử sẽ đối ngẫu nếu đặc tuyến $\psi(i)$ trùng với $q(u)$.



Hình 3.152

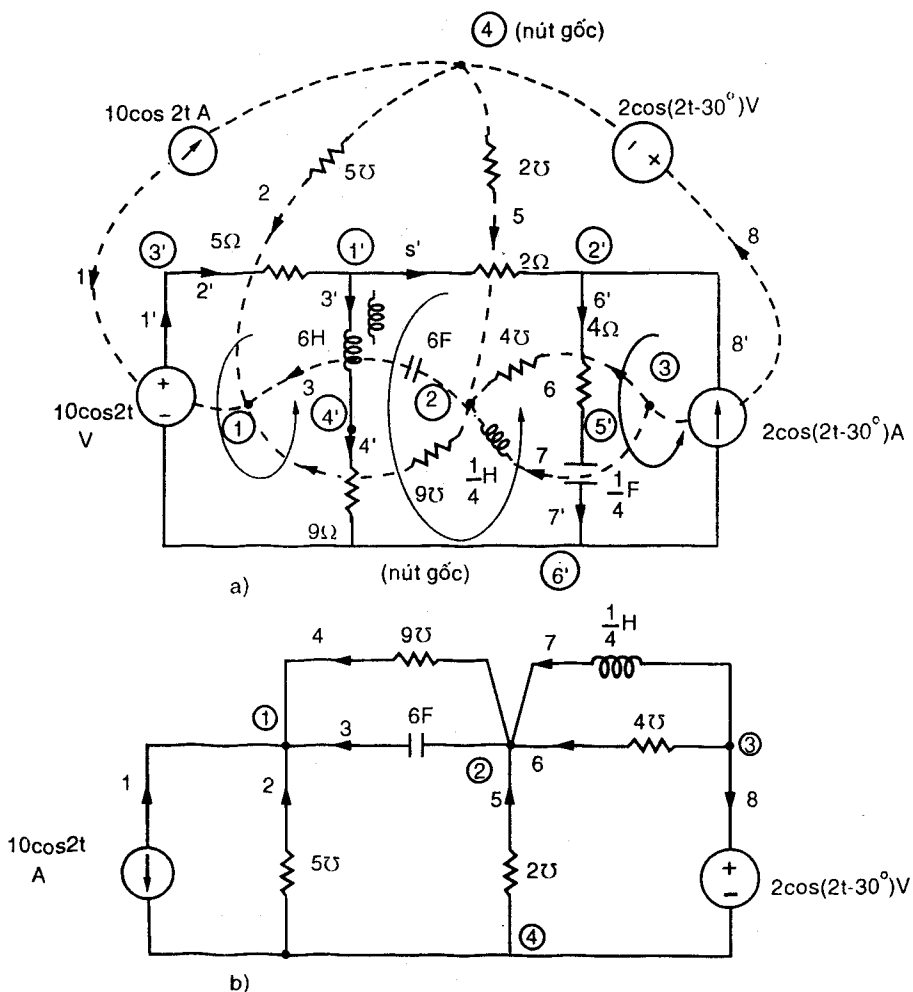
- Phần tử nguồn áp $e(t)$ và nguồn dòng $j(t)$ là đối ngẫu nếu trị số $e(t)$ bằng trị số của $j(t)$ (ví dụ $e = 5V$, $j = 5A$).

Như vậy ta có thêm một số đại lượng đối ngẫu nhau:

điện trở r	$\Leftrightarrow$	điện dẫn g
điện cảm L	$\Leftrightarrow$	điện dung C
từ thông φ	$\Leftrightarrow$	điện tích q
nguồn sdd e	$\Leftrightarrow$	nguồn dòng j
trở kháng Z	$\Leftrightarrow$	dẫn nạp Y

3- Mạch đối ngẫu

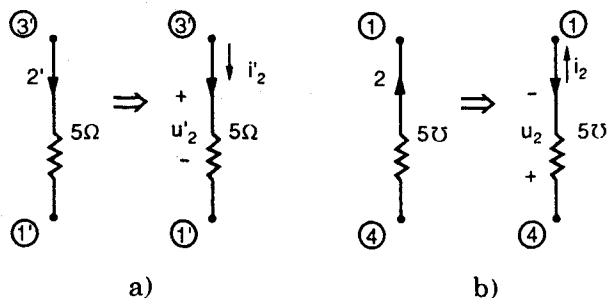
Hai mạch điện được gọi là đối ngẫu nếu graph của chúng đối ngẫu nhau và các nhánh tương ứng chứa các phần tử đối ngẫu nhau. Để xây dựng mạch điện đối ngẫu với một mạch điện cho trước, có thể đầu tiên xây dựng graph đối ngẫu, sau đó thay thế mỗi phần tử của mạch cho trước bởi phần tử đối ngẫu của nó.



Hình 3.153

Hình 3.153a trình bày một mạch điện và cách xây dựng mạch đối ngẫu với nó (mà sau đó được vẽ lại riêng ra trên H.3.153b). Chiều dương của dòng điện, điện áp trên mỗi nhánh được chọn theo cách minh họa bởi H.3.154a,b.

Ta chú ý cách xác định chiều của nguồn dòng đối ngẫu và cực tính của nguồn áp đối ngẫu. Ở mạch H.3.153a trong nhánh 1' ta có $u'_1 = -10 \cos 2t$ V và trong nhánh 8' ta có: $i'_8 = 2 \cos (2t-30^\circ)$ A, do đó ở mạch



Hình 3.154

đối ngẫu H.3.153b ta phải có $i_1 = 10 \cos 2t$ A và $u_8 = 2 \cos (2t - 30^\circ)$ V. Vì vậy, nguồn trong nhánh 1 ngược chiều với chiều nhánh 1, và chiều nhánh 8 đâm vào cực + của nguồn áp trong nhánh 8 (theo quy ước ở H.3.154). Từ đó có thể suy ra quy tắc sau để xác định chiều của nguồn dòng đối ngẫu: “Nếu chiều của mắt lưới (có chứa nguồn áp) đi từ cực + đến cực - của nguồn áp trong mạch ban đầu thì ở mạch đối ngẫu nguồn dòng đối ngẫu có chiều hướng ra khỏi nút đối ngẫu và ngược lại”.

Cũng như quy tắc xác định cực tính của nguồn áp đối ngẫu:

Nếu chiều mắt lưới (có chứa nguồn dòng) cùng chiều với ^{chiều} của nguồn dòng trong mạch ban đầu thì ở mạch đối ngẫu cực tính + của nguồn áp đối ngẫu ở về phía nút đối ngẫu, và ngược lại.

Từ những trình bày về graph đối ngẫu (mục 1) và phần tử đối ngẫu (mục 2) ta thấy rằng nếu trong hệ phương trình mô tả mạch ban đầu (gồm các phương trình K1, K2, các phương trình liên hệ giữa dòng và áp trên một phần tử) ta thay các dòng điện bởi các điện áp tương ứng, thay các điện áp bởi các dòng điện tương ứng (ví dụ thay i'_1 bởi u_1 , u'_1 bởi i_1) thì sẽ được hệ phương trình mô tả mạch đối ngẫu. Từ đó suy ra nếu trong lời giải dòng áp của mạch ban đầu ta thay dòng bởi áp, áp bởi dòng như nói ở trên thì sẽ được ngay lời giải của mạch đối ngẫu.

Mạch H.3.153a	$\Leftrightarrow$	Mạch H.3.153b
$i'_1(t) = i'_2(t) = 0,59 \cos (2t + 47^\circ 33') \text{ A}$	$\Leftrightarrow$	$u_1(t) = u_2(t) = 0,59 \cos (2t + 47^\circ 33') \text{ V}$
$u'_3(t) = 6,636 \cos (2t + 21^\circ 19') \text{ V}$	$\Leftrightarrow$	$i_3(t) = 6,636 \cos (2t + 21^\circ 19') \text{ V}$
$u'_4(t) = 4,977 \cos (2t - 68^\circ 81') \text{ V}$	$\Leftrightarrow$	$i_4(t) = 4,977 \cos (2t - 68^\circ 81') \text{ A}$
$i'_5(t) = 0,97 \cos (2t + 78^\circ 11') \text{ A}$	$\Leftrightarrow$	$u_5(t) = 0,97 \cos (2t + 78^\circ 11') \text{ V}$
$i'_6(t) = i'_7(t) = 1,93 \cos (2t - 1^\circ 48') \text{ A}$	$\Leftrightarrow$	$u_6(t) = u_7(t) = 1,93 \cos (2t - 1^\circ 48') \text{ V}$

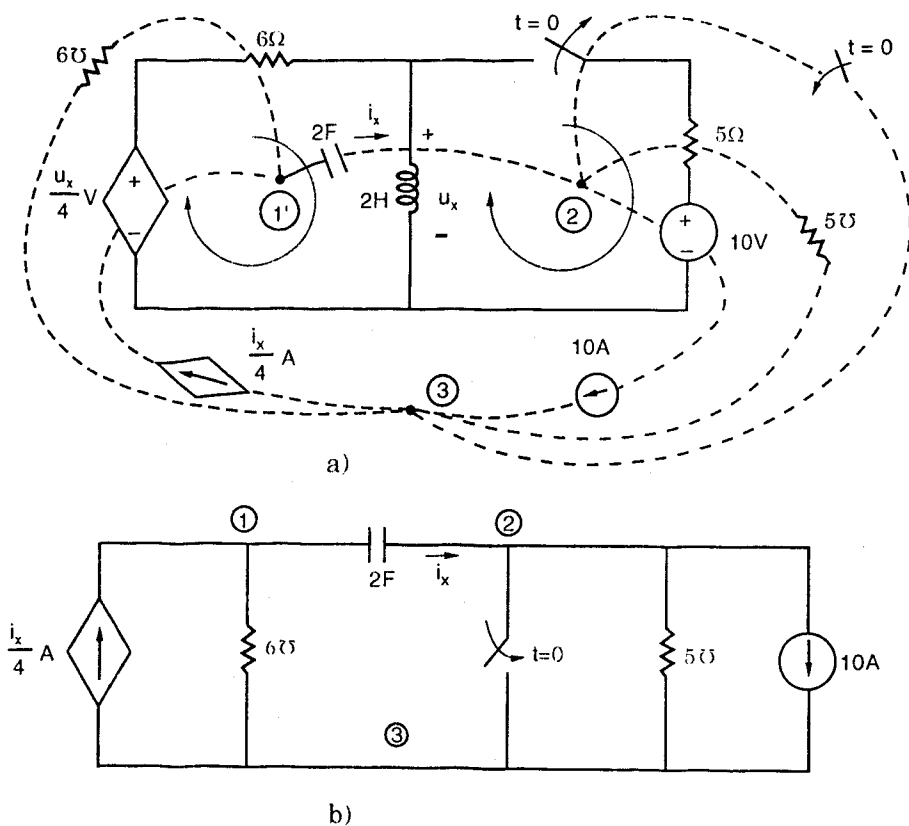
Mạch H.3.155a có mạch đối ngẫu là H.3.155b. Khi xác định đối ngẫu của khóa, chú ý đến sự đối ngẫu giữa “ngắn mạch” và “hở mạch”.

Ta có mạch H.3.155a:

$$u_x(t) = \begin{cases} 0 \text{ V}, & t < 0 \\ -16e^{-4t} \text{ V}, & t > 0 \end{cases}$$

và ở mạch H.3.155b:

$$i_x(t) = \begin{cases} 0 \text{ A}, & t < 0 \\ -16e^{-4t} \text{ A}, & t > 0 \end{cases}$$



Hình 3.155

3.8 PHÂN TÍCH MẠCH ĐIỆN DÙNG MA TRẬN

3.8.1 Phương trình nhánh dạng ma trận

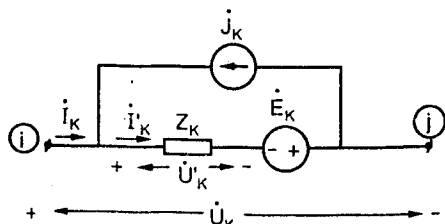
Trong mục này ta xét cách thành lập các phương trình nhánh dạng ma trận biểu thị quan hệ giữa ma trận áp nhánh $\mathbf{u}_n$ với ma trận dòng nhánh $\mathbf{i}_n$.

Ta xét mạch ở chế độ xác lập hình sin, gọi ma trận cột các ảnh phức của các áp nhánh là $\mathbf{U}_n$ và ma trận cột các ảnh phức dòng nhánh là $\mathbf{I}_n$.

Ta xét trong từng trường hợp sau:

1- Mạch chỉ chứa các phần tử điện trở, điện cảm, điện dung, nguồn độc lập

Tổng quát, một nhánh k bao gồm trở kháng Z_k , nguồn áp độc lập $\dot{E}_k$ và nguồn dòng độc lập $\dot{J}_k$ mắc như H.3.156.



Hình 3.156: Dạng tổng quát của nhánh

Ta có: $\dot{U}_k = \dot{I}'_k Z_k - \dot{E}_k$

thay $\dot{I}'_k = \dot{I}_k + \dot{J}_k$ vào ta được:

$$\dot{U}_k = Z_k(\dot{I}_k + \dot{J}_k) - \dot{E}_k \quad (3.130)$$

Nếu đặt $Y_k = \frac{1}{Z_k}$ thì từ (3.130) có thể suy ra:

$$\dot{I}_k = Y_k(\dot{U}_k + \dot{E}_k) - \dot{J}_k \quad (3.131)$$

Đặt $\mathbf{U}_n = [\dot{U}_1 \dot{U}_2 \dots \dot{U}_k \dots \dot{U}_n]^T$ gọi là ma trận áp nhánh

$\mathbf{I}_n = [\dot{I}_1 \dot{I}_2 \dots \dot{I}_k \dots \dot{I}_n]^T$ gọi là ma trận dòng nhánh

$\mathbf{E}_n = [\dot{E}_1 \dot{E}_2 \dots \dot{E}_k \dots \dot{E}_n]^T$ gọi là ma trận nguồn áp nhánh

$\mathbf{J}_n = [\dot{J}_1 \dot{J}_2 \dots \dot{J}_k \dots \dot{J}_n]^T$ gọi là ma trận nguồn dòng nhánh

với n là số nhánh.

Hệ gồm n phương trình dạng (3.130) viết cho n nhánh có thể trình bày ở dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_k \\ \vdots \\ \dot{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & & & & \\ & Z_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & Z_k & \\ & & & & \ddots \\ & 0 & & & & Z_n \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_k \\ \vdots \\ \dot{I}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \vdots \\ \dot{J}_k \\ \vdots \\ \dot{J}_n \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \vdots \\ \dot{E}_k \\ \vdots \\ \dot{E}_n \end{bmatrix}$$

$$\text{hay: } \mathbf{U}_n = \mathbf{Z}_n(\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n) - \mathbf{E}_n \quad (3.132)$$

trong đó $\mathbf{Z}_n$ là ma trận chéo n hàng n cột, các phần tử trên đường chéo chính là các trở kháng các nhánh tương ứng còn các phần tử khác nằm ngoài đường chéo đều bằng không.

$\mathbf{Z}_n$ gọi là ma trận trở kháng nhánh.

Tương tự hệ gồm n phương trình dạng (3.131) có thể được viết ở dạng ma trận:

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{Y}_n(\mathbf{U}_n + \mathbf{E}_n) - \mathbf{J}_n \quad (3.133)$$

trong đó:

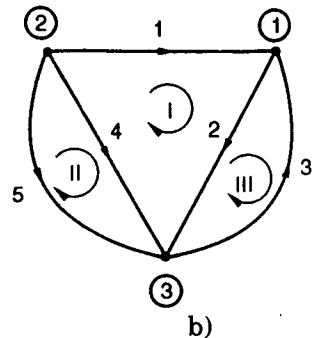
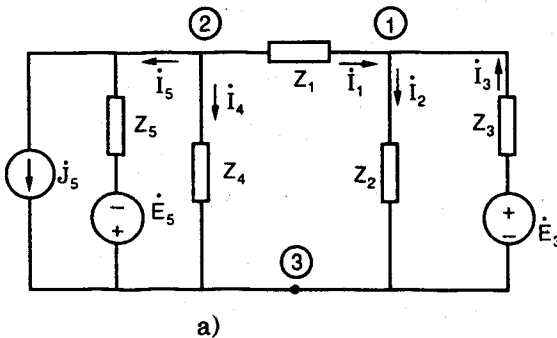
$$Y_n = \begin{bmatrix} Y_1 & & & & \\ & Y_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & Y_k & \\ & & & & \ddots \\ & & 0 & & & Y_n \end{bmatrix}$$

gọi là *ma trận dẫn nạp nhánh*, cũng là một ma trận chéo n hàng n cột mà các phần tử trên đường chéo chính là các dẫn nạp nhánh còn các phần tử khác đều bằng không.

Để nghiệm lại rằng $Y_n = Z_n^{-1}$ hoặc $Z_n = Y_n^{-1}$

Ví dụ 3.47: Xét mạch điện H.3.157a với graph được chọn như H.3.157b gồm năm nhánh và ba đỉnh:

- Nhánh 1 chỉ chứa trở kháng Z_1 ;
- Nhánh 2 chỉ chứa Z_2 ;



Hình 3.157

- Nhánh 3 gồm nguồn áp $\dot{E}_3$ nối tiếp với Z_3 ;
- Nhánh 4 chỉ có Z_4 ;
- Nhánh 5 gồm $\dot{E}_5$, Z_5 và nguồn dòng $\dot{J}_5$.

Ma trận áp nhánh là: $U_n = [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dot{U}_3 \ \dot{U}_4 \ \dot{U}_5]^T$

Ma trận dòng nhánh: $I_n = [\dot{I}_1 \ \dot{I}_2 \ \dot{I}_3 \ \dot{I}_4 \ \dot{I}_5]^T$

Ma trận nguồn áp nhánh: $E_n = [0 \ 0 \ \dot{E}_3 \ 0 \ \dot{E}_5]^T$

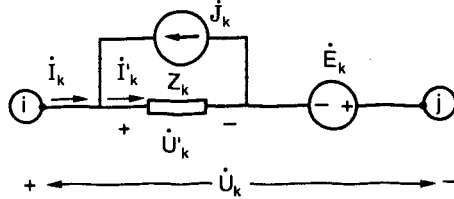
Ma trận nguồn dòng nhánh: $J_n = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\dot{J}_5]^T$

Ở nhánh 5, nguồn dòng $\dot{J}_5$ ngược chiều với chiều chuẩn ở H.3.156 nên mang dấu -

Ma trận trở kháng nhánh và dẫn nạp nhánh:

$$\mathbf{Z}_n = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 \end{bmatrix} : \mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

• Dễ dàng nghiệm lại rằng, phương trình nhánh sẽ không đổi nếu dạng tổng quát của nhánh được định nghĩa như H.3.158, nghĩa là ta vẫn có:



Hình 3.158: Dạng tổng quát của nhánh tương đương với dạng H.3.156

$$\dot{U}_k = Z_k(\dot{I}_k + \dot{J}_k) - \dot{E}_k \quad (3.130)$$

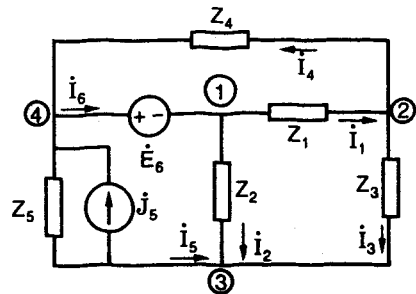
và
$$\dot{I}_k = Y_k(\dot{U}_k + \dot{E}_k) - \dot{J}_k \quad (3.131)$$

* Nếu có nhánh l nào đó chỉ chứa nguồn áp lý tưởng ($Z_l = 0$) thì trong ma trận trở kháng $\mathbf{Z}_n$, phần tử thứ l trên đường chéo chính bằng không. Ma trận dẫn nạp nhánh $\mathbf{Y}_n$ không lập được vì $Y_l = \frac{1}{Z_l} = \infty$; trường hợp này

có thể dùng phép chuyển vị nguồn áp (xem lại mục 3.6.7) để biến đổi mạch khử đi nhánh l chứa nguồn áp lý tưởng đó.

Ví dụ 3.48: Xét mạch điện H.3.159 chứa nguồn áp lý tưởng E_6

Để lập $\mathbf{Y}_n$ có thể dùng phép chuyển vị nguồn áp để biến đổi thành mạch H.3.160a với graph như H.3.160b. Mạch mới có ba đỉnh và năm nhánh (số nút và số nhánh giảm đi một so với mạch ban đầu, nút 4 được nối tắt với nút 1).



Hình 3.159

So với mạch ban đầu, dòng điện $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4, \dot{I}_5$ không thay đổi.

Ma trận dẫn nạp nhánh:

$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} Y_1 & & & & \\ & Y_2 & & 0 & \\ & & Y_3 & & \\ & 0 & & Y_4 & \\ & & & & Y_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_n = [-\dot{E}_6 -\dot{E}_6 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\mathbf{J}_n = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ J_5]^T$$

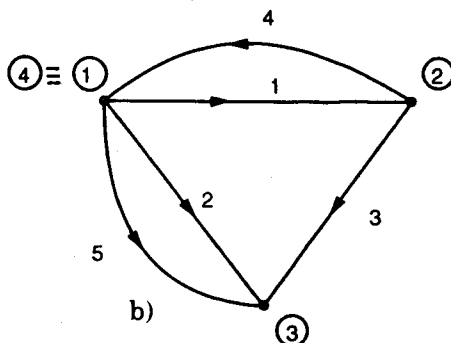
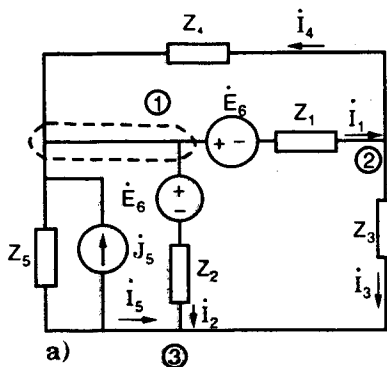
Phương trình nhánh:

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{Y}_n(\mathbf{U}_n + \mathbf{E}_n) - \mathbf{J}_n \quad (3.133)$$

với:

$$\mathbf{U}_n = [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dot{U}_3 \ \dot{U}_4 \ \dot{U}_5]^T$$

$$\mathbf{I}_n = [\dot{I}_1 \ \dot{I}_2 \ \dot{I}_3 \ \dot{I}_4 \ \dot{I}_5]^T$$



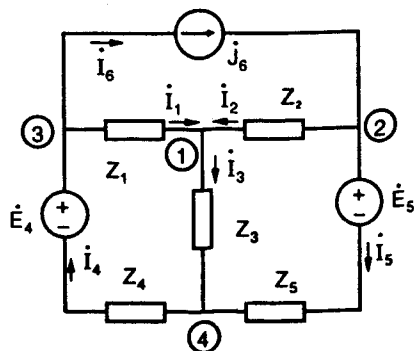
Hình 3.160

• Nếu nhánh l nào đó chỉ chứa nguồn dòng lý tưởng ($Y_l = 0$) thì trong ma trận dẫn nạp nhánh $\mathbf{Y}_n$ phần tử thứ l trên đường chéo chính bằng không. Ma trận trở kháng nhánh $\mathbf{Z}_n$ không lập được vì $Z_l = \frac{1}{Y_l} = \infty$; trường hợp này có

thể dùng phép chuyển vị nguồn dòng (mục 3.6.7) để biến đổi mạch khử đi nhánh l chứa nguồn dòng lý tưởng.

Ví dụ 3.49: Xét mạch điện H.3.161 chứa dòng lý tưởng J_6 .

Để lập $\mathbf{Z}_n$ có thể dùng phép chuyển vị nguồn dòng để biến đổi thành mạch

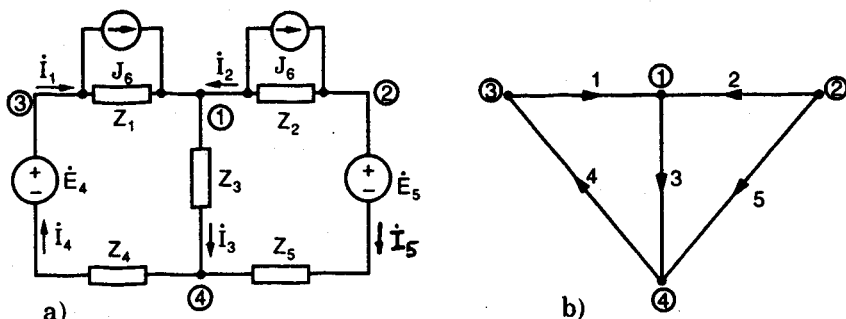


Hình 3.161

H.3.162a. Giả sử chọn graph của mạch H.3.162a như H.3.162b gồm bốn đỉnh và năm nhánh (giảm đi một nhánh so với mạch ban đầu H.3.161).

So với mạch ban đầu H.3.161, các dòng điện $\dot{I}_4, \dot{I}_5, \dot{I}_3$ không thay đổi; dòng $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ bị thay đổi nhưng dòng qua trở kháng Z_1 và dòng qua Z_2 thì không đổi.

Ma trận trở kháng nhánh của mạch H.3.162a:



Hình 3.162

$$\mathbf{Z}_n = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_n = [0 \ 0 \ 0 \ \dot{E}_4 - \dot{E}_5]^T$$

$$\mathbf{J}_n = [-\dot{J}_6 \ \dot{J}_6 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\mathbf{U}_n = [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dot{U}_3 \ \dot{U}_4 \ \dot{U}_5]^T$$

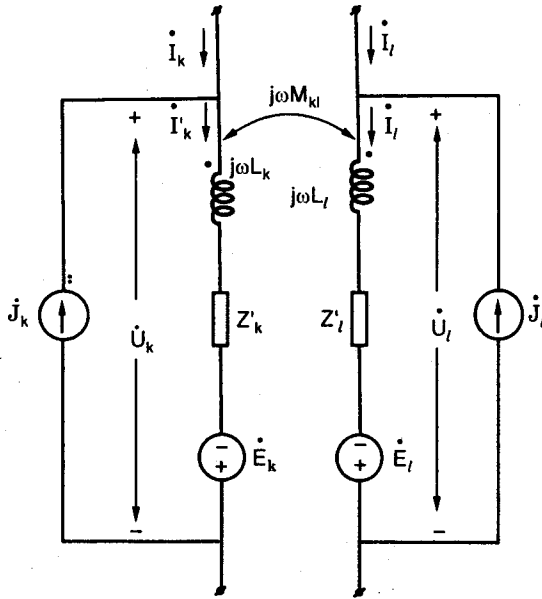
$$\mathbf{I}_n = [\dot{I}_1 \ \dot{I}_2 \ \dot{I}_3 \ \dot{I}_4 \ \dot{I}_5]^T$$

$$\text{Phương trình nhánh: } \mathbf{U}_n = \mathbf{Z}_n(\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n) - \mathbf{E}_n \quad (3.132)$$

2- Mạch có chứa hồ cảm

Ta xét mạch có chứa các nhánh có ghép hồ cảm với nhau, nhưng không chứa nguồn phụ thuộc nào.

Giả sử trong mạch có hai nhánh k và l có ghép hồ cảm với nhau như H.3.163.



Hình 3.163

Phương trình nhánh là:

$$\dot{U}_k = Z_k(\dot{I}_k + \dot{J}_k) + Z_{kl}(\dot{I}_l + \dot{J}_l) - \dot{E}_k \quad (3.135a)$$

và
$$\dot{U}_l = Z_{lk}(\dot{I}_k + \dot{J}_k) + Z_l(\dot{I}_l + \dot{J}_l) - \dot{E}_l \quad (3.135b)$$

trong đó:
$$Z_k = Z'_k + j\omega L_k$$

và $Z_l = Z'_l + j\omega L_l$ là các trở kháng riêng của nhánh k và nhánh l.

$$Z_{kl} = \pm j\omega M_{kl}$$

và $Z_{lk} = \pm j\omega M_{lk}$ là các trở kháng tương hỗ giữa nhánh k và nhánh l.

Vì $M_{kl} = M_{lk}$ = hệ số hỗ cảm giữa hai phần tử điện cảm nên:

$$Z_{kl} = Z_{lk} = \pm j\omega M_{kl} = \pm j\omega M_{lk}$$

Trong biểu thức của Z_{kl} , Z_{lk} lấy dấu "+" nếu chiều của hai nhánh cùng đi vào (hoặc cùng đi ra) hai cực cùng tên của hai cuộn dây.

Chú ý các quy ước về chiều trên H.3.131 và 3.138.

Hai phương trình (3.135a) và (3.135b) có thể viết ở dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_k \\ \dot{U}_l \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_M \left(\begin{bmatrix} \dot{I}_k \\ \dot{I}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{J}_k \\ \dot{J}_l \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} \dot{E}_k \\ \dot{E}_l \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

trong đó
$$\mathbf{Z}_M = \begin{bmatrix} Z_k & Z_{kl} \\ Z_{lk} & Z_l \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

Nếu $Z_k Z_l - Z_{kl} Z_{lk} \neq 0$ thì ma trận $\mathbf{Z}_M$ có ma trận nghịch đảo là:

$$\mathbf{Y}_M = \mathbf{Z}_M^{-1}$$

khi đó từ (3.136) suy ra:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_k \\ \dot{\mathbf{I}}_l \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_M \left(\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_k \\ \dot{\mathbf{E}}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{E}}_k \\ \dot{\mathbf{E}}_l \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_k \\ \dot{\mathbf{J}}_l \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

Tổng quát nếu trong mạch điện có m nhánh ghép hồ cảm với nhau, mỗi nhánh có dạng như H.3.163 và giả sử các nhánh này được đánh số liên tục từ $s+1$ đến $s+m$ thì ta được:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_{s+1} \\ \dot{\mathbf{U}}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{U}}_{s+m} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_M \left(\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_{s+1} \\ \dot{\mathbf{I}}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{I}}_{s+m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_{s+1} \\ \dot{\mathbf{J}}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{J}}_{s+m} \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{E}}_{s+1} \\ \dot{\mathbf{E}}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{E}}_{s+m} \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

với

$$\mathbf{Z}_M = \begin{bmatrix} Z_{s+1} & Z_{s+1,s+2} & \dots & Z_{s+1,s+m} \\ Z_{s+2,s+1} & Z_{s+2} & \dots & Z_{s+2,s+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{s+m,s+1} & Z_{s+m,s+2} & \dots & Z_{s+m} \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

trong đó Z_k ($k = s+1 \div s+m$) là trở kháng riêng của nhánh k :

$$Z_k = Z'_k + j\omega L_k.$$

$$Z_{kl} = \pm j\omega M_{kl} \quad (l = s+1 \div s+m); \quad M_{kl} = M_{lk} \text{ là hệ số hồ cảm.}$$

($k \neq l$)

$$Z_{lk} = \pm j\omega M_{lk} = Z_{kl} \text{ là trở kháng tương hồ giữa nhánh } k \text{ và nhánh } l.$$

Giả sử $\mathbf{Z}_M$ tồn tại ma trận nghịch đảo $\mathbf{Y}_M = \mathbf{Z}_M^{-1}$ thì:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_{s+1} \\ \dot{\mathbf{I}}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{I}}_{s+m} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_M \left(\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_{s+1} \\ \dot{\mathbf{U}}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{U}}_{s+m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{E}}_{s+1} \\ \dot{\mathbf{E}}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{E}}_{s+m} \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_{s+1} \\ \dot{\mathbf{J}}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{J}}_{s+m} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

Các ma trận $\mathbf{Z}_M$, $\mathbf{Y}_M$ là ma trận đối xứng ($m \times m$)

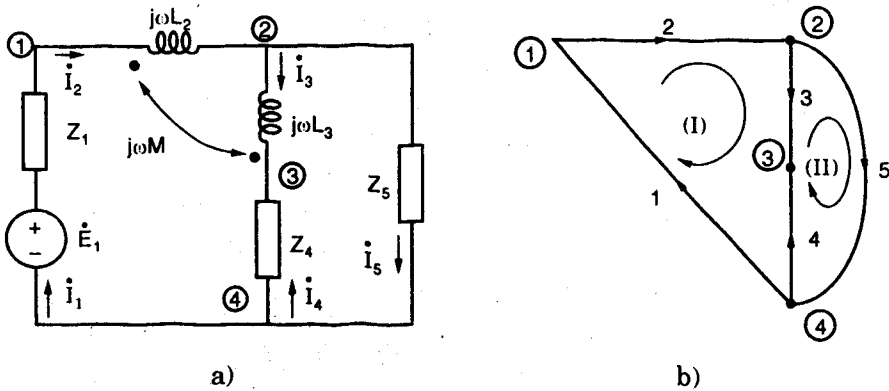
Biết các ma trận $\mathbf{Z}_M$, $\mathbf{Y}_M$ của các nhánh có ghép hồ cảm, có thể dễ dàng suy ra ma trận trở kháng $\mathbf{Z}_n$, dẫn nạp nhánh $\mathbf{Y}_n$ của toàn mạch theo cách sau:

$$\mathbf{Z}_n = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & & 0 \\ 0 & Z_s & & \\ & & \mathbf{Z}_M & \\ 0 & & & Z_{j+m+1} & 0 \\ & & & 0 & Z_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & & 0 \\ 0 & Y_s & & \\ & & \mathbf{Y}_M & \\ 0 & & & Y_{j+m+1} & 0 \\ & & & 0 & Y_n \end{bmatrix}$$

Vì các ma trận con $\mathbf{Z}_M$, $\mathbf{Y}_M$ là đối xứng nên ma trận $\mathbf{Z}_n$, $\mathbf{Y}_n$ cũng đối xứng, tuy nhiên chúng không còn là các ma trận chéo nữa.

Chú ý rằng: $\mathbf{Y}_n = \mathbf{Z}_n^{-1}$

Ví dụ 3.50: Xét mạch điện H.3.164a với graph được chọn như H.164b.



Hình 3.164

Hai nhánh 2 và 3 là hai phần tử điện cảm có ghép hồ cảm với nhau.

Ta có:
$$\begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_M \begin{bmatrix} \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}$$

với
$$\mathbf{Z}_M = \begin{bmatrix} j\omega L_2 & -j\omega M \\ -j\omega M & j\omega L_3 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_3 \end{bmatrix}$$

Do đó ma trận trở kháng nhánh là:

$$\mathbf{Z}_n = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_2 & -j\omega M & 0 & 0 \\ 0 & -j\omega M & j\omega L_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{nhánh 2} \\ \leftarrow \text{nhánh 3} \end{array} \quad (3.142)$$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{nhánh} & \text{nhánh} \\ 2 & 3 \end{array}$

Ta nghiệm lại sự đúng đắn của (3.142). Theo (3.132):

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{Z}_n(\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n) - \mathbf{E}_n \quad (3.132)$$

thay: $\mathbf{Z}_n$ bởi (3.142)

$$\mathbf{U}_n = [\dot{U}_1 \dot{U}_2 \dot{U}_3 \dot{U}_4 \dot{U}_5]^T; \mathbf{I}_n = [\dot{I}_1 \dot{I}_2 \dot{I}_3 \dot{I}_4 \dot{I}_5]^T$$

$$\mathbf{E}_n = [\dot{E}_1 0 0 0 0]^T; \mathbf{J}_n = [0 0 0 0 0]^T$$

vào (3.132) và thực hiện các phép nhân, cộng trừ ma trận ta được:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \dot{I}_1 - \dot{E}_1 \\ j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_3 \\ -j\omega M \dot{I}_2 + j\omega L_3 \dot{I}_3 \\ Z_4 \dot{I}_4 \\ Z_5 \dot{I}_5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1 - \dot{E}_1 & \leftarrow \text{phương trình nhánh 1} \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_3 & \leftarrow \text{--- nt ---} & 2 \\ \dot{U}_3 = -j\omega M \dot{I}_2 + j\omega L_3 \dot{I}_3 & \leftarrow \text{--- nt ---} & 3 \\ \dot{U}_4 = Z_4 \dot{I}_4 & \leftarrow \text{--- nt ---} & 4 \\ \dot{U}_5 = Z_5 \dot{I}_5 & \leftarrow \text{--- nt ---} & 5 \end{cases}$$

Ma trận nghịch đảo của Z_M là (giả sử $L_2 L_3 - M^2 \neq 0$):

$$\mathbf{Y}_M = \mathbf{Z}_M^{-1} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{L_2 L_3 - M^2} \cdot \begin{bmatrix} L_3 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2 & Y_{23} \\ Y_{32} & Y_3 \end{bmatrix}$$

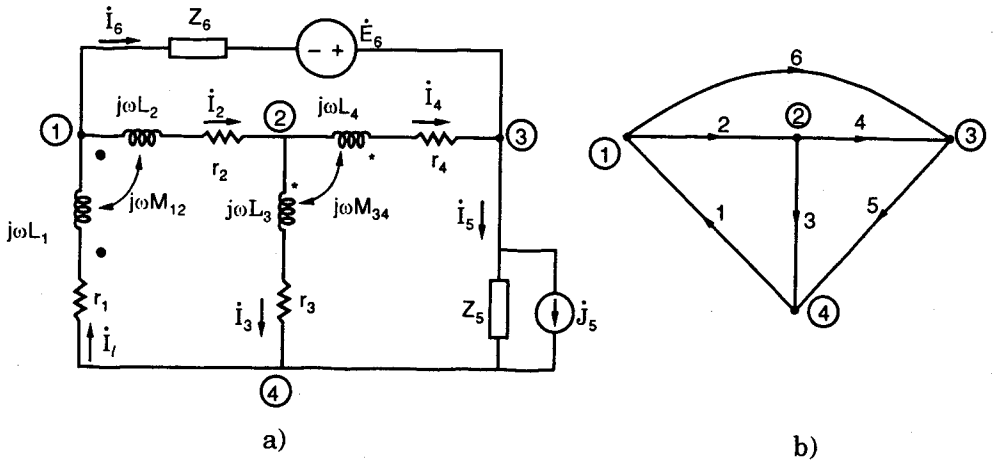
$$\text{với } Y_2 = \frac{L_3}{j\omega(L_2 L_3 - M^2)}; Y_3 = \frac{L_2}{j\omega(L_2 L_3 - M^2)}; Y_{23} = Y_{32} = \frac{M}{j\omega(L_2 L_3 - M^2)}$$

Do đó ma trận dẫn nạp nhánh là:

$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & Y_{23} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{32} & Y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{nhánh 2} \\ \leftarrow \text{nhánh 3} \\ \uparrow \text{nhánh 2} \quad \uparrow \text{nhánh 3} \end{matrix} \quad (3.143)$$

$$\text{trong đó } Y_1 = \frac{1}{Z_1}, Y_4 = \frac{1}{Z_4}, Y_5 = \frac{1}{Z_5}$$

Ví dụ 3.51: Xét mạch điện H.3.165a với graph được chọn như H.3.165b.



Hình 3.165

Hai nhánh 1 và 2 có ghép hồ cảm với nhau và ta có:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_{M1} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad \text{với} \quad \mathbf{Z}_{M1} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_2 \end{bmatrix}$$

trong đó $Z_1 = r_1 + j\omega L_1$; $Z_2 = r_2 + j\omega L_2$

$$Z_{12} = Z_{21} = j\omega M_{12} = j\omega M_{21}$$

Hai nhánh 3 và 4 có ghép hồ cảm với nhau:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_{M2} \begin{bmatrix} \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix} \quad \text{với} \quad \mathbf{Z}_{M2} = \begin{bmatrix} Z_3 & Z_{34} \\ Z_{43} & Z_4 \end{bmatrix}$$

trong đó $Z_3 = r_3 + j\omega L_3$; $Z_4 = r_4 + j\omega L_4$

$$Z_{34} = Z_{43} = -j\omega M_{34} = -j\omega M_{43}$$

Do đó ma trận trở kháng nhánh là:

$$\mathbf{Z}_n = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_{21} & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{43} & Z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{nhánh 1} \\ \leftarrow \text{nhánh 2} \\ \leftarrow \text{nhánh 3} \\ \leftarrow \text{nhánh 4} \end{array} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{ghép} \\ \text{hồ cảm} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{ghép} \\ \text{hồ cảm} \end{array} \right\} \end{array} \quad (3.144)$$

Phương trình nhánh dạng ma trận theo (3.132) là:

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{Z}_n(\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n) - \mathbf{E}_n$$

trong đó

$$\mathbf{U}_n = [\dot{U}_1 \dot{U}_2 \dot{U}_3 \dot{U}_4 \dot{U}_5 \dot{U}_6]^T; \quad \mathbf{I}_n = [\dot{I}_1 \dot{I}_2 \dot{I}_3 \dot{I}_4 \dot{I}_5 \dot{I}_6]^T$$

$$\mathbf{E}_n = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dot{E}_6]^T; \quad \mathbf{J}_n = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -j_5 \ 0]^T$$

Z_n cho bởi (3.144).

Giả sử $Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21} \neq 0$ thì Z_{M1} có ma trận nghịch đảo là Y_{M1} tương tự nếu $Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43} \neq 0$ thì Z_{M2} có ma trận nghịch đảo là Y_{M2}

$$\text{Đặt } Y_{M1} = Z_{M1}^{-1} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_2 \end{bmatrix} \text{ với: } \begin{cases} Y_1 = \frac{Z_2}{\Delta_1}; Y_2 = \frac{Z_1}{\Delta_1} \\ Y_{12} = Y_{21} = \frac{-Z_{12}}{\Delta_1} \\ \Delta_1 = Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21} \end{cases}$$

$$Y_{M2} = Z_{M2}^{-1} = \begin{bmatrix} Y_3 & Y_{34} \\ Y_{43} & Y_4 \end{bmatrix} \text{ với: } \begin{cases} Y_3 = \frac{Z_4}{\Delta_2}; Y_4 = \frac{Z_3}{\Delta_2} \\ Y_{34} = Y_{43} = \frac{-Z_{34}}{\Delta_2} \\ \Delta_2 = Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43} \end{cases}$$

Ma trận dẫn nạp nhánh là:

$$Y_n = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_{12} & & & & 0 \\ Y_{21} & Y_2 & & & & \\ & & Y_3 & Y_{34} & & \\ & & Y_{43} & Y_4 & & \\ & & & & Y_5 & 0 \\ 0 & & & & 0 & Y_6 \end{bmatrix}$$

3- Mạch điện có chứa nguồn phụ thuộc

a) Thành lập ma trận trở kháng nhánh Z_n

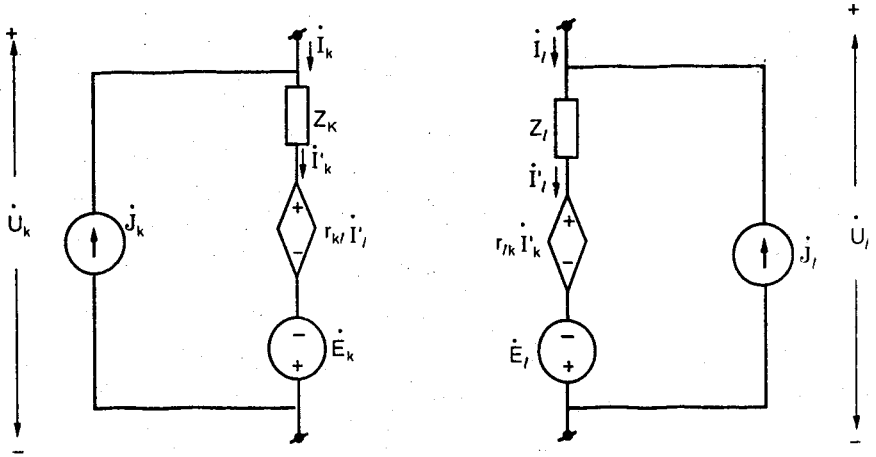
Giả sử các nguồn phụ thuộc trong mạch điện đều thuộc loại duy nhất là nguồn áp phụ thuộc vào dòng điện (CCVS). Nếu trong mạch có chứa các loại nguồn phụ thuộc khác như nguồn áp phụ thuộc áp, nguồn dòng phụ thuộc dòng, nguồn dòng phụ thuộc áp thì ta tìm cách đưa chúng về dạng CCVS bằng các phép biến đổi tương đương mạch (ví dụ xem các phép biến đổi H.3.15).

Xét trường hợp đơn giản trong mạch có hai nhánh k và l có chứa nguồn phụ thuộc như H.3.166.

Phương trình nhánh là:

$$\begin{cases} \dot{U}_k = \dot{Z}_k(\dot{I}_k + \dot{J}_k) + r_{kl}(\dot{I}_l + \dot{J}_l) - \dot{E}_k & (3.145a) \\ \dot{U}_l = \dot{Z}_l(\dot{I}_l + \dot{J}_l) + r_{lk}(\dot{I}_k + \dot{J}_k) - \dot{E}_l & (3.145b) \end{cases}$$

trong đó r_{kl} , r_{lk} là các hệ số điều khiển các nguồn phụ thuộc.



Hình 3.166

Hai phương trình trên có thể viết ở dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_k \\ \dot{U}_l \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_{CS} \left(\begin{bmatrix} \dot{I}_k \\ \dot{I}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{J}_k \\ \dot{J}_l \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} \dot{E}_k \\ \dot{E}_l \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

trong đó

$$\mathbf{Z}_{CS} = \begin{bmatrix} Z_k & r_{kl} \\ r_{lk} & Z_l \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

nói chung $r_{kl} \neq r_{lk}$ nên $\mathbf{Z}_{CS}$ không đối xứng.

Trường hợp tổng quát mạch có m nhánh có dạng như H.3.166. Giả sử các nhánh này được đánh số liên tục từ $s+1$ đến $s+m$, nhánh thứ k ($k = s+1 \rightarrow s+m$) chứa nguồn áp phụ thuộc có trị số bằng:

$$\sum_{\substack{l=s+1 \\ (l \neq k)}}^{s+m} r_{kl} \dot{I}_l \quad (3.148)$$

Khi đó ta được:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{s+1} \\ \dot{U}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{U}_{s+m} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_{CS} \left(\begin{bmatrix} \dot{I}_{s+1} \\ \dot{I}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{I}_{s+m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{J}_{s+1} \\ \dot{J}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{J}_{s+m} \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} \dot{E}_{s+1} \\ \dot{E}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{E}_{s+m} \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

trong đó:

$$Z_{CS} = \begin{bmatrix} Z_{s+1} & r_{s+1, s+2} & \dots & r_{s+1, s+m} \\ r_{s+2, s+1} & Z_{s+2} & \dots & r_{s+2, s+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{s+m, s+1} & r_{s+m, s+2} & \dots & Z_{s+m} \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

với r_{kl} , ($k = s + 1 + s + m$; $l = s + 1 + s + m$) là các hệ số điều khiển của ($k \neq l$)

nguồn áp phụ thuộc ở nhánh k .

Z_k là trở kháng ở nhánh k .

nói chung $r_{kl} \neq r_{lk}$; ma trận Z_{CS} không đối xứng.

Biết ma trận Z_{CS} của m nhánh có nguồn phụ thuộc (kể cả nhánh không có nguồn phụ thuộc nhưng dòng điện trên nhánh đó điều khiển nguồn phụ thuộc ở nhánh khác), có thể dễ dàng đưa chúng vào ma trận trở kháng Z_n của toàn mạch theo cách sau:

$$Z_n = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & & 0 \\ 0 & Z_s & & \\ & & Z_{CS} & \\ & & & Z_{s+m+1} & 0 \\ & 0 & & 0 & Z_n \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

Vì Z_{CS} không đối xứng nên ma trận Z_n khi có nguồn phụ thuộc, nói chung, không đối xứng.

b) Thành lập ma trận dẫn nạp nhánh Y_n

Giả sử các nguồn phụ thuộc trong mạch đều thuộc loại nguồn dòng phụ thuộc áp (VCCS). Nếu có mặt các loại nguồn phụ thuộc khác thì ta tìm cách đưa về dạng VCCS bằng phép biến đổi mạch tương đương (ví dụ H.3.6).

Xét trường hợp đơn giản trong mạch có hai nhánh k và l có chứa nguồn phụ thuộc như H.3.167.

Phương trình nhánh là:

$$\begin{cases} \dot{I}_k = Y_k (\dot{U}_k + \dot{E}_k) + g_{kl} (\dot{U}_l + \dot{E}_l) - \dot{J}_k \end{cases} \quad (3.152a)$$

$$\begin{cases} \dot{I}_l = Y_l (\dot{U}_l + \dot{E}_l) + g_{lk} (\dot{U}_k + \dot{E}_k) - \dot{J}_l \end{cases} \quad (3.152b)$$

trong đó $Y_k = \frac{1}{Z_k}$, $Y_l = \frac{1}{Z_l}$

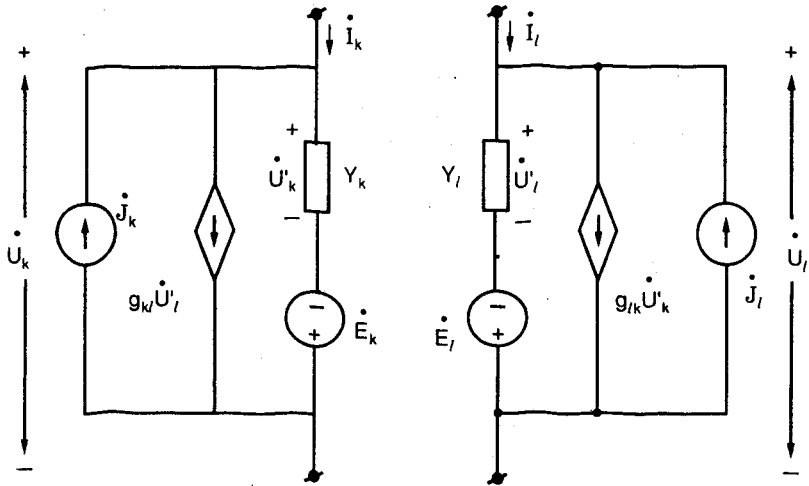
g_{kl} , g_{lk} là các hệ số điều khiển các nguồn dòng phụ thuộc áp.

Hai phương trình trên viết lại dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_k \\ \dot{I}_l \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{CS} \left(\begin{bmatrix} \dot{U}_k \\ \dot{U}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{E}_k \\ \dot{E}_l \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} \dot{J}_k \\ \dot{J}_l \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

trong đó

$$\mathbf{Y}_{CS} = \begin{bmatrix} Y_k & g_{kl} \\ g_{lk} & Y_l \end{bmatrix} \quad (3.154)$$



Hình 3.167

Trường hợp tổng quát mạch có m nhánh có dạng H.3.167, được đánh số giả sử từ $s+1$ đến $s+m$. Giả sử nhánh thứ k ($k = s+1 \div s+m$) chứa nguồn dòng phụ thuộc có trị số bằng:

$$\sum_{l=s+1}^{s+m} g_{kl} \dot{U}_l \quad (l \neq k) \quad (3.155)$$

Trong trường hợp này ta được phương trình:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{s+1} \\ \dot{I}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{I}_{s+m} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{CS} \left(\begin{bmatrix} \dot{U}_{s+1} \\ \dot{U}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{U}_{s+m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{E}_{s+1} \\ \dot{E}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{E}_{s+m} \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} \dot{J}_{s+1} \\ \dot{J}_{s+2} \\ \vdots \\ \dot{J}_{s+m} \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

trong đó:

$$\mathbf{Y}_{CS} = \begin{bmatrix} Y_{s+1} & g_{s+1,s+2} & \cdots & g_{s+1,s+m} \\ g_{s+2,s+1} & Y_{s+2} & \cdots & g_{s+2,s+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{s+m,s+1} & g_{s+m,s+2} & \cdots & Y_{s+m} \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

với g_{kl} ($k = s + 1 + s + m$; $l = s + 1 + s + m$) là các hệ số điều khiển của ($k \neq l$)

nguồn dòng phụ thuộc ở nhánh k .

Y_k là dẫn nạp ở nhánh k .

nói chung $g_{kl} \neq g_{lk}$; ma trận Y_{CS} không đối xứng.

Biết ma trận Y_{CS} của m nhánh có nguồn phụ thuộc (kể cả nhánh không có nguồn phụ thuộc nhưng điện áp trên nhánh đó điều khiển nguồn dòng phụ thuộc ở nhánh khác) có thể dễ dàng đưa chúng vào ma trận dẫn nạp nhánh Y_n của toàn mạch theo cách sau:

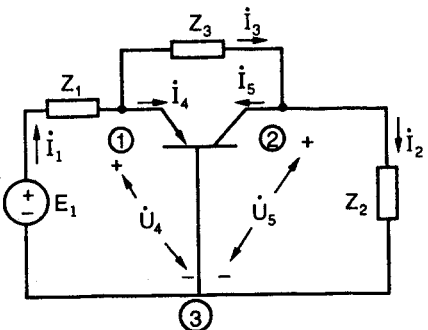
$$Y_n = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & & 0 \\ 0 & Y_s & & \\ \text{---} & \text{---} & Y_{CS} & \text{---} \\ & & \text{---} & Y_{s+m+1} & 0 \\ 0 & & & 0 & Y_n \end{bmatrix}$$

(3.158)

Nói chung Y_{CS} không đối xứng và do đó Y_n cũng không đối xứng.

Ví dụ 3.52: Xét mạch điện H.3.168 có chứa một phần tử ba cực transistor có cực phát nối với nút ①, cực thu nối với nút ② và cực nền nối nút ③.

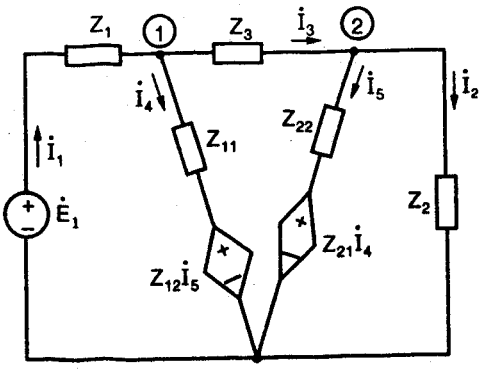
a) Cho biết phần tử ba cực được đặc trưng bởi hệ phương trình dạng Z :



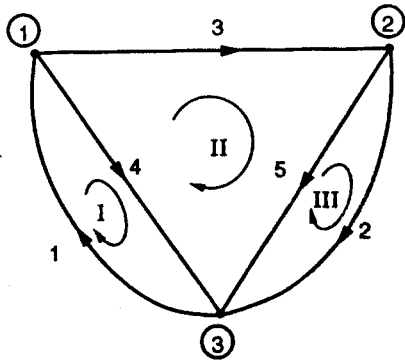
Hình 3.168

$$\begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 \\ I_5 \end{bmatrix}$$

(3.159)



a)



b)

Hình 3.169

Từ (3.159) ta thấy có thể thay phần tử ba cực bằng hai nhánh 4 và 5 có chứa nguồn áp phụ thuộc như H.3.169a. H.3.169b là graph của H.3.169a.

Theo (3.151) ta lập được ma trận trở kháng nhánh Z_n như sau;

$$Z_n = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{11} & Z_{12} \\ 0 & 0 & 0 & Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

← nhánh 4
← nhánh 5

Phương trình nhánh dạng ma trận của mạch là:

$$U_n = Z_n (I_n + J_n) - E_n \quad (3.132)$$

trong đó

$$U_n = [\dot{U}_1 \dot{U}_2 \dot{U}_3 \dot{U}_4 \dot{U}_5]^T; \quad I_n = [\dot{I}_1 \dot{I}_2 \dot{I}_3 \dot{I}_4 \dot{I}_5]^T$$

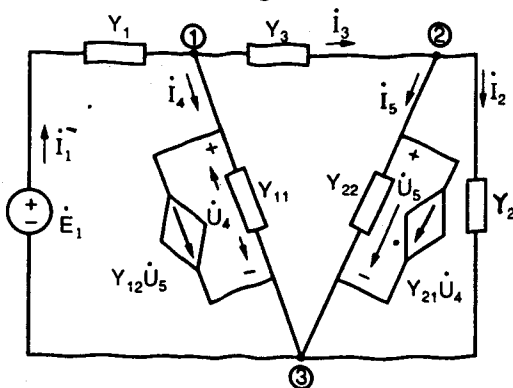
$$E_n = [\dot{E}_1 0 0 0 0]^T; \quad J_n = [0 0 0 0 0]^T$$

b) Nếu phần tử ba cực được cho hệ phương trình dạng Y:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

thì có thể thay phần tử ba cực bằng hai nhánh 4 và 5 có chứa nguồn dòng phụ thuộc như H.3.170. Chọn graph giống như trước (H.3.169b).

Theo (3.158) ta lập được ma trận dẫn nạp nhánh Y_n như sau:



Hình 3.170

$$Y_n = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{11} & Y_{12} \\ 0 & 0 & 0 & Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

Phương trình nhánh dạng ma trận:

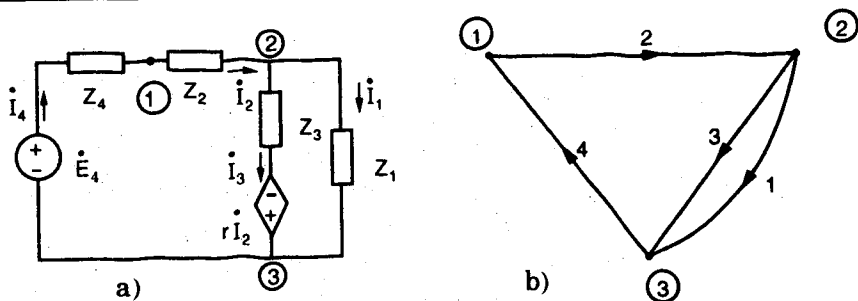
$$I_n = Y_n (\dot{U}_n + \dot{E}_n) - J_n \quad (3.133)$$

trong đó

$$E_n = [\dot{E}_1 0 0 0 0]^T; \quad J_n = [0 0 0 0 0]^T$$

Chú ý rằng $Y_n = Z_n^{-1}$

Ví dụ 3.53: Xét mạch điện H.3.171a với graph định hướng chọn như H.3.171b. Mạch này chứa nguồn áp phụ thuộc dòng i_2 .



Hình 3.171

a) Lập ma trận $\mathbf{Z}_n$:

Ta có:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_{CS} \begin{bmatrix} \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} \text{ với } \mathbf{Z}_{CS} = \begin{bmatrix} Z_2 & 0 \\ -r & Z_3 \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

$$\Rightarrow \mathbf{Z}_n = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & -r & Z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

Phương trình nhánh dạng ma trận:

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{Z}_n(\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n) - \mathbf{E}_n \quad (3.132)$$

với $\mathbf{U}_n = [\dot{U}_1 \dot{U}_2 \dot{U}_3 \dot{U}_4]^T$; $\mathbf{I}_n = [\dot{I}_1 \dot{I}_2 \dot{I}_3 \dot{I}_4]^T$

$$\mathbf{E}_n = [0 0 0 \dot{E}_4]^T$$

Để lập $\mathbf{Y}_n$ ta biến đổi nguồn áp phụ thuộc nối tiếp trở kháng Z_3 thành nguồn dòng phụ thuộc mắc song song với trở kháng Z_3 như H.3.172.

Ta có:

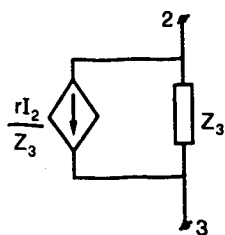
$$\frac{r\dot{I}_2}{Z_3} = \frac{r}{Z_3 Z_2} \dot{U}_2 = rY_2 Y_3 \dot{U}_2$$

vì $\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2$

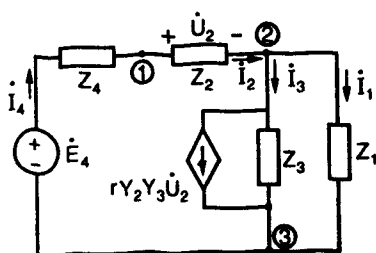
Do đó, mạch H.3.171a có thể được biến đổi thành mạch H.3.173 có chứa nguồn dòng phụ thuộc áp.

Graph cũng được chọn như H.3.171b.

Ta có:



Hình 3.172



Hình 3.173

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{CS} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} \text{ với } \mathbf{Y}_{CS} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_2 & 0 \\ r\mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_3 \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

$$\Rightarrow \mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}_2 & 0 & 0 \\ 0 & r\mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Y}_4 \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

Phương trình nhánh dạng ma trận:

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{Y}_n(\mathbf{U}_n + \mathbf{E}_n) - \mathbf{J}_n \quad (3.133)$$

với $\mathbf{U}_n = [\dot{U}_1 \dot{U}_2 \dot{U}_3 \dot{U}_4]^T; \mathbf{I}_n [\dot{I}_1 \dot{I}_2 \dot{I}_3 \dot{I}_4]^T$

$$\mathbf{E}_n = [0 0 0 \dot{E}_4]^T; \quad \mathbf{J}_n [0 0 0 0]^T$$

Nhận xét: $\mathbf{Y}_n$ cho bởi (3.166) là nghịch đảo của $\mathbf{Z}_n$ cho bởi (3.164).

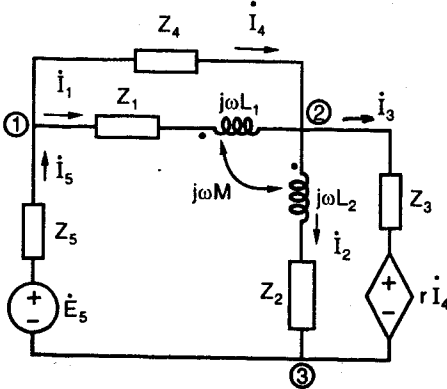
Ví dụ 3.54: Xét mạch điện H.3.174a với graph được chọn như H.3.174b.

a) Lập ma trận $\mathbf{Z}_n$:

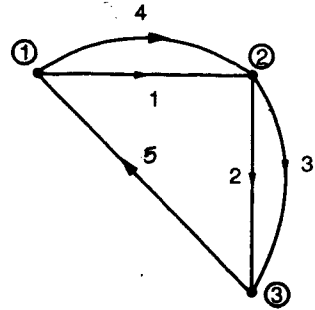
Hai nhánh 1 và 2 có ghép hồ cảm với nhau:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_M \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \text{ với } \mathbf{Z}_M = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

trong đó $Z_{11} = Z_1 + j\omega L_1$; $Z_{22} = Z_2 + j\omega L_2$; $Z_{12} = Z_{21} = j\omega M$.



a)



b)

Hình 3.174

Nhánh 3 chứa nguồn áp phụ thuộc được điều khiển bởi dòng $\dot{I}_4$ trong nhánh 4.

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_{CS} \begin{bmatrix} \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix} \quad \text{với } \mathbf{Z}_{CS} = \begin{bmatrix} Z_3 & r \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix}$$

Suy ra:

$$\mathbf{Z}_n = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & 0 \\ Z_{21} & Z_{22} & \\ & \boxed{\begin{matrix} Z_3 & r \\ 0 & Z_4 \end{matrix}} & \\ 0 & & Z_5 \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

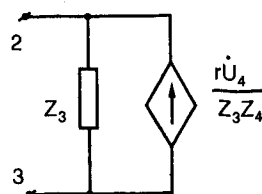
và $\mathbf{U}_n = \mathbf{Z}_n (\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n) - \mathbf{E}_n$ với $\mathbf{E}_n = [0000\dot{E}_5]^T$; $\mathbf{J}_n = [00000]^T$

b) Lập ma trận $\mathbf{Y}_n$:Giả sử $\mathbf{Z}_M$ có ma trận nghịch đảo là $\mathbf{Y}_M$ và đặt:

$$\mathbf{Y}_M = \mathbf{Z}_M^{-1} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

Nguồn áp phụ thuộc ở nhánh 3 có thể biến đổi thành nguồn dòng phụ thuộc áp như H.3.175. Ta có:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{CS} \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix}$$



Hình 3.175

Chú ý

$$\mathbf{Y}_{CS} = \mathbf{Z}_{CS}^{-1} \quad \text{với } \mathbf{Y}_{CS} = \begin{bmatrix} Y_3 & -rY_3Y_4 \\ 0 & Y_4 \end{bmatrix}$$

Suy ra:

$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} & \\ & \boxed{\begin{matrix} Y_3 & -rY_3Y_4 \\ 0 & Y_4 \end{matrix}} & \\ 0 & & Y_5 \end{bmatrix} \quad (3.168)$$

Chú ý

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{Z}_n^{-1}$$

3.8.2 Các phương pháp phân tích mạch dùng ma trận

Việc phân tích dựa trên cơ sở định luật Kirchhoff 1 và 2 dạng ma trận, và phương trình nhánh dạng ma trận.

Định luật Kirchhoff 1 dạng ma trận:

$$\text{hoặc } \left. \begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{I}_n &= 0 \\ \mathbf{Q}\mathbf{I}_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.169a)$$

$$(3.169b)$$

Định luật Kirchhoff 2 dạng ma trận:

$$\mathbf{B}\mathbf{U}_n = 0 \quad (3.170a)$$

$$\text{hoặc (chỉ dùng với graph phẳng)} \quad \mathbf{M}\mathbf{U}_n = 0 \quad (3.170b)$$

Phương trình nhánh dạng ma trận:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}_n &= \mathbf{Z}_n(\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n) - \mathbf{E}_n \\ \text{hoặc} \quad \mathbf{I}_n &= \mathbf{Y}_n(\mathbf{U}_n + \mathbf{E}_n) - \mathbf{J}_n \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (3.171a) \\ (3.171b) \end{aligned}$$

Nếu thay $\mathbf{U}_n$ bởi (3.171a) vào (3.170a) hoặc (3.170b) thì ta suy ra được:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{BZ}_n \mathbf{I}_n &= \mathbf{BE}_n - \mathbf{BZ}_n \mathbf{J}_n \\ \text{hoặc} \quad \mathbf{MZ}_n \mathbf{I}_n &= \mathbf{ME}_n - \mathbf{MZ}_n \mathbf{J}_n \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (3.172a) \\ (3.172b) \end{aligned}$$

Tương tự nếu thay $\mathbf{I}_n$ bởi (3.171b) vào (3.169a) hoặc (3.169b) ta được:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{AY}_n \mathbf{U}_n &= \mathbf{AJ}_n - \mathbf{AY}_n \mathbf{E}_n \\ \text{hoặc} \quad \mathbf{QY}_n \mathbf{U}_n &= \mathbf{QJ}_n - \mathbf{QY}_n \mathbf{E}_n \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (3.173a) \\ (3.173b) \end{aligned}$$

Từ các phương trình trên ta thấy có thể phân tích mạch theo hai cách sau:

- Giải hệ n phương trình đối với n ẩn số là dòng điện trong n nhánh: hệ n phương trình đó bao gồm $(d-1)$ phương trình K1 dạng (3.169a) hoặc (3.169b) và $(n-d+1)$ phương trình dạng (3.172a) hoặc (3.172b) nếu là graph phẳng. Sau khi giải hệ phương trình ta tìm được $\mathbf{I}_n$, từ đó suy ra được $\mathbf{U}_n$ nhờ (3.171a). Phương pháp giải mạch này gọi là *phương pháp dòng nhánh*.

- Giải hệ n phương trình đối với n ẩn số là điện áp trên n nhánh: gồm $(n-d+1)$ phương trình K2 dạng (3.170a) hoặc (3.170b) nếu là graph phẳng và $(d-1)$ phương trình dạng (3.173a) hoặc (3.173b).

Sau khi tìm được điện áp nhánh $\mathbf{U}_n$, dùng (3.171b) ta được dòng điện nhánh $\mathbf{I}_n$. Đó là nội dung của *phương pháp áp nhánh*.

Hai phương pháp dòng nhánh và phương pháp áp nhánh gọi chung là *phương pháp biến nhánh*. Số phương trình phải giải đồng thời ở phương pháp này là n (bằng số nhánh).

Sau đây sẽ xét một số phương pháp khác mà cho phép giảm đáng kể số phương trình phải giải đồng thời so với phương pháp biến nhánh.

1- Phương pháp thế nút

Theo (3.97), các điện áp nhánh có thể được tính theo các thế nút bởi quan hệ:

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} \quad (3.174)$$

trong đó $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{k-1} \varphi_{k+1} \dots \varphi_d]^T$ gọi là ma trận thế nút, ma trận cột có $(d-1)$ hàng với d là số nút. Nút k được chọn là nút gốc ($\varphi_k = 0$).

Trong mục 3.7.5 đã chứng minh rằng các áp nhánh tính theo các thế nút bởi (3.174) sẽ tự động thỏa định luật K2.

Mặt khác từ định luật K1 viết cho các đỉnh (3.169a) và phương trình

nhánh dạng ma trận (3.171b) ta đã suy ra được (3.173a):

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_n\mathbf{U}_n = \mathbf{A}\mathbf{J}_n - \mathbf{A}\mathbf{Y}_n\mathbf{E}_n \quad (3.173a)$$

thay $\mathbf{U}_n$ bởi (3.174) vào (3.173a) ta được:

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_n\mathbf{A}^T\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A}\mathbf{J}_n - \mathbf{A}\mathbf{Y}_n\mathbf{E}_n$$

Đặt: $\mathbf{Y}_d = \mathbf{A}\mathbf{Y}_n\mathbf{A}^T$ gọi là ma trận dẫn nạp nút (đỉnh), là ma trận vuông
(d-1) × (d-1) (3.175)

$\mathbf{J}_d = \mathbf{A}\mathbf{J}_n - \mathbf{A}\mathbf{Y}_n\mathbf{E}_n$ gọi là ma trận nguồn dòng nút (đỉnh), là ma trận
cột có (d-1) hàng (3.176)

Ta được: $\mathbf{Y}_d\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{J}_d$ (3.177)

(3.177) là hệ (d-1) phương trình K1 đối với (d-1) thế nút viết cho (d-1) nút.

Giải hệ (3.177) ta tìm được thế nút:

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{Y}_d^{-1}\mathbf{J}_d \quad (3.178)$$

Biết $\boldsymbol{\varphi}$ ta dùng (3.174) để suy ra $\mathbf{U}_n$, từ đó dùng (3.171b) có thể tính được $\mathbf{I}_n$. Đó là nội dung của phương pháp thế nút.

Nhận xét:

- Nếu mạch không chứa nguồn phụ thuộc thì ma trận $\mathbf{Y}_n$ đối xứng, do đó ma trận $\mathbf{Y}_d$ cũng đối xứng. Nếu mạch chứa nguồn phụ thuộc thì nói chung $\mathbf{Y}_n$ và do đó $\mathbf{Y}_d$ không đối xứng.

- Xét trường hợp mạch không chứa hồ cảm và không chứa nguồn phụ thuộc, nghĩa là nhánh có dạng tổng quát như H.3.156. Khi đó ma trận dẫn nạp nhánh $\mathbf{Y}_n$ có dạng ma trận chéo.

Từ biểu thức $\mathbf{J}_d = \mathbf{A}\mathbf{J}_n - \mathbf{A}\mathbf{Y}_n\mathbf{E}_n$ dễ dàng suy ra phần tử ở hàng thứ i của ma trận $\mathbf{J}_d$ bằng:

$$J_{di} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (J_k - Y_k E_k) \quad (3.179)$$

trong đó: a_{ik} là phần tử của ma trận nút $\mathbf{A}$.

Từ biểu thức $\mathbf{Y}_d = \mathbf{A}\mathbf{Y}_n\mathbf{A}^T$ có thể suy ra phần tử của ma trận $\mathbf{Y}_d$ bằng:

$$Y_{dij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} Y_k \quad (i \neq j) \quad (3.180)$$

$$Y_{dii} = \sum_{k=1}^n (a_{ik})^2 Y_k \quad (3.181)$$

Từ (3.179), (3.180), (3.181) ta có thể suy ra quy tắc (3.7) để thành lập trực tiếp các ma trận $\mathbf{J}_d$ và $\mathbf{Y}_d$ như đã trình bày ở mục 3.2.

Ví dụ 3.55: Xét lại mạch điện H.3.157a với graph H.3.157b trong mục 3.8.1.

Chọn nút 3 là nút gốc ($\phi_3 = 0$) ta được:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{Y}_n \text{ cho bởi (3.134);}$$

$$\mathbf{E}_n = [00\dot{E}_3 0\dot{E}_5]^T; \mathbf{J}_n = [00000 -\dot{J}_5]^T$$

Suy ra:
$$\mathbf{Y}_d = \mathbf{A}\mathbf{Y}_n\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_4 + Y_5 \end{bmatrix}$$

và
$$\mathbf{J}_d = \mathbf{A}(\mathbf{J}_n - \mathbf{Y}_n\mathbf{E}_n) = \begin{bmatrix} Y_3\dot{E}_3 \\ -\dot{J}_5 - Y_5\dot{E}_5 \end{bmatrix}$$

Ta thấy ma trận $\mathbf{Y}_d$ đối xứng.

Ví dụ 3.56: Xét lại mạch điện H.3.164.

Chọn nút 4 là nút gốc ($\phi_4 = 0$). Ta được $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}; \mathbf{Y}_n \text{ cho bởi (3.143)}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{E}_n = [E_1 0000]^T; \mathbf{J}_n = [00000]^T$$

Suy ra:
$$\mathbf{Y}_d = \mathbf{A}\mathbf{Y}_n\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & Y_{23} - Y_2 & -Y_{23} \\ Y_{32} - Y_2 & Y_2 + Y_3 + Y_5 - Y_{23} - Y_{32} & Y_{23} - Y_3 \\ -Y_{32} & Y_{32} - Y_3 & Y_3 + Y_4 \end{bmatrix}$$

trong đó:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1}, Y_4 = \frac{1}{Z_4}, Y_5 = \frac{1}{Z_5}, Y_2 = \frac{L_3}{j\omega(L_2L_3 - M^2)}, Y_3 = \frac{L_2}{j\omega(L_2L_3 - M^2)}$$

$$Y_{23} = Y_{32} = \frac{M}{j\omega(L_2L_3 - M^2)}$$

ta thấy ma trận $\mathbf{Y}_d$ đối xứng (mạch có hồ cảm, không có nguồn phụ thuộc)

$$\mathbf{J}_d = \mathbf{A}(\mathbf{J}_n - \mathbf{Y}_n\mathbf{E}_n) = \begin{bmatrix} Y_1\dot{E}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 3.57: Xét lại mạch điện H.3.173 với graph được chọn như H.3.171b.

Chọn nút 3 là nút gốc ($\phi_3 = 0$). Ta có: $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{Y}_n$ cho bởi (3.166)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{E}_n = [000\dot{E}_4]^T; \mathbf{J}_n = [0000]^T$$

$$\Rightarrow \mathbf{Y}_d = \mathbf{A}\mathbf{Y}_n\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} Y_2 + Y_4 & -Y_2 \\ -Y_2 + rY_2Y_3 & Y_1 + Y_2 + Y_3 - rY_2Y_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_d = \mathbf{A}(\mathbf{J}_n - \mathbf{Y}_n\mathbf{E}_n) = \begin{bmatrix} Y_4\dot{E}_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nhận xét rằng ma trận $\mathbf{Y}_d$ không đối xứng (mạch chứa nguồn phụ thuộc)

2- Phương pháp dòng mắt lưới

Phương pháp dòng mắt lưới chỉ áp dụng được cho mạch có graph phẳng.

Theo (3.113) các dòng điện nhánh có thể được tính theo các biến dòng mắt lưới bởi quan hệ:

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{M}^T \mathbf{I}_m \quad (3.182)$$

trong đó $\mathbf{I}_m = [\dot{I}_{m1} \dot{I}_{m2} \dots \dot{I}_{m,n-d+1}]^T$ gọi là ma trận dòng mắt lưới, là ma trận cột có $n-d+1$ hàng với n là số nhánh, d là số nút.

Trong mục 3.7.5 đã chứng minh rằng các dòng nhánh biểu diễn theo các dòng mắt lưới bởi (3.182) sẽ tự động thỏa mãn định luật K1.

Từ định luật K2 viết cho các mắt lưới (3.170b) và phương trình nhánh (3.171a) ta đã suy ra được (3.172b):

$$\mathbf{MZ}_n\mathbf{I}_n = \mathbf{ME}_n - \mathbf{MZ}_n\mathbf{J}_n \quad (3.182b)$$

thay $\mathbf{I}_n$ bởi (3.182) vào (3.172b) ta được:

$$\mathbf{Z}_m\mathbf{I}_m = \mathbf{E}_m \quad (3.183)$$

với: $\mathbf{Z}_m = \mathbf{MZ}_n\mathbf{M}^T$ gọi là ma trận trở kháng mắt lưới, là ma trận vuông

$$(n-d+1) \times (n-d+1)$$

$\mathbf{E}_m = \mathbf{ME}_n - \mathbf{MZ}_n\mathbf{J}_n$ gọi là ma trận sức điện động mắt lưới, là ma trận

cột có $n-d+1$ hàng.

(3.183) là hệ $(n-d+1)$ phương trình K2 đối với $(n-d+1)$ dòng mắt lưới viết cho $(n-d+1)$ mắt lưới. Giải (3.183) ta tìm được các dòng mắt lưới:

$$\mathbf{I}_m = \mathbf{Z}_m^{-1}\mathbf{E}_m \quad (3.184)$$

Biết $\mathbf{I}_m$, dùng (3.182) ta suy được dòng nhánh $\mathbf{I}_n$.

Nhận xét:

• Nếu mạch không chứa nguồn phụ thuộc thì ma trận $\mathbf{Z}_n$, và do đó ma trận $\mathbf{Z}_m$ đối xứng. Nếu mạch có chứa nguồn phụ thuộc thì nói chung $\mathbf{Z}_m$ và do đó $\mathbf{Z}_n$ không đối xứng.

• Trường hợp mạch không chứa hồ cảm và không chứa nguồn phụ thuộc thì từ $\mathbf{E}_m = \mathbf{M}\mathbf{E}_n - \mathbf{M}\mathbf{Z}_n\mathbf{J}_n$ và $\mathbf{Z}_m = \mathbf{M}\mathbf{Z}_n\mathbf{M}^T$ với chú ý $\mathbf{Z}_n$ là ma trận chéo ta suy ra các phần tử của $\mathbf{E}_m$ và $\mathbf{Z}_m$ bằng:

$$\dot{E}_{mi} = \sum_{k=1}^n m_{ik} (\dot{E}_k - Z_k \dot{J}_k) \quad (3.185)$$

$$Z_{mij} = \sum_{k=1}^n m_{ik} m_{jk} Z_k \quad (i \neq j) \quad (3.186a)$$

$$Z_{mii} = \sum_{k=1}^n (m_{ik})^2 Z_k \quad (3.186b)$$

trong đó m_{ik} , m_{jk} là các phần tử của ma trận mắt lưới $\mathbf{M}$.

Từ (3.185), (3.186a) và (3.186b) có thể suy ra quy tắc (3.14) để thành lập trực tiếp các ma trận $\mathbf{E}_m$ và $\mathbf{Z}_m$ như đã trình bày ở mục 3.3.

Trường hợp mạch có hồ cảm nhưng không có nguồn phụ thuộc thì:

$$Z_{mij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{ik} m_{jl} Z_{kl} \quad (3.187)$$

với Z_{kl} là phần tử của ma trận $\mathbf{Z}_n$ ($Z_{kl} = Z_{lk}$ nếu $l \neq k$)

Từ (3.187) cũng có thể suy ra quy tắc (3.19) để thành lập trực tiếp $\mathbf{Z}_m$ (xem mục 3.4).

Ví dụ 3.58: Xét lại mạch điện H.3.157a với graph H.3.157b. Chọn mắt lưới như H.3.157b. Ta được:

$$\mathbf{I}_m = \begin{bmatrix} \dot{I}_{m1} \\ \dot{I}_{m2} \\ \dot{I}_{m3} \end{bmatrix}; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{Z}_n \text{ cho bởi (3.134)}$$

$$\mathbf{E}_n = [0 \ 0 \ \dot{E}_3 \ 0 \ \dot{E}_5]^T; \mathbf{J}_n = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -J_5]^T$$

Suy ra:

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{M}\mathbf{Z}_n\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_4 & -Z_4 & -Z_2 \\ -Z_4 & Z_4 + Z_5 & 0 \\ -Z_2 & 0 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

và
$$\mathbf{E}_m = \mathbf{M}\mathbf{E}_n - \mathbf{M}\mathbf{Z}_n\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\mathbf{E}}_5 - \mathbf{Z}_5\mathbf{J}_5 \\ -\dot{\mathbf{E}}_3 \end{bmatrix}$$

Nhận xét rằng ma trận $\mathbf{Z}_m$ đối xứng.

Ví dụ 3.59: Xét lại mạch điện H.3.169a với graph H.3.169b. Chọn ba mắt lưới như H.3.169b. Ta được:

$$\mathbf{I}_m = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_{m1} \\ \dot{\mathbf{I}}_{m2} \\ \dot{\mathbf{I}}_{m3} \end{bmatrix}; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \mathbf{Z}_n \text{ cho bởi (3.160)}$$

$$\mathbf{E}_n = [\dot{\mathbf{E}}_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \quad \mathbf{J}_n = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Suy ra:
$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{M}\mathbf{Z}_n\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_{11} & Z_{12} - Z_{11} & -Z_{12} \\ Z_{21} - Z_{11} & Z_3 + Z_{11} + Z_{22} - Z_{12} - Z_{21} & Z_{12} - Z_{22} \\ -Z_{21} & Z_{21} - Z_{22} & Z_2 + Z_{22} \end{bmatrix}$$

và
$$\mathbf{E}_m = \mathbf{M}\mathbf{E}_n - \mathbf{M}\mathbf{Z}_n\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{E}}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 3.60: Xét lại mạch điện H.3.164a với graph H.3.164b. Chọn hai mắt lưới như H.3.164b. Ta được:

$$\mathbf{I}_m = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_{m1} \\ \dot{\mathbf{I}}_{m2} \end{bmatrix}; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{Z}_n \text{ cho bởi (3.142)}$$

$$\mathbf{E}_n = [\dot{\mathbf{E}}_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \quad \mathbf{J}_n = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Suy ra:

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{M}\mathbf{Z}_n\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_4 + j\omega L_2 + j\omega L_3 - 2j\omega M & -Z_4 - j\omega L_3 + j\omega M \\ -Z_4 - j\omega L_3 + j\omega M & Z_4 + Z_5 + j\omega L_3 \end{bmatrix}$$

và
$$\mathbf{E}_m = \mathbf{M}\mathbf{E}_n - \mathbf{M}\mathbf{Z}_n\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{E}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nhận xét: ma trận $\mathbf{Z}_m$ đối xứng (mạch có hồ cảm không có nguồn phụ thuộc).

3- Phương pháp dòng bù cạnh (dòng vòng)

Theo (3.124) định luật K1 viết cho các tập cắt chính có thể trình bày ở dạng:

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{B}^T \mathbf{I}_b \quad (3.188)$$

trong đó $\mathbf{B}$ là ma trận vòng, $\mathbf{I}_b$ là ma trận cột các dòng bù cạnh còn $\mathbf{I}_n$ là ma trận cột các dòng nhánh.

Mặt khác từ định luật K2 viết cho các vòng chính (3.170a) và phương trình nhánh dạng ma trận (3.171a) ta đã suy ra được (3.172a):

$$\mathbf{BZ}_n\mathbf{I}_n = \mathbf{BE}_n - \mathbf{BZ}_n\mathbf{J}_n \quad (3.172a)$$

Thay $\mathbf{I}_n$ bởi (3.188) vào (3.172a) ta được:

$$\mathbf{Z}_v\mathbf{I}_b = \mathbf{E}_v \quad (3.189)$$

trong đó:

$$\mathbf{Z}_v = \mathbf{BZ}_n\mathbf{B}^T \text{ gọi là ma trận trở kháng vòng, là ma trận vuông kích thước } (n-d+1) \times (n-d+1) \quad (3.190)$$

$$\mathbf{E}_v = \mathbf{BE}_n - \mathbf{BZ}_n\mathbf{J}_n \text{ gọi là ma trận sức điện động vòng, là ma trận cột có } n-d+1 \text{ hàng.} \quad (3.191)$$

(3.189) là hệ $(n-d+1)$ phương trình K2 đối với $(n-d+1)$ dòng bù cạnh viết cho $(n-d+1)$ vòng chính. Giải (3.189) ta tìm được các dòng bù cạnh:

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{Z}_v^{-1}\mathbf{E}_v \quad (3.192)$$

Biết $\mathbf{I}_b$ ta suy được dòng trên tất cả các nhánh $\mathbf{I}_n = \mathbf{B}^T\mathbf{I}_b$.

Có thể gán cho mỗi vòng chính một biến gọi là *dòng vòng*, cùng chiều và trị số bằng với dòng bù cạnh ứng với vòng chính đó. Ký hiệu $\mathbf{I}_v$ là ma trận cột các dòng vòng thì:

$$\mathbf{I}_v = \mathbf{I}_b$$

$$\mathbf{Z}_v\mathbf{I}_v = \mathbf{E}_v \quad (3.193)$$

$$\Rightarrow \mathbf{I}_v = \mathbf{Z}_v^{-1}\mathbf{E}_v \quad (3.194)$$

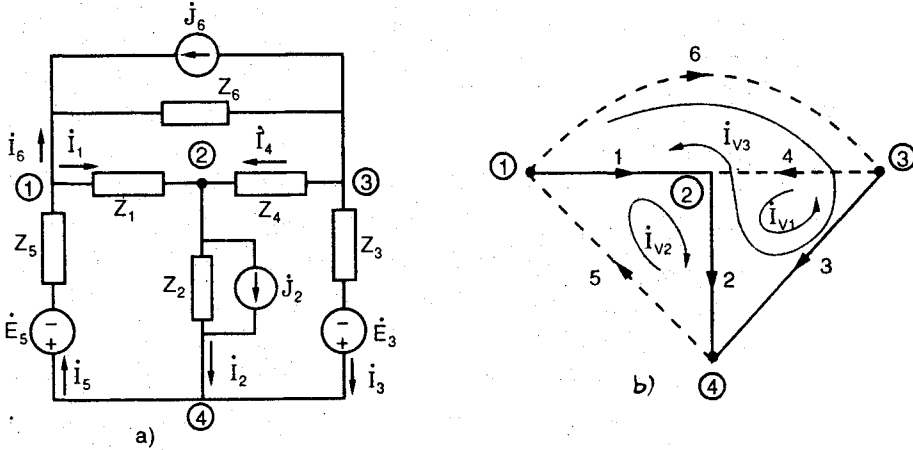
$$\text{và} \quad \mathbf{I}_n = \mathbf{B}^T\mathbf{I}_v \quad (3.195)$$

Từ biểu thức (3.195) suy ra dòng điện trên một nhánh bằng tổng đại số các dòng vòng chảy qua nhánh đó, dòng vòng nào cùng chiều với chiều của nhánh sẽ mang dấu "+", ngược lại mang dấu "-".

Cũng có nhận xét rằng nếu mạch không chứa nguồn phụ thuộc thì ma trận $\mathbf{Z}_n$ và do đó ma trận $\mathbf{Z}_v = \mathbf{BZ}_n\mathbf{B}^T$ đối xứng, còn nếu mạch có chứa nguồn phụ thuộc thì nói chung ma trận $\mathbf{Z}_n$ và $\mathbf{Z}_v$ không đối xứng.

Ngoài ra từ các biểu thức (3.190) và (3.191) của các ma trận $\mathbf{Z}_v$ và $\mathbf{E}_v$ suy ra có thể thành lập trực tiếp các ma trận này theo cách thức tương tự như đối với $\mathbf{Z}_m$, $\mathbf{E}_m$ ở phương pháp dòng mắt lưới.

Ví dụ 3.61: Xét mạch điện H.3.176a với graph và cây, bù cây được chọn như H.3.176b. Có ba cành 1, 2, 3 và ba bù cành 4, 5, 6. Ba vòng chính là: (4,2,3), (5,1,2) và (6,3,2,1).



Hình 3.176

Với mỗi vòng chính ta gán cho một dòng vòng có chiều cùng chiều với bù cành ứng với vòng chính đó, như hình vẽ.

$$\text{Ta có: } \mathbf{I}_v = \begin{bmatrix} \dot{I}_{v1} \\ \dot{I}_{v2} \\ \dot{I}_{v3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_b$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Z}_n = \begin{bmatrix} Z_1 & & & & & \\ & Z_2 & 0 & & & \\ & & Z_3 & & & \\ & & & Z_4 & & \\ 0 & & & & Z_5 & \\ & & & & & Z_6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_n = [0 \ 0 \ \dot{E}_3 \ 0 \ -\dot{E}_5 \ 0]$$

$$\mathbf{J}_n = [0 \ -\dot{J}_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dot{J}_6]$$

Suy ra:

$$\mathbf{Z}_v = \mathbf{BZ}_n\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} Z_2 + Z_3 + Z_4 & Z_2 & -Z_2 - Z_3 \\ Z_2 & Z_1 + Z_2 + Z_5 & -Z_1 - Z_2 \\ -Z_2 - Z_3 & -Z_1 - Z_2 & Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_v = \mathbf{BE}_n - \mathbf{BZ}_n\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} -\dot{E}_3 + Z_2\dot{I}_2 \\ -\dot{E}_5 + Z_2\dot{J}_2 \\ \dot{E}_3 - Z_2\dot{J}_2 - Z_6\dot{J}_6 \end{bmatrix}$$

Nhận xét rằng ma trận $\mathbf{Z}_v$ đối xứng.

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{B}^T \mathbf{I}_v \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{I}_{v2} - \dot{I}_{v3} & \leftarrow \text{qua nhánh 1 có hai dòng vòng } \dot{I}_{v2} \text{ và } \dot{I}_{v3} \text{ chảy} \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_{v1} + \dot{I}_{v2} - \dot{I}_{v3} & \leftarrow \text{qua nhánh 2 có ba dòng vòng } \dot{I}_{v1}, \dot{I}_{v2} \text{ và } \dot{I}_{v3} \text{ chảy} \\ \dot{I}_3 = \dot{I}_{v1} + \dot{I}_{v3} & \leftarrow \text{qua nhánh 3 có hai dòng vòng } \dot{I}_{v1} \text{ và } \dot{I}_{v3} \text{ chảy} \\ \dot{I}_4 = \dot{I}_{v1} \\ \dot{I}_5 = \dot{I}_{v2} \\ \dot{I}_6 = \dot{I}_{v3} \end{cases}$$

4- Phương pháp áp càn

Theo (3.125) định luật K2 viết cho các vòng chính có thể viết ở dạng:

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{Q}^T \mathbf{U}_c \quad (3.196)$$

trong đó $\mathbf{Q}$ là ma trận tập cắt, $\mathbf{U}_c$ là ma trận cột các áp càn.

Mặt khác từ định luật K1 viết cho các tập cắt chính (3.169b) và phương trình nhánh (3.171b) ta đã suy ra được (3.173b):

$$\mathbf{QY}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{QJ}_n - \mathbf{QY}_n \mathbf{E}_n \quad (3.173b)$$

Thay $\mathbf{U}_n$ bởi (3.196) vào (3.173b) ta được:

$$\mathbf{Y}_c \mathbf{U}_c = \mathbf{J}_c \quad (3.197)$$

trong đó

$$\mathbf{Y}_c = \mathbf{QY}_n \mathbf{Q}^T \quad (3.198)$$

gọi là ma trận dẫn nạp tập cắt, là ma trận vuông $(d-1) \times (d-1)$;

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{QJ}_n - \mathbf{QY}_n \mathbf{E}_n \quad (3.199)$$

gọi là ma trận nguồn dòng tập cắt, là ma trận cột có $(d-1)$ hàng. (3.197) là hệ $(d-1)$ phương trình K1 đối với $(d-1)$ áp càn viết cho $(d-1)$ tập cắt chính. Giải (3.197) ta tìm được các áp càn:

$$\mathbf{U}_c = \mathbf{Y}_c^{-1} \mathbf{J}_c \quad (3.200)$$

từ đó suy ra được điện áp trên tất cả các nhánh $\mathbf{U}_n = \mathbf{Q}^T \mathbf{U}_c$.

Nhận xét rằng nếu mạch không chứa nguồn phụ thuộc thì ma trận $\mathbf{Y}_c$ đối xứng vì $\mathbf{Y}_n$ đối xứng, ngược lại nếu mạch chứa nguồn phụ thuộc thì nói chung $\mathbf{Y}_c$ không đối xứng.

Từ biểu thức (3.198), (3.199) của $\mathbf{Y}_c$ và $\mathbf{J}_c$ cũng có thể suy ra cách thành lập trực tiếp các ma trận này trong trường hợp mạch không chứa hồ cảm và không chứa nguồn phụ thuộc như sau:

Phần tử J_{ci} ở hàng thứ i của J_c bằng tổng đại số các nguồn dòng (kể cả các nguồn dòng tương đương với nguồn áp) của các nhánh thuộc tập cắt chính thứ i , nếu nguồn dòng ngược chiều với chiều tập cắt thì mang dấu “+” còn nếu cùng chiều với chiều tập cắt thì mang dấu “-”.

Phần tử Y_{cii} (nằm trên đường chéo chính của Y_c) = tổng các dẫn nạp của các nhánh thuộc tập cắt chính thứ i .

Y_{cij} ($i \neq j$) = $\pm$ (tổng các dẫn nạp của các nhánh chung của hai tập cắt chính thứ i và j); lấy dấu “+” nếu chiều của hai cành ứng với hai tập cắt i và j là thuận chiều khi đi từ mặt kín này sang mặt kín kia, ngược lại lấy dấu “-”.

Ví dụ 3.62: Xét lại mạch điện hình H.3.176a với graph và cây được vẽ lại trên H.3.177.

Các cành: 1, 2, 3

Các bù cành: 4, 5, 6

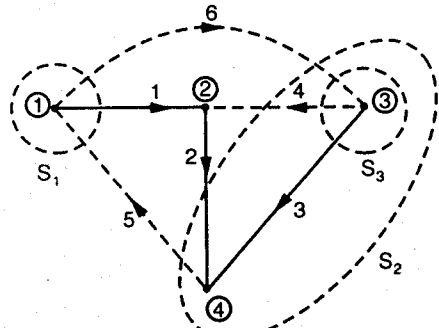
Có ba tập cắt chính (1,5,6), (2,4,5,6) và (3,4,6).

Ta có:

$$U_c = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix}$$

$$E_n = [0 \ 0 \ E_3 \ 0 \ -E_5 \ 0]^T$$

$$J_n = [0 \ -J_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ J_6]^T$$



Hình 3.177

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; Y_n = \begin{bmatrix} Y_1 & & & & & \\ & Y_2 & & & & 0 \\ & & Y_3 & & & \\ & & & Y_4 & & \\ 0 & & & & Y_5 & \\ & & & & & Y_6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Suy ra: } \mathbf{J}_c = \mathbf{Q}\mathbf{J}_n - \mathbf{Q}\mathbf{Y}_n\mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_6 - \mathbf{Y}_5\mathbf{E}_5 \\ -\mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_6 - \mathbf{Y}_5\mathbf{E}_5 \\ -\mathbf{J}_6 - \mathbf{Y}_3\mathbf{E}_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{và } \mathbf{Y}_c = \mathbf{Q}\mathbf{Y}_n\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_5 + \mathbf{Y}_6 & \mathbf{Y}_5 + \mathbf{Y}_6 & -\mathbf{Y}_6 \\ \mathbf{Y}_5 + \mathbf{Y}_6 & \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_5 + \mathbf{Y}_6 & -(\mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_6) \\ -\mathbf{Y}_6 & -(\mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_6) & \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_6 \end{bmatrix}$$

Nhận xét rằng ma trận $\mathbf{Y}_c$ đối xứng.

Khi đi từ mặt kín S_1 (ứng với cạnh 1) sang mặt kín S_3 (ứng với cạnh 3) theo đường gồm ba cạnh 1, 2, 3 thì ta đi cùng chiều với chiều của cạnh 1 nhưng lại đi ngược chiều với chiều của cạnh 3 nên số hạng $Y_{13} = Y_{31}$ của $\mathbf{Y}_c$ lấy dấu âm là $-\mathbf{Y}_6$. Khi đi từ mặt kín S_1 sang S_2 thì ta đi cùng chiều với chiều cạnh 1 và cũng đi cùng chiều với chiều cạnh 2 nên số hạng $Y_{12} = Y_{21}$ lấy dấu dương là $\mathbf{Y}_5 + \mathbf{Y}_6$.

MẠCH BA PHA

4.1 MẠCH NHIỀU PHA VÀ BA PHA

Để dẫn đến khái niệm về mạch nhiều pha, ta giả thiết rằng, trong từ trường được tạo nên do sự quay của nam châm hai cực của máy phát (H.4.1), có đặt hai cuộn dây ở các vị trí rãnh thích hợp.

Cả hai cuộn dây đặt dọc theo vòng tạo nên một góc α .

Bắt đầu cuộn dây thứ nhất được ký hiệu là 1' và kết thúc của nó là 1, và tương tự đối với cuộn dây thứ hai có bắt đầu là 2', kết thúc là 2. Nếu nam châm được chế tạo sao cho phân bố cảm ứng từ dọc theo mạch là sin, thì trong cuộn dây 1 sẽ cảm ứng một điện áp:

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi) \quad (4.1)$$

và trong cuộn dây thứ hai :

$$e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi - \alpha) \quad (4.2)$$

Ở đây ψ là góc pha ban đầu của điện áp e_1 tại thời điểm $t = 0$, thường được chấp nhận giá trị bằng không, do đó:

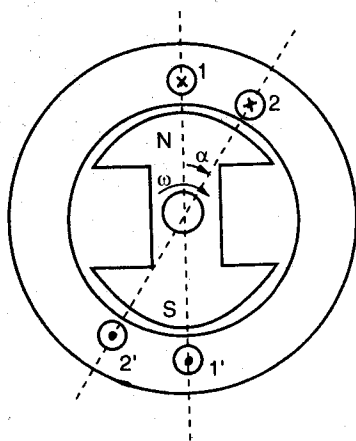
$$e_1 = E_{1m} \sin \omega t$$

$$e_2 = E_{2m} \sin(\omega t - \alpha)$$

Như có thể thấy, cả hai điện áp cảm ứng đều có cùng tần số góc (hay f), nó chỉ khác nhau một góc dịch pha α .

Biên độ và giá trị hiệu dụng của điện áp cảm ứng E_{1m} , E_{2m} , tỉ lệ với số vòng dây quấn trên máy phát. Nếu số vòng dây là như nhau, thì điện áp cảm ứng có biên độ (và trị hiệu dụng) là như nhau.

Các cuộn dây có thể được sử dụng riêng rẽ như mỗi nguồn độc lập, để cung cấp năng lượng cho các tải. Mỗi một trong chúng, cộng với tải, có thể tạo nên những mạch điện riêng biệt. Chú ý rằng các điện áp cảm ứng có



Hình 4.1: Hai cuộn dây của máy phát tạo nên 1 góc α

pha khác nhau, do đó máy phát điện trong trường hợp này được gọi là máy phát nhiều pha.

Số pha của một máy phát có thể hai, ba hoặc nhiều hơn, nhưng phổ biến hơn cả là máy phát ba pha. Máy phát nhiều pha gọi là đối xứng khi điện áp hiệu dụng của mỗi pha bằng nhau, còn các quá trình thời gian sai khác nhau một góc pha như nhau.

Trong các máy phát đối xứng có số pha là m , các cuộn dây được chế tạo như nhau và được đặt đối xứng, sao cho góc dịch pha của các điện áp kế tiếp nhau có giá trị là $\left(K \cdot \frac{2\pi}{m}\right)$, trong đó K là số tự nhiên ($K \leq m$) biểu thị bậc đối xứng. Thông thường người ta dùng đối xứng bậc nhất tương ứng với giá trị của $K = 1$. Vậy trong mạch có đối xứng bậc nhất, các pha kề nhau khác nhau một góc bằng $\left(\frac{2\pi}{m}\right)$.

Mạch được cung cấp bởi máy phát nhiều pha được gọi là mạch nhiều pha, phổ biến nhất là mạch ba pha đối xứng, trong đó góc dịch pha giữa các điện áp kế nhau là $\frac{2\pi}{3}$ (tức 120°). Trong chương 4, ta sẽ đề cập chủ yếu đến loại mạch này.

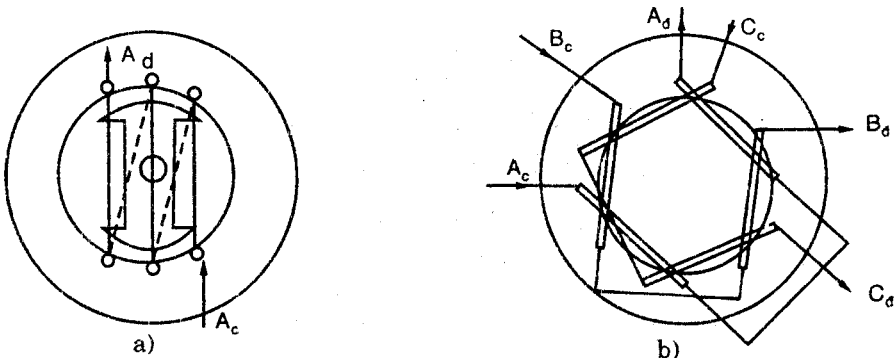
Mỗi một pha trong mạch ba pha được ký hiệu là A, B, C hay a, b, c. Điện áp tương ứng trên mỗi pha khi đã xác định pha A sẽ có dạng như sau:

$$e_a = E_{pm} \sin (\omega t + \varphi)$$

$$e_b = E_{pm} \sin \left(\omega t + \varphi - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$e_c = E_{mp} \sin \left(\omega t + \varphi - \frac{4\pi}{3} \right) \quad (4.3)$$

trong đó, E_{pm} là biên độ điện áp mỗi pha, φ là góc pha ban đầu của pha A, thường người ta chọn $\varphi = 0$. Các chỉ số pha chúng ta sẽ ký hiệu qua các ký tự a, b, c.



Hình 4.2: a) Máy phát hai cực b) Phần tĩnh (stator) của máy phát bốn cực

Sơ đồ của máy phát ba pha hai cực được biểu diễn trên H.4.2a. Bắt đầu của các cuộn dây pha, ta ký hiệu qua các chữ A_d, B_d, C_d và kết thúc là A_c, B_c, C_c . Các cuộn dây được đặt trong sáu rãnh đối diện nhau từng cặp.

Một vòng quay của nam châm có một cặp cực tương ứng với một chu kỳ của điện áp. Trong trường hợp tổng quát, với số cặp cực là p và tốc độ quay của nam châm là n vòng/phút, thì tần số của điện áp cảm ứng tương tự như đối với máy phát một pha.

$$f = \frac{pn}{60}$$

Trên H.4.3a là quá trình điện áp cảm ứng trong một pha của máy phát ba pha, còn trên H.4.3b là đồ thị vectơ. Các vectơ có môđun được ký hiệu lần lượt là E_{am}, E_{bm}, E_{cm} có giá trị hiệu dụng E_a, E_b, E_c . Nếu vectơ điện áp của pha A được chọn là vectơ cơ sở của mạch ba pha, thì áp dụng phương pháp biên độ phức, ta có vectơ phức điện áp các pha lần lượt là:

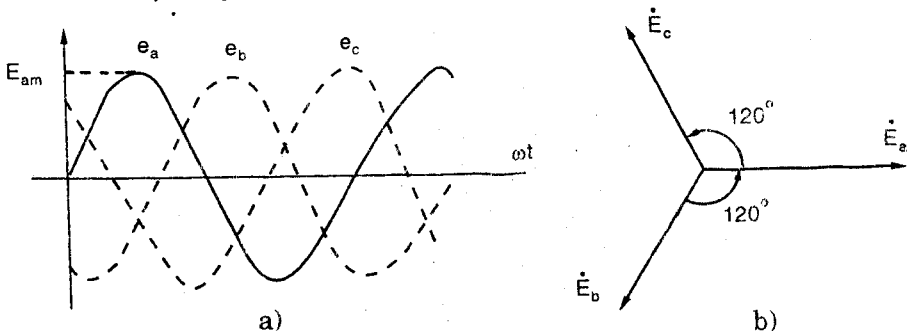
$$\dot{E}_a = E_p e^{j\varphi}$$

$$\dot{E}_b = E_p e^{j(\varphi - \frac{2\pi}{3})} = \dot{E}_a e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \dot{E}_a \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{E}_c = E_p e^{j(\varphi - \frac{4\pi}{3})} = \dot{E}_a e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \dot{E}_a \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (4.4)$$

Trong trường hợp minh họa trên H.4.3a,b ta đã chọn góc pha ban đầu $\varphi = 0$.

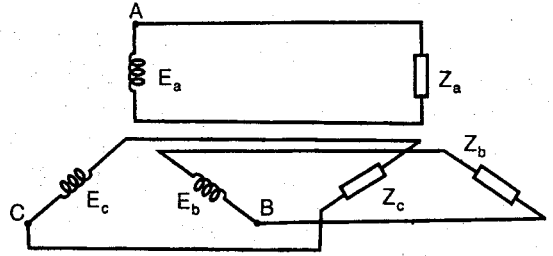
Mạch ba pha trong đó mỗi pha được dùng như là một nguồn áp độc lập cung cấp cho các tải được gọi là mạch ba pha không kết nối. Mạch như vậy được biểu diễn trên H.4.4. Nó bao gồm máy phát ba pha (được vẽ dưới dạng sơ đồ của các cuộn dây ba pha), sáu dây dẫn nối giữa nguồn và tải.



Hình 4.3: a) Quá trình thời gian b) Đồ thị vectơ

Mạch không kết nối không được dùng phổ biến do có nhiều dây dẫn

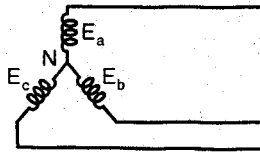
không cần thiết để nối nguồn và tải. Có thể thấy rằng, với hai mạch điện bất kỳ, có thể nối với nhau tại một điểm, mà không gây nên một sự thay đổi nào về dòng và áp trong mạch, điều đó cho phép ghép nối mạch ba pha với số dây dẫn ít hơn. Mạch ba pha thường được ghép nối theo hai kiểu phổ biến: kiểu sao và kiểu tam giác.



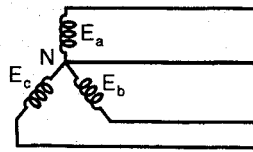
Hình 4.4: Mạch ba pha không kết nối

4.2 GHÉP NỐI MẠCH BA PHA

Khi nối tất cả các đầu cuối A_c, B_c, C_c của các cuộn dây pha của máy phát ba pha lại với nhau, ta sẽ có hệ thống nguồn nối sao. Từ các đầu dây A_d, B_d, C_d có thể độc lập nối đến tải. Ba dây dẫn xuất phát từ A_c, B_c, C_c có thể thay thế bằng một dây dẫn hoặc có thể bỏ đi. Như vậy ta sẽ có sơ đồ mạch nối sao ba dây hay bốn dây (H.4.5a, b).

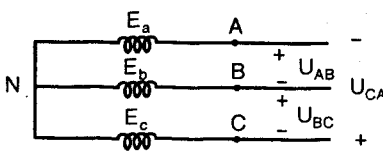


Hình 4.5: a) Nối sao ba dây

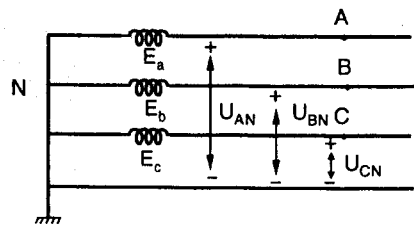


b) Nối sao bốn dây

Ngoài ra, người ta cũng thường biểu diễn kiểu ghép này theo hình vẽ khác như trên H.4.6a,b.



Hình 4.6: a) Nối sao ba dây;



b) Nối sao bốn dây

Điểm chung để nối các đầu dây ba pha của máy phát được gọi là điểm trung tính của nguồn. Trong mạch bốn dây, và đôi khi trong mạch nối sao ba dây, điểm này được nối đất (H.4.6b). Khi đó, điện thế của điểm này bằng điện thế của đất.

Dây dẫn nối từ điểm trung tính được gọi là dây trung tính của mạch. Ba dây còn lại được gọi là dây pha.

Trong mạch nối sao ba dây, ta có ba điện áp. Mỗi điện áp được xác

định giữa hai dây pha khác nhau, đó là U_{ab} , U_{bc} , U_{ca} chỉ số điện áp được đánh theo thứ tự là a-b, b-c, c-a. Trong mạch bốn dây, ta phân biệt điện áp giữa hai dây pha và điện áp giữa một dây pha và dây trung tính.

Điện áp giữa hai dây pha bất kỳ, được gọi là điện áp dây.

Điện áp giữa một dây pha với điểm trung tính hay dây trung tính (ở mạch nối sau bốn dây) được gọi là điện áp pha. Nếu mạch nối sao không có tải, thì các điện áp pha bằng nhau và tương ứng với điện áp nguồn cung cấp của từng pha e_a , e_b , e_c .

Điện áp giữa các pha được ký hiệu là chữ U với chỉ số của hai pha đã cho và được biểu diễn như trên H.4.6.

Ta có:

$$u_{AB} = u_{AN} - u_{BN} \quad (4.5a)$$

$$u_{BC} = u_{BN} - u_{CN} \quad (4.5b)$$

$$u_{CA} = u_{CN} - u_{AN} \quad (4.5c)$$

Nếu các áp pha được biểu diễn dưới dạng:

$$u_{AN} = U_{pm} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$u_{BN} = U_{pm} \sin(\omega t + \varphi - 120^\circ)$$

$$u_{CN} = U_{pm} \sin(\omega t + \varphi - 240^\circ)$$

Thì ta sẽ có:

$$\begin{aligned} u_{AB} &= U_{pm} \sin(\omega t + \varphi) - \sin(\omega t + \varphi - 120^\circ) \\ &= 2U_{pm} \cos t (\omega t + \varphi - 60^\circ) \sin 60^\circ \\ &= \sqrt{3}U_{pm} \sin(\omega t + \varphi + 30^\circ) \\ &= U_{dm} \sin(\omega t + \varphi + 30^\circ) \end{aligned}$$

Tương tự cho các điện áp còn lại:

$$\begin{aligned} u_{BC} &= \sqrt{3}U_{pm} \sin(\omega t + \varphi - 90^\circ) = U_{dm} \sin(\omega t + \varphi - 90^\circ) \\ u_{CA} &= \sqrt{3}U_{pm} \sin(\omega t + \varphi - 210^\circ) = U_{dm} \sin(\omega t + \varphi - 210^\circ) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Trong các công thức của (4.7), φ là góc pha ban đầu của pha A. Giá trị $U_{dm} = \sqrt{3}U_{pm}$ là biên độ điện áp giữa các pha lớn hơn biên độ áp pha $\sqrt{3}$ lần.

$$U_{dm} = \sqrt{3}U_{pm} \quad (4.8)$$

Khi chia hai vế của (4.8) cho $\sqrt{2}$, ta cũng sẽ được quan hệ giữa các giá trị hiệu dụng của áp dây và áp pha:

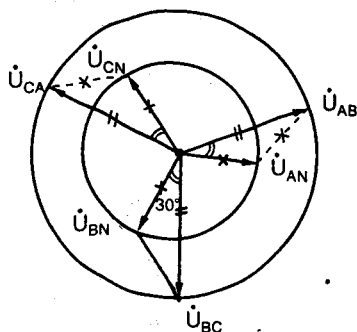
$$U_d = \sqrt{3}U_p \quad (4.8a)$$

Trên H.4.7, chúng ta đã biểu diễn ba vectơ $\dot{U}_{AN}$ $\dot{U}_{BN}$ $\dot{U}_{CN}$ của các điện áp pha đối xứng. Để có được vectơ $\dot{U}_{AB}$ chúng ta sử dụng biểu thức:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{BN}$$

tức là cộng vectơ $\dot{U}_{AN}$ với vectơ $-\dot{U}_{BN}$ có chiều ngược lại với vectơ $\dot{U}_{BN}$.

Như có thể thấy trên hình vẽ, điện áp $\dot{U}_{AB}$ nhanh pha hơn so với $\dot{U}_{AN}$ một góc 30° , còn về môđun, thì lớn hơn $\sqrt{3}$ lần. Tương tự cho các điện áp khác: $\dot{U}_{BC}$ và $\dot{U}_{CA}$.



Hình 4.7: Đồ thị vectơ của điện áp pha và điện áp dây

Trong thực tế, hệ thống bốn dây có điện áp pha 220V được sử dụng phổ biến hơn cả. Điện áp dây (giữa các pha) của nó là $U_d = \sqrt{3} \cdot 220 \approx 380V$. Để mô tả hệ thống này người ta thường viết 380/220V. Điều đó có nghĩa là điện áp dây là 380V và điện áp pha là 220V. Nếu điểm trung tính của nguồn được nối đất thì không có dây dẫn nào có điện áp cao hơn 220V.

Do giới hạn trên của điện áp thấp là 250V so với đất, nên hệ thống nối sao có điện áp 380/220V thuộc vào mạch điện áp thấp.

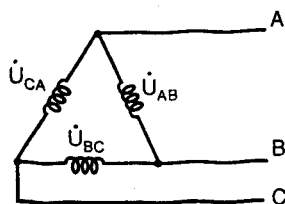
Một tính chất đặc biệt của hệ thống ba pha đối xứng là tổng của ba dòng hay áp đối xứng, dịch pha nhau một góc 120° , tại mỗi thời điểm bất kỳ đều bằng không. Ta có:

$$\dot{E}_a + \dot{E}_b + \dot{E}_c = \dot{E}_a \left[1 - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] = 0 \quad (4.9)$$

Do đó, có thể đưa ra một khả năng nối các cuộn dây của máy phát ba pha đối xứng bằng cách đầu cuối của cuộn dây pha này nối với đầu của cuộn dây pha kia để tạo nên mạch như H.4.8. Sơ đồ biểu diễn cách nối này tạo nên một tam giác, nên mạch này được gọi là mạch tam giác.

Như vậy hệ thống nối tam giác là hệ thống trong đó cuối của cuộn dây pha này nối với đầu của cuộn dây pha kia. Từ các điểm nối chung của các cuộn dây tạo thành các đỉnh của tam giác, người ta nối ba dây dẫn đi đến tải (H.4.8).

Các dây dẫn trong hệ thống ba dây dẫn được ký hiệu bằng các chữ cái A, B, C. Điện áp pha của

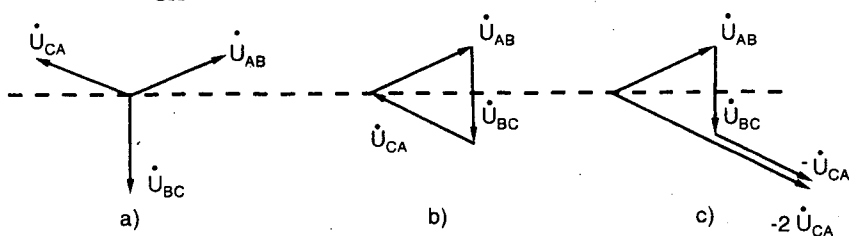


Hình 4.8: Mạch nối tam giác

mạch nối tam giác bằng điện áp dây của nó, ta ký hiệu bằng hai chữ số $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$.

Cần lưu ý rằng, khi nối sai tam giác của cuộn dây của máy phát, ví dụ nối ngược một dây pha, thì tổng điện áp nguồn từ chúng sẽ bằng gấp đôi điện áp nguồn pha bị nối sai, do đó trong mạch tam giác đóng kín có thể có dòng rất lớn, sẽ dẫn đến làm hư các cuộn dây.

Trên H.4.9a là đồ thị vectơ của ba điện áp nguồn đối xứng của hệ thống ba pha nối tam giác. Trên H.4.9b là đồ thị tổng điện áp khi nối đúng tam giác và H.4.9c là đồ thị khi nối sai các cực pha C-A. Điện áp nguồn tổng trong mạch các cuộn dây khi nối đúng là bằng không còn khi nối sai như trên là $-2U_{CA}$.



Hình 4.9: a) Đồ thị vectơ điện áp khi mạch đấu tam giác

b) Tổng điện áp bằng không khi mắc đúng

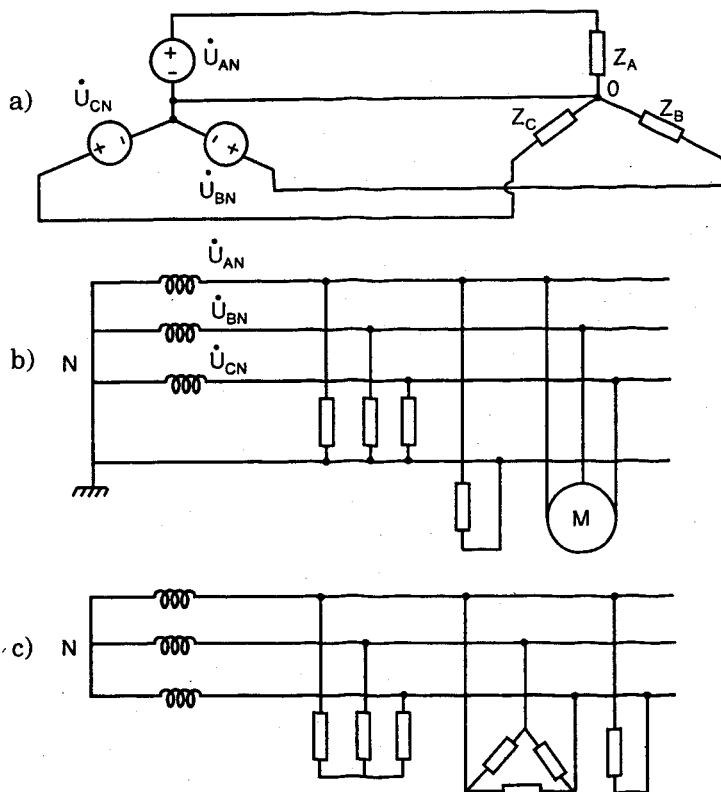
c) Tổng điện áp bằng $-2\dot{U}_{CA}$ khi mắc sai pha C-A.

4.3 MẠCH BA PHA NỐI SAO ĐỐI XỨNG BỐN DÂY

Trên H.4.4, ta biểu diễn mạch ba pha không ghép nối, trong đó mỗi pha của nguồn cung cấp cùng với tải hợp thành một mạch điện riêng biệt. Nếu ba dây trở về được nối lại với nhau, tức là khi ta chỉ dùng một dây trở về cho cả ba pha của nguồn, ta sẽ được hệ thống ba pha bốn dây trong mạch có tải (H.4.10a). Điểm trung bình của nguồn điện áp ta ký hiệu là N còn tải là O.

Nguồn cung cấp được xem là lý tưởng nếu điện áp trên các cực của nó không phụ thuộc vào dòng tải. Điều kiện này sẽ được thỏa mãn khi trở kháng trong của nguồn và trở kháng đường dây từ nguồn đến điểm cung cấp là nhỏ không đáng kể. Khi đó điện áp nguồn sẽ không phụ thuộc vào dòng tải. Ta có:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN}}{Z_A}$$



Hình 4.10: a) Hệ thống bốn dây nối sao; b) Hệ thống bốn dây với tải ba pha và một pha; c) Hệ thống ba dây với tải ba pha và một pha

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN}}{Z_B}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN}}{Z_C}$$

(4.10)

Các dòng điện chảy qua các cuộn dây pha của nguồn được gọi là dòng pha nguồn. Tương tự ta có dòng pha tải. Dòng điện chạy trong dây dẫn được gọi là dòng dây.

Trong mạch nối sao, dòng dây bằng dòng pha. Qua dây trung tính sẽ có dòng điện:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$$

(4.11)

Trong trường hợp tải đối xứng, tức là các trở kháng tải hoàn toàn giống nhau $Z_A = Z_B = Z_C$, với ký hiệu là Z không cần chỉ số bên cạnh. Khi đó dòng trong các pha của tải sẽ là:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN}}{Z}$$

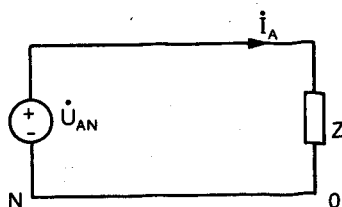
$$\begin{aligned}\dot{I}_B &= \frac{\dot{U}_{BN}}{Z} = \frac{\dot{U}_{AN}}{Z} e^{-j120^\circ} = \dot{I}_A e^{-j120^\circ} \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_{CN}}{Z} = \frac{\dot{U}_{AN}}{Z} e^{j120^\circ} = \dot{I}_A e^{-j240^\circ}\end{aligned}\quad (4.12)$$

Và dòng trên dây trung tính:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A [1 + e^{-j120^\circ} + e^{-j240^\circ}] = 0$$

Rõ ràng theo các phương trình của 4.12, để xác định các dòng điện trong một mạch ba pha đối xứng đầu sao, ta chỉ cần xác định giá trị dòng điện của pha A. Và như vậy, dòng điện $\dot{I}_A$ sẽ được tìm từ sơ đồ H.4.11.

Phương pháp phân tích mạch ba pha đối xứng, nối sao, trong đó chỉ xác định giá trị dòng điện pha A bằng sơ đồ H.4.11, rồi mới suy ra các giá trị ở các pha khác bằng các phương trình 4.12, được gọi là phương pháp sơ đồ một sợi.



Hình 4.11

Phương pháp sơ đồ một sợi được xem là phương pháp chủ yếu để phân tích mạch ba pha đối xứng.

Ba tải một pha giống hệt nhau được nối sao và được mắc sao cho có thể đồng thời đóng vào và đồng thời ngắt ra từ một hệ nguồn ba pha, có thể được coi như một tải ba pha trong hệ thống nối sao. Ta thường gặp trong thực tế các tải ba pha được nối theo qui tắc đối xứng. Loại tải ba pha đối xứng phổ biến nhất là các động cơ ba pha.

Hệ thống bốn dây chỉ được dùng trong lĩnh vực điện áp thấp. Các tải ba pha được nối vào ba dây pha của hệ thống, còn các tải một pha (trong các thiết bị chiếu sáng và gia đình) thì được nối giữa một dây pha và dây trung tính (H.4.10b). Một số tải một pha đặc biệt, ví dụ như biến áp hàn, được nối giữa hai dây pha.

Đối với các hệ thống sao ba dây, các tải ba pha và tải một pha được mắc vào theo sơ đồ H.4.10c.

Ví dụ 4.1: Cho hệ thống ba pha như trên H.4.10a, biết $\dot{U}_{AN} = 220\angle 0^\circ \text{ V}$ và các trở kháng pha $Z_A = Z_B = Z_C = 17,3 + j10 \text{ } (\Omega)$. Xác định các dòng điện trên các dây và trên dây trung tính.

Giải

Theo quan hệ đối xứng, ta chỉ cần xác định giá trị dòng điện pha A:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN}}{Z_A} = \frac{220\angle 0^\circ}{17,3 + j10} = \frac{220\angle 0^\circ}{20\angle 30^\circ} = 11\angle -30^\circ \text{ A}$$

Và do đó: $\dot{I}_B = 11\angle -150^\circ \text{ A}$

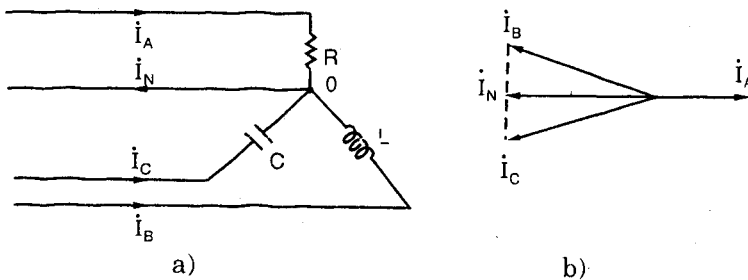
$$\dot{I}_C = 11\angle 90^\circ \text{ A}$$

Dòng điện qua dây trung tính:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$$

Trong trường hợp tải bất đối xứng, tức là các giá trị Z_A , Z_B , Z_C không bằng nhau, thì việc phân tích mạch ba pha bốn dây thuần túy chỉ dựa vào các phương pháp phân tích mạch và các định luật Ohm, định luật Kirchhoff dạng phức (xem chương 2 và chương 3). Để đơn giản chúng ta xét một ví dụ sau đây.

Ví dụ 4.2: Cho một hệ nguồn ba pha đối xứng 380/220V nối vào một hệ tải như trên H.4.12a. Biết $R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 22\Omega$. Xác định các giá trị dòng dây và dòng trên dây trung tính.



Hình 4.12

Giải. Ta có thể viết giá trị các áp pha của nguồn:

$$\dot{U}_{AN} = 220\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{BN} = 220\angle -120^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{CN} = 220\angle 120^\circ \text{ V}$$

Sử dụng các phương trình luật Ohm dạng phức:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN}}{Z_A} = \frac{220\angle 0^\circ}{22} = 10\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN}}{Z_B} = \frac{220\angle -120^\circ}{j22} = 10\angle -210^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN}}{Z_C} = \frac{220\angle 120^\circ}{-j22} = 10\angle 210^\circ \text{ A}$$

Vậy $\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = -7,32A$

4.4 HỆ THỐNG NỐI SAO BA DÂY

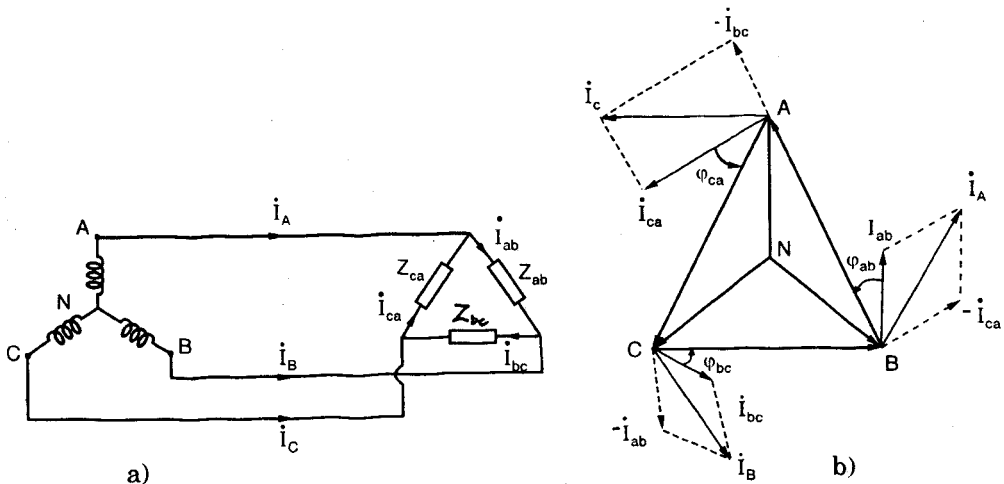
4.4.1 Hệ thống cung cấp nối sao - Tải nối tam giác

Trong hệ thống nối sao ba dây, các tải được nối đến các điện áp dây: $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ được xác định từ:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{BN}$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{BN} - \dot{U}_{CN}$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{CN} - \dot{U}_{AN}$$



Hình 4.13: a) Mạch ba pha tải đấu tam giác; b) Đồ thị vectơ

Ở đây ta luôn luôn có:

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0 \quad (4.13)$$

Các dòng pha của tải được xác định bằng cách chia các điện áp dây cho các trở kháng tương ứng:

$$\begin{cases} \dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{ab}} \\ \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{bc}} \\ \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{ca}} \end{cases} \quad (4.14)$$

Chúng bị chuyển dịch so với điện áp $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$, một góc bằng các argumen $\varphi_{ab}, \varphi_{bc}, \varphi_{ca}$ của các trở kháng tương ứng Z_{ab}, Z_{bc}, Z_{ca} (H.4.13b).

Các dòng điện dây được xác định bởi định luật Kirchhoff về dòng điện viết tại các đỉnh của tam giác tải:

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} \\ \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} \\ \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} \end{cases} \quad (4.15)$$

Khi hệ thống nguồn cung cấp là đối xứng, và tải cũng đối xứng, thì ta có hệ thống các dòng điện pha và dòng điện dây cũng là các hệ đối xứng.

Ta có:

$$\dot{I}_{ca} = \dot{I}_{ab} e^{j120^\circ}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} \\ &= \dot{I}_{ab} [1 - e^{j120^\circ}] \\ &= \dot{I}_{ab} \left[\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \dot{I}_{ab} j\sqrt{3} \left[-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ &= \dot{I}_{ab} j\sqrt{3} e^{-j120^\circ} \\ &= \dot{I}_{ab} \sqrt{3} e^{-j30^\circ} \end{aligned}$$

Cuối cùng, ta được:

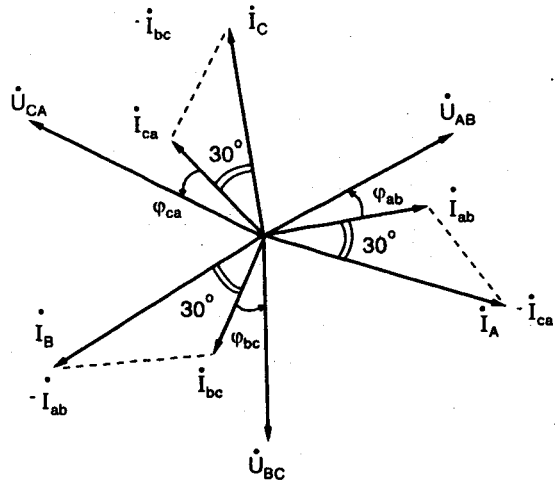
$$\dot{I}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{I}_A e^{j30^\circ} \quad (4.16)$$

Nếu ta gọi trị hiệu dụng của dòng pha và dòng dây lần lượt là I_p và I_d thì ta có quan hệ.

$$I_d = \sqrt{3} I_p \quad (4.17)$$

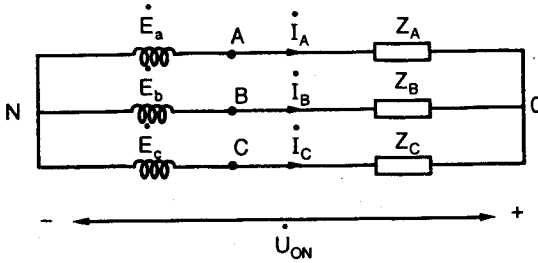
Như vậy, trong trường hợp tải đối xứng đầu tam giác, được cung cấp bởi hệ nguồn ba pha đối xứng, thì điện áp pha của tải sẽ bằng điện áp dây, còn dòng điện pha của tải nhỏ hơn dòng dây $\sqrt{3}$ lần.

Đồ thị vectơ của dòng được mô tả trên H.4.14.



Hình 4.14: Đồ thị vectơ trường hợp tải đối xứng, nối tam giác

4.4.2 Hệ thống ba dây - Tải nối sao



Hình 4.15: Nguồn ba pha nối sao đối xứng, tải nối sao không đối xứng

Trên H.4.15 là hệ thống nối sao ba dây. Điểm trung tính của nguồn là N và của tải là O. Trở kháng tải các pha lần lượt là Z_A , Z_B và Z_C .

Khi sử dụng phương pháp điện thế đỉnh ta sẽ nhận được một phương trình một biến, đó là điện áp $\dot{U}_{ON}$, điện áp giữa điểm trung tính tải và trung tính nguồn.

$$\dot{U}_{ON} = \frac{Y_A \dot{E}_a + Y_B \dot{E}_b + Y_C \dot{E}_c}{Y_A + Y_B + Y_C} \quad (4.18)$$

Trong đó: $Y_A = \frac{1}{Z_A}$, $Y_B = \frac{1}{Z_B}$, $Y_C = \frac{1}{Z_C}$, bỏ qua trở kháng của nguồn và của dây dẫn từ nguồn đến tải.

Dòng điện trong các pha, đồng thời cũng là dòng điện dây, được xác định theo:

$$\begin{cases} \dot{I}_A = Y_A (\dot{E}_a - \dot{U}_{ON}) \\ \dot{I}_B = Y_B (\dot{E}_b - \dot{U}_{ON}) \\ \dot{I}_C = Y_C (\dot{E}_c - \dot{U}_{ON}) \end{cases} \quad (4.19)$$

Điện áp trên các pha của tải:

$$\begin{cases} \dot{U}_{AO} = Z_A \dot{I}_A \\ \dot{U}_{BO} = Z_B \dot{I}_B \\ \dot{U}_{CO} = Z_C \dot{I}_C \end{cases} \quad (4.20)$$

Các công thức 4.18, 4.19, 4.20 là nội dung của phương pháp phân tích mạch ba pha bất đối xứng có tải và nguồn đấu sao, được gọi là phương pháp dịch chuyển điểm trung tính. Mục đích của phương pháp này là để khảo sát một mạch ba pha³ dây đấu sao, chúng ta cần tìm độ dịch chuyển về điện áp của điểm trung tính tải so với điểm trung tính của nguồn trước, sau đó dựa vào giá trị này, ta sẽ suy ra được các đại lượng áp và dòng trên tải.

Khi tải ba pha là đối xứng, ta có $Y_A = Y_B = Y_C = Y$

$$\text{Ta sẽ có: } \dot{U}_{ON} = \frac{Y(\dot{E}_a + \dot{E}_b + \dot{E}_c)}{3Y} = 0 \quad (4.21)$$

và:

$$\begin{cases} \dot{I}_A = Y\dot{E}_a = \frac{\dot{E}_a}{Z_A} \\ \dot{I}_B = Y\dot{E}_b = \frac{\dot{E}_b}{Z_B} \\ \dot{I}_C = Y\dot{E}_c = \frac{\dot{E}_c}{Z_C} \end{cases} \quad (4.22)$$

Vậy ta thấy:

- Điện thế điểm trung tính tải O, khi tải đối xứng nối sao, sẽ bằng điện thế điểm trung tính nguồn N, khi nguồn ba pha là đối xứng nối sao.

- Dòng điện trong các pha của hệ thống nối sao đối xứng được xác định bằng tích của điện áp nguồn với dẫn nạp pha tương ứng Y, hoặc bằng tỉ số của điện áp nguồn với trở kháng pha tương ứng.

Nếu không có điểm trung tính của nguồn, ta hoàn toàn có thể tạo ra điểm trung tính nhân tạo, ví dụ như ba điện trở, điện cảm hay điện dung giống nhau nối sao. Thông thường điểm trung tính nhân tạo được sử dụng rộng rãi trong các hệ thống đo và an toàn.

4.4.3 Thứ tự pha của nguồn và bộ chỉ thị thứ tự pha

Trong máy phát ba pha, nếu như ta hoán đổi về mặt ký hiệu hai cuộn dây pha B và pha C lẫn nhau, thì ta sẽ có:

$$\dot{E}_b = \dot{E}_a e^{-j240^\circ}$$

$$\dot{E}_c = \dot{E}_a e^{-j120^\circ}$$

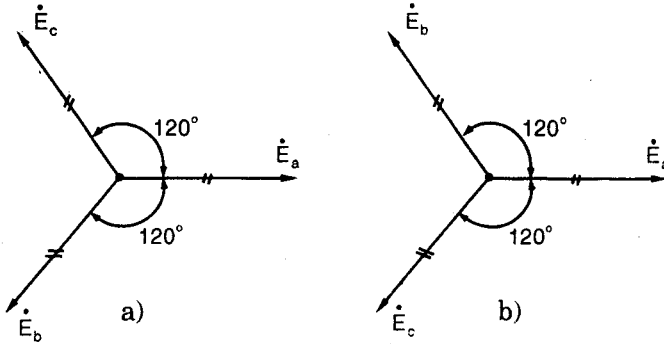
Hệ thống ba nguồn áp độc lập $\dot{E}_a, \dot{E}_b, \dot{E}_c$ như trên cũng là một hệ đối xứng và được gọi là hệ nguồn đối xứng thứ tự nghịch. Như vậy, hệ nguồn ba pha đối xứng có thể phân thành hai loại chính:

- Hệ thống đối xứng thứ tự thuận:

$$\begin{cases} \dot{E}_a = E_p \angle 0^\circ \\ \dot{E}_b = E_p \angle -120^\circ \\ \dot{E}_c = E_p \angle -240^\circ \end{cases}$$

- Hệ thống đối xứng thứ tự nghịch:

$$\begin{cases} \dot{E}_a = E_p \angle 0^\circ \\ \dot{E}_c = E_p \angle -120^\circ \\ \dot{E}_b = E_p \angle -240^\circ \end{cases} \quad (4.23)$$



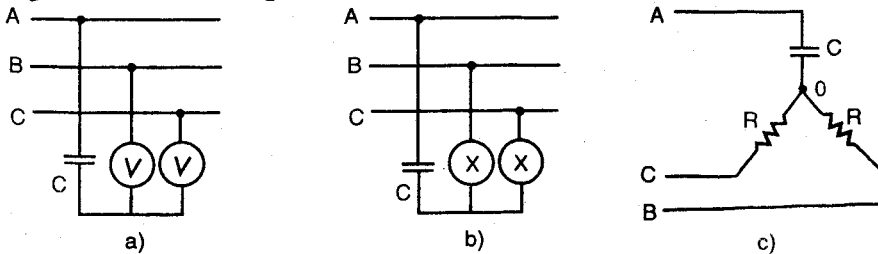
Hình 4.16: a) Đối xứng thứ tự thuận; b) Đối xứng thứ tự nghịch

Đồ thị vectơ cho các hệ thống nguồn đối xứng như trên H.4.16.

Để xác định thứ tự pha của nguồn cung cấp, người ta dùng hai điện trở R và một phần tử điện cảm L hoặc điện dung C . Để thay thế các điện trở, người ta có thể dùng hai voltmeter giống nhau, có điện trở nhập R_v và có thể đọc trực tiếp điện áp của nó. Bên cạnh đó, người ta có thể dùng các bóng đèn giống nhau để thay thế cho các điện trở. Việc thay thế có tiện lợi là ta có thể quan sát độ sáng tối của các bóng đèn. Các giá trị điện kháng X_L hoặc X_C được chọn sao cho có cùng bậc với điện trở là đơn giản nhất.

Ví dụ 4.3. Xác định điện áp trên các voltmeter của mạch trên H.4.17a. Sơ đồ mạch tương đương như trên H.4.17c. Chấp nhận $X_C = R$

Giải. Gọi các điện áp pha của nguồn là $\dot{E}_a, \dot{E}_b, \dot{E}_c$. Độ dịch chuyển điểm trung tính tải so với nguồn là:



Hình 4.17: a) Bộ chỉ thị thứ tự pha dùng voltmeter; b) Bộ chỉ thị thứ tự pha dùng bóng đèn; c) Sơ đồ mạch của bộ chỉ thị thứ tự pha

$$\dot{U}_{ON} = \frac{j\omega C \dot{E}_a + \frac{1}{R} \dot{E}_b + \frac{1}{R} \dot{E}_c}{j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}}$$

Bởi vì $R = \frac{1}{\omega C}$

$$\dot{U}_{ON} = \frac{j\dot{E}_a + \dot{E}_b + \dot{E}_c}{j+2}$$

Nếu hệ nguồn là đối xứng thứ tự thuận, ta sẽ có tiếp tục:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{ON} &= \frac{\left(j - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\dot{E}_a}{j+2} = \frac{j-1}{j+2}\dot{E}_a \\ &= \frac{-1+j3}{5}\dot{E}_a = (-0,2 + j0,6)\dot{E}_a\end{aligned}$$

Ta có: $\dot{E}_a = E_p \angle 0^\circ$ với E_p là giá trị hiệu dụng của áp pha của nguồn nên ta có được:

$$\dot{U}_{ON} = (-0,2 + j0,6)E_p$$

Điện áp trên các pha của tải:

$$\dot{U}_{AO} = \dot{E}_a - \dot{U}_{ON} = (1,2 - j0,6)E_p$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{BO} &= \dot{E}_b - \dot{U}_{ON} = \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,2 - j0,6\right)E_p \\ &= (-0,3 - j1,466)E_p\end{aligned}$$

$$\dot{U}_{CO} = \dot{E}_c - \dot{U}_{ON} = \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,2 - j0,6\right)E_p$$

$$\dot{U}_{CO} = (-0,3 + j0,266)E_p$$

Trị hiệu dụng của các áp pha nói trên:

$$U_{AO} = \sqrt{1,2^2 + 0,6^2}E_p = 1,34E_p$$

$$U_{BO} = \sqrt{0,3^2 + 1,466^2}E_p = 1,5E_p$$

$$U_{CO} = \sqrt{0,3^2 + 0,266^2}E_p = 0,4E_p$$

Nếu hệ thống ba pha có điện áp dây 220V, thì ta sẽ có:

$$U_{AO} = 1,34 \frac{220}{\sqrt{3}} = 170V$$

$$U_{BO} = 1,5 \frac{220}{\sqrt{3}} = 190V$$

$$U_{CO} = 0,4 \frac{220}{\sqrt{3}} = 51V$$

Rõ ràng, ta có thể thấy rằng, voltmeter nào nối với pha B sẽ có chỉ số lớn hơn pha C. Tự điện luôn được nối vào pha A.

Nếu sử dụng bộ chỉ thị thứ tự pha dùng bóng đèn, thì phân tích tương

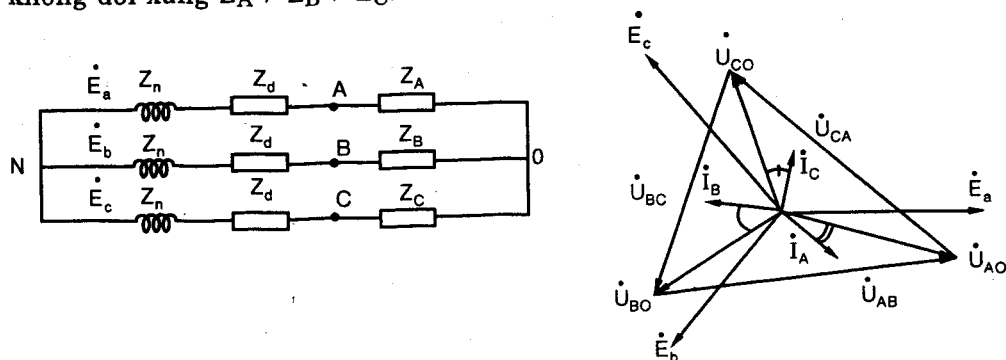
tự ta cũng có kết luận: bóng đèn nào sáng hơn thì sẽ là pha B của hệ thống đối xứng thứ tự thuận.

Nếu bộ chỉ thị thứ tự pha dùng RRL thì có kết quả ngược lại. Cuộn dây được nối vào pha A, bóng đèn pha nào sáng hơn thì sẽ là pha C của hệ thống đối xứng thứ tự thuận.

4.4.4 Hệ thống nối sao nguồn áp thực

Trong hệ thống nối sao ba dây mà ta đã xét ở mục 4.4.2, nếu trở kháng của nguồn và của dây dẫn là không thể bỏ qua được, thì khi đó, điện áp trên các cực của tải không bằng điện áp trên các cực của nguồn.

Trên H.4.18 là hệ thống nguồn điện áp ba pha đối xứng có trở kháng trong mỗi pha là Z_n , trở kháng của các dây dẫn là Z_d và ba tải nối sao không đối xứng $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$.



Hình 4.18: a) Hệ thống nối sao, nguồn và dây dẫn có trở kháng; b) Đồ thị vectơ

Để phân tích các mạch ba pha dạng này, về nguyên tắc, ta vẫn sử dụng phương pháp dịch chuyển điểm trung tính như đã đề cập ở mục 4.4.2. Trước tiên, độ dịch chuyển điểm trung tính tải O so với điểm trung tính nguồn N được tìm:

$$\dot{U}_{ON} = \frac{Y_A \dot{E}_a + Y_B \dot{E}_b + Y_C \dot{E}_c}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

Trong đó:
$$Y_A = \frac{1}{Z_n + Z_d + Z_A}$$

$$Y_B = \frac{1}{Z_n + Z_d + Z_B}$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_n + Z_d + Z_C} \quad (4.24)$$

Và các dòng dây vẫn được xác định theo các công thức ở mục 4.4.2:

$$\begin{cases} \dot{I}_A = Y_A (\dot{E}_a - \dot{U}_{ON}) \\ \dot{I}_B = Y_B (\dot{E}_b - \dot{U}_{ON}) \\ \dot{I}_C = Y_C (\dot{E}_c - \dot{U}_{ON}) \end{cases}$$

Điện áp trên mỗi pha của tải được xác định bởi tích của dòng pha với trở kháng pha tương ứng.

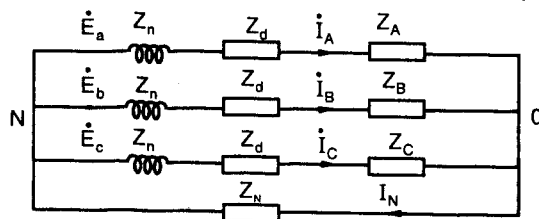
$$\begin{cases} \dot{U}_{AO} = Z_A \dot{I}_A \\ \dot{U}_{BO} = Z_B \dot{I}_B \\ \dot{U}_{CO} = Z_C \dot{I}_C \end{cases}$$

Điện áp dây của tải được xác định:

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \dot{U}_{AO} - \dot{U}_{BO} \\ \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{BO} - \dot{U}_{CO} \\ \dot{U}_{CA} = \dot{U}_{CO} - \dot{U}_{AO} \end{cases}$$

Rõ ràng, trong trường hợp tải đối xứng thì ta cũng có $\dot{U}_{ON} = 0$; khi đó, các hệ thống dòng pha, áp pha, áp dây của tải là các hệ thống đối xứng.

Trong trường hợp nếu như hệ thống nối sao bốn dây thực (H.4.19) thì



Hình 4.19: Hệ thống nối sao bốn dây thực

ta xác định độ dịch chuyển điểm trung tính theo:

$$\dot{U}_{ON} = \frac{Y_A \dot{E}_a + Y_B \dot{E}_b + Y_C \dot{E}_c}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N} \quad (4.25)$$

Trong đó, Y_A, Y_B, Y_C được tính theo (4.24) còn Y_N theo:

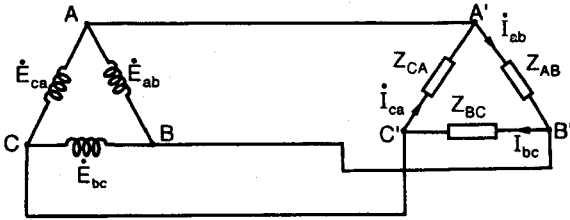
$$Y_N = \frac{1}{Z_N} \quad (4.26)$$

Các dòng pha, áp pha vẫn được tính theo các công thức như trước còn dòng trong dây trung tính có thể xác định theo:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$$

hay:
$$\dot{I}_N = Y_N \dot{U}_{ON} = \frac{\dot{U}_{ON}}{Z_N} \quad (4.27)$$

4.5 HỆ THỐNG NGUỒN TAM GIÁC – TẢI NỐI TAM GIÁC HOẶC SAO



Hình 4.20: Hệ thống nguồn và tải nối tam giác

Nguồn áp ba pha đối xứng, như đã xét trong mục 4.2 là có thể nối thành tam giác, bởi vì tổng điện áp bằng không và trong mạch tam giác đóng kín không có dòng. Trên H.4.20 là hệ thống nguồn nối tam giác và tải nối tam giác.

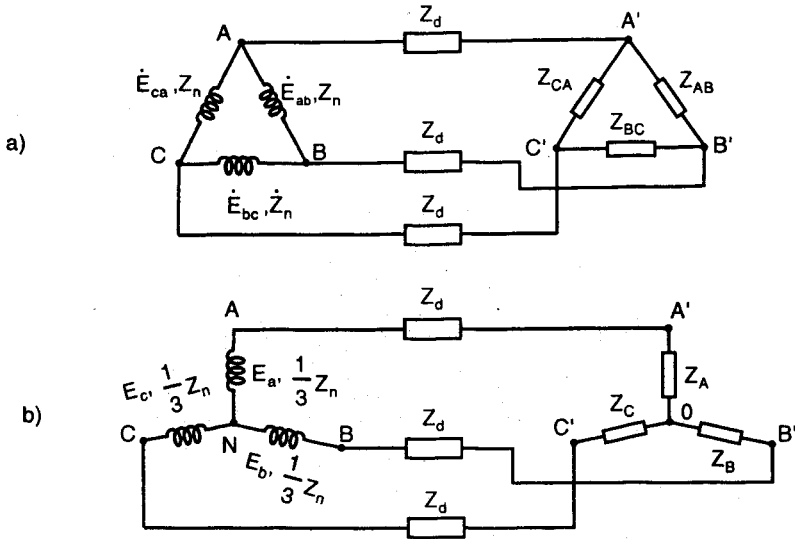
Nếu nguồn áp là lý tưởng và trở kháng dây dẫn có thể bỏ qua, thì các dòng pha của tải: $\dot{I}_{ab}, \dot{I}_{bc}, \dot{I}_{ca}$ được tính bằng tỉ số giữa điện áp dây $\dot{U}_{AB} (= \dot{E}_{ab}), \dot{U}_{BC} (= \dot{E}_{bc}), \dot{U}_{CA} (= \dot{E}_{ca})$ với các trở kháng tương ứng Z_{AB}, Z_{BC}, Z_{CA} như tính trong mục 4.4.1.

Trong trường hợp nguồn thực tế có trở kháng trong Z_n và các dây dẫn có trở kháng Z_d khác không, thì việc tính toán các dòng điện cần phải xây dựng hệ phương trình dòng mắc lưới có ba phương trình (H.4.21a). Một phương pháp đơn giản hơn đó là biến đổi các mạch tam giác nguồn và tải trở về mạch tương đương hình sao.

Như ta đã biết, tam giác điện áp dây trong trường hợp đối xứng là tam giác đều. Các vectơ điện áp pha của hệ thống sao tương đương có đuôi là các đỉnh của tam giác điện áp. Điểm trung tính của hệ thống điện áp pha nối sao có thể chọn bất kỳ, khi chọn nó là tâm điểm của tam giác điện áp dây thì ta sẽ có hệ thống sao đối xứng tương đương. Điện áp nguồn của nó như trên H.4.21b.

Ta có:

$$\begin{cases} \dot{E}_a = \frac{\dot{E}_{ab}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} \\ \dot{E}_b = \frac{\dot{E}_{bc}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} \\ \dot{E}_c = \frac{\dot{E}_{ca}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} \end{cases} \quad (4.28)$$



Hình 4.21: a) Hệ thống nguồn tải tam giác thực

b) Hệ thống sao tương đương

Trở kháng trong của nguồn sao đối xứng tương đương là $\frac{Z_n}{3}$. Như vậy,

ta đã chuyển hệ thống nối tam giác về hệ thống nối sao mà việc phân tích đã được đề cập trong mục 4.4.4 với phương pháp chủ chốt là độ dịch chuyển điểm trung tính.

Khi đã xác định được các điện áp dây tại các điểm A, B, C và A', B', C' thì ta có thể tính các dòng điện pha và dòng điện dây.

Nếu tải đã cho là đối xứng, tức là $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = Z$ thì trở kháng mỗi pha của mạch sao sẽ là $\frac{1}{3}Z$. Dựa theo sơ đồ H.4.21b thì dòng dây $\dot{I}_A$ có thể tính:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_a}{\frac{1}{3}Z_n + Z_d + \frac{1}{3}Z} = \frac{3\dot{E}_a}{Z_n + 3Z_d + Z} \quad (4.29)$$

Các dòng điện $\dot{I}_B$ và $\dot{I}_C$ được tính theo cách tương tự khi thay $\dot{E}_a$ bằng $\dot{E}_b$ và $\dot{E}_c$, và ta cũng có:

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{-j240^\circ}$$

Khi để ý rằng: $\dot{E}_a = \frac{\dot{E}_{ab}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ}$; $\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{I}_A}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ}$, ta được

$$\dot{I}_A = \frac{\sqrt{3}E_{ab}e^{-j30^\circ}}{Z_n + 3Z_d + Z}$$

Và:
$$\dot{I}_A = \frac{\sqrt{3}\dot{I}_{ab}}{e^{j30^\circ}} = \sqrt{3}\dot{I}_{ab}e^{-j30^\circ}$$

Nên:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{E}_{ab}}{Z_n + 3Z_d + Z} \quad (4.30a)$$

$$\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{E}_{bc}}{Z_n + 3Z_d + Z} \quad (4.30b)$$

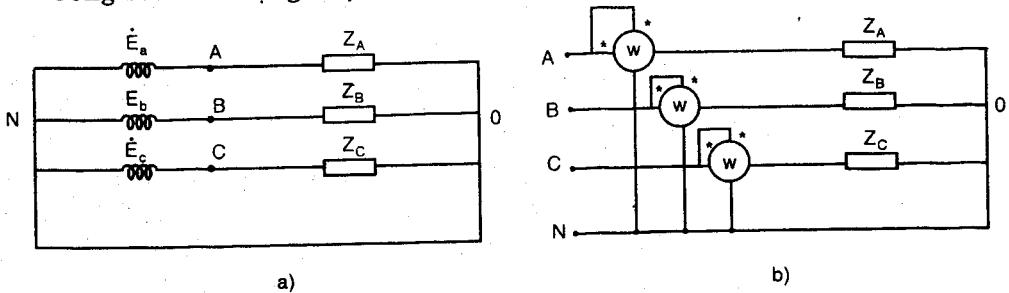
$$\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{E}_{ca}}{Z_n + 3Z_d + Z} \quad (4.30c)$$

4.6 CÔNG SUẤT TÁC DỤNG TRONG MẠCH BA PHA – ĐO CÔNG SUẤT

Xét một hệ thống ba pha bốn dây như trên H.4.22a ta có công suất tức thời nhận được trên tải được tính:

$$p(t) = u_{AN}i_A + u_{BN}i_B + u_{CN}i_C \quad (4.31)$$

Công suất tác dụng được xác định bởi:



Hình 4.22: a) Sơ đồ ba pha bốn dây; b) Đo công suất với ba wattmeter

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = U_{AN}I_A \cos \varphi_A + U_{BN}I_B \cos \varphi_B + U_{CN}I_C \cos \varphi_C \quad (4.32)$$

Trong đó: U_{AN} , U_{BN} , U_{CN} là các giá trị hiệu dụng của các điện áp pha; I_A , I_B , I_C là giá trị hiệu dụng của các dòng điện pha, và φ_A , φ_B , φ_C là góc lệch pha giữa các điện áp và dòng điện trên.

Công thức (4.32) có thể viết lại dưới dạng:

$$P = P_A + P_B + P_C \quad (4.33)$$

Công suất tác dụng trên tải ba pha bằng tổng công suất tác dụng trên mỗi tải pha.

Trong trường hợp nguồn và tải đối xứng, tất cả các điện áp pha có giá trị hiệu dụng như nhau: $U_P = U_{AN} = U_{BN} = U_{CN}$ các dòng pha $I_P = I_A = I_B = I_C$ đồng thời các lệch pha của điện áp và dòng điện cũng như nhau $\varphi_P = \varphi_A = \varphi_B = \varphi_C$. Khi đó, công thức (4.32) viết lại sẽ có dạng

$$P = 3U_P I_P \cos \varphi_P \quad (4.34)$$

Vậy, để đo công suất tác dụng trong hệ thống bốn dây, người ta cần có ba wattmeter, chúng được nối như trên H.4.22b, và do đó, người ta gọi phương pháp đo công suất dạng này là đo công suất ba wattmeter.

Mỗi wattmeter đo công suất tác dụng của mỗi pha tải. Nếu nguồn và tải đều đối xứng, chỉ số trên các wattmeter là như nhau, khi đó ta chỉ cần đo công suất của một pha rồi nhân giá trị đó với 3.

Quay trở lại công thức 4.31, ta đã có:

$$u_{AN} = U_{pm} \sin \omega t$$

Nên:

$$P = U_{pm} I_{pm} \left[\sin \omega t \sin(\omega t - \varphi_p) + \sin(\omega t - 120^\circ) \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi_p) + \sin(\omega t - 240^\circ) \sin(\omega t - 240^\circ - \varphi_p) \right]$$

$$= \frac{1}{2} U_{pm} I_{pm} \left[3 \cos \varphi_p - \cos(2\omega t - \varphi_p) - \cos(2\omega t - \varphi_p - 240^\circ) - \cos(2\omega t - \varphi_p - 480^\circ) \right]$$

$$p = \frac{3}{2} U_{pm} I_{pm} \cos \varphi_p = 3U_P I_P \cos \varphi_P \quad (4.35)$$

Công suất tức thời trong hệ ba pha đối xứng có giá trị không đổi, tức là không có trao đổi năng lượng giữa nguồn và tải.

Công thức (4.32) đúng đối với mọi hệ thống ba pha đối xứng ba hoặc bốn dây không kể là nối sao hay tam giác. Trong các hệ thống ba pha, việc đo điện áp và dòng dây thì dễ dàng nhưng khó khăn khi đo các điện áp và dòng pha. Ví dụ khi không có điểm trung tính của các cuộn dây của máy phát hay động cơ nối sao hoặc không có cuộn dây pha trong trường hợp nối tam giác. Dựa trên công thức (4.34) với các loại nối:

Sao	Tam giác
$U_p = \frac{U_d}{\sqrt{3}}$	$U_p = U_d$
$I_p = I_d$	$I_p = \frac{I_d}{\sqrt{3}}$

Sẽ đưa đến một công thức phổ biến để tính công suất tác dụng trong hệ ba pha đối xứng:

$$P = \sqrt{3} U_d I_d \cos \varphi \quad (4.36)$$

trong đó: U_d : điện áp dây hiệu dụng

I_d : dòng điện dây hiệu dụng

φ : góc lệch pha của điện áp và dòng pha

Công suất tác dụng trong hệ thống ba pha đối xứng bằng tích của điện áp dây, dòng dây nhân với hệ số $\sqrt{3}$ và cosin của góc lệch pha giữa điện áp pha và dòng pha, mà được gọi là hệ số công suất.

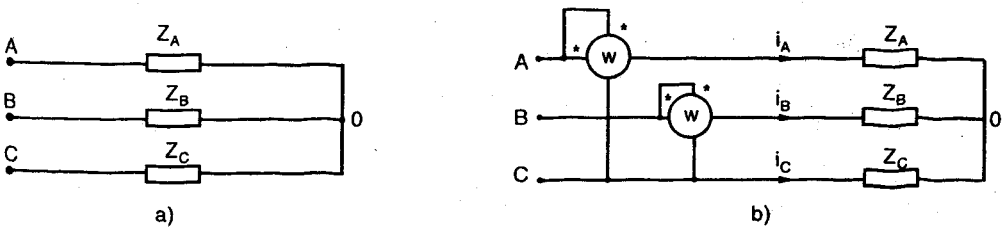
Hệ số công suất thường được cho trong các bảng đối với các tải đã biết, mặt khác nó có thể được xác định trong phòng thí nghiệm.

Trên các bảng của các động cơ thường cho trước các công suất sử dụng P_{sd} hoặc hiệu suất η . Khi đó, công suất nhận có dạng:

$$P_{sd} = \eta P = \eta \sqrt{3} U_d I_d \cos \varphi \quad (4.37)$$

Trong trường hợp tải không đối xứng, người ta thường không dùng công thức nào khác ngoài tổng công suất tác dụng của mỗi pha.

Công suất trong mỗi hệ thống ba pha bốn dây được đo bằng ba Wattmeter được nối như trên H.4.22b. Các cuộn dòng của Wattmeter được nối nối tiếp với các dây pha, còn cuộn áp được nối giữa dây pha và dây trung tính. Mỗi Wattmeter đo công suất của mỗi pha. Nếu hệ thống ba pha là đối xứng, chỉ số của các Wattmeter là như nhau, do đó có thể dùng một Wattmeter và lấy kết quả nhân với 3.



Hình 4.23: a) Hệ thống ba pha ba dây; b) Sơ đồ đo công suất

Xét hệ thống ba pha ba dây như trên H.4.23a. Lưu ý rằng ta có:

$i_A + i_B + i_C = 0$, nên ta có biểu thức công suất tức thời nhận được trên tải:

$$\begin{aligned} p(t) &= u_{AO}i_A + u_{BO}i_B - u_{CO}i_A - u_{CO}i_B \\ &= (u_{AO} - u_{CO})i_A + (u_{BO} - u_{CO})i_B \end{aligned} \quad (4.38)$$

trong đó:

i_A, i_B, i_C : giá trị tức thời của các dòng dây;

u_{AO}, u_{BO}, u_{CO} : giá trị tức thời các điện áp pha của tải trên H.4.23a, hoặc là điện áp pha của hệ thống nối sao tương đương, khi tải nối tam giác.

Viết lại (4.38), ta có:

$$p(t) = u_{AC}i_A + u_{BC}i_B \quad (4.39)$$

Tương tự khi biểu diễn i_B hoặc i_A qua các dòng dây còn lại ta cũng sẽ có các công thức tương đương khác cho công thức công suất tức thời:

$$p(t) = u_{AB}i_A + u_{CB}i_C \quad (4.40)$$

$$p(t) = u_{BA}i_B + u_{CA}i_C \quad (4.41)$$

Từ các công thức (4.39), (4.40), (4.41) ta có thể rút ra kết luận:

• Để đo công suất trong hệ thống ba pha ba dây, ta chỉ cần hai Wattmeter nên còn gọi là phương pháp hai Wattmeter. Các cuộn dòng của chúng được nối vào hai dây pha bất kỳ của mạch ba pha cần đo, đầu của các cuộn áp nối đến các dây pha đó, còn các đầu cuối của chúng thì nối vào dây pha thứ ba. (xem H.4.23b)

Theo nguyên tắc đo của các Wattmeter thì chỉ số của mỗi Wattmeter trên hình sẽ là:

$$\begin{cases} P_1 = I_{AC} I_A \cos(\varphi_{\dot{U}_{AC}} - \varphi_{i_A}) \\ P_2 = U_{BC} I_B \cos(\varphi_{\dot{U}_{BC}} - \varphi_{i_B}) \end{cases} \quad (4.42)$$

Khi đó tổng của chúng:

$$P = P_1 + P_2$$

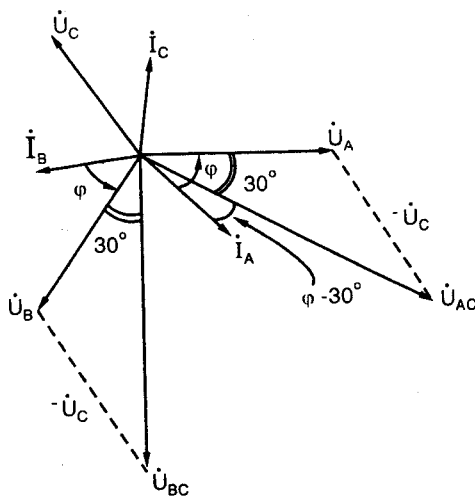
biểu thị công suất tác dụng trên tải không kể đối xứng hay không đối xứng.

Nếu như hệ nguồn ba pha là đối xứng, khi đó điện áp dây $U_{AC} = U_{BC} = U_d$ là bằng nhau, dòng dây $I_A = I_B = I_d$ cũng bằng nhau và góc lệch pha giữa các áp và dòng này xem trên H.4.24.

Ta có :

$$(\varphi_{\dot{U}_{AC}} - \varphi_{i_A}) = \varphi - 30^\circ$$

$$(\varphi_{\dot{U}_{BC}} - \varphi_{i_B}) = \varphi + 30^\circ$$



Hình 4.24: Đồ thị vectơ trên H.4.23 khi hệ là đối xứng.

với φ : góc lệch pha giữa áp pha và dòng pha tải đầu sao. Từ đó, chỉ số của các wattmeter tương ứng với:

$$\begin{cases} P_1 = U_d I_d \cos(\varphi - 30^\circ) \\ P_2 = U_d I_d \cos(\varphi + 30^\circ) \end{cases} \quad (4.43)$$

Tổng của chúng:

$$P_1 + P_2 = 2U_d I_d \cos \varphi \cos 30^\circ = \sqrt{3} U_d I_d \cos \varphi = P$$

là công suất tác dụng trong mạch ba pha đối xứng. Các công thức (4.43) có thể viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} P_1 &= U_d I_d [\cos \varphi \cos 30^\circ + \sin \varphi \cdot \sin 30^\circ] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} U_d I_d \cos \varphi \left[1 + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}} \right] = \frac{P}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$P_2 = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}} \right)$$

Do đó:

$$\begin{cases} P_1 = \frac{P}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}} \right) \\ P_2 = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}} \right) \end{cases} \quad (4.44)$$

Từ các công thức trên, ta thấy khi tải đối xứng và góc lệch pha $\varphi = 0$ thì cả hai wattmeter chỉ thị phân nửa công suất của tải tổng, ngoài ra:

$|\varphi| < 60^\circ$: chỉ số của hai wattmeter tương ứng giá trị P_1, P_2 dương.

$|\varphi| = 60^\circ$: một trong hai wattmeter đo toàn bộ công suất tải, cái thứ hai chỉ thị không.

$|\varphi| > 60^\circ$: một trong hai wattmeter đo công suất dương lớn hơn công suất tải, cái thứ hai đo công suất âm.

Dựa trên chỉ số của hai wattmeter trong trường hợp tải đối xứng có thể xác định hệ số công suất của nó. Khi tính tổng và hiệu của các chỉ số, ta có:

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = \sqrt{3} U_d I_d \cos \varphi \\ P_1 - P_2 = U_d I_d \sin \varphi \end{cases} \quad (4.45)$$

Như vậy: $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \quad (4.46)$

hay hệ số công suất:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{P_1 + P_2}{2\sqrt{P_1^2 + P_2^2 - P_1 P_2}} \quad (4.47)$$

4.7 CÔNG SUẤT PHẢN KHÁNG, CÔNG SUẤT BIỂU KIẾN VÀ CÔNG SUẤT PHỨC TRONG MẠCH BA PHA – HIỆU CHỈNH HỆ SỐ CÔNG SUẤT

Công suất phản kháng được phát ra từ một nguồn ba pha bất kỳ sẽ bằng công suất phản kháng nhận được của tải ba pha, là chính bằng tổng các công suất phản kháng của mỗi pha.

Nếu một tải hay nhiều tải trong hệ thống ba pha được biểu diễn bằng một hệ thống trở kháng tương đương (H.4.22a) thì công suất phản kháng của nó:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = U_{AO}I_A \sin\varphi_A + U_{BO}I_B \sin\varphi_B + U_{CO}I_C \sin\varphi_C \quad (4.48)$$

Trong trường hợp đối xứng:

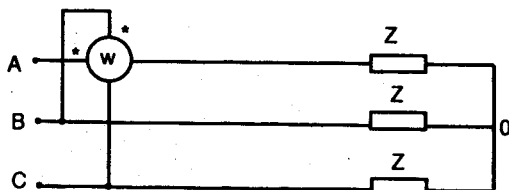
$$Q = 3U_p I_p \sin\varphi_p = \sqrt{3}U_d I_d \sin\varphi \quad (4.49)$$

(thường bỏ qua ký số dưới góc pha φ khi tải đối xứng).

Khi đo công suất tác dụng bằng hai wattmeter trong hệ thống ba dây có nguồn và tải đối xứng, ta đã có công thức:

$$P_1 - P_2 = U_d I_d \sin\varphi$$

$$\text{Vậy: } Q = \sqrt{3} (P_1 - P_2) \quad (4.50)$$



Hình 4.25: Đo công suất phản kháng tải ba pha đối xứng bằng một wattmeter.

Công suất phản kháng của tải ba pha đối xứng có thể được đo bằng một wattmeter được nối như H.4.25. Cuộn dòng của wattmeter được nối vào một dây pha bất kỳ, còn cuộn áp thì được nối vào điện áp dây của hai pha còn lại. Ví dụ như trên H.4.25, ta đã sử dụng I_A và U_{BC} . Rõ ràng số chỉ của wattmeter trong trường hợp này là: $U_d I_d \cos(90^\circ - \varphi) = U_d I_d \sin\varphi$, để tìm công suất phản kháng của tải ba pha ta chỉ cần nhân số chỉ này với $\sqrt{3}$.

Công suất phức của hệ thống ba pha bằng tổng công suất phức của mỗi pha:

$$S = S_A + S_B + S_C$$

$$S = P_A + P_B + P_C + j(Q_A + Q_B + Q_C) \quad (4.51)$$

Công suất biểu kiến của nguồn hoặc của tải một pha là tích các trị

hiệu dụng của áp và dòng $|S| = UI$ do

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Các công suất biểu kiến của mỗi pha:

$$|S_A| = \sqrt{P_A^2 + Q_A^2}; |S_B| = \sqrt{P_B^2 + Q_B^2}; |S_C| = \sqrt{P_C^2 + Q_C^2}$$

Công suất biểu kiến của hệ thống ba pha:

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(P_A + P_B + P_C)^2 + (Q_A + Q_B + Q_C)^2} \quad (4.52)$$

Công suất biểu kiến có ý nghĩa thực tế trong trường hợp đối xứng.

$$|S| = 3U_p I_p = \sqrt{3} U_d I_d \quad (4.53)$$

Nó thường được cho trước trên các thông số của máy phát hay máy biến áp.

Hệ số công suất của hệ thống ba pha:

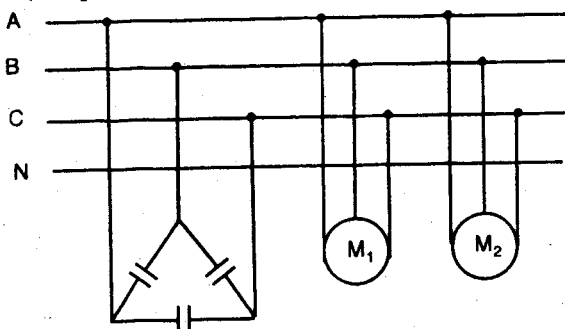
$$\cos \varphi = \frac{P}{\sqrt{3} U_d I_d} = \frac{P}{|S|} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad (4.54a)$$

Rõ ràng, khi hệ số công suất càng nhỏ thì công suất tác dụng P được tính càng nhỏ:

$$P = |S| \cos \varphi \quad (4.54b)$$

Nguyên nhân gây ra hệ số công suất nhỏ là do các động cơ điện không đủ tải, và như vậy, vấn đề hiệu chỉnh ^{hệ} số công suất trong mạch ba pha có ý nghĩa thực tế rất lớn.

Để hiệu chỉnh hệ số công suất người ta dùng các bộ tụ điện ba pha, gồm có các điện dung C nối tam giác khi điện áp dây không vượt quá 1KV, hoặc nối sao khi điện áp dây lớn hơn 1KV (H.4.26).



Hình 4.26: Mạch hiệu chỉnh hệ số công suất trong mạch ba pha điện áp thấp

Công suất phản kháng Q_k của bộ tụ điện cần để hiệu chỉnh hệ số công suất từ giá trị $\cos \varphi$ đến giá trị $\cos \varphi_t$ với một công suất tác dụng đã cho được tính theo công thức:

$$Q_k = P (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_t)$$

Mặt khác, công suất phản kháng của bộ tụ ở điện áp U_k trong mỗi pha:

$$Q_k = 3U_k^2 \omega C$$

Từ đó ta có thể tìm ra điện dung C của bộ tụ điện mỗi pha:

$$C = \frac{Q_k}{3U_k^2 \omega} \quad (4.55)$$

trong đó $U_k = U_d$ trong trường hợp nối tam giác và $= U_p$ trong trường hợp nối sao.

Trên H.4.26 là mạch dùng để hiệu chỉnh hệ số công suất khi điện áp thấp (bỏ qua các thiết bị nối, thiết bị đóng ngắt, cầu chì, bảo vệ...). Các bộ tụ điện trong mỗi pha được biểu diễn bởi một tụ điện có điện dung C , mặc dù về mặt kỹ thuật có thể có nghĩa tụ được tạo nên do nhiều tụ bé hơn nối song song hoặc nối tiếp.

Ví dụ 4.4: Cho mạng ba pha điện áp 380/220 V, có nối một động cơ công suất $P = 10$ KW, hiệu suất $\eta_1 = 0,85$ và hệ số công suất $\cos\varphi_1 = 0,83$ và 10 động cơ, mỗi động cơ có công suất $P = 1,5$ KW, hiệu suất $\eta_2 = 0,8$ và hệ số công suất $\cos\varphi_2 = 0,76$. Cần có công suất phản kháng của bộ tụ điện là bao nhiêu để có hệ số công suất tổng hợp là $\cos\varphi_1 = 0,9$?

Giải. Công suất tác dụng phát ra từ mạng:

$$P_1 = \frac{10}{0,85} = 11,76 \text{ KW với } \cos\varphi_1 = 0,83$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 0,672$$

$$P_2 = 10 \cdot \frac{1,5}{0,8} = 18,75 \text{ KW với } \cos\varphi_2 = 0,76$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 0,854$$

$$\text{Vậy } P = P_1 + P_2 = 30,5 \text{ KW}$$

Công suất phản kháng:

$$Q_1 = P_1 \operatorname{tg}\varphi_1 = 11,76 \cdot 0,672 = 7,9 \text{ KVAR}$$

$$Q_2 = P_2 \operatorname{tg}\varphi_2 = 18,75 \cdot 0,854 = 16 \text{ KVAR}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 23,9 \text{ KVAR}$$

Giá trị cần thiết của hệ số công suất $\cos\varphi_t = 0,9$ (tức là $\operatorname{tg}\varphi_t = 0,484$) tương ứng với công suất phản kháng tổng hợp:

$$Q_t = P \operatorname{tg}\varphi_t = 30,5 \cdot 0,484 = 14,77 \text{ KVAR}$$

Công suất phản kháng cần thiết của bộ tụ:

$$Q_k = Q - Q_t = 23,9 - 14,77 = 9,13 \text{ KVAR}$$

Ta chọn trên Catalog giá trị công suất phản kháng của bộ tụ ba pha gần giá trị tính được nhất, ta có $Q_k = 10 \text{ KVAR}$

Điện dung mỗi pha của tụ khi nối tam giác:

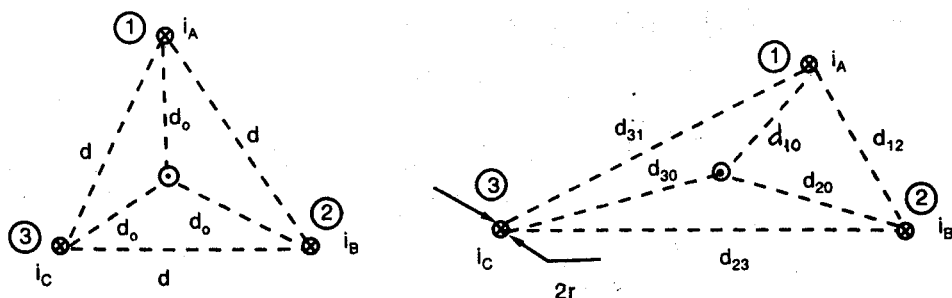
$$C = \frac{Q_k}{3U_d^2\omega} = \frac{10 \cdot 10^3}{3 \cdot 380^2 \cdot 314} = 73,5 \mu\text{F}$$

4.8 SỤT ÁP VÀ CÔNG SUẤT TỔN HAO TRÊN ĐƯỜNG DÂY BA PHA

4.8.1 Điện cảm đường dây ba pha

Sụt áp trên đường dây một pha phụ thuộc vào trở kháng của đường dây, vào điện cảm riêng của nguồn và tải. Khi tính toán điện cảm của mạch này thì vai trò chủ yếu là độ dài của đường dây, khoảng cách giữa các dây, và bán kính mặt cắt của dây dẫn, ta thường gọi đó là điện cảm riêng của đường dây.

Trong mạch ba pha chúng ta có ba (hoặc bốn) dây với các dòng điện khác nhau. Sụt áp trên một dây bất kỳ là do ảnh hưởng của từ trường tạo nên do dòng điện chạy qua các dây dẫn. Ở đây ta chỉ hạn chế để xét đường dây ba dây, với giả thiết các dây được bố trí đối xứng ở các đỉnh tam giác đều (H.4.27a) và cả trường hợp phân bố không đối xứng (H.4.27b). Các đường dây thường được hoán chuyển sao cho trên mỗi đoạn dây có độ dài như nhau, chúng sẽ có các vị trí tuần tự. Như vậy mỗi dây có trung bình $\frac{1}{3}$ độ dài của đường dây từ ba vị trí.



Hình 4.27: a) Đường dây đối xứng;

b) Đường dây không đối xứng

Khi xét hệ thống đường dây là đối xứng, thì điện áp cảm ứng ở pha A sẽ là:

$$u_{LA} = L_A \frac{di_A}{dt} + M_{AB} \frac{di_B}{dt} + M_{AC} \frac{di_C}{dt} \quad (4.56)$$

trong đó:

$$L_A = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left[\ln \frac{d_0}{r} + \frac{\mu_r}{4} \right] = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \frac{d_0^2}{r^2} + \frac{\mu_r}{2} \right]$$

$$M_{AB} = M_{AC} = M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \frac{d_0^2}{dr} + \frac{\mu_r}{4} \right]$$

Khi chú ý: $i_A + i_B + i_C = 0$ ta sẽ có:

$$u_{LA} = [L_A - M] \frac{di_A}{dt}$$

Với hệ thống đối xứng, điện cảm của mỗi pha là như nhau, ta ký hiệu chúng qua chữ L với chỉ số p và gọi đó là điện cảm pha:

$$L_p = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \frac{d}{r} + \frac{\mu_r}{4} \right] \quad (4.57)$$

Khi hệ thống không đối xứng, d được thay bởi khoảng cách trung bình giữa các dây dẫn 1, 2, 3:

$$d = \sqrt[3]{d_{12} d_{23} d_{31}} \quad (4.58)$$

Ví dụ, khi $250 < \frac{d}{r} < 500$, đó là các dây dẫn ngoài trời thì điện cảm trên 1km của một pha sẽ là:

$$\frac{L_p}{l} = L'_p = (1,15 + 1,3) \text{ mH/km} \quad (4.59)$$

$$(\text{khi } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m, } l = 10^3 \text{ m})$$

Còn điện kháng pha của mỗi dây trên đơn vị chiều dài:

$$X'_p = (0,36 + 0,41) \Omega/\text{km} \quad (4.60)$$

Khi các số liệu trên không được cho trước, người ta thường chấp nhận $X'_p \approx 0,4 \Omega/\text{km}$

4.8.2 Sụt áp trên đường dây ba pha

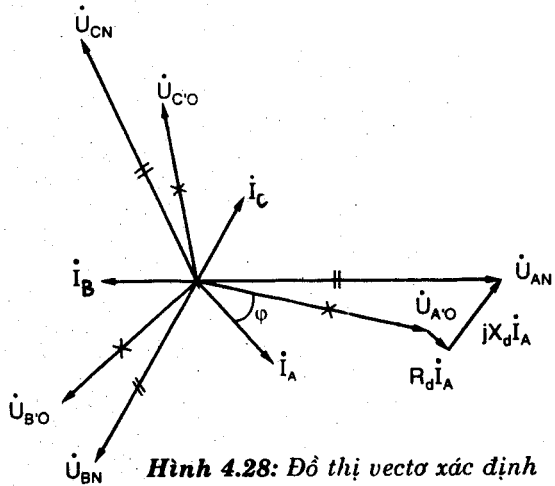
Sụt áp trên đường dây ba pha là hiệu các giá trị hiệu dụng của điện áp dây ở đầu và cuối dây.

Sụt áp có thể xác định bằng cách đo điện áp ở đầu dây và cuối dây của đoạn dây cùng một pha đang xét, bởi vì trong trường hợp tải không đối xứng, điện áp dây trên tải U_{AB} , U_{BC} , U_{CA} có thể khác nhau.

Trong hệ thống bốn dây, người ta đưa ra khái niệm sụt áp pha là hiệu các trị hiệu dụng của điện áp pha ở đầu và cuối đường dây đang xét.

Việc đưa ra công thức tương đối đơn giản để tính sụt áp trong trường hợp tải không đối xứng là không thể được. Do đó ta chỉ xét trường hợp đối xứng. Và để đơn giản, ta xét nguồn và tải đều được nối sao (vì nếu nối tam giác thì ta vẫn có thể chuyển về sao tương đương).

Trong hệ thống sao đối xứng, ba dây hoặc bốn dây, độ lệch điểm trung tính giữa nguồn và tải $U_{ON} = 0$, vì vậy có thể xét mỗi pha một cách độc lập như đối với mạch một pha.



Hình 4.28: Đồ thị vectơ xác định sụt áp trên đường dây ba pha.

Cũng như các phần trước, ta đã ký hiệu:

$\dot{U}_{AN}, \dot{U}_{BN}, \dot{U}_{CN}$: các điện áp pha đầu đường dây.

$\dot{U}_{A'O}, \dot{U}_{B'O}, \dot{U}_{C'O}$: các điện áp pha cuối dây

$Z_d = R_d + jX_d$: trở kháng của mỗi pha.

$\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$: các dòng điện dây

thì ta sẽ có:

$$\begin{cases} \dot{U}_{AN} = \dot{U}_{A'O} + (R_d + jX_d)\dot{I}_A \\ \dot{U}_{BN} = \dot{U}_{B'O} + (R_d + jX_d)\dot{I}_B \\ \dot{U}_{CN} = \dot{U}_{C'O} + (R_d + jX_d)\dot{I}_C \end{cases} \quad (4.61)$$

Đồ thị vectơ tương ứng với (4.61) được biểu diễn trên H.4.28.

Sụt áp pha khi đó bằng hiệu môđun của các điện áp pha bất kỳ.

$$\Delta U_p = |\dot{U}_{AN}| - |\dot{U}_{A'O}| \quad (4.62)$$

Để xác định nó, ta có thể dùng công thức gần đúng: chiếu lần lượt các vectơ lên trên vectơ $\dot{U}_{A'O}$:

$$\Delta U_p \approx (R_d \cos \varphi + X_d \sin \varphi) I_d \quad (4.63)$$

trong đó: I_d - Giá trị hiệu dụng của dòng dây bất kỳ và $\cos \varphi$ - hệ số công suất của tải.

Các vectơ điện áp pha ở đầu và cuối dây tạo nên các hình sao đối xứng, và do đó, các vectơ điện áp dây tạo nên các tam giác đều, có các cạnh

lớn hơn $\sqrt{3}$ lần so với hình sao. Khi ta nhân hai vế của (4.63) với $\sqrt{3}$ ta sẽ có hiệu các giá trị hiệu dụng của các điện áp dây ($\dot{U}_{AB} - \dot{U}_{AB'}$), và do đó, sụt áp dây sẽ là:

$$\Delta U = \sqrt{3} (R_d \cos \varphi + X_d \sin \varphi) I_d \quad (4.64)$$

Nếu dòng điện không được cho trước, mà cho trước công suất và hệ số công suất của tải, hoặc công suất tác dụng P và công suất phản kháng Q , thì công thức (4.64) được viết lại khi ta sử dụng:

$$\sqrt{3} I_d \cos \varphi = \frac{P}{U_d} \text{ và } \sqrt{3} I_d \sin \varphi = \frac{Q}{U_d} \text{ là:}$$

$$\Delta U = \frac{PR_d + QX_d}{U_d} \quad (4.65)$$

hay:
$$\Delta U = \frac{P}{U_d} (R_d + X_d \operatorname{tg} \varphi) \quad (4.66)$$

Khi muốn biểu diễn sụt áp bằng phần trăm, ta nhân hai vế của (4.65) cho $\frac{100}{U_d}$

$$\Delta U \% = \frac{100}{U_d^2} [PR_d + QX_d] = \frac{100P}{U_d^2} [R_d + X_d \operatorname{tg} \varphi] \quad (4.67)$$

Trong mạch điện, ngoài khái niệm sụt áp người ta còn có khái niệm về điện áp tổn hao. Điện áp tổn hao là tích của trở kháng đường dây với dòng đi qua nó. Trong đường dây ba pha, tích của trở kháng đường dây và dòng được gọi là điện áp tổn hao pha. Ta dễ dàng thấy, điện áp tổn hao pha:

$$\Delta \dot{U}_p = Z_d \dot{I}_d = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{A'O}$$

Ví dụ 4.5. Đường dây ba pha trong không khí có chiều dài $l = 500\text{m}$, tiết diện dây dẫn $S = 70 \text{ mm}^2$, dây bằng đồng, được cấp bởi nguồn áp 380V và có hai tải: một có công suất $P_1 = 12\text{KW}$, có $\cos \varphi_1 = 0,8$ và một có công suất $P_2 = 6\text{KW}$, có $\cos \varphi_2 = 0,7$. Hãy xác định sụt áp phần trăm và tuyệt đối khi cho $X'_p = 0,38 \Omega/\text{km}$ (điện kháng pha trên đơn vị chiều dài).

Giải. Ta có thể xác định:

$$\cos \varphi_1 = 0,8 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_1 = 0,75$$

$$\cos \varphi_2 = 0,7 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_2 = 1,02$$

Vậy các công suất phản kháng của các tải:

$$Q_1 = P_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = 12 \cdot 0,75 = 9 \text{ KVAR}$$

$$Q_2 = P_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = 6 \cdot 1,02 = 6,1 \text{ KVAR}$$

Điện trở và điện kháng của đường dây:

$$R_d = \frac{l}{\gamma S} = \frac{500}{50.70} = 0,127\Omega \text{ (cho dây đồng)}$$

$$X_d = X'_p \cdot l = 0,38 \cdot 0,5 = 0,19 \Omega$$

Sụt áp % sẽ là:

$$\begin{aligned} \Delta U\% &= \frac{100}{U_d^2} (R_d P + X_d Q) \\ &= \frac{100}{380^2} [0,127(12 + 6) + 0,19(9 + 6,1) \cdot 10^3] = 3,57\% \end{aligned}$$

Sụt áp tuyệt đối:

$$\Delta U = \frac{\Delta U\% \cdot U_d}{100} = \frac{3.57 \cdot 380}{100} = 13,5V$$

4.8.3 Tổn hao công suất trên đường dây ba pha

Do có dòng điện xoay chiều chạy trên dây dẫn ba pha nên xảy ra tổn hao công suất tác dụng cũng như công suất phản kháng. Tổn hao công suất tác dụng trên đường dây bằng tổng tổn hao công suất tác dụng trong từng dây riêng biệt. Khi các dây dẫn có điện trở giống nhau và dòng điện không như nhau thì ta sẽ có tổn hao công suất tác dụng ΔP được tính:

$$\Delta P = R_d (I_A^2 + I_B^2 + I_C^2) \quad (4.68)$$

Và tương tự cho tổn hao công suất phản kháng:

$$\Delta Q = X_d (I_A^2 + I_B^2 + I_C^2) \quad (4.69)$$

Khi hệ thống là đối xứng:

$$\Delta P = 3R_d I_d^2 \quad (4.70)$$

$$\Delta Q = 3X_d I_d^2 \quad (4.71)$$

Nếu công suất tác dụng và phản kháng ở cuối đường dây là P và $Q = P \tan \varphi$ thì các công suất ở đầu dây:

$$P_1 = P + \Delta P = P + 3R_d I_d^2 \quad (4.72)$$

$$Q_1 = Q + \Delta Q = Q + 3X_d I_d^2 \quad (4.73)$$

Và hệ số công suất ở đầu dây:

$$\cos \varphi_1 = \frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 + Q_1^2}} \quad (4.74)$$

Ví dụ: Xác định tổn hao công suất tác dụng và phản kháng ở ví dụ trước.

Giải: Dòng điện trên đường dây:

$$I_d = \frac{S}{\sqrt{3}U} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{3}U}$$

$$I_d = \frac{\sqrt{(12+6)^2 + (9+6,1)^2}}{\sqrt{3} \cdot 380} \cdot 10^3 = 35,7 \text{ A}$$

Vậy: $\Delta P = 3R_d I_d^2 = 3 \cdot 0,127 \cdot 35,7^2 = 485 \text{ W}$

$$\Delta Q = 3X_d I_d^2 = 3 \cdot 0,19 \cdot 35,7^2 = 725 \text{ VAR}$$

4.9 PHƯƠNG PHÁP CÁC THÀNH PHẦN ĐỐI XỨNG

4.9.1 Các thành phần đối xứng

Trong các hệ thống ba pha, nguồn cung cấp thường là đối xứng đó là sự đối xứng do máy phát. Đối với tải người ta cũng cố gắng để cho đối xứng. Mặc dù vậy, trường hợp tải không đối xứng vẫn thường xảy ra, và điều đó làm thay đổi hệ thống ba pha về mặt điện từ. Bên cạnh đó, trường hợp không đối xứng còn xảy ra do đứt dây dẫn, chạm đất, chạm pha v.v.. Do vậy cần phải có kiến thức về phân tích mạch điện ở trạng thái không đối xứng.

Việc tính toán mạch ba pha có trở kháng không đối xứng đã trình bày ở các mục trước. Ở đây, chúng ta sẽ tìm hiểu một phương pháp mới là phương pháp các thành phần đối xứng. Cơ sở của phương pháp này là mỗi hệ thống không đối xứng của các vectơ biểu diễn các quá trình điện áp hay dòng điện sin có thể phân tích thành một số các thành phần đối xứng nào đó.

Từ đây ta có nhận xét: việc phân tích một hệ thống không đối xứng nhiều pha có thể được tiến hành bởi việc phân tích một số các mạch nhiều pha đối xứng và kết quả sẽ nhận được qua việc xếp chồng các kết quả riêng lẻ.

Ở đây ta chỉ giới hạn xét mạch ba pha không đối xứng. Các quá trình của một đại lượng vật lý trong các pha A, B, C của một hệ thống ba pha đối xứng có thể dịch chuyển so với nhau một góc là:

- $\frac{2\pi}{3}$ tức 120° theo chiều ngược;
- $\frac{4\pi}{3}$ tức 240° theo chiều ngược hay 120° theo chiều thuận;
- 2π tức 0° (khi cùng pha).

Ta thường chọn pha cơ bản là pha A còn các pha B, C thì dịch đi so với nó.

Hệ thống thứ nhất được gọi là hệ thống thứ tự thuận, được ký hiệu với

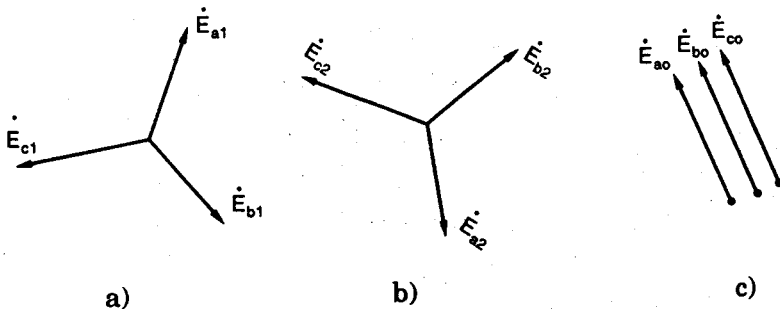
chỉ số "1".

Hệ thống thứ hai được gọi là hệ thống thứ tự nghịch, được ký hiệu với chỉ số "2".

Hệ thống thứ ba được gọi là hệ thống thứ tự không, được ký hiệu với chỉ số "0".

Ta sẽ sắp xếp các chỉ số 1, 2, 0 tương ứng cho các biên độ và góc pha ban đầu cho các điện áp nguồn và tương ứng với nó là các giá trị phức trong các hệ thống ba pha thuận, nghịch và không.

$$\begin{aligned}
 e_{a1} &= E_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) & \dot{E}_{a1} &= E_1 e^{j\varphi_1} \\
 e_{b1} &= E_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1 - 120^\circ) & \dot{E}_{b1} &= \dot{E}_{a1} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\
 e_{c1} &= E_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1 - 240^\circ) & \dot{E}_{c1} &= \dot{E}_{a1} e^{-j\frac{4\pi}{3}} \\
 e_{a2} &= E_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2) & \dot{E}_{a2} &= E_2 e^{j\varphi_2} \\
 e_{b2} &= E_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2 + 120^\circ) & \dot{E}_{b2} &= \dot{E}_{a2} e^{j\frac{2\pi}{3}} \\
 e_{c2} &= E_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2 + 240^\circ) & \dot{E}_{c2} &= \dot{E}_{a2} e^{j\frac{4\pi}{3}}
 \end{aligned} \tag{4.75}$$



Hình 4.29: Đồ thị vector của các hệ đối xứng

a) Thứ tự thuận; b) Thứ tự nghịch; c) Thứ tự không

$$e_{a0} = e_{b0} = e_{c0} = E_{m0} \sin(\omega t + \varphi_0); \dot{E}_{a0} = \dot{E}_{b0} = \dot{E}_{c0} = E_0 e^{j\varphi_0}$$

Đồ thị vector của các điện áp nguồn trong các hệ thống thứ tự pha khác nhau được cho trên H.4.29.

Trong các công thức (4.75) có các thừa số $e^{j\frac{2\pi}{3}}$, $e^{j\frac{4\pi}{3}}$, $e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ và $e^{-j\frac{4\pi}{3}}$ là các hàm mũ, thừa số $e^{j\frac{2\pi}{3}}$, ta sẽ ký hiệu là chữ a . Thừa số a được gọi là toán tử quay một góc $\frac{2\pi}{3}$ theo chiều dương. Nó là một số phức, có các tính chất sau:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos 120^\circ + j\sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = \cos 240^\circ + j\sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^3 = e^{j2\pi} = a^{3k} = 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

$$a^4 = a^{3k+1} = a \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

$$a^5 = a^{3k+2} = a^2 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

$$a^* = a^{-1} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = a^2$$

$$(a^2)^* = a^{-2} = e^{-j\frac{4\pi}{3}} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = a$$

Các số 1, a và a^2 là một hệ đối xứng của các vectơ đơn vị, có tổng bằng không:

$$1 + a + a^2 = 1 - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad (4.76)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } 1 + a = -a^2 \quad (4.77a)$$

$$1 + a^2 = -a \quad (4.77b)$$

Khi sử dụng toán tử quay a , thì ta có các điện áp đối xứng có thứ tự pha khác nhau được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{a1} &= \dot{E}_1, \dot{E}_{b1} = a^2 \dot{E}_1, \dot{E}_{c1} = a \dot{E}_1 \\ \dot{E}_{a2} &= \dot{E}_2, \dot{E}_{b2} = a \dot{E}_2, \dot{E}_{c2} = a^2 \dot{E}_2 \\ \dot{E}_{a0} &= \dot{E}_{b0} = \dot{E}_{c0} = \dot{E}_0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

4.9.2 Phân tích hệ thống ba pha không đối xứng thành các thành phần đối xứng

Với một hệ thống không đối xứng điện áp pha bất kỳ $\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c$ ta hãy tìm nó dưới dạng tổng của các thành phần đối xứng tương ứng:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_{a1} + \dot{U}_{a2} + \dot{U}_{a0} \quad (4.79a)$$

$$\dot{U}_b = \dot{U}_{b1} + \dot{U}_{b2} + \dot{U}_{b0} \quad (4.79b)$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_{c1} + \dot{U}_{c2} + \dot{U}_{c0} \quad (4.79c)$$

Khi sử dụng công thức (4.78), ta sẽ viết (4.79) dưới dạng:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 \quad (4.80a)$$

$$\dot{U}_b = a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 + \dot{U}_0 \quad (4.80b)$$

$$\dot{U}_c = a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 + \dot{U}_0 \quad (4.80c)$$

Ta nhận được hệ ba phương trình tuyến tính, từ đó có thể tìm ra các thành phần đối xứng $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0$ của một hệ thống không đối xứng $\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c$. Kết quả như sau:

- Cộng ba phương trình của (4.80) ta có:

$$U_0 = \frac{1}{3}(\dot{U}_a + \dot{U}_b + \dot{U}_c) \quad (4.81)$$

- Nhân (4.80b) với a , nhân (4.80c) với a^2 rồi cộng ba phương trình, ta có:

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{3}(\dot{U}_a + a\dot{U}_b + a^2\dot{U}_c) \quad (4.82)$$

- Nhân (4.80b) với a^2 , nhân (4.80c) với a rồi cộng ba phương trình, ta có:

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{3}(\dot{U}_a + a^2\dot{U}_b + a\dot{U}_c) \quad (4.83)$$

4.9.3 Tính chất các thành phần đối xứng

Như đã xét trong mục trước, việc phân tích một hệ thống không đối xứng thành ba thành phần đối xứng có đặc tính tổng quát. Tuy nhiên, vẫn tồn tại những hệ thống dòng và áp, mà trong đó không phải tất cả ba thành phần đều xuất hiện hoặc có thể xuất hiện.

Khi tổng ba vectơ của một hệ không đối xứng dòng và áp bằng không, thì hệ thống đó sẽ không chứa thành phần không. Điều kiện này thỏa mãn các dòng điện trong hệ thống ba dây và các áp dây trong hệ thống ba hay bốn dây.

Dòng điện trong hệ thống ba dây không có điểm trung tính nối đất có thể chỉ bao gồm các thành phần thuận và nghịch, nhưng không có thành phần thứ tự không.

Trong hệ thống nối sao bốn dây, dòng trong dây trung tính bằng ba lần giá trị của các thành phần thứ tự không. Trong các hệ thống ba dây có điểm trung tính nối đất, các thành phần dòng thứ tự không có thể khép mạch qua đất như trong dây trung tính.

Tổng các điện áp dây, cả trong mạch ba dây và bốn dây, đều bằng không, từ đó ta có nhận xét:

- Điện áp dây trong các hệ thống ba dây và bốn dây chỉ bao gồm các thành phần thứ tự thuận và nghịch.

- Mức độ không đối xứng của điện áp dây, theo định nghĩa là tỉ số giữa giá trị hiệu dụng thành phần thứ tự nghịch áp dây với giá trị hiệu dụng

thành phần thứ tự thuận của chúng, và được tính theo phần trăm.

$$\varepsilon\% = \frac{U_2}{U_1} \cdot 100\% \quad (4.84)$$

Trong thực tế, các hệ thống điện áp dây được gọi là đối xứng khi $\varepsilon < 5\%$.

Mặc dù không có thành phần không trong các điện áp dây, nhưng nó vẫn có thể xuất hiện trong các điện áp pha. Ta gọi $\vec{E}_a, \vec{E}_b, \vec{E}_c$ là các điện áp pha của nguồn ba pha lý tưởng nối sao, giả thiết chúng có đủ các thành phần thứ tự.

$$\vec{E}_a = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_b = a^2 \vec{E}_1 + a \vec{E}_2 + \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_c = a \vec{E}_1 + a^2 \vec{E}_2 + \vec{E}_0$$

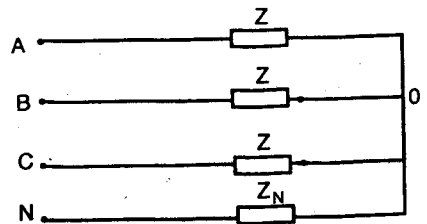
Từ các phương trình trên, ta nhận thấy rằng, do áp dây là hiệu các vectơ điện áp pha, nên thành phần không của điện áp pha không ảnh hưởng đến giá trị của điện áp dây.

4.9.4 Trở kháng ba pha đối xứng và các thành phần đối xứng

Trong phương pháp các thành phần đối xứng, người ta thường sử dụng nguyên lý xếp chồng. Các hệ cung cấp không đối xứng được biểu diễn dưới dạng nối tiếp ba hoặc trong trường hợp đặc biệt hai nguồn cung cấp ba pha đối xứng có thứ tự pha khác nhau. Nếu như tải đối xứng thì khi đó mạch không đối xứng có thể phân tích thành hai hoặc ba mạch ba pha có nguồn và tải đối xứng. Từ đó ta thấy rằng, trong mạch ba pha đối xứng được cung cấp bởi nguồn áp đối xứng có thứ tự pha bất kỳ, các dòng điện cũng đối xứng và có cùng thứ tự pha như nguồn áp. Như vậy chỉ cần tính các thành phần đối xứng của dòng điện trong một pha. Để thực hiện điều đó cần phải biết trở kháng của mạch ba pha đối với các dòng có thứ tự pha khác nhau.

Trên H.4.30 là sơ đồ tải ba pha đối xứng với Z_N trên dây trung tính. Nếu ta

nối đến các cực A, B, C, N một nguồn áp ba pha đối xứng có thứ tự pha thuận $\vec{U}_{a1}, \vec{U}_{b1}, \vec{U}_{c1}$ thì các dòng điện cũng sẽ đối xứng và có thứ tự thuận $\vec{I}_{a1}, \vec{I}_{b1}$ và $\vec{I}_{c1}$



Hình 4.30: Mạch ba pha bốn dây đối xứng với Z_N ở dây trung tính

• Tỷ số giữa điện áp pha bất kỳ với dòng pha đó trong mạch ba pha đối xứng, được cung cấp bởi nguồn áp đối xứng có thứ tự pha thuận được gọi là

trở kháng thứ tự thuận, và ta ký hiệu nó là Z_1 :

$$\frac{\dot{U}_{a1}}{\dot{I}_{a1}} = \frac{\dot{U}_{b1}}{\dot{I}_{b1}} = \frac{\dot{U}_{c1}}{\dot{I}_{c1}} = Z_1 \quad (4.85)$$

Trong mạch trên hình (4.30), ta có $Z_1 = Z$. Tổng các dòng điện thứ tự thuận bằng không, do đó không có dòng đi qua dây trung tính ($I_N = 0$). Vì vậy trở kháng Z_N trên dây trung tính không ảnh hưởng đến giá trị Z_1 .

Tương tự, nếu ta nối đến các đầu A, B, C, N một nguồn áp ba pha đối xứng có thứ tự pha nghịch $\dot{U}_{a2}, \dot{U}_{b2}, \dot{U}_{c2}$ sẽ gây nên trong tải các dòng điện có thứ tự nghịch $\dot{I}_{a2}, \dot{I}_{b2}, \dot{I}_{c2}$

• Tỷ số giữa điện áp pha bất kỳ với dòng của pha đó của mạch ba pha đối xứng, được cung cấp bởi nguồn đối xứng thứ tự nghịch, được gọi là trở kháng thứ tự nghịch, ký hiệu Z_2 :

$$\frac{\dot{U}_{a2}}{\dot{I}_{a2}} = \frac{\dot{U}_{b2}}{\dot{I}_{b2}} = \frac{\dot{U}_{c2}}{\dot{I}_{c2}} = Z_2 \quad (4.86)$$

Trong mạch đang xét, tất nhiên $Z_2 = Z$

Nếu ta đưa đến các cực A, B, C, N của mạch trên H.4.30 nguồn áp đối xứng có thứ tự pha không: $\dot{U}_{ao} = \dot{U}_{bo} = \dot{U}_{co}$ thì các dòng điện sẽ đối xứng và có thứ tự pha không:

$$\frac{\dot{U}_{ao}}{\dot{I}_{ao}} = \frac{\dot{U}_{bo}}{\dot{I}_{bo}} = \frac{\dot{U}_{co}}{\dot{I}_{co}} = Z_o \quad (4.87)$$

Điện áp của một pha bất kỳ, ví dụ pha A sẽ được tính bởi tổng các điện áp trên trở kháng Z và Z_N .

$$\dot{U}_{ao} = Z\dot{I}_o + Z_N(3\dot{I}_o)$$

Bởi vì trên dây trung tính có dòng điện bằng $3\dot{I}_o$.

Từ đây suy ra trở kháng đối với các dòng có thứ tự pha không:

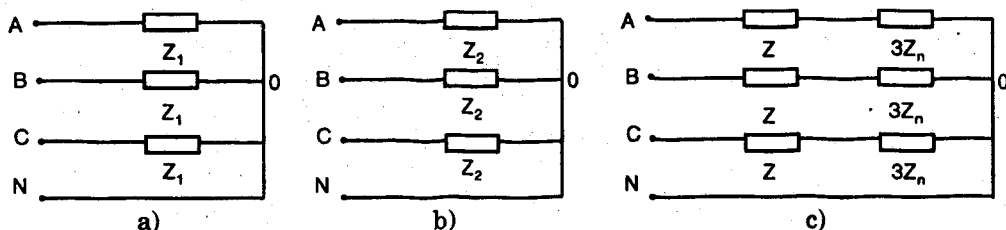
$$Z_o = Z + 3Z_N \quad (4.88)$$

Nếu trong mạch tải đối xứng đang xét được cung cấp bởi các nguồn áp không đối xứng bao gồm các thành phần thuận $\dot{U}_1$ và nghịch $\dot{U}_2$, thì các dòng sinh ra bởi các áp này cũng có các thành phần thuận $\dot{I}_1$ và nghịch $\dot{I}_2$:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} \quad (4.89)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_2} \quad (4.90)$$

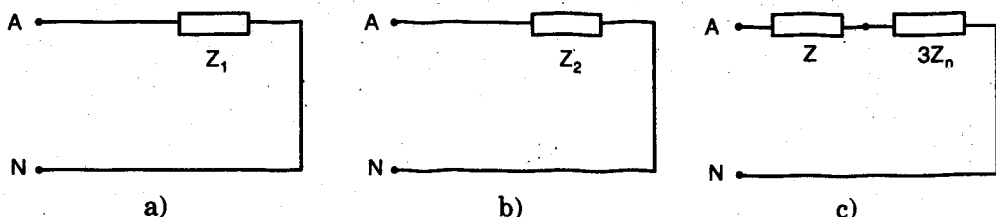
Khi tính toán các dòng ba pha bằng phương pháp các thành phần đối xứng ta sẽ sử dụng các sơ đồ riêng lẻ cho các thành phần cụ thể. Trong các sơ đồ đối với thành phần thuận và thành phần nghịch của dòng điện ta sẽ bỏ qua trở kháng Z_N (H.4.31ab).



Hình 4.31

Trong các sơ đồ đối với thành phần thứ tự không, xuất hiện trong mỗi pha giá trị $3Z_N$ (H.4.31c)

Pha cơ sở được chọn khi tính toán các dòng của thứ tự pha bất kỳ ta thường chọn là pha A, và ta thường dùng các sơ đồ một sợi như trên H.4.32 a,b,c.



Hình 4.32

Ví dụ 4.6. Động cơ cảm ứng được nối sao, có trở kháng pha

$$Z_1 = 4 + j3 (\Omega); Z_2 = 0,1 + j0,4 (\Omega)$$

Được cung cấp bởi nguồn áp dây không đối xứng có giá trị hiệu dụng 390(V), 390(V) và 360(V). Hãy tính dòng trong các pha của động cơ.

Giải

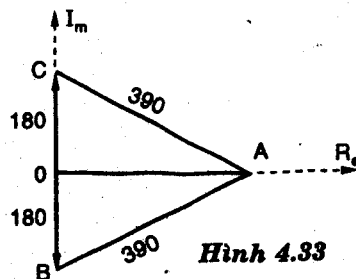
Tam giác điện áp dây là tam giác cân. Ta hãy đặt chúng lên mặt phẳng sao cho trung tuyến của cạnh 360(V) nằm trên trục thực (H.4.33). Các điện áp pha của mạch:

$$\dot{U}_A = \sqrt{390^2 - 180^2} = 346(V)$$

$$\dot{U}_B = -j180(V)$$

$$\dot{U}_C = j180(V)$$

Các thành phần $\dot{U}_0, \dot{U}_1, \dot{U}_2$ được tính:



Hình 4.33

$$\dot{U}_0 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) = 115,3(\text{V})$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C) \\ &= \frac{1}{3}(346 + 180^\circ \angle 30 + 180^\circ \angle -30^\circ) \\ &= \frac{1}{3}(346 + 2 \cdot 180 \cdot \cos 30^\circ) = 219,3(\text{V})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C) \\ &= \frac{1}{3}(346 + 180^\circ \angle -210^\circ + 180^\circ \angle 210^\circ) \\ &= \frac{1}{3}(346 + 2 \cdot 180 \cdot \cos(-210^\circ)) = 11,4(\text{V})\end{aligned}$$

Mặc dù tồn tại thành phần thứ tự không của điện áp, nhưng không xuất hiện thành phần thứ tự không của dòng, vì $Z_N = \infty$

Các thành phần thuận và nghịch:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} = \frac{219,3}{4 + j3} = \frac{219,3}{25}(4 - j3) = 35 - j26,3$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_2} = \frac{11,4}{0,1 + j0,4} = \frac{11,4}{0,17}(0,1 - j0,4) = 6,7 - j26,8$$

Các dòng điện trong các pha:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 41,7 - j53,1$$

$$\dot{I}_B = a^2\dot{I}_1 + a\dot{I}_2$$

$$\begin{aligned}&= \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(35 - j26,3) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(6,7 - j26,8) \\ &= -40,3 - j17,2 + 19,86 + j19,2 = -20,4 + j2\end{aligned}$$

$$\dot{I}_C = a\dot{I}_1 + a^2\dot{I}_2$$

$$\begin{aligned}&= \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(35 - j26,3) + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(6,7 - j26,8) \\ &= 5,28 + j43,5 - 26,56 + j7,6 = -21,3 + j51,1\end{aligned}$$

Giá trị hiệu dụng của các dòng điện:

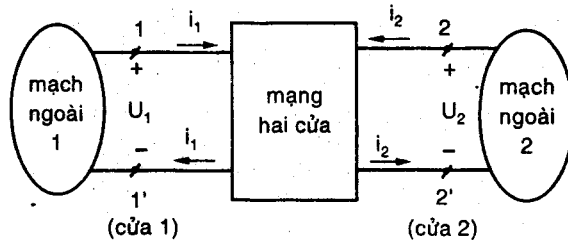
$$I_A = 67,5 (\text{A}); \quad I_B = 20,5 (\text{A}); \quad I_C = 55,4 (\text{A});$$

$$I_1 = 43,8 (\text{A}) \quad I_2 = 27,6 (\text{A})$$

MẠNG HAI CỬA

5.1 KHÁI NIỆM CHUNG

Mạng hai cửa là mạch điện trao đổi năng lượng, tín hiệu điện từ với bên ngoài qua hai cửa. Mỗi cửa là một cặp cực ở đó năng lượng, tín hiệu có thể được đưa vào hoặc lấy ra; ở mỗi cửa dòng điện chảy vào một cực thì bằng dòng điện chảy ra ở cực kia.

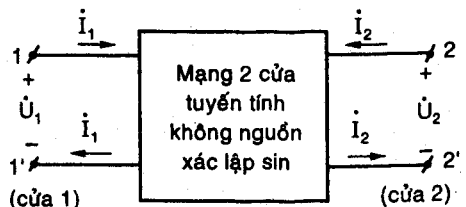


Hình 5.1

Ta giới hạn xét mạng hai cửa tuyến tính không nguồn (không chứa các nguồn độc lập) ở chế độ xác lập điều hòa. Tuy nhiên, hầu hết các kết quả có thể suy ra cho chế độ xác lập DC hoặc cho mạng hai cửa tuyến tính không nguồn thuần trở (chỉ chứa các phần tử điện trở và nguồn phụ thuộc).

5.2 CÁC HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI CỦA MẠNG HAI CỬA

Trạng thái và quá trình năng lượng trên hai cửa được đặc trưng và đo bởi hai cặp biến trạng thái $\dot{U}_1, \dot{I}_1$, và $\dot{U}_2, \dot{I}_2$. Coi bài toán mạng hai cửa tuyến tính là bài toán một hệ thống có hai phần tử biến động đặt ở hai cửa, theo mục 3.6.2 (Chương 3) mỗi



Hình 5.2

biến sẽ được xác định theo một quan hệ tuyến tính với hai biến khác. Do đó, nói chung trạng thái của mạng được mô tả bởi một hệ phương trình trạng thái liên hệ hai biến này với hai biến khác có dạng:

$$\dot{X}_1 = a_1 \dot{X}_3 + a_2 \dot{X}_4 + a_3$$

$$\dot{X}_2 = b_1 \dot{X}_3 + b_2 \dot{X}_4 + b_3$$

trong đó $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ chỉ tùy thuộc kết cấu và thông số các phần tử bên trong mạng hai cửa; $\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dot{X}_3, \dot{X}_4$ là một trong các biến $\dot{U}_1, \dot{I}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_2$.

Đối với mạng hai cửa không nguồn, khi hai trong bốn đại lượng bằng không thì hai đại lượng còn lại sẽ bằng không do đó suy ra $a_3 = 0$ và $b_3 = 0$, nghĩa là:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1 &= a_1 \dot{X}_3 + a_2 \dot{X}_4 \\ \dot{X}_2 &= b_1 \dot{X}_3 + b_2 \dot{X}_4 \end{aligned} \right\}$$

Bởi vì có sáu tổ hợp hai đại lượng bất kỳ từ bốn đại lượng trên, nên ta có sáu hệ phương trình trạng thái mô tả hành vi mạng hai cửa. Tùy theo bài toán cụ thể sẽ sử dụng hệ phương trình thích hợp.

5.2.1 Hệ phương trình trạng thái dạng Z

Biểu diễn $\dot{U}_1$ và $\dot{U}_2$ theo $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$:

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \quad (5.1a)$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \quad (5.1b)$$

hoặc dạng ma trận:

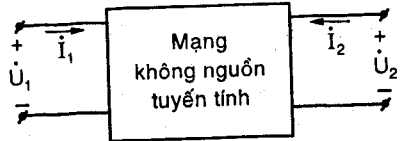
$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

với:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Chiều dương của $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{U}_1, \dot{U}_2$ như H.5.3.

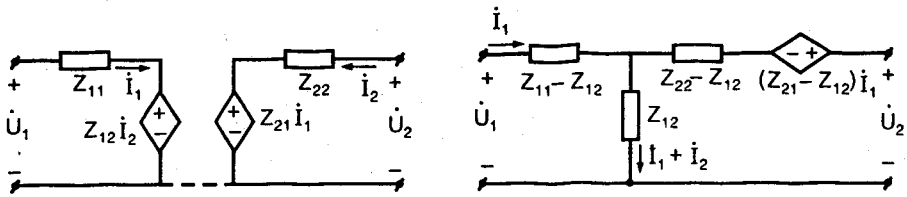
$Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$ không phụ thuộc các dòng, áp mà chỉ phụ thuộc vào kết cấu và thông số các phần tử ở bên trong mạng hai cửa. Chúng là những thông số đặc trưng cho mạng hai cửa, gọi là thông số dạng Z.



Hình 5.3

Từ (5.1a) và (5.1b) suy ra:

$$\left\{ \begin{aligned} Z_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} : \text{trở kháng vào cửa 1 khi hở mạch cửa 2} \\ Z_{22} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} : \text{trở kháng vào cửa 2 khi hở mạch cửa 1} \\ Z_{12} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} : \text{trở kháng tương hỗ cửa 1 đối với cửa 2 khi hở mạch cửa 1} \\ Z_{21} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} : \text{trở kháng tương hỗ cửa 2 đối với cửa 1 khi hở mạch cửa 2} \end{aligned} \right. \quad (5.4)$$



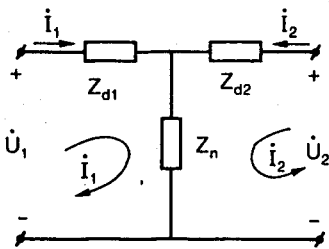
Hình 5.4

Các thông số dạng Z gọi là các thông số trở kháng hở mạch, đơn vị đo là ohm (Ω). Các mạch tương đương được mô tả bởi hệ phương trình dạng Z được vẽ trên H.5.4.

Sự tương đương giữa các mạch H.5.4 với hệ phương trình (5.1) có thể được kiểm tra bằng cách viết định luật K2 cho hai mắt lưới ở mỗi mạch.

Ví dụ 5.1: Tìm các thông số Z của mạng hai cửa hình T (H.5.5).

Giải



Hình 5.5

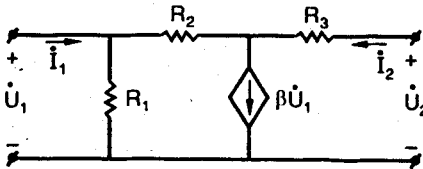
Viết phương trình K2 cho hai mắt lưới:

$$\begin{cases} (Z_{d1} + Z_n)\dot{I}_1 + Z_n\dot{I}_2 = \dot{U}_1 \\ Z_n\dot{I}_1 + (Z_{d2} + Z_n)\dot{I}_2 = \dot{U}_2 \end{cases} \quad (5.5)$$

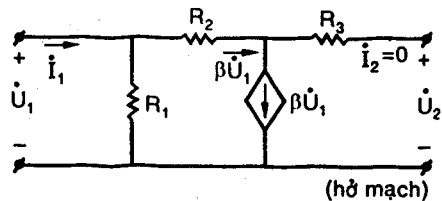
$$\text{Vậy: } Z_{11} = Z_{d1} + Z_n, \quad Z_{22} = Z_{d2} + Z_n, \quad Z_{12} = Z_{21} = Z_n \quad (5.6)$$

Nhận xét rằng ma trận Z đối xứng.

Ví dụ 5.2: Tìm các thông số Z của mạch điện H.5.6



Hình 5.6



Hình 5.7

Giải

Ta tìm các thông số Z dùng biểu thức (5.4).

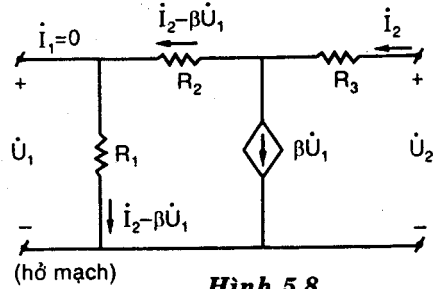
• Hở mạch cửa 2 ($\dot{I}_2 = 0$) ta được như H.5.7. Từ hình này ta có:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R_1} + \beta\dot{U}_1 \Rightarrow Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{R_1}{1 + \beta R_1}$$

$$\dot{U}_2 = -\beta\dot{U}_1 R_2 + \dot{U}_1 = (1 - \beta R_2)\dot{U}_1 = (1 - \beta R_2)Z_{11}\dot{I}_1$$

$$\Rightarrow Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{R_1(1 - \beta R_2)}{1 + \beta R_1}$$

• Hở mạch cửa 1 ($\dot{I}_1 = 0$) ta được mạch H.5.8. Từ hình này ta có dòng điện chảy qua R_1 và R_2 là $\dot{I}_2 - \beta \dot{U}_1$ (vì $\dot{I}_1 = 0$), do đó:



Hình 5.8

$$\dot{U}_1 = R_1(\dot{I}_2 - \beta \dot{U}_1) \Rightarrow Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = \frac{R_1}{1 + \beta R_1}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= R_3 \dot{I}_2 + (R_1 + R_2)(\dot{I}_2 - \beta \dot{U}_1) = (R_1 + R_2 + R_3)\dot{I}_2 - \beta(R_1 + R_2)\dot{U}_1 \\ &= \{(R_1 + R_2 + R_3) - \beta(R_1 + R_2)Z_{12}\}\dot{I}_2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + \beta R_1 R_3}{1 + \beta R_1}$$

Nhận xét rằng $Z_{12} \neq Z_{21}$, nghĩa là ma trận $\mathbf{Z}$ không đối xứng.

5.2.2 Hệ phương trình trạng thái dạng Y

Biểu diễn $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ theo $\dot{U}_1$ và $\dot{U}_2$:

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \quad (5.7a)$$

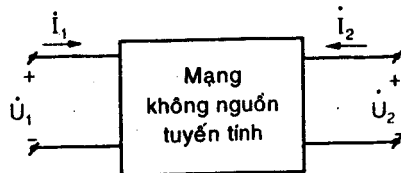
$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \quad (5.7b)$$

hoặc dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \text{ với } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Chiều dương của $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{U}_1, \dot{U}_2$ như H.5.9.

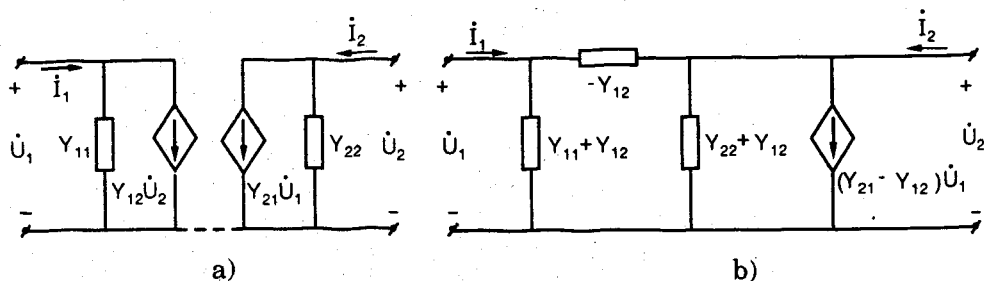
$Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$ gọi là các thông số Y; chúng là những thông số đặc trưng cho mạng hai cửa, không phụ thuộc vào các dòng, áp mà chỉ phụ thuộc vào kết cấu và thông số các phần tử ở bên trong mạng hai cửa.



Hình 5.9

Từ (5.7a), (5.7b) suy ra:

$$\begin{cases}
 Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} : \text{dẫn nạp vào cửa 1 khi ngắn mạch cửa 2} \\
 Y_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} : \text{dẫn nạp vào cửa 2 khi ngắn mạch cửa 1} \\
 Y_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} : \begin{array}{l} \text{dẫn nạp tương hỗ cửa 1 đối với cửa 2} \\ \text{khi ngắn mạch cửa 1} \end{array} \\
 Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} : \begin{array}{l} \text{dẫn nạp tương hỗ cửa 2 đối với cửa 1} \\ \text{khi ngắn mạch cửa 2} \end{array}
 \end{cases} \quad (5.9)$$



Hình 5.10

Các thông số dạng Y còn được gọi là các thông số dẫn nạp ngắn mạch, đơn vị đo là mho (Ω^{-1}) hoặc Siemen (S).

Các mạch tương đương mô tả bởi hệ phương trình dạng Y được cho trên H.5.10a và H.5.10b.

Sự tương đương giữa mạch H.5.10b với hệ phương trình (5.7) có thể được kiểm tra bằng cách dùng phương pháp thế nút, viết hai phương trình K1 cho hai nút (ở hai đầu của trở kháng $-Y_{12}$), xem $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ là hai nguồn dòng chảy vào hai nút đó.

Ví dụ 5.3: Tìm các thông số Y của mạng hai cửa hình π (H.5.11).

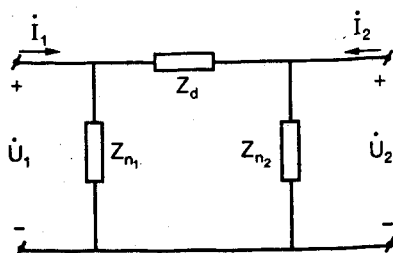
Giải

Có thể tìm các thông số Y dùng biểu thức (5.9)

• Ngắn mạch cửa 2 ($\dot{U}_2 = 0$), dòng qua Z_{n2} bằng 0 do đó:

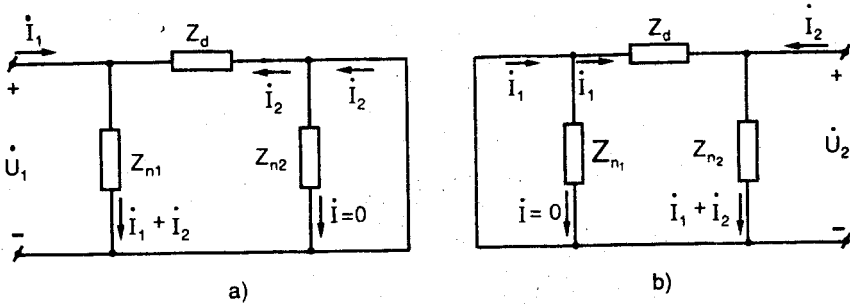
$$\dot{U}_1 = -Z_d \dot{I}_2 = Z_{n1} (\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

$$\Rightarrow Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = -\frac{1}{Z_d} \quad (5.10a)$$



Hình 5.11

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{1}{Z_d} + \frac{1}{Z_{n1}} \quad (5.10b)$$



Hình 5.12

Ngắn mạch cửa 1 ($\dot{U}_1 = 0$) như H.5.12b, ta có dòng qua Z_{n1} bằng không, do đó:

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= -Z_d \dot{I}_1 = Z_{n2} (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \\ \Rightarrow Y_{12} &= \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = -\frac{1}{Z_d} \end{aligned} \quad (5.10c)$$

$$Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \frac{1}{Z_d} + \frac{1}{Z_{n2}} \quad (5.10d)$$

Nhận xét rằng $Y_{12} = Y_{21}$: ma trận $\mathbf{Y}$ đối xứng.

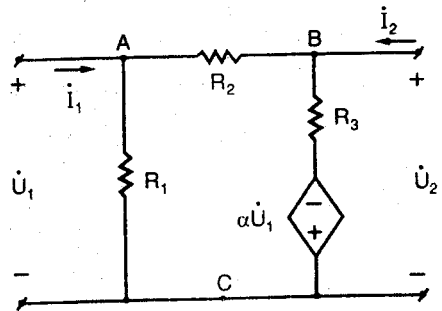
Ví dụ 5.4: Tìm các thông số $\mathbf{Y}$ của mạch H.5.13.

Giải

Dùng phương pháp thế nút. Chọn $\phi_C = 0$, ta có:

$$\phi_A = \dot{U}_1 \text{ và } \phi_B = \dot{U}_2$$

Viết phương trình K1 cho hai nút, đối xử $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ như hai nguồn dòng chảy vào nút A, B ta được:



Hình 5.13

$$\dot{I}_1 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \dot{U}_1 - \frac{1}{R_2} \dot{U}_2 \quad (1)$$

$$\dot{I}_2 - \frac{\alpha \dot{U}_1}{R_3} = -\frac{1}{R_2} \dot{U}_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \dot{U}_2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow \dot{I}_2 = \left(\frac{\alpha}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) \dot{U}_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \dot{U}_2 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) ta thấy:

$$Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad Y_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \quad Y_{12} = -\frac{1}{R_2}, \quad Y_{21} = \frac{\alpha}{R_3} - \frac{1}{R_2}$$

Nhận xét rằng $Y_{12} \neq Y_{21}$: ma trận Y không đối xứng.

5.2.3 Hệ phương trình trạng thái dạng H

Biểu diễn $\dot{U}_1$ và $\dot{I}_2$ theo $\dot{I}_1$ và $\dot{U}_2$:

$$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \quad (5.11a)$$

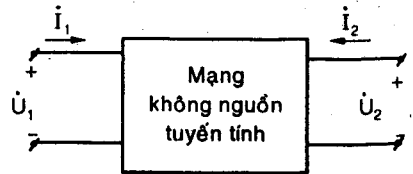
$$\dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \quad (5.11b)$$

hoặc dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \quad \text{với } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Chiều dương của $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{U}_1, \dot{U}_2$ như trên H.5.14.

$H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ gọi là các thông số H; chúng là các thông số đặc trưng cho mạng hai cửa, không phụ thuộc vào các dòng, áp mà chỉ phụ thuộc vào kết cấu và thông số các phần tử ở bên trong mạng hai cửa.



Hình 5.14

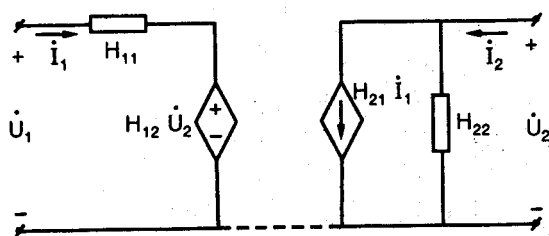
Từ (5.11a) và (5.11b) suy ra:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{1}{Y_{11}} : & \text{trở kháng vào cửa 1 khi ngắn mạch cửa 2, đơn vị đo là ohm } (\Omega) \\ H_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} : & \text{hàm truyền đạt áp từ cửa 2 đến cửa 1 khi hở mạch cửa 1} \\ H_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} : & \text{hàm truyền đạt dòng từ cửa 1 đến cửa 2 khi ngắn mạch cửa 2} \\ H_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} = \frac{1}{Z_{22}} : & \text{dẫn nạp vào cửa 2 khi hở mạch cửa 1, đơn vị đo là mho } (\Omega^{-1}) \text{ hoặc siemen (S)} \end{array} \right. \quad (5.13)$$

H_{12}, H_{21} không có thứ nguyên.

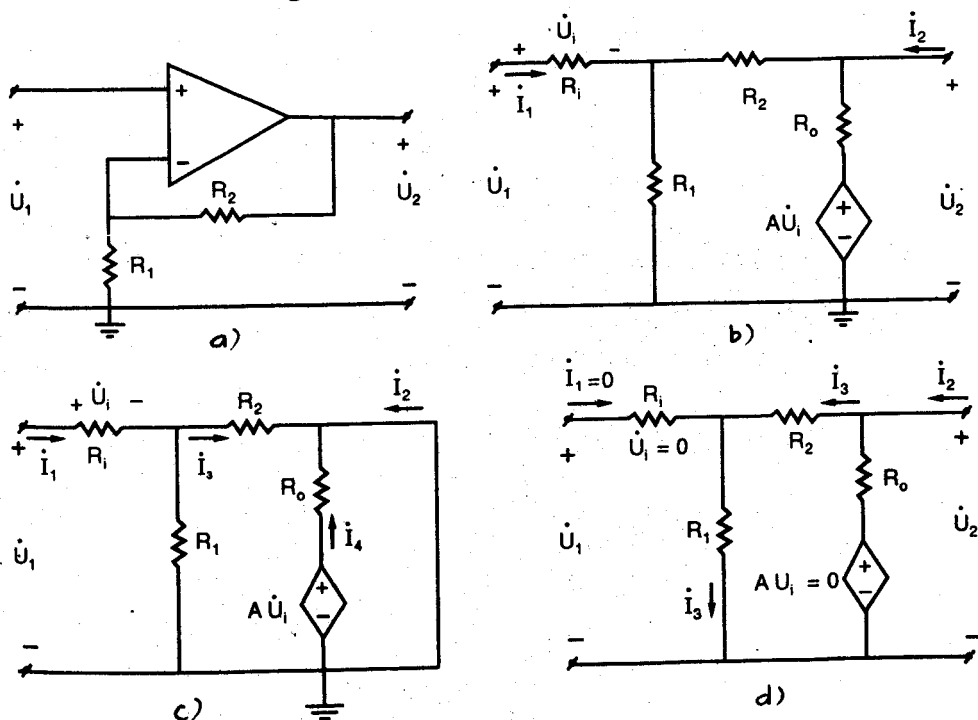
Các thông số H còn được gọi là các thông số hỗn hợp.

Mạch tương đương mô tả bởi hệ phương trình dạng H được cho trên H.5.15.



Hình 5.15

Ví dụ 5.5: Mạch tương đương của mạch chứa op-amp H.5.16a được cho trên H.5.16b. Tìm các thông số H.



Hình 5.16

Giải

• Ngắn mạch cửa 2 ($\dot{U}_2 = 0$) ta được H.5.16c.

Từ H.5.16c, ta suy ra:

$$H_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = R_1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{R_1 \dot{I}_1}{R_1 + R_2}; \dot{I}_4 = \frac{A \dot{U}_i}{R_o} = \frac{A R_i \dot{I}_1}{R_o}$$

$$\Rightarrow \dot{I}_2 = -\dot{I}_3 - \dot{I}_4 = \frac{-R_1 \dot{I}_1}{R_1 + R_2} - \frac{A R_i \dot{I}_1}{R_o}$$

do đó

$$H_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = - \left(\frac{A R_i}{R_o} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

• Hở mạch cửa 1 ($\dot{I}_1 = 0$) ta được H.5.16d. Ta có $\dot{U}_1 = R_i \dot{I}_1 = 0$, do đó nguồn áp phụ thuộc $A \dot{U}_i = 0$.

Do đó:

$$H_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_1 + R_2}$$

$$H_{22} = \frac{R_o + R_1 + R_2}{R_o(R_1 + R_2)}$$

$$H_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{R_i \dot{I}_3}{\dot{U}_2} = \frac{R_1 \cdot \frac{\dot{U}_2}{R_1 + R_2}}{\dot{U}_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

5.2.4 Hệ phương trình trạng thái dạng G

Biểu diễn $\dot{I}_1$ và $\dot{U}_2$ theo $\dot{U}_1$ và $\dot{I}_2$:

$$\dot{I}_1 = G_{11} \dot{U}_1 + G_{12} \dot{I}_2 \quad (5.14a)$$

$$\dot{U}_2 = G_{21} \dot{U}_1 + G_{22} \dot{I}_2 \quad (5.14b)$$

hoặc dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad \text{với } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

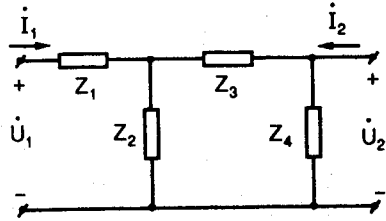
Chiều dương của $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{U}_1, \dot{U}_2$ cũng như trên H.5.14.

Từ (5.14a) và (5.14b) suy ra:

$$\left\{ \begin{array}{ll} G_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{1}{Z_{11}} & \begin{array}{l} \text{dẫn nạp vào cửa 1 khi hở mạch cửa 2,} \\ \text{đơn vị đo là mho hoặc siemen} \end{array} \\ G_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} & \begin{array}{l} \text{hàm truyền đạt dòng từ cửa 2 đến cửa 1} \\ \text{khi ngắn mạch cửa 1} \end{array} \\ G_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} & \begin{array}{l} \text{hàm truyền đạt áp từ cửa 1 đến cửa 2} \\ \text{khi hở mạch cửa 2} \end{array} \\ G_{22} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = \frac{1}{Y_{22}} & \begin{array}{l} \text{trở kháng vào cửa 2 khi ngắn mạch cửa 1,} \\ \text{đơn vị đo là ohm} \end{array} \end{array} \right. \quad (5.16)$$

G_{12}, G_{21} không có thứ nguyên.

Các thông số G được gọi là các thông số hỗn hợp ngược, chúng cũng là các thông số đặc trưng cho mạng hai cửa, không phụ thuộc vào các dòng, áp mà chỉ phụ thuộc vào kết cấu và thông số các phần tử ở bên trong mạng hai cửa.

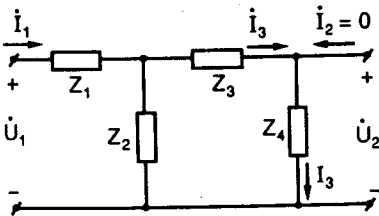


Hình 5.17

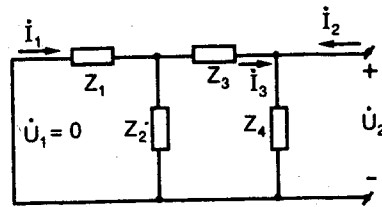
Ví dụ 5.6: Tìm các thông số G của mạng hai cửa H.5.17.

Giải

• Hở mạch cửa 2 ($\dot{I}_2 = 0$) ta được H.5.18.



Hình 5.18



Hình 5.19

Ta có:

$$G_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{1}{Z_1 + \frac{Z_2(Z_3 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4}} = \frac{Z_2 + Z_3 + Z_4}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{Z_2 \dot{I}_1}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \Rightarrow \dot{U}_2 = Z_4 \dot{I}_3 = \frac{Z_2 Z_4 \dot{I}_1}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

$$\text{Do đó: } G_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \cdot \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \cdot G_{11}$$

$$\Rightarrow G_{21} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)}$$

• Ngắn mạch cửa 1 ($\dot{U}_1 = 0$) ta được H.5.19.

$$\text{Ta có: } G_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{Z_4 \left(Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)}{Z_4 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} = \frac{Z_3 Z_4 (Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2 Z_4}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4) + Z_1 Z_2}$$

$$\dot{I}_3 = - \frac{Z_4 \dot{I}_2}{Z_4 + \left(Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)} \quad (1)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_2 \dot{I}_3}{Z_1 + Z_2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$G_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{-Z_2 Z_4}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4) + Z_1 Z_2} = -G_{21}$$

5.2.5 Hệ phương trình trạng thái dạng A

Biểu diễn $\dot{U}_1$ và $\dot{I}_1$ theo $\dot{U}_2$ và $\dot{I}_2$:

$$\dot{U}_1 = A_{11} \dot{U}_2 - A_{12} \dot{I}_2 \quad (5.17a)$$

$$\dot{I}_1 = A_{21} \dot{U}_2 - A_{22} \dot{I}_2 \quad (5.17b)$$

hoặc dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

với

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

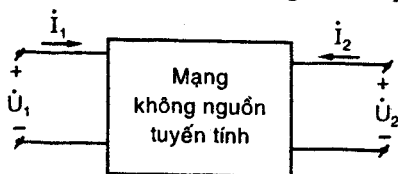
Chiều dương của $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ như H.5.20.

Từ (5.17a) và (5.17b) suy ra:

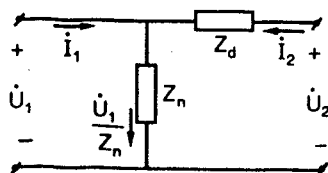
$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{1}{G_{21}} \\ A_{12} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = -\frac{1}{Y_{21}} \\ A_{21} &= \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{1}{Z_{21}} \\ A_{22} &= \left. \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = -\frac{1}{H_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

A_{11} và A_{22} không có thứ nguyên, A_{12} có đơn vị đo là ohm, A_{21} có đơn vị đo là mho hoặc siemen.

Các thông số A được gọi là các thông số truyền đạt; chúng cũng là các thông số đặc trưng cho mạng hai cửa, không phụ thuộc vào các dòng, áp mà chỉ phụ thuộc vào kết cấu và thông số các phần tử ở bên trong mạng hai cửa.



Hình 5.20



Hình 5.21

Ví dụ 5.7: Xác định các thông số A của mạng hai cửa hình Γ (gamma thuận) (H.5.21)

Giải

Ta có:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 - Z_d \dot{I}_2 \quad (1)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_n} - \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_n} - \frac{Z_1}{Z_n} \dot{I}_2 - \dot{I}_2$$

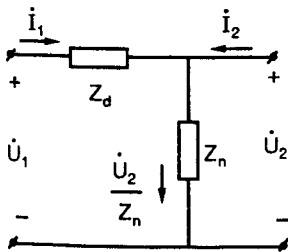
$$\dot{I}_1 = \frac{1}{Z_n} \dot{U}_2 - \left(1 + \frac{Z_1}{Z_n}\right) \dot{I}_2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & Z_d \\ \frac{1}{Z_n} & 1 + \frac{Z_1}{Z_n} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Ví dụ 5.8: Xác định các thông số A của mạng hai cửa hình Γ (gamma ngược) (H.5.22)

Giải



Hình 5.22

Ta có:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_n} - \dot{I}_2 \quad (1)$$

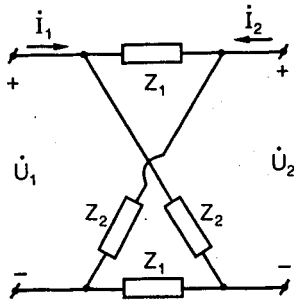
$$\dot{U}_1 = Z_d \dot{I}_1 + \dot{U}_2 = Z_d \left(\frac{\dot{U}_2}{Z_n} - \dot{I}_2 \right) + \dot{U}_2$$

$$\dot{U}_1 = \left(1 + \frac{Z_d}{Z_n}\right) \dot{U}_2 - Z_d \dot{I}_2 \quad (2)$$

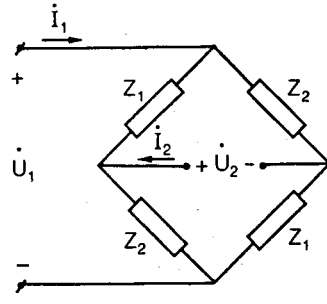
Từ (2) và (1) suy ra:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_d}{Z_n} & Z_d \\ \frac{1}{Z_n} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Ví dụ 5.9: Xác định các thông số A của mạng hai cửa hình cầu (hình X) đối xứng (H.5.23).



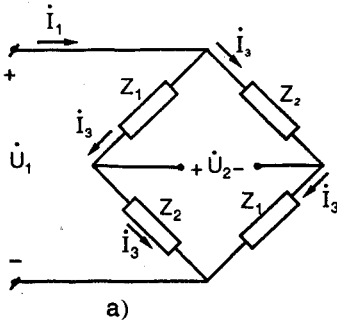
Hình 5.23



Hình 5.24

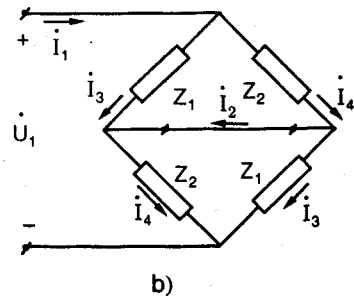
Giải

Sơ đồ H.5.23 gọi là sơ đồ cầu vì có thể vẽ lại như H.5.24. Để tìm các thông số A, có thể dùng các công thức (5.20).



a)

Hình 5.25



b)

• Hở mạch của 2 ($\dot{I}_2 = 0$) kích thích ở cửa 1 bằng nguồn áp $\dot{U}_1$ ta được H.5.25a.

Ta có:

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{\dot{I}_1}{2}$$

$$\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_3 - Z_1 \dot{I}_3 = \frac{(Z_2 - Z_1)}{Z_1 + Z_2} \dot{U}_1$$

$$\Rightarrow A_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1}$$

$$A_{21} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \cdot \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{2}{Z_1 + Z_2} \cdot \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} = \frac{2}{Z_2 - Z_1}$$

• Ngắn mạch cửa 2 ($\dot{U}_2 = 0$), kích thích ở cửa 1 bởi nguồn áp $\dot{U}_1$ ta được H.5.25b.

Do tính đối xứng ta thấy ngay điện áp trên mỗi trở kháng là $\frac{\dot{U}_1}{2}$. Do đó:

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_1}{2} \cdot \frac{1}{Z_1} = \frac{\dot{U}_1}{2Z_1}$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_1}{2} \cdot \frac{1}{Z_2} = \frac{\dot{U}_1}{2Z_2}$$

$$\Rightarrow \dot{I}_2 = \dot{I}_4 - \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_1}{2} \left(\frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_1} \right) = \frac{Z_1 - Z_2}{2Z_1Z_2} \cdot \dot{U}_1$$

$$\text{Do đó } A_{12} = \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} = \frac{2Z_1Z_2}{Z_2 - Z_1}$$

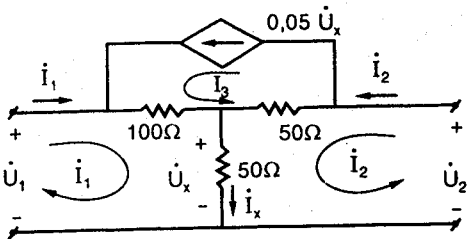
$$\text{Ta có } \dot{I}_1 = \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1Z_2} \cdot \dot{U}_1$$

$$\Rightarrow A_{22} = \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \cdot \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} = \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1Z_2} \cdot \frac{2Z_1Z_2}{Z_2 - Z_1}$$

$$A_{22} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1}$$

$$\text{Vậy: } A = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} & \frac{2Z_1Z_2}{Z_2 - Z_1} \\ 2 & \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Ví dụ 5.10: Xác định các thông số Z , A của mạch H.5.26. Nếu mắc ở cửa 2 một điện trở 5Ω , và kích thích ở cửa 1 nguồn áp $\dot{U}_1 = 10V$, tìm dòng điện chảy qua điện trở 5Ω đó.



Hình 5.26

Giải

Dùng phương pháp dòng mắt lưới, viết K2 cho hai mắt lưới như hình vẽ:

$$(100 + 50)\dot{I}_1 + 50\dot{I}_2 + 100\dot{I}_3 = \dot{U}_1 \quad (1)$$

$$50\dot{I}_1 + (50 + 50)\dot{I}_2 - 50\dot{I}_3 = \dot{U}_2 \quad (2)$$

trong đó:

$$\dot{I}_3 = 0,05\dot{U}_x \quad (3)$$

$$\text{Ta có: } \dot{U}_x = 50\dot{I}_x = 50(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

$$(3) \Rightarrow \dot{I}_3 = 2,5(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \quad (4)$$

Thay $\dot{I}_3$ bởi (4) vào (1) và (2) ta được:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = 400\dot{I}_1 + 300\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = -75\dot{I}_1 - 25\dot{I}_2 \end{cases} \quad (5)$$

(6)

Vậy: $Z_{11} = 400 \Omega$, $Z_{12} = 300 \Omega$, $Z_{21} = -75 \Omega$, $Z_{22} = -25 \Omega$

Giải (5), (6) tìm $\dot{U}_1, \dot{I}_1$ theo $\dot{U}_2, \dot{I}_2$ ta được:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -\frac{16}{3}\dot{U}_2 + \frac{500}{3}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = -\frac{1}{75}\dot{U}_2 - \frac{1}{3}\dot{I}_2 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -\frac{16}{3}\dot{U}_2 + \frac{500}{3}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = -\frac{1}{75}\dot{U}_2 - \frac{1}{3}\dot{I}_2 \end{cases} \quad (8)$$

Vậy: $A_{11} = -\frac{16}{3}$, $A_{12} = -\frac{500}{3}$, $A_{21} = -\frac{1}{75}$, $A_{22} = \frac{1}{3}$

Khi mắc ở cửa 2 điện trở 5Ω thì $\dot{U}_2 = -5\dot{I}_2$.

Từ (7) $\Rightarrow \dot{U}_1 = \frac{580}{3}\dot{I}_2 \Rightarrow \dot{I}_2 = \frac{3\dot{U}_1}{580} = \frac{3}{58}A$

5.2.6 Hệ phương trình trạng thái dạng B

Biểu diễn $\dot{U}_2$ và $\dot{I}_2$ theo $\dot{U}_1$ và $\dot{I}_1$:

$$\dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 - B_{12}\dot{I}_1 \quad (5.24a)$$

$$\dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 - B_{22}\dot{I}_1 \quad (5.24b)$$

hoặc dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ -\dot{I}_1 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

với

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

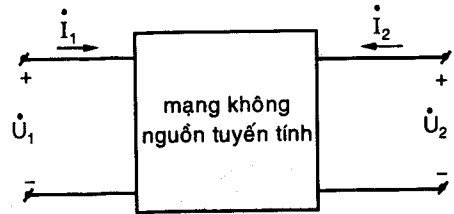
Chiều dương của $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{U}_1, \dot{U}_2$ như trên H.5.27.

Từ (5.24a), (5.24b) suy ra:

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{I}_1=0} = \frac{1}{H_{12}} \\ B_{12} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{-\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_1=0} = -\frac{1}{Y_{12}} \\ B_{21} &= \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{I}_1=0} = \frac{1}{Z_{12}} \\ B_{22} &= \left. \frac{\dot{I}_2}{-\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_1=0} = -\frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

B_{11} và B_{22} không có thứ nguyên, B_{12} có đơn vị đo là ohm, B_{21} có đơn vị đo là mho hoặc siemen.

Các thông số B được gọi là các thông số truyền đạt ngược; chúng cũng là các thông số đặc trưng cho mạng hai cửa, không phụ thuộc vào dòng áp mà chỉ phụ thuộc vào kết cấu và thông số các phần tử ở bên trong mạng hai cửa.



Hình 5.27

5.2.7 Quan hệ giữa các bộ thông số của mạng hai cửa

* Nếu một mạng hai cửa có đủ sáu bộ thông số Z , Y , H , G , A , B thì từ một bộ thông số bất kỳ ta có thể suy ra tất cả các bộ thông số còn lại. Sau đây là một số ví dụ minh họa cách xác định một bộ thông số từ một bộ thông số khác.

• Từ (5.2) và (5.8) ta suy ra hai ma trận thông số Z và Y là nghịch đảo của nhau:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}, \mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} \quad (5.28)$$

vì

$$\mathbf{Y}^{-1} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta Y} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix} = \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

trong đó

$$\Delta Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21} \quad (5.29)$$

do đó

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{\Delta Y}, Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{\Delta Y}, Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{\Delta Y}, Z_{22} = \frac{Y_{11}}{\Delta Y} \quad (5.30)$$

Tương tự từ $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$ suy ra:

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z}, Y_{12} = -\frac{Z_{12}}{\Delta Z}, Y_{21} = -\frac{Z_{21}}{\Delta Z}, Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \quad (5.31)$$

trong đó

$$\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} \quad (5.32)$$

• Từ (5.12) và (5.15) cũng suy ra hai ma trận thông số H và G là nghịch đảo của nhau:

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}^{-1}, \mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1} \quad (5.33)$$

Từ đó suy ra được:

$$H_{11} = \frac{G_{22}}{\Delta G}, H_{12} = -\frac{G_{12}}{\Delta G}, H_{21} = -\frac{G_{21}}{\Delta G}, H_{22} = \frac{G_{11}}{\Delta G} \quad (5.34)$$

$$G_{11} = \frac{H_{22}}{\Delta H}, G_{12} = -\frac{H_{12}}{\Delta H}, G_{21} = -\frac{H_{21}}{\Delta H}, G_{22} = \frac{H_{11}}{\Delta H} \quad (5.35)$$

Trong đó

$$\Delta H = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}, \Delta G = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} \quad (5.36)$$

• Từ (5.18) suy ra:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta A} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta A} \begin{bmatrix} A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ -\dot{I}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

trong đó

$$\Delta A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \quad (5.37)$$

So sánh (5.25) với (1) ta suy ra được:

$$B_{11} = \frac{A_{22}}{\Delta A}, B_{12} = \frac{A_{12}}{\Delta A}, B_{21} = \frac{A_{21}}{\Delta A}, B_{22} = \frac{A_{11}}{\Delta A} \quad (5.38)$$

$$\text{Tương tự ta có: } A_{11} = \frac{B_{22}}{\Delta B}, A_{12} = \frac{B_{12}}{\Delta B}, A_{21} = \frac{B_{21}}{\Delta B}, A_{22} = \frac{B_{11}}{\Delta B} \quad (5.39)$$

$$\text{Trong đó } \Delta B = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} \quad (5.40)$$

$$\text{Nhận xét rằng: } \mathbf{A} \neq \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{B} \neq \mathbf{A}^{-1} \quad (5.41)$$

• Ta thử tính các thông số H theo các thông số Z.

Hệ phương trình dạng Z, theo (5.1) là:

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \quad (2)$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \quad (3)$$

$$\text{Từ (3) suy ra: } \dot{I}_2 = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}}\dot{I}_1 + \frac{1}{Z_{22}}\dot{U}_2 \quad (4)$$

Thay (4) vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12} \left(-\frac{Z_{21}}{Z_{22}}\dot{I}_1 + \frac{1}{Z_{22}}\dot{U}_2 \right) \\ \Rightarrow \dot{U}_1 &= \left(\frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}} \right) \dot{I}_1 + \frac{Z_{12}}{Z_{22}}\dot{U}_2 \end{aligned} \quad (5)$$

So sánh (5) với (5.11a), (4) với (5.11b) ta được:

$$H_{11} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{\Delta Z}{Z_{22}}, H_{12} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \quad (5.42)$$

$$H_{21} = \frac{Z_{21}}{Z_{22}}, H_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$$

* Trên đây ta xét một số ví dụ về cách tính một bộ thông số theo một bộ thông số khác. Chứng minh tương tự như vậy ta sẽ được bảng 5.1 cho phép tính một bộ thông số bất kỳ từ một bộ thông số bất kỳ khác.

Bảng 5.1

	Z	Y	H	G	A	B
Z	Z_{11} Z_{12}	$\frac{Y_{22}}{\Delta Y}$ $-\frac{Y_{12}}{\Delta Y}$	$\frac{\Delta H}{H_{22}}$ $\frac{H_{12}}{H_{22}}$	$\frac{1}{G_{11}}$ $-\frac{G_{12}}{G_{11}}$	$\frac{A_{11}}{A_{21}}$ $\frac{\Delta A}{A_{21}}$	$\frac{B_{22}}{B_{21}}$ $\frac{1}{B_{21}}$
	Z_{21} Z_{22}	$-\frac{Y_{21}}{\Delta Y}$ $\frac{Y_{11}}{\Delta Y}$	$-\frac{H_{21}}{H_{22}}$ $\frac{1}{H_{22}}$	$\frac{G_{21}}{G_{11}}$ $\frac{\Delta G}{G_{11}}$	$\frac{1}{A_{21}}$ $\frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{\Delta B}{B_{21}}$ $\frac{B_{11}}{B_{21}}$
Y	$\frac{Z_{22}}{\Delta Z}$ $-\frac{Z_{12}}{\Delta Z}$	Y_{11} Y_{12}	$\frac{1}{H_{11}}$ $-\frac{H_{12}}{H_{11}}$	$\frac{\Delta G}{G_{22}}$ $\frac{G_{12}}{G_{22}}$	$\frac{A_{22}}{A_{12}}$ $-\frac{\Delta A}{A_{12}}$	$\frac{B_{11}}{B_{12}}$ $-\frac{1}{B_{12}}$
	$-\frac{Z_{21}}{\Delta Z}$ $\frac{Z_{11}}{\Delta Z}$	Y_{21} Y_{22}	$\frac{H_{21}}{H_{11}}$ $\frac{\Delta H}{H_{11}}$	$-\frac{G_{21}}{G_{22}}$ $+\frac{1}{G_{22}}$	$-\frac{1}{A_{12}}$ $\frac{A_{11}}{A_{12}}$	$\frac{\Delta B}{B_{12}}$ $\frac{B_{22}}{B_{12}}$
H	$\frac{\Delta Z}{Z_{22}}$ $\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$ $-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	H_{11} H_{12}	$\frac{G_{22}}{\Delta G}$ $-\frac{G_{12}}{\Delta G}$	$\frac{A_{12}}{A_{22}}$ $\frac{\Delta A}{A_{22}}$	$\frac{B_{12}}{B_{11}}$ $\frac{1}{B_{11}}$
	$-\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$ $\frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$ $+\frac{\Delta Y}{Y_{11}}$	H_{21} H_{22}	$-\frac{G_{21}}{\Delta G}$ $\frac{G_{11}}{\Delta G}$	$-\frac{1}{A_{22}}$ $\frac{A_{21}}{A_{22}}$	$-\frac{\Delta B}{B_{11}}$ $\frac{B_{21}}{B_{11}}$
G	$\frac{1}{Z_{11}}$ $-\frac{Z_{12}}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{Y_{22}}$ $\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{H_{22}}{\Delta H}$ $-\frac{H_{12}}{\Delta H}$	G_{11} G_{12}	$\frac{A_{21}}{A_{11}}$ $-\frac{\Delta A}{A_{11}}$	$\frac{B_{21}}{B_{22}}$ $-\frac{1}{B_{22}}$
	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$ $\frac{\Delta Z}{Z_{11}}$	$-\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$ $\frac{1}{Y_{22}}$	$-\frac{H_{21}}{\Delta H}$ $\frac{H_{11}}{\Delta H}$	G_{21} G_{22}	$\frac{1}{A_{11}}$ $\frac{A_{12}}{A_{11}}$	$\frac{\Delta B}{B_{22}}$ $\frac{B_{12}}{B_{22}}$
A	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$ $\frac{\Delta Z}{Z_{21}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$ $-\frac{1}{Y_{21}}$	$-\frac{\Delta H}{H_{21}}$ $-\frac{H_{11}}{H_{21}}$	$\frac{1}{G_{21}}$ $\frac{G_{22}}{G_{21}}$	A_{11} A_{12}	$\frac{B_{22}}{\Delta B}$ $\frac{B_{12}}{\Delta B}$
	$\frac{1}{Z_{21}}$ $\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$-\frac{\Delta Y}{Y_{21}}$ $-\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$	$-\frac{H_{22}}{H_{21}}$ $-\frac{1}{H_{21}}$	$\frac{G_{11}}{G_{21}}$ $\frac{\Delta G}{G_{21}}$	A_{21} A_{22}	$\frac{B_{21}}{\Delta B}$ $\frac{B_{11}}{\Delta B}$
B	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}}$ $\frac{\Delta Z}{Z_{12}}$	$-\frac{Y_{11}}{Y_{12}}$ $-\frac{1}{Y_{12}}$	$\frac{1}{H_{12}}$ $\frac{H_{11}}{H_{12}}$	$-\frac{\Delta G}{G_{12}}$ $-\frac{G_{22}}{G_{12}}$	$\frac{A_{22}}{\Delta A}$ $\frac{A_{12}}{\Delta A}$	B_{11} B_{12}
	$\frac{1}{Z_{12}}$ $\frac{Z_{11}}{Z_{12}}$	$-\frac{\Delta Y}{Y_{12}}$ $-\frac{Y_{22}}{Y_{12}}$	$\frac{H_{22}}{H_{12}}$ $\frac{\Delta H}{H_{12}}$	$-\frac{G_{11}}{G_{12}}$ $-\frac{1}{G_{12}}$	$\frac{A_{21}}{\Delta A}$ $\frac{A_{11}}{\Delta A}$	B_{21} B_{22}

Ta có: $\Delta B = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = \frac{A_{22}}{\Delta A} \cdot \frac{A_{11}}{\Delta A} - \frac{A_{12}}{\Delta A} \cdot \frac{A_{21}}{\Delta A} = \frac{\Delta A}{(\Delta A)^2}$

$$\Rightarrow \Delta B = \frac{1}{\Delta A} \quad (5.43)$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\Delta H = \frac{1}{\Delta G} \quad (5.44)$$

$$\Delta Z = \frac{1}{\Delta Y} \quad (5.45)$$

• Từ bảng biến đổi 5.1 ta nhận thấy không phải mọi mạng hai cửa đều có đủ sáu bộ thông số A, B, Z, Y, H, G. Ví dụ, nếu một mạng hai cửa có bộ

thông số Z , nhưng:

- Nếu $Z_{22} = 0$ thì sẽ không có bộ thông số H .
- Nếu $Z_{11} = 0$ thì không có bộ thông số G .
- Nếu $Z_{21} = 0$ thì không có bộ thông số A .
- Nếu $Z_{12} = 0$ thì không có bộ thông số B .
- Nếu $\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12} = 0$ thì không có bộ thông số Y .

• Một mạng hai cửa có đủ sáu bộ thông số thì gọi là *mạng hai cửa chính tắc*. Một mạng hai cửa là chính tắc thì tất cả ΔZ , ΔY , ΔH , ΔG , ΔA , ΔB đều khác không cũng như tất cả bốn phần tử của mỗi ma trận $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ đều khác không. Các mạng hai cửa hình T, Γ , Π , π , X (đã xét trong các ví dụ trước) là các ví dụ về mạng hai cửa chính tắc.

• Sau đây là ví dụ về các mạng hai cửa chỉ có hai ma trận thông số:

- *Nguồn áp phụ thuộc áp (VCVS):*

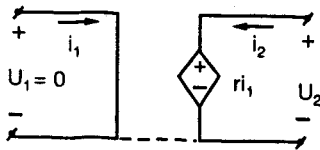
Phương trình mô tả:

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ u_2 = \alpha u_1 \end{cases}$$

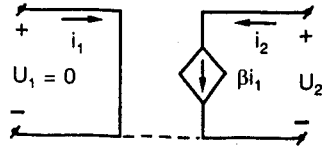
trong đó $\alpha = \text{const} \neq 0$

Sẽ có hai ma trận:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$



Hình 5.29



Hình 5.30

- *Nguồn áp phụ thuộc dòng (CCVS):*

Phương trình mô tả:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = r i_1 \end{cases} \quad (5.48)$$

với

$$r = \text{const} \neq 0$$

$$\text{Có hai ma trận } \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

- Nguồn dòng phụ thuộc dòng (CCCS):

Phương trình mô tả:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ i_2 = \beta i_1 \end{cases} \quad (5.50)$$

với $\beta = \text{const} \neq 0$

Có hai ma trận:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

- Nguồn dòng phụ thuộc áp (VCCS):

Phương trình mô tả:

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = g u_1 \end{cases} \quad (5.52)$$

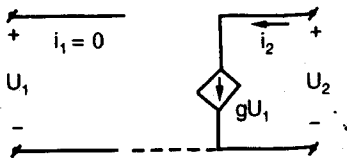
trong đó $g = \text{const} \neq 0$,

Có hai ma trận:

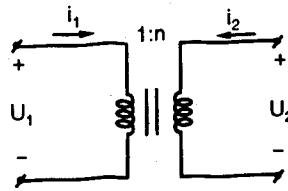
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{g} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

• Sau đây là ví dụ về các mạng hai cửa chỉ có bốn ma trận thông số:

- Biến áp lý tưởng:



Hình 5.31



Hình 5.32

Phương trình mô tả:

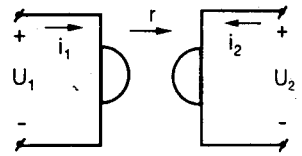
$$\begin{cases} u_2 = n u_1 \\ i_2 = -\frac{i_1}{n} \end{cases} \quad (5.54)$$

Với $n = \text{const}$ (số thực)

Có bốn ma trận:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

- *Mạch hồi chuyển (gyrator)*: Mạng hai cửa này là một mạch điện tử được thực hiện bằng các phần tử tích cực (nguồn phụ thuộc), ví dụ nó có thể được thực hiện dùng op-amp. Ký hiệu của mạch hồi chuyển như H.5.33.



Hình 5.33: Gyrator

phương trình mô tả:

$$\begin{cases} u_1 = -ri_2 \\ u_2 = ri_1 \end{cases} \quad (5.56)$$

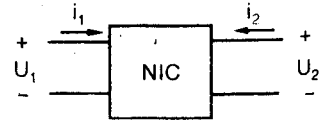
trong đó $r = \text{const} \neq 0$, đơn vị đo là ohm (Ω)

Có bốn ma trận:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ -\frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

- *Mạch biến đổi trở kháng âm (NIC: negative impedance converter)*: Mạng hai cửa này là một mạch điện tử được thực hiện bằng các phần tử tích cực, ví dụ op-amp. NIC không có ký hiệu đặc biệt. Phương trình mô tả là:

$$\begin{cases} u_1 = ku_2 \\ i_1 = \frac{1}{k}i_2 \end{cases} \quad (5.58)$$



Hình 5.34

trong đó $k = \text{const} \neq 0$. Thường $k = \pm 1$

NIC có bốn ma trận:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Các mạng hai cực có bốn ma trận và hai ma trận được trình bày ở trên được dùng như là các mạng hai cửa nguyên tố (cơ sở) trong việc tổng hợp mạch tích cực.

5.3 PHÂN LOẠI MẠNG HAI CỬA

5.3.1 Mạng hai cửa thụ động và tích cực

Định nghĩa về tính thụ động và tính tích cực của mạng hai cửa cũng giống như đối với phần tử hai cực (xem biểu thức 1.48 ở Chương 1).

Mạng hai cửa là thụ động nếu năng lượng cung cấp cho nó luôn luôn dương (với mọi điều kiện làm việc ở hai cửa):

$$W(t) = \int_{-\infty}^t \{u_1(\tau)i_1(\tau) + u_2(\tau)i_2(\tau)\}d\tau \geq 0 \text{ với mọi } t, \quad (5.60)$$

trong đó u_1, i_1, u_2, i_2 là điện áp và dòng điện trên hai cửa với chiều dương như H.5.1, $u_1(-\infty) = u_2(-\infty) = 0, i_1(-\infty) = i_2(-\infty) = 0$.

Nếu mạch ở xác lập điều hòa thì điều kiện của sự thụ động là công suất tác dụng cung cấp cho mạng hai cửa luôn dương (với mọi điều kiện làm việc ở hai cửa):

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \dot{U}_1 \dot{I}_1 + \frac{1}{2} \dot{U}_2 \dot{I}_2 \right\} \geq 0 \quad (5.61)$$

Mạng hai cửa là tích cực nếu không thỏa (5.60) hoặc (5.61).

Từ định luật cân bằng công suất (xem mục 3.6.5 Chương 3) suy ra nếu mạng hai cửa chỉ chứa các phần tử thụ động như R, L, C, hồ cảm, biến thể v.v. sẽ là mạng hai cửa thụ động. Các mạng hai cửa có chứa các phần tử tích cực thì chưa hẳn đã là mạng hai cửa tích cực.

Ví dụ 5.11:

• Với biến thể lý tưởng, công suất tức thời cung cấp cho nó là $p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) = u_1 i_1 + (nu_1) \left(-\frac{i_1}{n} \right) = 0$. Vậy nó là mạng hai cửa không tổn hao, cho nên là thụ động.

• Với gyrator, công suất tức thời cung cấp cho nó là (chú ý (5.56)): $p(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 = (-ri_2)i_1 + (ri_1)i_2 = 0$. Vậy nó là mạng hai cửa không tổn hao, cho nên là thụ động.

• Với NIC, từ (5.58) suy ra công suất tức thời cung cấp cho NIC là:

$$p(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 = (ku_2) \left(\frac{i_2}{k} \right) + u_2 i_2 = 2u_2 i_2.$$

Nếu cửa hai nối với tải là điện trở R thì $u_2 = -Ri_2$, do đó $p(t) = -2Ri_2^2 < 0$

Theo (5.60): $W(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = - \int_{-\infty}^t 2Ri_2^2 d\tau < 0.$

Vậy NIC là mạng hai cửa tích cực.

• Tất cả bốn nguồn phụ thuộc đều là mạng hai cửa tích cực. Ví dụ ta thử kiểm tra tính tích cực của nguồn dòng phụ thuộc dòng (CCCS)

Từ (5.50) $\Rightarrow p(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_2 i_2.$

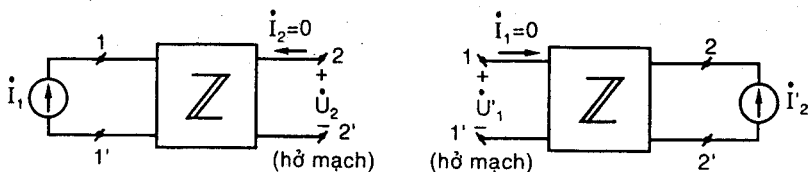
Nếu cửa hai nối với điện trở R thì $u_2 = -Ri_2$

$\Rightarrow p(t) = -Ri_2^2 = -R\beta^2 i_1^2 < 0$

Vậy nguồn dòng phụ thuộc dòng là mạng hai cửa tích cực.

5.3.2 Mạng hai cửa tương hỗ và không tương hỗ

Mạng hai cửa tương hỗ là mạng hai cửa thỏa định lý tương hỗ (mục 3.6.6 Chương 3).



Hình 5.35

Xét một mạng hai cửa đặc trưng bởi bộ thông số Z (H.5.35).

Ở H.5.35a cửa 1 được kích thích bởi nguồn dòng $\dot{I}_1$, cửa 2 hở mạch ($\dot{I}_2 = 0$), từ (5.4) ta có:

$$Z_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad (5.62)$$

Ở H.5.35b cửa 2 được kích thích bởi nguồn dòng $\dot{I}_2$, cửa 1 hở mạch ($\dot{I}_1 = 0$), từ (5.4) ta có:

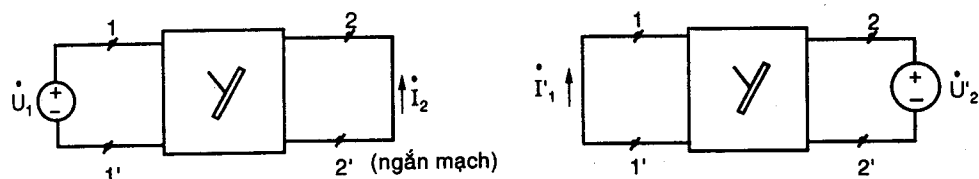
$$Z_{12} = \left. \frac{\dot{U}'_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} \quad (5.63)$$

Theo định lý tương hỗ dạng (3.91), nếu $\dot{I}_1 = \dot{I}_2$ thì $\dot{U}_2 = \dot{U}'_1$, do đó từ (5.62) và (5.63) suy ra:

$$Z_{12} = Z_{21} \quad (5.64)$$

Nghĩa là ma trận Z phải là ma trận đối xứng. Điều kiện này là điều kiện cần và đủ để mạng hai cửa là mạng hai cửa tương hỗ.

Tương tự xét mạng hai cửa đặc trưng bởi bộ thông số Y (H.5.36). Nếu áp dụng định lý tương hỗ dạng (3.89) cho H.5.36a và H.5.36b ta được:



Hình 5.36

“Nếu $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \Rightarrow \dot{I}_2 = \dot{I}_1$ ”

$$\Rightarrow Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = Y_{12} \quad (5.65)$$

Nghĩa là ma trận Y phải là ma trận đối xứng.

Đây cũng là điều kiện cần và đủ để mạng hai cửa là tương hỗ. Nếu mạng hai cửa có cả hai ma trận Z và Y thì vì hai ma trận này là nghịch đảo của nhau nên từ điều kiện (5.64) có thể suy ra (5.65) và ngược lại.

Từ (5.64) hoặc (5.65) nếu dùng bảng biến đổi 5.1 có thể suy ra điều kiện tương hỗ cho mạng hai cửa đặc trưng bởi các ma trận H , G , A , B . Kết quả được tóm tắt trên bảng 5.2.

Bảng 5.2

Ma trận	Z	Y	H	G	A	B
Điều kiện tương hỗ	$Z_{12} = Z_{21}$	$Y_{12} = Y_{21}$	$H_{12} = -H_{21}$	$G_{12} = -G_{21}$	$\Delta A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$	$\Delta B = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = 1$

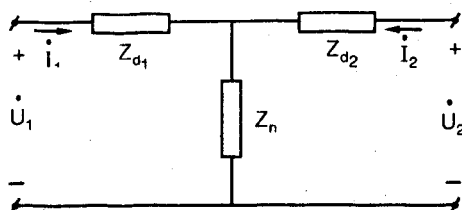
Ví dụ: tất cả các nguồn phụ thuộc là không tương hỗ; gyrator và NIC cũng không tương hỗ; biến thể lý tưởng là mạng hai cửa tương hỗ (có thể kiểm tra lại bằng cách dùng bảng 5.2)

Một mạng hai cửa chỉ chứa các phần tử R , L , C , hồ cảm và các phần tử tương hỗ như biến thể lý tưởng là mạng hai cửa tương hỗ. Mạng hai cửa có chứa các phần tử không tương hỗ như các nguồn phụ thuộc thì nói chung không có tính tương hỗ.

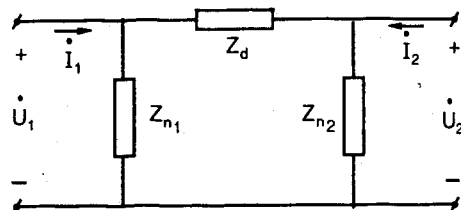
Từ bảng 5.2, ta thấy rằng các ma trận của mạng hai cửa tương hỗ chỉ có ba phần tử độc lập nhau. Như vậy một mạng hai cửa tương hỗ chỉ đặc trưng bởi ba thông số độc lập. Do đó có thể thay tương đương nó bởi một mạng hai cửa gồm ba phần tử. Kết cấu đơn giản nhất là ba trở kháng nối hình T (còn gọi là hình sao) hoặc hình π (còn gọi là hình tam giác).

Xét một mạng hai cửa tương hỗ có thông số Z đã biết. Ta tìm mạng hai cửa tương đương hình T và hình π . Theo (5.6), các thông số Z của mạng hai cửa hình T là:

$$Z_{11} = Z_{d1} + Z_n, Z_{22} = Z_{d2} + Z_n, Z_{12} = Z_{21} = Z_n \quad (5.6)$$



Hình 5.37: Hình T (Sao)

Hình 5.38: Hình π (tam giác)

Từ đó dễ dàng suy ra công thức tính các trở kháng của mạng hai cửa tương đương hình T theo các thông số Z:

$$Z_n = Z_{12} = Z_{21}, Z_{d1} = Z_{11} - Z_{12} \text{ và } Z_{d2} = Z_{22} - Z_{12} \quad (5.66)$$

Dùng phép biến đổi sao ra tam giác, ta được công thức tính các trở kháng của mạng hai cửa tương đương hình π theo các thông số Z:

$$\left. \begin{aligned} Z_d &= Z_{d1} + Z_{d2} + \frac{Z_{d1}Z_{d2}}{Z_n} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2}{Z_{12}} \\ Z_{n1} &= Z_{d1} + Z_n + \frac{Z_{d1}Z_n}{Z_{d2}} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2}{Z_{22} - Z_{12}} \\ Z_{n2} &= Z_{d2} + Z_n + \frac{Z_{d2}Z_n}{Z_{d1}} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2}{Z_{11} - Z_{12}} \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

Theo bảng 5.1, ta được:

$$Z_{11} = \frac{A_{11}}{A_{21}}, Z_{12} = \frac{\Delta A}{A_{21}}, Z_{21} = \frac{1}{A_{21}}, Z_{22} = \frac{A_{22}}{A_{21}} \quad (5.68)$$

Thay (5.68) vào (5.66) và (5.67) ta được:

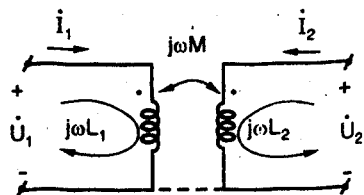
$$Z_n = \frac{1}{A_{21}}, Z_{d1} = \frac{A_{11} - 1}{A_{21}}, Z_{d2} = \frac{A_{22} - 1}{A_{21}} \quad (5.69)$$

và

$$Z_d = A_{12}, Z_{n1} = \frac{A_{12}}{A_{22} - 1}, Z_{n2} = \frac{A_{12}}{A_{11} - 1} \quad (5.70)$$

Các công thức (5.69), (5.70) cho phép xác định mạch tương đương hình T, hình π của một mạng hai cửa tương hỗ có thông số A đã biết.

Ví dụ 5.12: Xét mạng hai cửa là một biến thế tuyến tính (bỏ qua điện trở hai cuộn dây) như H.5.39.



Hình 5.39

Viết luật K2 cho hai mạch sơ cấp và thứ cấp ta được:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$

Vậy thông số Z của mạng hai cửa là:

$$Z_{11} = j\omega L_1, \quad Z_{22} = j\omega L_2, \quad Z_{12} = Z_{21} = j\omega M$$

Suy ra mạng tương đương hình T, theo (5.66) là:

$$Z_n = j\omega M, \quad Z_{d_1} = j\omega(L_1 - M), \quad Z_{d_2} = j\omega(L_2 - M) \quad (5.71)$$

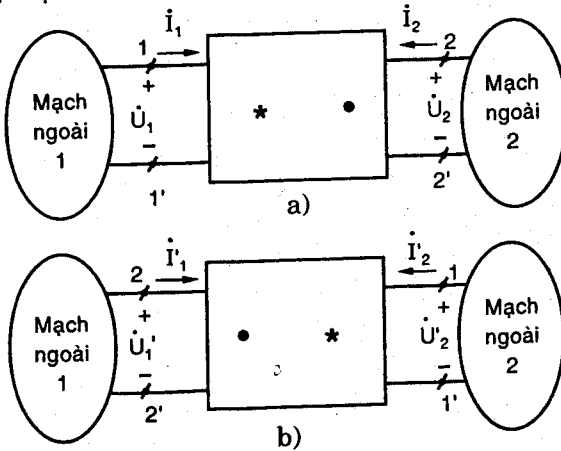
Cũng từ (5.67) suy ra nếu $M^2 \neq L_1 L_2$ thì biến thế có mạng tương đương π là:

$$Z_d = j\omega \left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{M} \right), \quad Z_{n_1} = j\omega \left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M} \right), \quad Z_{n_2} = j\omega \left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M} \right) \quad (5.72)$$

5.3.3 Mạng hai cửa đối xứng và không đối xứng

Mạng hai cửa đối xứng là mạng hai cửa mà khi ta đổi lẫn cửa 1 và 2 như trên H.5.40 thì sẽ không gây nên sự thay đổi điện áp và dòng điện trên hai cửa.

Giả sử mạng hai cửa được mô tả bởi ma trận thông số truyền đạt A và làm việc trong mạch như trên H.5.40a, b.



Hình 5.40

Đối với H.5.40a ta có, theo (5.17):

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

Đối với H.5.40b (sau khi đã hoán vị hai cửa: mạch ngoài 1 nối với cửa 2 còn mạch ngoài 2 nối với cửa 1) thì cũng từ (5.17) suy ra:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}'_2 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12} \\ A_{21} - A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} (5.74) &\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12} \\ A_{21} - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{U}'_2 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta A} \begin{bmatrix} A_{22} - A_{12} \\ A_{21} - A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}'_2 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.75)$$

trong đó $\Delta A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$.

Theo định nghĩa, mạng hai cửa đối xứng nếu

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1, \dot{U}_2 = \dot{U}'_2, \dot{I}_1 = \dot{I}'_1, \dot{I}_2 = \dot{I}'_2$$

nghĩa là nếu quan hệ (5.73) và (5.75) phải giống nhau

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12} \\ A_{21} - A_{22} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta A} \begin{bmatrix} A_{22} - A_{12} \\ A_{21} - A_{11} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow A_{11} &= A_{22} \text{ và } \Delta A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1 \end{aligned} \quad (5.76)$$

Biểu thức (5.76) là điều kiện cần và đủ để một mạng hai cửa được mô tả bởi ma trận A là đối xứng, trong đó nhận xét rằng điều kiện $\Delta A = 1$ là điều kiện tương hỗ (đã xét ở phần trước). Vậy một mạng hai cửa đối xứng trước hết phải thỏa mãn điều kiện tương hỗ đã trình bày ở phần trước (tức ở bảng 5.2) sau đó phải thỏa mãn thêm điều kiện $A_{11} = A_{22}$ gọi là *điều kiện đối xứng trở kháng*.

Nếu sử dụng bảng biến đổi 5.1 thì từ điều kiện đối xứng trở kháng $A_{11} = A_{22}$ đối với dạng thông số A có thể suy ra điều kiện đối xứng trở kháng đối với từng dạng thông số B, H, G, Z, Y , được tóm tắt trên bảng 5.3.

Bảng 5.3

Ma trận	Z	Y	H	G	A	B
Điều kiện đối xứng trở kháng	$Z_{11} = Z_{22}$	$Y_{11} = Y_{22}$	$\Delta H = H_1 H_{22} - H_{12} H_{21} = 1$	$\Delta G = G_{11} G_{22} - G_{12} G_{21} = 1$	$A_{11} = A_{22}$	$B_{11} = B_{22}$

Ví dụ: Mạng hai cửa hình X (sơ đồ cầu) (H.5.23) là đối xứng.

Mạng hai cửa hình T (H.5.37) là đối xứng nếu: $Z_{d1} = Z_{d2}$.

Mạng hai cửa hình π (H.5.38) là đối xứng nếu: $Z_{n1} = Z_{n2}$.

Biến áp lý tưởng là đối xứng nếu $n = 1$.

Các nguồn phụ thuộc, gyrator, NIC là không đối xứng.

Mạng hai cửa hình Γ (H.5.21) và $\mathbb{T}$ (H.5.22) là không đối xứng.

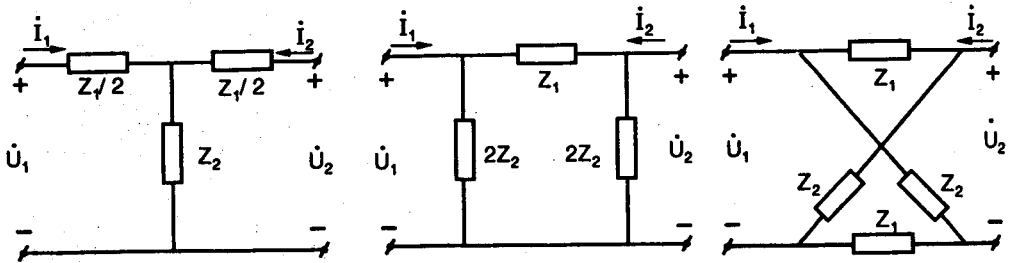
Một mạng hai cửa đối xứng thỏa cả hai điều kiện: điều kiện tương hỗ (bảng 5.2) và điều kiện đối xứng trở kháng (bảng 5.3), do đó các ma trận của mạng hai cửa đối xứng chỉ có hai phần tử độc lập nhau. Như vậy, một mạng hai cửa đối xứng chỉ còn đặc trưng bởi hai thông số độc lập. Do đó, có thể thay tương đương nó bởi mạng hai cửa hình $\mathbb{T}$ đối xứng, hình π đối xứng hoặc sơ đồ cầu (X) đối xứng.

Bảng 5.4

	A	Z	Y
Hình $\mathbb{T}$ đối xứng	$A_{11} = A_{22} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$ $A_{12} = Z_1 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)$ $A_{21} = \frac{1}{Z_2}$	$Z_{11} = Z_{22} = \frac{Z_1}{2} + Z_2$ $Z_{12} = Z_{21} = Z_2$	$Y_{11} = Y_{22} = \frac{2(Z_1 + 2Z_2)}{Z_1(Z_1 + 4Z_2)}$ $Y_{12} = Y_{21} = \frac{-4Z_2}{Z_1(Z_1 + 4Z_2)}$
Hình π đối xứng	$A_{11} = A_{22} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$ $A_{12} = Z_1$ $A_{21} = \frac{1}{Z_2} \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)$	$Z_{11} = Z_{22} = \frac{2Z_2(Z_1 + 2Z_2)}{Z_1 + 4Z_2}$ $Z_{12} = Z_{21} = \frac{-4Z_2^2}{Z_1 + 4Z_2}$	$Y_{11} = Y_{22} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{2Z_2}$ $Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{Z_1}$
Sơ đồ cầu (X) đối xứng	$A_{11} = A_{22} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1}$ $A_{12} = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1}$ $A_{21} = \frac{2}{Z_2 - Z_1}$	$Z_{11} = Z_{22} = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$ $Z_{12} = Z_{21} = \frac{Z_2 - Z_1}{2}$	$Y_{11} = Y_{22} = \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1 Z_2}$ $Y_{12} = Y_{21} = \frac{Z_1 - Z_2}{2Z_1 Z_2}$

Bảng 5.4 cho các thông số A, Z, Y của mạng hai cửa đối xứng hình $\mathbb{T}$, π và X. Trong biểu thức (5.6) thay $Z_n = Z_2$ và $Z_{d1} = Z_{d2} = \frac{Z_1}{2}$ ta sẽ được các thông số Z, sau đó dùng bảng biến đổi 5.1 sẽ được các thông số dạng khác của mạng đối xứng hình $\mathbb{T}$.

Tương tự trong biểu thức (5.10a, b, c, d) thay $Z_d = Z_1$, $Z_{n1} = Z_{n2} = 2Z_2$ ta được các thông số Y, sau đó dùng bảng biến đổi 5.1 sẽ được các dạng khác của mạng hai cửa đối xứng hình π . Mạng hai cửa của sơ đồ hình cầu có các thông số A được tính bởi (5.23), từ đó dùng bảng 5.1 sẽ được các dạng thông số khác.



a) Mạng hình T đối xứng; b) Mạng hình π đối xứng; c) Mạng hình X (cầu) đối xứng

Hình 5.41

5.3.4 Mạng hai cửa bilateral và unilateral

Tùy theo khả năng truyền tín hiệu theo một chiều hay hai chiều mà ta có thể chia các mạng hai cửa thành unilateral và bilateral.

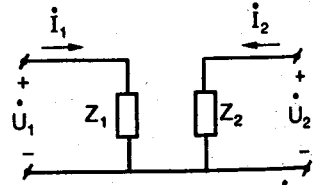
Mạng hai cửa bilateral có hai ma trận truyền đạt A và B, điều đó chứng tỏ có khả năng truyền tín hiệu về cả hai phía.

Mạng hai cửa unilateral chỉ có một ma trận truyền đạt. Nếu mạng hai cửa có ma trận A mà không tồn tại ma trận B thì mạng hai cửa đó chỉ có khả năng truyền tín hiệu từ phía của một sang cửa hai, còn nếu tồn tại ma trận B mà không có ma trận A thì mạng hai cửa chỉ có khả năng truyền tín hiệu từ phía của hai sang cửa một.

Mạng hai cửa không có ma trận truyền đạt nào sẽ không có khả năng truyền tín hiệu về cả hai chiều.

Ví dụ mạng hai cửa trên H.5.42.

Các mạng hai cửa loại biến áp lý tưởng, gyrator, NIC là loại bilateral. Các nguồn phụ thuộc là unilateral (chỉ tồn tại ma trận A).

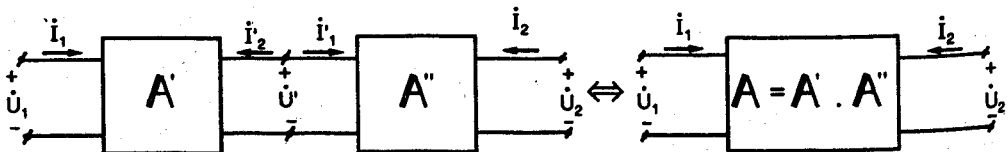


Hình 5.42

5.4 CÁCH NỐI CÁC MẠNG HAI CỬA

5.4.1 Nối dây chuyển (cascade interconnection)

Cách nối dây chuyển hai mạng hai cửa được biểu diễn trên H.5.43a.



Hình 5.43

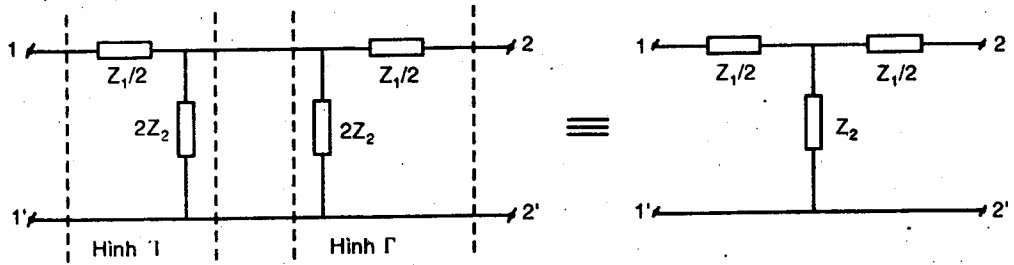
Giả thiết tồn tại các ma trận truyền đạt A' và A'' của các mạng thành phần.

Ta có:
$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}' \begin{bmatrix} \dot{U}' \\ -\dot{I}'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}' \begin{bmatrix} \dot{U}' \\ \dot{I}'_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}' \mathbf{A}'' \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

Vậy hai mạng hai cửa nối dây chuyển $\mathbf{A}'$ và $\mathbf{A}''$ như H.5.43a sẽ tương đương với một mạng hai cửa có ma trận:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}'' \quad (5.77)$$

Ví dụ 5.13: Hai mạng hai cửa hình Γ và Γ nối ghép dây chuyển với nhau như H.5.44a sẽ tương đương với mạng hai cửa hình T đối xứng (H.5.41a hoặc H.5.44b)



a) Hai mạng hình Γ và Γ nối dây chuyển b) Mạng hình T đối xứng

Hình 5.44

Trong biểu thức (5.22) thay $Z_d = \frac{Z_1}{2}$, $Z_n = 2Z_2$ ta sẽ được ma trận $\mathbf{A}_\Gamma$ của mạng hai cửa hình Γ (phần bên trái của H.5.44a):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\Gamma = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{4Z_2} & \frac{Z_1}{2} \\ \frac{1}{2Z_2} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

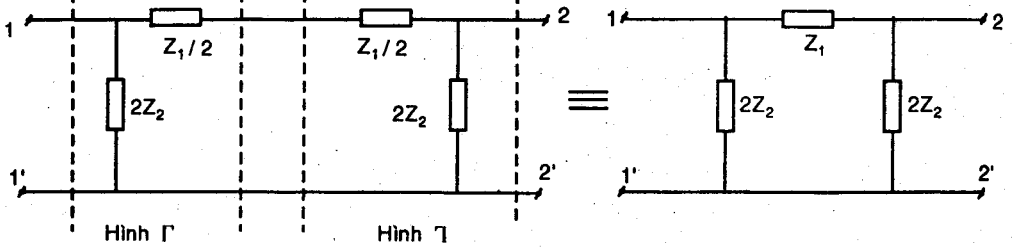
Tương tự trong biểu thức (5.21) thay $Z_d = \frac{Z_1}{2}$, $Z_n = 2Z_2$ ta được ma trận $\mathbf{A}_\Gamma$ của mạng hai cửa hình Γ (phần bên phải của H.5.44a):

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}_\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \frac{Z_1}{2} \\ \frac{1}{2Z_2} & 1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

Do đó mạng hai cửa tương đương tức mạng hai cửa hình T đối xứng (H.5.44b) sẽ có:

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}'' = \mathbf{A}_\Gamma \cdot \mathbf{A}_\Gamma = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} & Z_1 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right) \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

Ví dụ 2: Hai mạng hai cửa hình Γ và Υ nối dây chuyển như H.5.45a sẽ tương đương với mạng hai cửa hình π đối xứng (H.5.41b hoặc H.5.45b).



a) Hai mạng hình Γ và Υ nối dây chuyển. b) Mạng hình π đối xứng

Hình 5.45

Trường hợp này mạng tương đương tức mạng hai cửa hình π đối xứng sẽ có ma trận truyền đạt là:

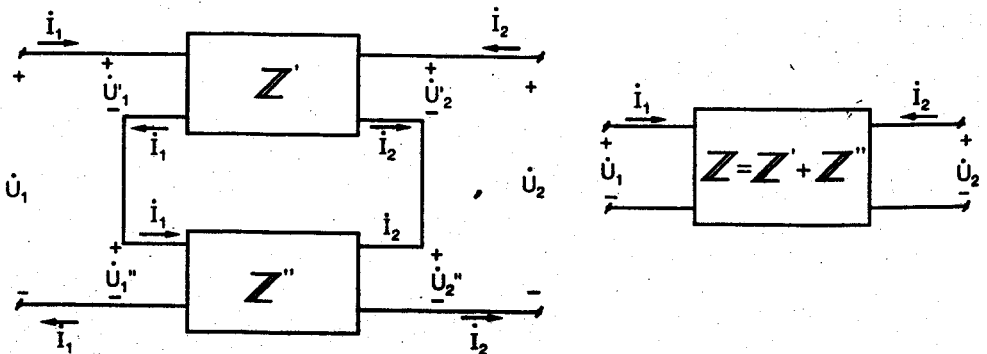
$$\mathbf{A}_\pi = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}'' = \mathbf{A}_\Gamma \cdot \mathbf{A}_\Upsilon \quad (5.81)$$

thay $\mathbf{A}_\Gamma$ bởi (5.79) và $\mathbf{A}_\Upsilon$ bởi (5.78) ta được ma trận $\mathbf{A}_\pi$ như đã cho trong bảng 5.4.

5.4.2 Nối nối tiếp

Sơ đồ nối nối tiếp hai mạng hai cửa như trên H.5.46a.

Giả thiết tồn tại các ma trận trở kháng $\mathbf{Z}'$ và $\mathbf{Z}''$ của các mạng hai cửa thành phần. Cũng giả sử rằng sau khi nối, ở mỗi cửa của mỗi mạng hai cửa thành phần, dòng điện đi vào một cực này thì bằng với dòng điện đi ra cực kia: khi ấy ta nói phép nối là đúng.



Hình 5.46

Từ H.5.46a ta có:

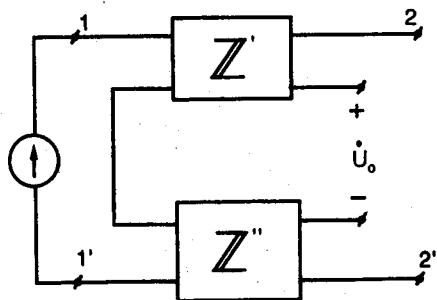
$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1 \\ \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}' \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{Z}'' \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{Z}' + \mathbf{Z}'') \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Từ (5.82) suy ra hai mạng hai cửa có ma trận $\mathbf{Z}'$ và $\mathbf{Z}''$ nối nối tiếp như H.5.46a sẽ tương đương với một mạng hai cửa có:

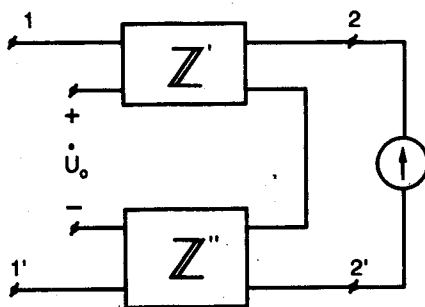
$$Z = Z' + Z''$$

(5.83)

với điều kiện phép nối là đúng.

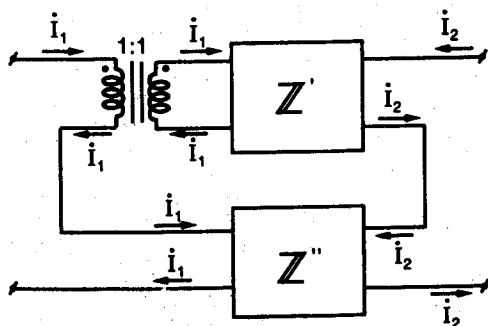


a) Các cực ở cửa 2 để hở

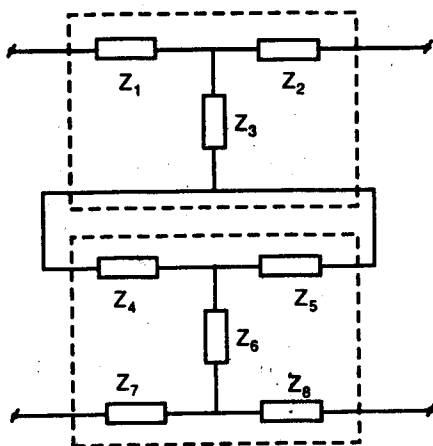


b) Các cực ở cửa 1 để hở

Hình 5.47



Hình 5.48

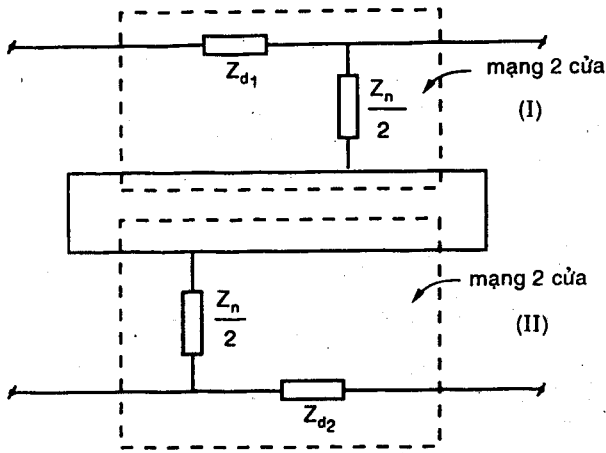


Hình 5.49: Phép nối không đúng

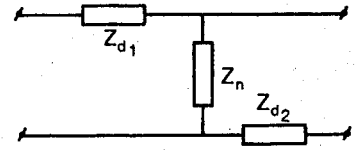
Phép nối nối tiếp sẽ đúng nếu thỏa điều kiện $U_0 = 0$ khi hai mạng hai cửa được nối như trên H.5.47a và 5.47b. Trường hợp điều kiện kiểm tra này không thỏa thì có thể mắc thêm vào một biến thế lý tưởng 1:1 như H.5.48 để đảm bảo ở mỗi cửa dòng điện đi vào một cực thì bằng với dòng điện đi ra khỏi cực kia.

Một ví dụ về phép nối không đúng là như trên H.5.49

Ví dụ 5.14: Tìm mạng hai cửa tương đương với hai mạng hai cửa nối nối tiếp như H.5.50.



Hình 5.50: Phép nối đúng



Hình 5.51

Giải

Có thể kiểm tra rằng phép nối là đúng, mạng hai cửa (I) là hình T, dễ dàng chứng minh được rằng nó có ma trận trở kháng là:

$$\mathbf{Z}' = \begin{bmatrix} Z_{d1} + \frac{Z_n}{2} & \frac{Z_n}{2} \\ \frac{Z_n}{2} & \frac{Z_n}{2} \end{bmatrix}$$

Mạng hai cửa (II) là hình Γ có ma trận trở kháng là:

$$\mathbf{Z}'' = \begin{bmatrix} \frac{Z_n}{2} & \frac{Z_n}{2} \\ \frac{Z_n}{2} & Z_{d2} + \frac{Z_n}{2} \end{bmatrix}$$

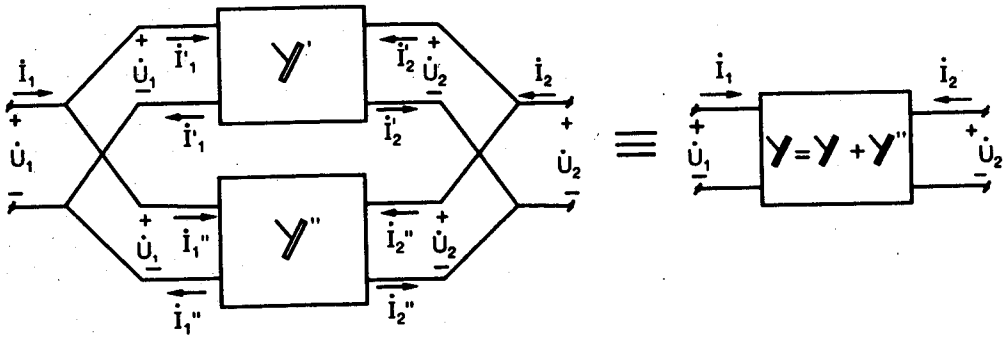
Mạng hai cửa tương đương (H.5.51) có:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}' + \mathbf{Z}'' = \begin{bmatrix} Z_{d1} + Z_n & Z_n \\ Z_n & Z_{d2} + Z_n \end{bmatrix}$$

Đây chính là ma trận trở kháng của mạng hai cửa hình T.

5.4.3. Nối song song

Sơ đồ nối song song hai mạng hai cửa (có ma trận dẫn nạp $\mathbf{Y}'$ và $\mathbf{Y}''$) như trên H.5.52a. Giả sử rằng sau khi nối, ở mỗi cửa của mỗi mạng hai cửa thành phần, dòng điện đi vào một cực thì bằng với dòng điện đi ra cực kia. Khi ấy ta nói phép nối là đúng.



Hình 5.52

Từ H.5.52a ta có:

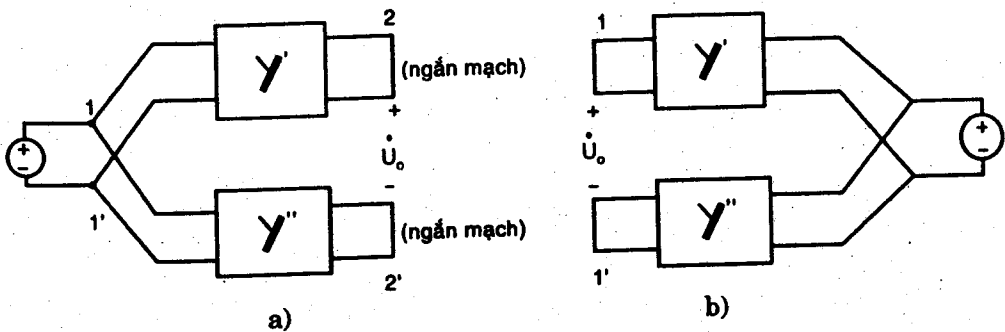
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1' + \dot{I}_1'' \\ \dot{I}_2' + \dot{I}_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{I}_2'' \end{bmatrix} = \mathbf{Y}' \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{Y}'' \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{Y}' + \mathbf{Y}'') \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

Từ (5.84) suy ra hai mạng hai cửa có ma trận $\mathbf{Y}'$ và $\mathbf{Y}''$ nối song song như H.5.52a thì tương đương với một mạng hai cửa có:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' + \mathbf{Y}'' \quad (5.85)$$

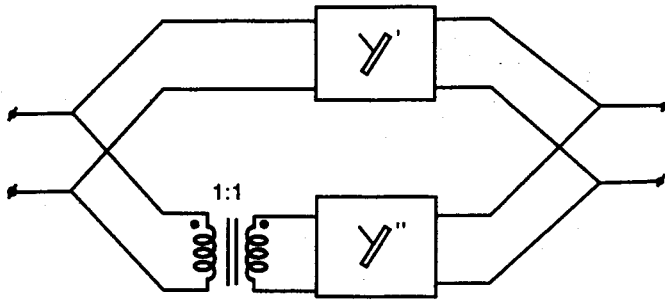
với điều kiện phép nối đúng.

Phép nối song song là đúng nếu thỏa điều kiện $\dot{U}_0 = 0$ khi hai mạng hai cửa được nối như H.5.53a và H.5.53b.



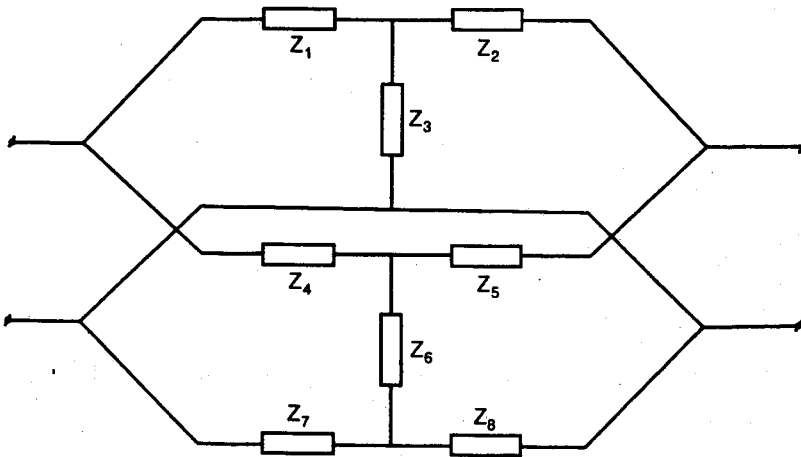
Hình 5.53

Trường hợp điều kiện kiểm tra này không được thỏa thì có thể mắc thêm vào một biến thế lý tưởng 1:1 như H.5.54 để đảm bảo ở mỗi cửa dòng điện đi vào một cực bằng với dòng điện đi ra cực kia.



Hình 5.54

Hình 5.55 là một ví dụ về cách nối không đúng.



Hình 5.55: Phép nối không đúng

Ví dụ 5.15: Xác định ma trận dẫn nạp của mạng hai cửa gồm hai mạng nối song song như H.5.56a.

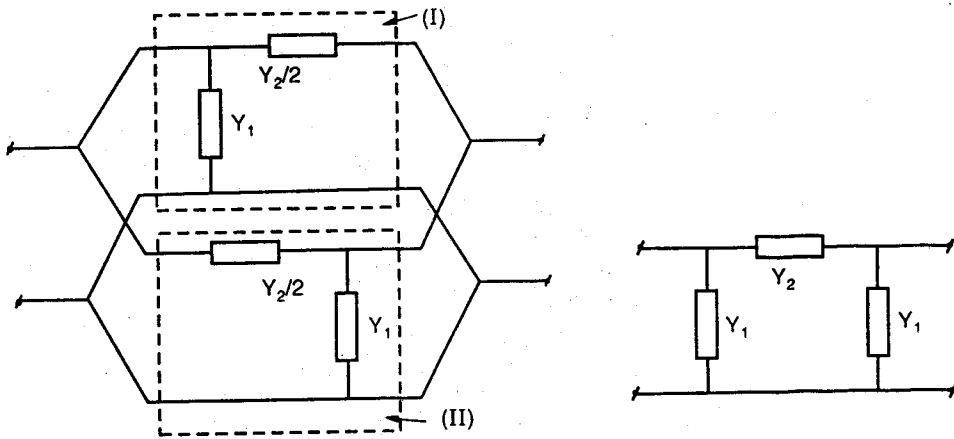
Giải

Mạng (I) là hình Γ , có thể nghiệm lại rằng ma trận dẫn nạp của nó là:

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} Y_1 + \frac{Y_2}{2} & -\frac{Y_2}{2} \\ -\frac{Y_2}{2} & \frac{Y_2}{2} \end{bmatrix}$$

Mạng (II) là hình Γ có:

$$\mathbf{Y}'' = \begin{bmatrix} \frac{Y_2}{2} & -\frac{Y_2}{2} \\ -\frac{Y_2}{2} & Y_1 + \frac{Y_2}{2} \end{bmatrix}$$



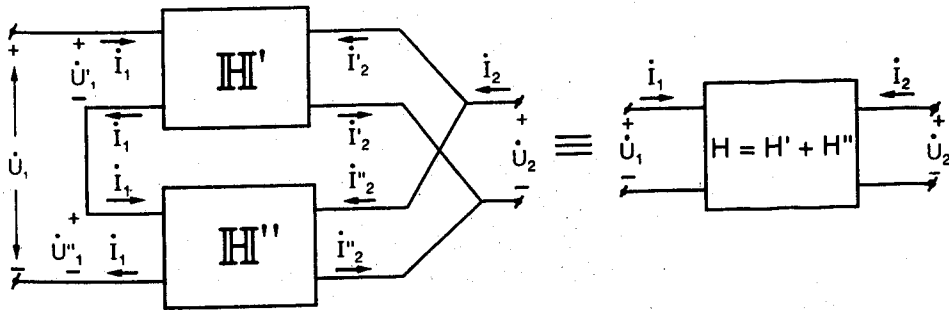
Hình 5.56

Do đó mạng hai cửa tương đương (H.5.56b) có:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' + \mathbf{Y}'' = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_1 + Y_2 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

Đây chính là ma trận dẫn nạp của mạng hai cửa hình π .

5.4.4 Nối tiếp - song song



Hình 5.57

Sơ đồ nối nối tiếp - song song hai mạng hai cửa (có ma trận hỗn hợp $\mathbf{H}'$ và $\mathbf{H}''$) như H.5.57a: phía cửa 1 nối nối tiếp còn phía cửa 2 nối song song. Giả sử rằng sau khi nối, ở mỗi cửa của mỗi mạng hai cửa thành phần, dòng điện đi vào một cực bằng với dòng điện đi ra cực kia. Khi ấy ta nói phép nối là đúng.

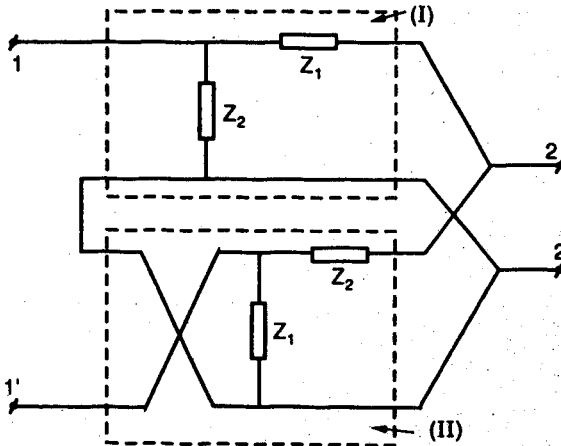
Từ H.5.57a ta có:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1 \\ \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{H}' \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{H}'' \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{H}' + \mathbf{H}'') \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.87)$$

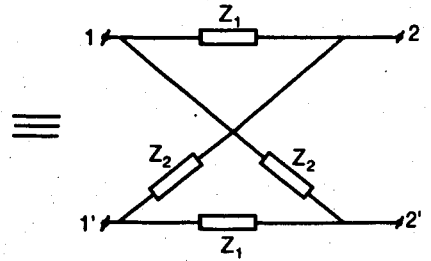
Từ (5.87) suy ra hai mạng hai cửa có ma trận $\mathbf{H}'$ và $\mathbf{H}''$ nối nối tiếp - song song như H.5.57a sẽ tương đương với một mạng hai cửa có ma trận:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}'' \quad (5.88)$$

Ví dụ 5.16: Xác định ma trận hỗn hợp $\mathbf{H}$ của mạng hai cửa gồm hai mạng hai cửa nối nối tiếp - song song như H.5.58.



Hình 5.58



Hình 5.59

Giải

Mạng hai cửa (I) là mạng hai cửa hình Γ , có thể nghiệm lại rằng ma trận hỗn hợp của nó là:

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{Z_1 + Z_2} \begin{bmatrix} Z_1 Z_2 & Z_2 \\ -Z_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

Mạng hai cửa (II) gồm mạng hai cửa “hai dây dẫn giao nhau” nối dây chuyển với mạng hai cửa hình Γ :

- Ma trận truyền đạt của “hai dây dẫn giao nhau” là:

$$\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

- Ma trận truyền đạt của mạng hai cửa hình Γ , theo (5.21) là:

$$\mathbf{A}_\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ \frac{1}{Z_1} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}$$

Suy ra ma trận truyền đạt của mạng hai cửa (II) là:

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}_S \cdot \mathbf{A}_\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & -Z_2 \\ -1/Z_1 & -(1 + Z_2/Z_1) \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

Dùng bảng 5.1, ta suy ra được ma trận hỗn hợp tương ứng là:

$$\mathbf{H}'' = \frac{1}{Z_1 + Z_2} \begin{bmatrix} Z_1 Z_2 & -Z_1 \\ Z_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Do đó theo (5.88) ta được:

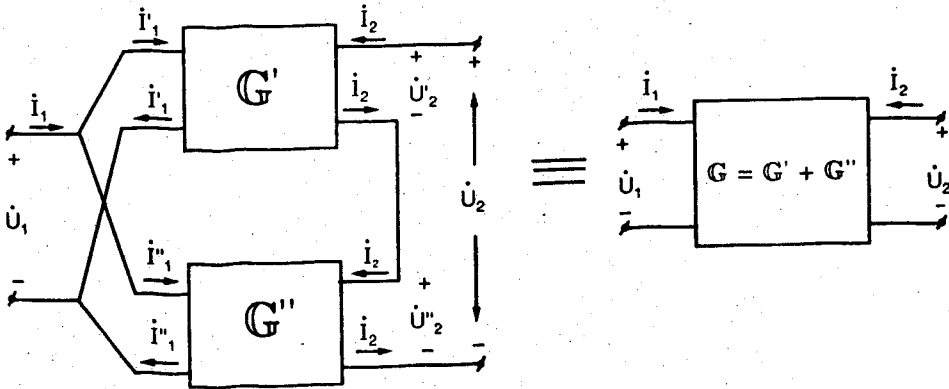
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}'' = \frac{1}{Z_1 + Z_2} \begin{bmatrix} 2Z_1 Z_2 & Z_2 - Z_1 \\ Z_1 - Z_2 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

Đây là ma trận hỗn hợp của mạng hai cửa hình cầu đối xứng H.5.59.

Nếu dùng bảng 5.1, từ (5.92) có thể suy ra ma trận **A** như bảng 5.4.

5.4.5 Nối song song - nối tiếp

Sơ đồ nối song song - nối tiếp hai mạng hai cửa (có ma trận hỗn hợp ngược **G'** và **G''**) như trên H.5.60a: phía của một nối song song còn phía của hai nối nối tiếp. Cũng giả sử rằng sau khi nối, ở mỗi cửa của mỗi mạng hai cửa thành phần, dòng điện đi vào một cực bằng với dòng điện đi ra cực kia, khi ấy ta nói cách nối là đúng.



Hình 5.60

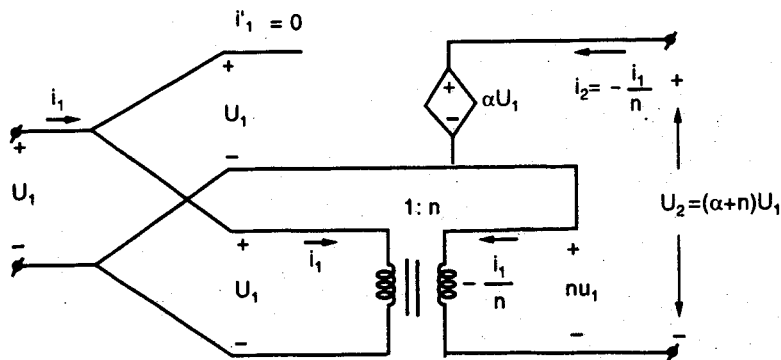
Từ H.5.60a suy ra:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{I}_1' + \dot{I}_1'' \\ \dot{U}_2' + \dot{U}_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{U}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{U}_2'' \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{G}' \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{G}'' \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{G}' + \mathbf{G}'') \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.93)$$

Do đó hai mạng hai cửa có ma trận **G'** và **G''** nối song song - nối tiếp như H.5.60a sẽ tương đương với một mạng hai cửa có ma trận:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}' + \mathbf{G}'' \quad (5.94)$$

Ví dụ 5.17: Xác định ma trận hỗn hợp ngược **G** của mạng hai cửa gồm nguồn áp phụ thuộc áp nối song song - nối tiếp với biến áp lý tưởng như H.5.61.



Hình 5.61

Giải

Ma trận hỗn hợp ngược của nguồn áp phụ thuộc áp, theo (5.47) là:

$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận hỗn hợp ngược của biến áp lý tưởng, theo (5.55) là:

$$\mathbf{G}'' = \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix}$$

Do đó, theo (5.94) ta có:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}' + \mathbf{G}'' = \begin{bmatrix} 0 & -n \\ \alpha + n & 0 \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

$$\text{Từ (5.95)} \Rightarrow i_1 = -ni_2 \text{ và } u_2 = (\alpha + n)u_1 \quad (5.96)$$

Nếu $n = 1$ thì:

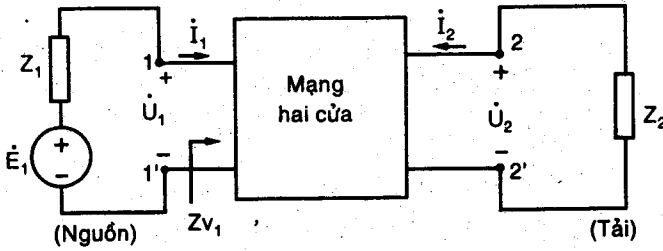
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \alpha + 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

$$\text{Và} \quad i_1 = -i_2, u_2 = (\alpha + 1)u_1 \quad (5.98)$$

Mạng hai cửa này thường được dùng trong tổng hợp mạch tích cực.

5.5 CÁC THÔNG SỐ LÀM VIỆC

Cho đến đây các thông số của mạng hai cửa được biết là các phần tử của các ma trận đặc trưng. Chúng đặc trưng cho mạng hai cửa ở điều kiện làm việc đặc biệt như trạng thái ngắn mạch hoặc hở mạch. Trong trường hợp làm việc bình thường, mạng hai cửa thường được nối giữa nguồn và tải như H.5.62 trong đó Z_1 là trở kháng trong của nguồn áp E_1 , Z_2 là trở kháng tải. Thông thường người ta coi cửa nối với nguồn là cửa sơ cấp, cửa nối với tải là cửa thứ cấp.



Hình 5.62

Để mô tả trạng thái làm việc của mạng hai cửa, người ta thường dùng các thông số làm việc như: trở kháng vào, hệ số khuếch đại điện áp (hàm truyền đặt áp), hệ số khuếch đại dòng điện (hàm truyền đặt dòng), hệ số khuếch đại công suất. Các thông số này có thể được xác định qua các phần tử của các ma trận đặc trưng của mạng hai cửa. Chúng ta thử tìm chúng khi dùng các phần tử của ma trận trở kháng Z .

5.5.1 Trở kháng vào

Trở kháng vào gồm trở kháng vào (cửa) sơ cấp và trở kháng vào (cửa) thứ cấp.

1- Trở kháng vào sơ cấp

Trở kháng vào sơ cấp bằng tỉ số giữa điện áp với dòng điện ở cửa sơ cấp mạng hai cửa khi cửa thứ cấp mắc tải Z_2 .

$$Z_{v1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \quad (5.99)$$

Giả sử mạng hai cửa được mô tả bởi hệ phương trình trở kháng (dạng Z):

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \quad (5.100a)$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \quad (5.100b)$$

Trên tải sẽ có quan hệ giữa dòng và áp như sau:

$$\dot{U}_2 = -Z_2\dot{I}_2 \quad (5.101)$$

Thay (5.101) vào (5.100b) ta suy ra:

$$\dot{I}_2 = \frac{-Z_{21}\dot{I}_1}{Z_2 + Z_{22}} \quad (5.102)$$

Thay (5.102) vào (5.100a) ta được:

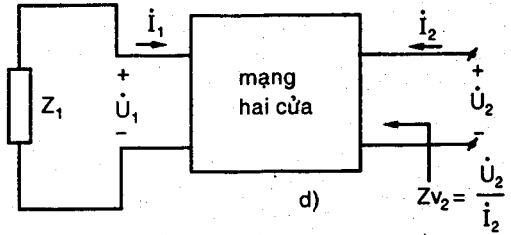
$$Z_{v1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_2 + Z_{22}} = \frac{Z_{11}Z_2 + \Delta Z}{Z_2 + Z_{22}} \quad (5.103)$$

Nếu dùng bảng biến đổi 5.1, ta có thể suy ra công thức tính Z_{v1} theo các thông số khác, ví dụ theo các thông số dạng A như sau:

$$Z_{v1} = \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}} \quad (5.104)$$

2- Trở kháng vào thứ cấp

Đây là trở kháng nhìn từ phía thứ cấp khi triệt tiêu nguồn $\dot{E}_1$ phía sơ cấp (cho $\dot{E}_1 = 0$) và được xác định bởi tỉ số giữa điện áp và dòng điện trên cửa thứ cấp (H.5.63).



Hình 5.63

Lúc này ở phía sơ cấp ta có:

$$\dot{U}_1 = -Z_1 \dot{I}_1 \quad (5.105)$$

thay (5.105) vào (5.100a) suy ra:

$$\dot{I}_1 = -\frac{Z_{12} \dot{I}_2}{Z_1 + Z_{11}} \quad (5.106)$$

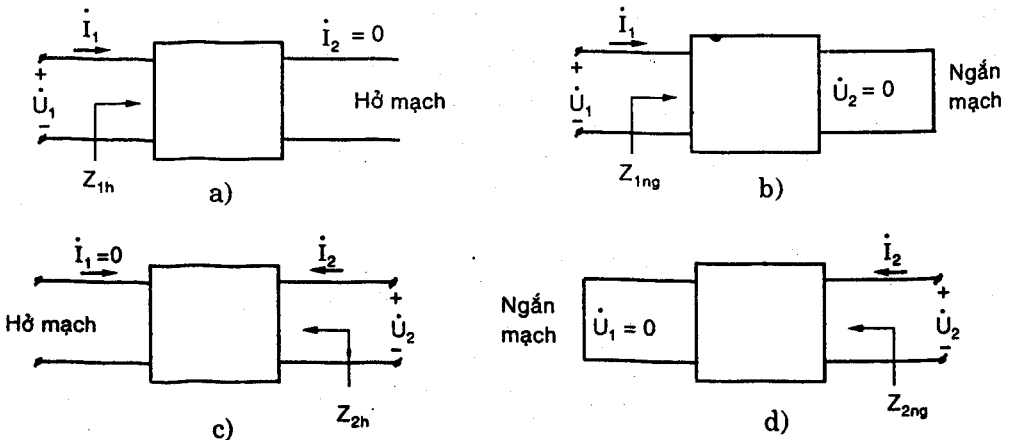
Thay (5.106) vào (5.100b) ta được:

$$Z_{v2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_1 + Z_{11}} = \frac{Z_{22}Z_1 + \Delta Z}{Z_1 + Z_{11}} \quad (5.107)$$

Dùng bảng 5.1 có thể suy ra:

$$Z_{v2} = \frac{A_{22}Z_1 + A_{12}}{A_{21}Z_1 + A_{11}} \quad (5.108)$$

3- Các trở kháng vào ngắn mạch và hở mạch



Hình 5.64

Định nghĩa:

$$\left\{ \begin{array}{ll} Z_{1h} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{i_2=0} & \text{là trở kháng vào cửa 1} \\ & \text{khi hở mạch cửa 2 (H.5.64a)} \\ Z_{1ng} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{U_2=0} & \text{là trở kháng vào cửa 1} \\ & \text{khi ngắn mạch cửa 2 (H.5.64b)} \\ Z_{2h} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{i_1=0} & \text{là trở kháng vào cửa 2} \\ & \text{khi hở mạch cửa 1 (H.5.64c)} \\ Z_{2ng} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{U_1=0} & \text{là trở kháng vào cửa 2} \\ & \text{khi ngắn mạch cửa 1 (H.5.64d)} \end{array} \right.$$

Từ các biểu thức (5.1a), (5.1b), (5.7a), (5.7b), (5.17a), (5.17b) và bảng 5.1 ta suy ra:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{1h} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = Z_{11} \end{array} \right. \quad (5.109a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{1ng} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{1}{Y_{11}} = \frac{\Delta Z}{Z_{22}} \end{array} \right. \quad (5.109b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{2h} = \frac{A_{22}}{A_{21}} = Z_{22} \end{array} \right. \quad (5.109c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{2ng} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{1}{Y_{22}} = \frac{\Delta Z}{Z_{11}} \end{array} \right. \quad (5.109d)$$

Chú ý rằng:

$$Z_{1h} = Z_{v1} \Big|_{Z_2=\infty}; \quad Z_{1ng} = Z_{v1} \Big|_{Z_2=0} \quad (5.110a)$$

$$Z_{2h} = Z_{v2} \Big|_{Z_1=\infty}; \quad Z_{2ng} = Z_{v2} \Big|_{Z_1=0} \quad (5.110b)$$

Từ các biểu thức (5.109a, b, c, d) ta suy ra giữa bốn đại lượng trở kháng vào ngắn mạch và hở mạch có quan hệ sau đây:

$$\frac{Z_{1ng}}{Z_{1h}} = \frac{Z_{2ng}}{Z_{2h}} = \frac{A_{12}A_{21}}{A_{11}A_{22}} \quad (5.111a)$$

hoặc: $Z_{1ng} \cdot Z_{2h} = Z_{1h} \cdot Z_{2ng} = \Delta Z \quad (5.111b)$

Như vậy chỉ có ba trong bốn đại lượng đó là độc lập nhau.

Giả sử bây giờ ta xét mạng hai cửa tương hỗ, khi đó theo bảng 5.2 ta có:

$$Z_{12} = Z_{21} \quad (5.112a)$$

hoặc $\Delta A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1 \quad (5.112b)$

Từ các phương trình (5.109a, b, c, d) và (5.112b) có thể suy ra:

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1h}}{Z_{2h} - Z_{2ng}}}; A_{12} = A_{11} \cdot Z_{2ng};$$

$$A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{1h}}; A_{22} = Z_{2h} \cdot A_{21} = \frac{A_{11} Z_{2h}}{Z_{1h}} \quad (5.113a)$$

Cũng từ các phương trình (5.109a, b, c, d) và (5.112a) có thể suy ra:

$$Z_{11} = Z_{1h}, Z_{22} = Z_{2h}, Z_{12} = Z_{21} = \sqrt{Z_{2h}(Z_{1h} - Z_{1ng})} \quad (5.113b)$$

Vậy đối với mạng hai cửa tương hỗ, nếu biết được các trở kháng vào ngắn mạch, hở mạch (ví dụ bằng phép đo lường) thì đủ để xác định các phần tử của ma trận dạng bất kỳ $Z, A, v.v.$ của mạng hai cửa.

Cũng có thể tính các trở kháng vào sơ cấp Z_{v_1} và thứ cấp Z_{v_2} qua các trở kháng ngắn mạch và hở mạch này.

Trong (5.103) thay $Z_{11} = Z_{1h}, Z_{22} = Z_{2h}, \Delta Z = Z_{1h} \cdot Z_{2ng}$ (bởi 5.111b) ta được:

$$Z_{v_1} = \frac{Z_{1h}(Z_2 + Z_{2ng})}{Z_2 + Z_{2h}} \quad (5.114a)$$

tương tự
$$Z_{v_2} = \frac{Z_{2h}(Z_1 + Z_{1ng})}{Z_1 + Z_{1h}} \quad (5.114b)$$

5.5.2 Các hàm truyền đạt

1- Hệ số khuếch đại điện áp

Hệ số khuếch đại điện áp là tỷ số $\frac{\dot{U}_2}{\dot{E}_1}$ hoặc $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$ khi mạng hai cửa làm việc với nguồn và tải như H.5.62.

Để tính $\frac{\dot{U}_2}{\dot{E}_1}$ ta có thể dùng định lý Thévenin thay mạng hai cửa, nguồn $\dot{E}_1$ và trở kháng trong Z_1 bởi mạch tương đương Thévenin như H.5.65. Trong đó trở kháng tương đương Thévenin chính là trở kháng vào thứ cấp Z_{v_2} cho bởi (5.107).

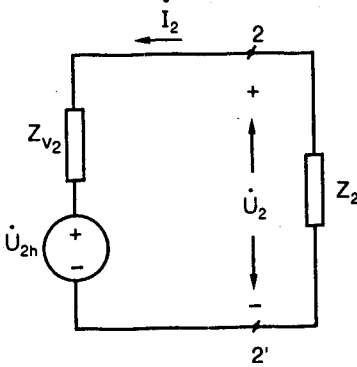
Khi hở mạch cửa 2 thì mạng hai cửa tương đương với trở kháng hở mạch $Z_{1h} = Z_{11}$ nếu nhìn từ hai cực 1 và 1' (H.5.66), khi đó từ H.5.66 suy ra:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + Z_{11}}$$

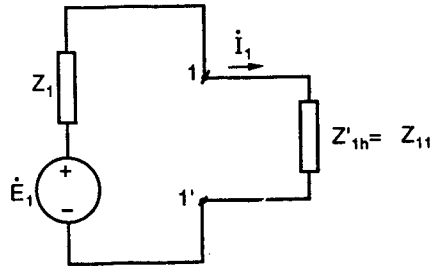
và (5.100b) trở thành:

$$\dot{U}_{2h} = Z_{21}\dot{I}_1 = \frac{Z_{21}\dot{E}_1}{Z_{11} + Z_1} \quad (5.115)$$

Từ H.5.65 suy ra:



Hình 5.65



Hình 5.66

$$\dot{U}_2 = -Z_2\dot{I}_2 = -Z_2\left(-\frac{\dot{U}_{2h}}{Z_2 + Z_{v2}}\right) = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_{v2}}\dot{U}_{2h}$$

Thay $\dot{U}_{2h}$ bởi (5.115) và Z_{v2} bởi (5.107) vào biểu thức trên ta suy ra được:

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{E}_1} = \frac{Z_2 Z_{21}}{Z_2(Z_1 + Z_{11}) + Z_1 Z_{22} + \Delta Z} \quad (5.116)$$

Tất nhiên cũng có thể suy ra (5.116) trực tiếp từ bốn phương trình sau đây:

$$\begin{cases} \text{-Phương trình mạch sơ cấp: } \dot{E}_1 = Z_1\dot{I}_1 + \dot{U}_1 & (5.117a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{-Phương trình mạch thứ cấp: } \dot{U}_2 = -Z_2\dot{I}_2 & (5.117b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{-Phương trình mạng hai cửa: } \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 & (5.117c) \end{cases}$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \quad (5.117d)$$

Nếu trong biểu thức (5.116) ta cho $Z_1 = 0$, $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$ thì suy ra được công thức tính hệ số khuếch đại áp $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$:

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_2 Z_{21}}{Z_2 Z_{11} + \Delta Z} \quad (5.118)$$

Tất nhiên cũng có thể suy ra (5.118) trực tiếp từ ba phương trình (5.117b), (5.117c) và (5.117d).

2- Hệ số khuếch đại dòng

Hệ số khuếch đại dòng là tỉ số giữa $\dot{I}_2$ với $\dot{I}_1$ khi mạng hai cửa làm

việc với nguồn và tải như H.5.62. Từ biểu thức (5.102) ta suy ra được:

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{-Z_{21}}{Z_2 + Z_{22}} \quad (5.119)$$

3- Hệ số khuếch đại công suất

Ta tính hệ số khuếch đại công suất $\frac{P_2}{P_1}$, trong đó:

P_2 là công suất tác dụng tiêu thụ trên tải Z_2 :

$$P_2 = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{U}_2 \dot{I}_2^* \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(Z_2 \dot{I}_2 \dot{I}_2^* \right)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} |\dot{I}_2|^2 \operatorname{Re}(Z_2) \quad (5.120)$$

P_1 là công suất tác dụng đưa vào cửa 1 của mạng hai cửa:

$$P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{U}_1 \dot{I}_1^* \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(Z_{v1} \dot{I}_1 \dot{I}_1^* \right) = \frac{1}{2} |\dot{I}_1|^2 \operatorname{Re}(Z_{v1}) \quad (5.121)$$

Do đó:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{|\dot{I}_2|^2 \operatorname{Re}(Z_2)}{|\dot{I}_1|^2 \operatorname{Re}(Z_{v1})}$$

Thay $\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$ bởi (5.119) ta được:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left| \frac{Z_{21}}{Z_2 + Z_{22}} \right|^2 \frac{\operatorname{Re}(Z_2)}{\operatorname{Re}(Z_{v1})} \quad (5.122)$$

trong đó Z_{v1} cho bởi (5.103)

Môđun của hệ số khuếch đại là các đại lượng không thứ nguyên, thường được tính bằng neper (nep)-hoặc decibel (db).

Gọi K_u là hệ số khuếch đại áp, K_i là hệ số khuếch đại dòng thì:

$$|K_u|[\text{nep}] = \ln \frac{|\dot{U}_2|}{|\dot{U}_1|}; \quad |K_u|[\text{db}] = 20 \lg \frac{|\dot{U}_2|}{|\dot{U}_1|} \quad (5.123)$$

$$|K_i|[\text{nep}] = \ln \frac{|\dot{I}_2|}{|\dot{I}_1|}; \quad |K_i|[\text{db}] = 20 \lg \frac{|\dot{I}_2|}{|\dot{I}_1|} \quad (5.124)$$

Quan hệ giữa neper và decibel như sau:

$$|K_u|[\text{db}] = 20 \lg \frac{|\dot{U}_2|}{|\dot{U}_1|} = 20 \ln \frac{|\dot{U}_2|}{|\dot{U}_1|} \cdot \lg e = 20 \times 0,4343 \cdot \ln \frac{|\dot{U}_2|}{|\dot{U}_1|}$$

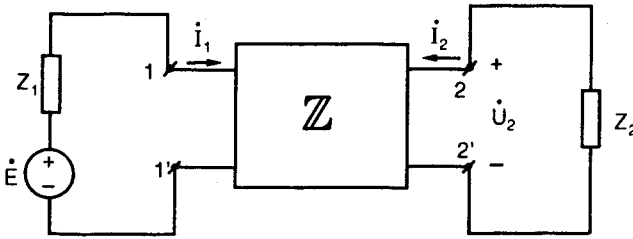
$$\Rightarrow |K_u|[\text{db}] = 8,686 |K_u|[\text{nep}] \quad (5.125)$$

Còn hệ số khuếch đại công suất $K_p = \frac{P_2}{P_1}$ tính bằng neper và decibel

như sau:

$$\begin{aligned} K_p[\text{nep}] &= \frac{1}{2} \ln \frac{P_2}{P_1} \\ K_p[\text{db}] &= 10 \lg \frac{P_2}{P_1} \end{aligned} \quad (5.126)$$

Ví dụ 5.18: Cho mạng hai cửa được mô tả bởi các thông số trở kháng Z làm việc trong mạch điện trên H.5.67. Để tìm các thông số $\dot{E}$ và Z_1 của nguồn điện áp thực tế cung cấp cho mạng hai cửa, ta thực hiện các phép đo sau



đây:

Hình 5.67

- Ngắn mạch thứ cấp đo dòng $\dot{I}_{1a}$ chảy qua sơ cấp.
 - Hở mạch thứ cấp đo dòng $\dot{I}_{1b}$ chảy qua sơ cấp.
- Hãy tìm $\dot{E}$ và Z_1 theo $\dot{I}_{1a}$ và $\dot{I}_{1b}$ các phần tử của ma trận Z .
- Tiến hành tính toán với $\dot{I}_{1a} = 2\text{mA}$, $\dot{I}_{1b} = -j2\text{mA}$ và

$$Z = \begin{bmatrix} 1+j1 & j1 \\ j1 & j1 \end{bmatrix} [\text{K}\Omega]$$

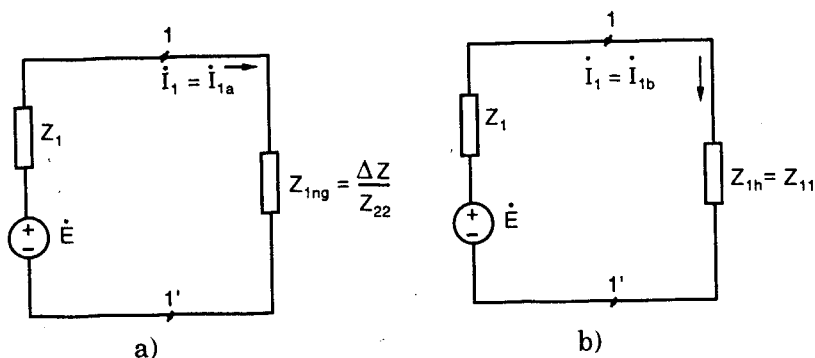
- Với $\dot{E}$ và Z_1 của nguồn tính toán được hãy tìm điện áp $\dot{U}_2$ trên các cực thứ cấp, nếu mạng hai cực có tải:

$$Z_2 = (0,5 - j0,5) [\text{K}\Omega]$$

- Tính công suất tác dụng và công suất phản kháng trên tải Z_2 .

Giải

- Khi ngắn mạch phía thứ cấp ($\dot{U}_2 = 0$) trong phép đo a thì có thể thay tương đương mạng hai cửa bởi trở kháng ngắn mạch Z_{1ng} như H.5.68a. Tương tự khi hở mạch phía thứ cấp ($\dot{I}_2 = 0$) trong phép đo b thì có thể thay mạng hai cửa bởi trở kháng hở mạch Z_{1h} như H.5.68b.



Hình 5.68

Theo (5.109b) thì: $Z_{1ng} = \frac{\Delta Z}{Z_{22}}$

Tương tự theo (5.109a): $Z_{1h} = Z_{11}$

Từ H.5.68a và H.5.68b ta được:

$$\dot{I}_{1a} = \frac{\dot{E}}{Z_1 + \frac{\Delta Z}{Z_{22}}} \quad (1)$$

$$\dot{I}_{1b} = \frac{\dot{E}}{Z_1 + Z_{11}} \quad (2)$$

Giải hệ phương trình (1) và (2) đối với $\dot{E}$ và Z_1 ta được:

$$\dot{E} = \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}} \cdot \frac{\dot{I}_{1a}\dot{I}_{1b}}{\dot{I}_{1a} - \dot{I}_{1b}}$$

$$Z_1 = \frac{\dot{E}}{\dot{I}_{1b}} - Z_{11}$$

Khi thay các số liệu đã cho ta được:

$$\dot{E} = 4 - j4 \text{ V}$$

$$Z_1 = 1 + j1 \text{ K}\Omega$$

2. Để tìm điện áp $\dot{U}_2$ của mạng hai cửa có tải Z_2 ta dùng định lý Thévenin thay mạng hai cửa và nguồn bởi mạch tương đương Thévenin như H.5.65, trong đó theo (5.115) và (5.107):

$$\dot{U}_{2h} = \frac{Z_{21}\dot{E}_1}{Z_{11} + Z_1} = -j2 \text{ V}$$

$$Z_{v2} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_1 + Z_{11}} = 0,5 + j0,5 \text{ K}\Omega$$

Từ H.5.65 suy ra:

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_{2h} \cdot Z_2}{Z_{v_2} + Z_2} = -1 - j1V$$

$$3. \text{ Dòng } \dot{I}_2 = -\frac{\dot{U}_2}{Z_2} = j2 \text{ mA}$$

Công suất tác dụng trên tải:

$$P_2 = \frac{1}{2} |\dot{I}_2|^2 \operatorname{Re} Z_2 = 1 \text{ mW}$$

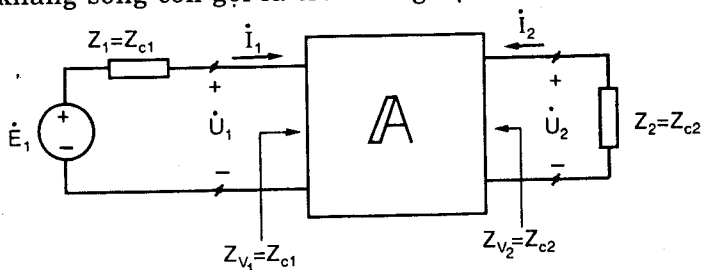
Công suất phản kháng trên tải:

$$Q_2 = \frac{1}{2} |\dot{I}_2|^2 \operatorname{Im} Z_2 = -1 \text{ mVar}$$

5.6 CÁC THÔNG SỐ SỐNG CỦA MẠNG HAI CỬA

5.6.1 Trở kháng sóng

Trở kháng sóng còn gọi là trở kháng đặc tính của mạng hai cửa.



Hình 5.69

Xét mạng hai cửa đặc trưng bởi ma trận thông số A làm việc trong mạch điện như H.5.69. Ta thử tìm cặp giá trị Z_{c1} , Z_{c2} sao cho khi $Z_2 = Z_{c2}$ thì trở kháng vào cửa 1 là $Z_{v1} = Z_{c1}$ và ngược lại khi $Z_1 = Z_{c1}$ thì trở kháng vào cửa 2 là $Z_{v2} = Z_{c2}$. Từ (5.104) và (5.108) suy ra Z_{c1} và Z_{c2} là nghiệm của hai phương trình sau đây:

$$Z_{c1} = \frac{A_{11}Z_{c2} + A_{12}}{A_{21}Z_{c2} + A_{22}} \quad (5.127)$$

$$\text{và} \quad Z_{c2} = \frac{A_{22}Z_{c1} + A_{12}}{A_{21}Z_{c1} + A_{11}} \quad (5.128)$$

Giải (5.127) và (5.128) ta được:

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}} \quad \text{và} \quad Z_{c2} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}} \quad (5.129)$$

Z_{c1} gọi là trở kháng sóng sơ cấp.

Z_{c2} gọi là trở kháng sóng thứ cấp.

Nếu phía cửa 1, mạng hai cửa có tải là Z_{c1} hoặc được cung cấp bởi nguồn có trở kháng trong bằng Z_{c1} thì ta nói rằng mạng hai cửa được phối hợp sóng (hoặc phối hợp trở kháng) ở cửa 1. Nếu phía cửa 2, mạng hai cửa có tải là Z_{c2} hoặc được cung cấp bởi nguồn có trở kháng trong bằng Z_{c2} thì ta nói mạng hai cửa được phối hợp sóng ở cửa 2. Nếu mạng hai cửa được phối hợp cả phía sơ cấp lẫn thứ cấp thì ta nói nó được phối hợp sóng hai phía.

Từ (5.129) và (5.109a,b,c,d) có thể suy ra công thức tính Z_{c1} , Z_{c2} theo các trở kháng ngắn mạch và hở mạch:

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_{1h}Z_{1ng}} \quad \text{và} \quad Z_{c2} = \sqrt{Z_{2h}Z_{2ng}} \quad (5.130)$$

Người ta còn định nghĩa:

$$\text{- Trở kháng sóng trung bình } Z_c = \sqrt{Z_{c1}Z_{c2}} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} \quad (5.131)$$

$$\text{- Tỉ số trở kháng sóng } \rho = \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} = \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}} \quad (5.132)$$

ρ đo mức độ đối xứng của trở kháng của mạng hai cửa.

Ta có các quan hệ sau:

$$Z_{c1} = \frac{Z_c}{\rho}; \quad Z_{c2} = \rho Z_c \quad (5.133)$$

Nếu mạng hai cửa thỏa điều kiện $A_{11} = A_{22}$ thì từ (5.129) suy ra:

$$Z_{c1} = Z_{c2} = Z_c = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} \quad (5.134)$$

khi đó $\rho = 1$. Vì vậy, điều kiện $A_{11} = A_{22}$ hoặc các điều kiện tương ứng với các ma trận thông số khác (bảng 5.3) gọi là điều kiện đối xứng trở kháng.

5.6.2 Hệ số truyền đạt sóng

Xét mạng hai cửa làm việc trong mạch H.5.70a, được phối hợp sóng (phối hợp trở kháng) về phía thứ cấp ($Z_2 = Z_{c2}$) và tồn tại ma trận **A** nghĩa là mạng hai cửa có khả năng truyền năng lượng từ phía sơ cấp đến thứ cấp. Hệ số truyền đạt sóng sơ cấp g_1 được định nghĩa bởi:

$$g_1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} \right|_{Z_2 = Z_{c2}} \quad (5.135a)$$

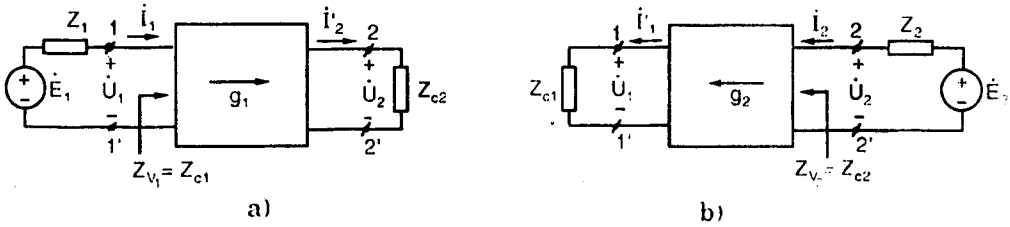
Nếu thay $\dot{U}_2 = Z_{c2} \dot{I}_2$ và $\dot{U}_1 = Z_{c1} \dot{I}_1$ ta được:

$$g_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_1^2 Z_{c2}}{\dot{U}_2^2 Z_{c1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{I}_1^2 Z_{c1}}{\dot{I}_2^2 Z_{c2}} \quad (5.135b)$$

từ đó có thể suy ra:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} e^{g_1} = \frac{e^{g_1}}{\rho} \quad (5.135c)$$

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} e^{g_1} = \rho e^{g_1} \quad (5.135d)$$



Hình 5.70

trong đó ρ là tỉ số trở kháng sóng định nghĩa bởi (5.132)

Từ (5.135b), (5.17a, b) và (5.129) có thể suy ra công thức tính g_1 theo các thông số dạng A như sau:

$$g_1 = \ln \left(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}} \right) \quad (5.135e)$$

Xét mạng hai cửa làm việc trong mạch H.5.70b, được phối hợp trở kháng phía sơ cấp ($Z_1 = Z_{c1}$) và tồn tại ma trận B nghĩa là mạng hai cửa có khả năng truyền năng lượng từ phía thứ cấp đến phía sơ cấp. Hệ số truyền đạt sóng thứ cấp g_2 được định nghĩa bởi:

$$g_2 = \frac{1}{2} \ln \left. \frac{\dot{U}_2 \dot{I}_2}{\dot{U}_1 \dot{I}_1} \right|_{Z_1 = Z_{c1}} \quad (5.136a)$$

thay $\dot{U}_1 = Z_{c1} \dot{I}_1$ và $\dot{U}_2 = Z_{c2} \dot{I}_2$ vào (5.136a) ta được:

$$g_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_2^2 Z_{c1}}{\dot{U}_1^2 Z_{c2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{I}_2^2 Z_{c2}}{\dot{I}_1^2 Z_{c1}} \quad (5.136b)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \rho e^{g_2}; \quad \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{e^{g_2}}{\rho} \quad (5.136c)$$

Tương tự với (5.135e), có thể suy ra:

$$g_2 = \ln \left(\sqrt{B_{11}B_{22}} + \sqrt{B_{12}B_{21}} \right) \quad (5.136d)$$

Nếu mạng hai cửa có ma trận A thì dùng bảng biến đổi (5.1) ta suy ra được:

$$g_2 = \ln \left(\frac{\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}}{\Delta A} \right) \quad (5.136e)$$

• Để thuận tiện, người ta còn định nghĩa các thông số sau:

- Hệ số truyền đạt sóng trung bình g :

$$g = \frac{g_1 + g_2}{2} = \ln \left(\frac{\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}}{\sqrt{\Delta A}} \right) \quad (5.137)$$

- Tỷ số năng lượng ρ_e :

$$\rho_e = e^{(g_1 - g_2)/2} = \sqrt{\Delta A} \quad (5.138)$$

$$\text{Ta có các quan hệ: } g_1 = g + \ln \rho_e; g_2 = g - \ln \rho_e \quad (5.139)$$

Nếu mạng hai cửa làm việc như trong mạch H.5.70a thì từ (5.135c), (5.135d) và (5.139) có thể suy ra quan hệ sau:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = e^g \frac{\rho_e}{\rho} \quad (5.140a)$$

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = e^g \rho_e \rho \quad (5.140b)$$

• Nếu mạng hai cửa là tương hỗ thì $\Delta A = 1$, khi đó:

$$\rho_e = 1$$

và

$$g_1 = g_2 = g = \ln \left(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}} \right) \quad (5.141)$$

$g_1 = g_2$ nghĩa là dòng năng lượng chảy về hai hướng là đối xứng nhau. Do đó, các mạng hai cửa tương hỗ còn được gọi là các mạng hai cửa “đối xứng năng lượng”. Tỷ số năng lượng ρ_e là thông số đo mức độ đối xứng năng lượng của mạng hai cửa, nó bằng một khi mạng hai cửa đối xứng năng lượng.

Từ (5.141) suy ra:

$$\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}} = e^g = \text{ch}g + \text{sh}g \quad (5.142a)$$

Mặt khác ta có $\Delta A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}} \right) \left(\sqrt{A_{11}A_{22}} - \sqrt{A_{12}A_{21}} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{A_{11}A_{22}} - \sqrt{A_{12}A_{21}} = e^{-g} = \text{ch}g - \text{sh}g \quad (5.142b)$$

Từ (5.142a) và (5.142b) suy ra:

$$\text{ch}g = \sqrt{A_{11}A_{22}} \quad (5.143a)$$

$$\text{sh}g = \sqrt{A_{12}A_{21}} \quad (5.143b)$$

Từ (5.143a), (5.143b), (5.129) có thể suy ra các công thức xác định các thông số dạng A theo các thông số sóng:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \text{ch}g; \quad A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \text{ch}g; \\ A_{12} &= \sqrt{Z_{c1}Z_{c2}} \text{sh}g; \quad A_{21} = \frac{\text{sh}g}{\sqrt{Z_{c1}Z_{c2}}} \end{aligned} \quad (5.144)$$

Nếu mạng hai cửa là đối xứng (tức thỏa điều kiện tương hỗ $\Delta A = 1$ và điều kiện đối xứng trở kháng $A_{11} = A_{22}$) thì theo (5.134):

$$Z_{c1} = Z_{c2} = Z_c = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} \quad \text{và} \quad \rho = 1$$

Khi đó (5.135b) và (5.135c) trở thành:

$$g = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \quad \text{hay} \quad \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = e^g \quad (5.145)$$

Còn (5.144) trở thành:

$$A_{11} = A_{22} = \text{ch}g; \quad A_{12} = Z_c \text{sh}g; \quad A_{21} = \frac{\text{sh}g}{Z_c} \quad (5.146)$$

• Bây giờ ta bàn đến ý nghĩa của hệ số truyền đạt sóng.

Ta xét hệ số truyền đạt sóng sơ cấp $g_1 = a_1 + jb_1$

Đặt $\dot{U}_1 = U_1 \sqrt{2} e^{j\varphi_1}$, $\dot{U}_2 = U_2 \sqrt{2} e^{j\varphi_2}$, $\dot{I}_1 = I_1 \sqrt{2} e^{j\psi_1}$, $\dot{I}_2 = I_2 \sqrt{2} e^{j\psi_2}$

với U_1, U_2, I_1, I_2 là các trị hiệu dụng áp, dòng.

Khi đó (5.135a) trở thành:

$$g_1 = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} e^{j[(\varphi_1 + \psi_1) - (\varphi_2 + \psi_2)]} \right\}$$

$$\text{Suy ra:} \quad a_1 = \text{Re } g_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{|S_1|}{|S_2|} \quad (5.147)$$

$$b_1 = \text{Im } g_1 = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2} (\psi_1 - \psi_2) \quad (5.148)$$

trong đó $|S_1| = U_1 I_1$ là công suất biểu kiến ở phía sơ cấp;

$|S_2| = U_2 I_2$ là công suất biểu kiến ở phía thứ cấp.

Vậy a_1 đo mức độ suy giảm của công suất biểu kiến qua mạng hai cửa trong trường hợp phối hợp trở kháng.

b_1 đo mức độ dịch pha của điện áp và dòng điện khi đi qua mạng hai cửa trong trường hợp phối hợp trở kháng.

a_1 được gọi là hệ số suy giảm còn b_1 được gọi là hệ số dịch pha. a_1 và

b_1 là các đại lượng không thứ nguyên. a_1 được tính bằng neper (nep) hoặc decibel (db) còn b tính bằng radian (rad).

$$a_1 [\text{nep}] = \frac{1}{2} \ln \frac{|S_1|}{|S_2|}; \quad a_1 [\text{db}] = 10 \lg \frac{|S_1|}{|S_2|}$$

Ý nghĩa của hệ số truyền đạt sóng thứ cấp cũng được xét một cách tương tự. Trường hợp mạng hai cửa là đối xứng, theo (5.145) ta có:

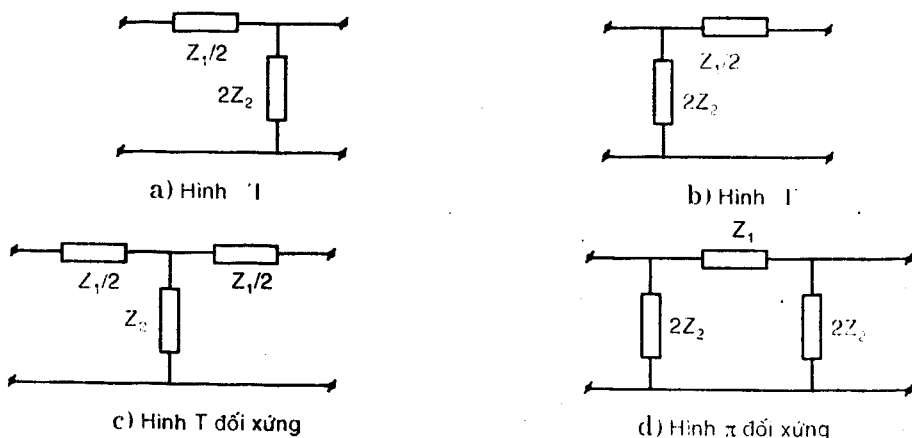
$$g_1 = g_2 = g = a + jb = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}$$

$$\Rightarrow a = \ln \frac{|\dot{U}_1|}{|\dot{U}_2|} = \ln \frac{|\dot{I}_1|}{|\dot{I}_2|} \quad \text{và} \quad b = \varphi_1 - \varphi_2 = \psi_1 - \psi_2 \quad (5.149)$$

Vậy trong trường hợp này a đo mức độ suy giảm của điện áp hoặc dòng điện qua mạng hai cửa khi có phối hợp trở kháng. Đơn vị đo của a là neper hoặc decibel.

$$a[\text{nep}] = \ln \frac{|\dot{U}_1|}{|\dot{U}_2|} = \ln \frac{|\dot{I}_1|}{|\dot{I}_2|}; \quad a[\text{db}] = 20 \lg \frac{|\dot{U}_1|}{|\dot{U}_2|} = 20 \lg \frac{|\dot{I}_1|}{|\dot{I}_2|} \quad (5.150)$$

Ví dụ 5.19: Xác định trở kháng sóng, hệ số truyền đạt sóng của các mạng hai cửa sau đây:



Hình 5.71

Giải

Cả bốn mạng hai cửa này đều tương hỗ.

a) Ma trận A_1 của mạng hai cửa H.5.71a cho bởi (5.78). Áp dụng công thức (5.129) ta tính được các trở kháng sóng:

$$Z_{c11} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)} \quad (5.151a)$$

$$Z_{c2\Gamma} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} \quad (5.151b)$$

Mạng hai cửa hình Γ này là tương hỗ nên hệ số truyền đạt sóng ở sơ cấp và thứ cấp bằng nhau và được tính bởi (5.143a), (5.143b), (5.78):

$$\text{chg}\Gamma = \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}, \quad \text{shg}\Gamma = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} \quad (5.152)$$

b) Ma trận A_Γ (H.5.71b) cho bởi (5.79). Tương tự câu a ta suy ra được:

$$Z_{c1\Gamma} = Z_{c2\Gamma} \quad (5.153a)$$

$$Z_{c2\Gamma} = Z_{c1\Gamma} \quad (5.153b)$$

$$\text{chg}\Gamma = \text{chg}\Gamma, \quad \text{shg}\Gamma = \text{shg}\Gamma \quad (5.154)$$

c) Ma trận A_T của mạng hai cửa đối xứng hình T (H.5.71c) cho bởi bảng 5.4.

Từ đó suy ra được:

$$Z_{c1T} = Z_{c2T} = Z_{cT} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)} \quad (5.155)$$

$$(5.146) \Rightarrow \text{chg}_T = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \quad (5.156a)$$

và
$$\text{shg}_T = \sqrt{\text{ch}^2 g_T - 1} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2} \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)} \quad (5.156b)$$

d) Ma trận A_π của mạng hai cửa đối xứng hình π (H.5.71d) cho trên bảng 5.4.

Tương tự cũng suy ra được:

$$Z_{c1\pi} = Z_{c2\pi} = Z_{c\pi} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} \quad (5.157)$$

$$(5.146) \Rightarrow \text{chg}_\pi = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \quad (5.158a)$$

và
$$\text{shg}_\pi = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2} \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)} \quad (5.158b)$$

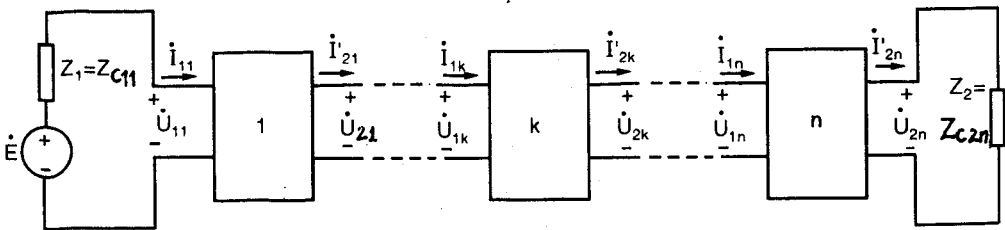
Nhận xét rằng:

$$\left. \begin{aligned} Z_{c1\Gamma} = Z_{c2\Gamma} = Z_{c\pi} &= \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} \\ Z_{c2\Gamma} = Z_{c1\Gamma} = Z_{cT} &= \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (5.159)$$

$$g_{\Gamma} = g_{\Gamma} = \frac{1}{2} g_T = \frac{1}{2} g_{\pi} \quad (5.160)$$

5.6.3 Các mạng hai cửa nối dây chuyển trong trường hợp phối hợp sóng

Xét n mạng hai cửa nối dây chuyển với nhau, làm việc trong mạch H.5.72. Ta giả thiết rằng:



Hình 5.72

- Trở kháng tải của mạng hai cửa cuối cùng bằng trở kháng sóng thứ cấp của nó.

- Trở kháng trong của nguồn bằng trở kháng sóng sơ cấp của mạng hai cửa đầu tiên.

- Trở kháng sóng sơ cấp các mạng hai cửa thứ $k+1$ bằng trở kháng sóng thứ cấp của mạng hai cửa thứ k với $k = 1, 2, \dots, n-1$ (có nghĩa là các mạng hai cửa được phối hợp sóng với nhau).

Gọi: Z_{c1k}, Z_{c2k} là trở kháng sóng sơ cấp và thứ cấp của mạng hai cửa thứ k , g_k là hệ số truyền đạt sóng trung bình, ρ_k là tỉ số trở kháng và ρ_{ek} là tỉ số năng lượng của mạng hai cửa thứ k .

• Ta xét các trở kháng vào nhìn từ phía sơ cấp của các mạng hai cửa. Xét mạng hai cửa cuối cùng ta có:

$$Z_{v1n} = Z_{c1n}$$

$$\text{Theo giả thiết } Z_{c1n} = Z_{c2n-1} \Rightarrow Z_{v1n} = Z_{c2n-1}$$

Đối với mạng hai cửa thứ $n-1$ thì Z_{v1n} là tải, do đó trở kháng vào sơ cấp của nó là: $Z_{v1n-1} = Z_{c1n-1}$. Theo giả thiết $Z_{c1n-1} = Z_{c2n-2} \Rightarrow Z_{v1n-1} = Z_{c2n-2}$. Đối với mạng hai cửa thứ $n-2$ thì Z_{v1n-1} là tải, do đó trở kháng vào sơ cấp

của nó là $Z_{v1n-2} = Z_{c1n-2}$.

Tiếp tục như thế cho đến mạng hai cửa đầu tiên ta sẽ được trở kháng vào sơ cấp của mạng hai cửa thứ nhất là: $Z_{v11} = Z_{c11}$. Đó cũng chính là trở kháng vào sơ cấp của toàn bộ hệ thống:

$$Z_{v1} = Z_{v11} = Z_{c11} \quad (5.161)$$

• Nếu xét các trở kháng vào nhìn từ phía thứ cấp của các mạng hai cửa nhưng theo chiều ngược lại tức là bắt đầu với mạng hai cửa thứ nhất, thứ hai, ... cho đến mạng hai cửa thứ n , và lập luận tương tự như trên ta sẽ được trở kháng vào thứ cấp của toàn bộ hệ thống là:

$$Z_{v2} = Z_{v2n} = \frac{\dot{U}_{2n}}{-\dot{I}_{2n}} \Big|_{\dot{E}=0} = Z_{c2n} \quad (5.162)$$

• Áp dụng quan hệ (5.140a) cho mạng hai cửa thứ n ta được:

$$\frac{\dot{U}_{1n}}{\dot{U}_{2n}} = e^{g_n} \frac{\rho_{en}}{\rho_n} \quad (5.163)$$

Vì có sự phối hợp trở kháng giữa các mạng hai cửa nên có thể áp dụng quan hệ (5.140a) cho mạng hai cửa thứ $n-1$:

$$\frac{\dot{U}_{1n-1}}{\dot{U}_{2n-1}} = e^{g_{n-1}} \frac{\rho_{en-1}}{\rho_{n-1}} \quad (5.164)$$

Tại chỗ nối của mạng hai cửa thứ $n-1$ với mạng hai cửa thứ n ta có:

$$\dot{U}_{1n} = \dot{U}_{2n-1}$$

Do đó từ (5.163) và (5.164) suy ra:

$$\frac{\dot{U}_{1n-1}}{\dot{U}_{2n}} = e^{g_{n-1}+g_n} \frac{\rho_{en-1}\rho_{en}}{\rho_{n-1}\rho_n} \quad (5.165)$$

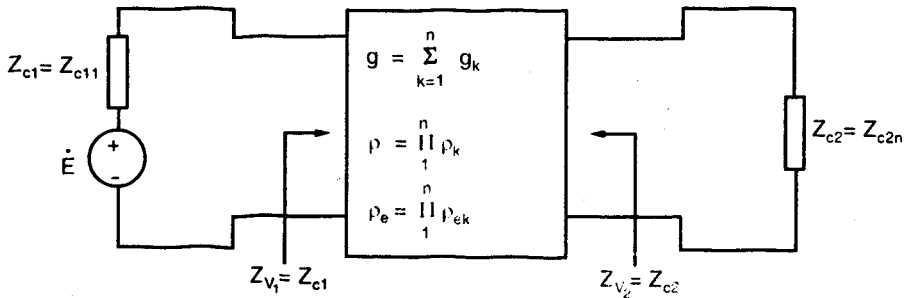
Tiến hành tương tự cho tất cả các mạng hai cửa ta được kết quả sau:

$$\frac{\dot{U}_{11}}{\dot{U}_{2n}} = e^{(g_1+g_2+\dots+g_n)} \frac{\rho_{e1}\rho_{e2}\dots\rho_{en}}{\rho_1\rho_2\dots\rho_n} \quad (5.166)$$

(Chú ý ở đây ký hiệu g_1, g_2 là hệ số truyền đạt sóng trung bình của mạng hai cửa thứ nhất và thứ hai, chứ không phải là hệ số truyền đạt sơ cấp và thứ cấp như đã ký hiệu trong mục 5.6.2).

Các biểu thức (5.161), (5.162) và (5.166) cho phép thay n mạng hai cửa nối dây chuyên, phối hợp sóng với nhau làm việc như trên H.5.72 bởi một mạng hai cửa tương đương làm việc như trên H.5.73. Mạng hai cửa tương đương này có trở kháng sóng sơ cấp bằng Z_{c11} , trở kháng sóng thứ cấp bằng Z_{c2n} , hệ số truyền đạt sóng trung bình $g = g_1 + g_2 + \dots + g_n$, tỉ số trở

kháng $\rho = \rho_1 \cdot \rho_2 \dots \rho_n$, tỉ số năng lượng $\rho_e = \rho_{e1} \rho_{e2} \dots \rho_{en}$.



Hình 5.73

Để dàng chứng minh được rằng, đối với công suất biểu kiến phía sơ cấp và thứ cấp có quan hệ:

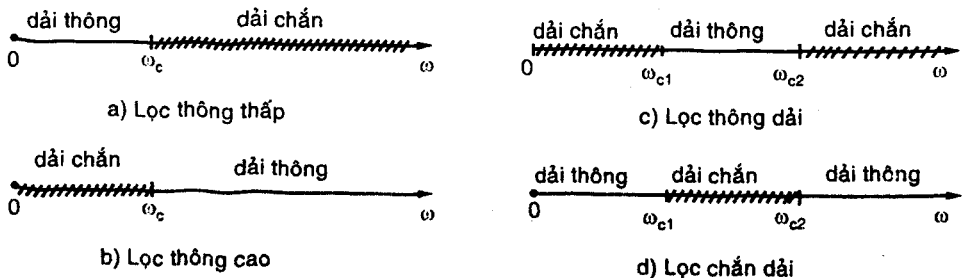
$$\frac{|S_1|}{|S_2|} = e^{2a}$$

với

$$a = \text{Re}(g) = \text{Re} \sum_{k=1}^n g_k \quad (5.167)$$

5.7 LỌC ĐIỆN

Mạng hai cửa và lý thuyết mạng hai cửa được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực điện tử và viễn thông. Một trong những ví dụ về ứng dụng của nó là mạch lọc. Mạch lọc là các mạng hai cửa đặc biệt có tính lựa chọn tần số, nó cho truyền qua một cách dễ dàng các tín hiệu dòng áp thuộc dải tần số nào đó gọi là dải thông và làm tắt (suy giảm) các tín hiệu thuộc dải tần số khác gọi là dải chắn. Một mạch lọc lý tưởng có hệ số suy giảm $a = 0$ trong dải thông, còn trong dải chắn hệ số suy giảm $a = \infty$.



Hình 5.74

Theo phạm vi tần số, mạch lọc có thể được chia thành các loại chính:

- Lọc thông thấp (thấp qua): dải thông là $0 \leq \omega \leq \omega_c$, dải chắn $\omega > \omega_c$.
- Lọc thông cao (cao qua): dải thông là $\omega \geq \omega_c$, dải chắn $0 \leq \omega \leq \omega_c$.

- Lọc thông dải (dải qua): dải thông là $\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2}$, dải chắn là $0 \leq \omega < \omega_{c1}$ và $\omega > \omega_{c2}$.

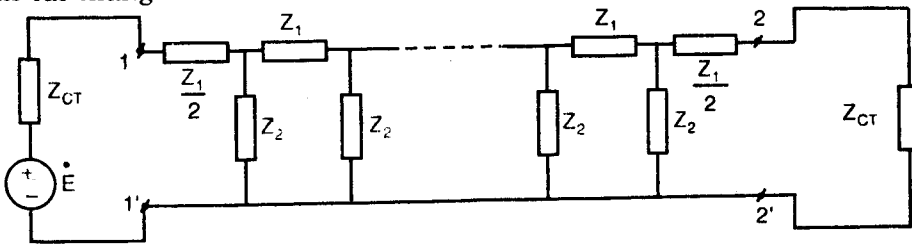
- Lọc chắn dải: dải thông là $0 \leq \omega \leq \omega_{c1}$ và $\omega \geq \omega_{c2}$, dải chắn là $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$.

Các tần số ω_c , ω_{c1} , ω_{c2} gọi là các tần số cắt.

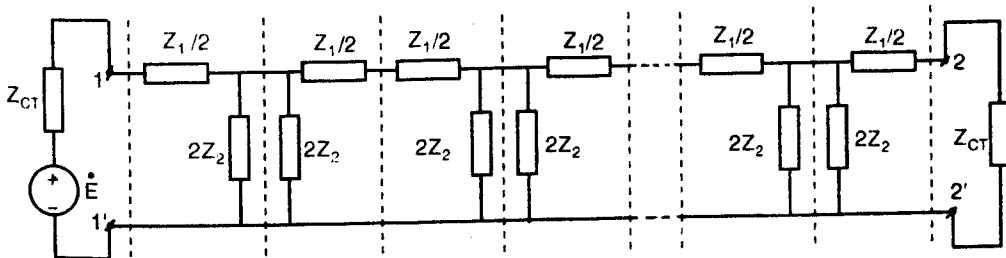
Theo các phần tử dùng để tạo thành mạch lọc, ta có các loại chính:

- Lọc thụ động LC: chỉ gồm các phần tử L, C.
- Lọc thụ động RC: chỉ gồm các phần tử R và C.
- Lọc tích cực RC: gồm các phần tử R, C và các phần tử tích cực như transistor, op-amp...
- Lọc áp điện (thạch anh) và v.v..

Trong mục này chủ yếu xét đến các mạch lọc thụ động LC có cấu trúc hình cái thang như H.5.75.



Hình 5.75



Hình 5.76: Nối dây chuyển các mắt xích nguyên tố

Giả thiết rằng các mạng hai cửa H.5.75 làm việc trong điều kiện phối hợp sóng cả hai phía. Cấu trúc hình thang trên H.5.75 có thể được biểu diễn dưới dạng nối dây chuyển các mắt xích hình T và Γ được phối hợp sóng với nhau (H.5.76).

5.7.1 Điều kiện để trở thành mạch lọc

Các thông số sóng của các mắt xích nguyên tố hình T, Γ đã được xét trong ví dụ ở mục 5.6.

Theo mục 5.6.3 ta có hệ số suy giảm và hệ số dịch pha của toàn bộ

mạch lọc bằng tổng hệ số suy giảm và dịch pha của các mắt xích nguyên tố.

Mạch lọc hình T hoặc π gồm hai mắt xích nguyên tố T, Γ ghép lại thường được gọi là mắt lọc cơ bản, và các mắt xích nguyên tố hình T và Γ được gọi là nửa mắt lọc. Gọi $g = a + jb$ là hệ số truyền đạt sóng của mắt lọc hình T hoặc π , theo (5.160) ta có:

$$g_T = g_\Gamma = \frac{g}{2}$$

Từ (5.152) suy ra:

$$\operatorname{sh} \frac{g}{2} = \operatorname{sh} \left(\frac{a}{2} + j \frac{b}{2} \right) = \operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + j \operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} \quad (5.168)$$

$$\operatorname{ch} \frac{g}{2} = \operatorname{ch} \left(\frac{a}{2} + j \frac{b}{2} \right) = \operatorname{ch} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + j \operatorname{sh} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} \quad (5.169)$$

Chú ý mạch lọc ta đang xét dùng các phần tử điện kháng nên $Z_1 = jX_1$ và $Z_2 = jX_2$.

Xét hai trường hợp khi (X_1 và X_2) cùng dấu và (X_1 và X_2) trái dấu:

- Trường hợp X_1 và X_2 cùng dấu: khi đó $\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}$ và $\sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}$ là các số

thực nên từ (5.168) và (5.169) với chú ý $\operatorname{ch} \frac{a}{2}$ luôn ≥ 1 có thể suy ra:

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{X_1}{4X_2}} \quad \text{và} \quad \operatorname{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{1 + \frac{X_1}{4X_2}} \quad (5.170a)$$

$$\sin \frac{b}{2} = 0 \quad (5.170b)$$

Vậy $a(\omega)$ luôn > 0 (hoặc luôn < 0) ở mọi tần số: mạch không có tính chất lọc.

- Trường hợp X_1 và X_2 trái dấu: $\frac{X_1}{X_2} < 0$

Khi đó:

$$\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} = \pm j \sqrt{\frac{-X_1}{4X_2}} \quad \text{là số thuần ảo}$$

$$\sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} = \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{X_1}{4X_2}} & \text{là số thực nếu } 0 \geq \frac{X_1}{X_2} \geq -4 \\ \pm j \sqrt{-\left(1 + \frac{X_1}{4X_2}\right)} & \text{là số thuần ảo nếu } \frac{X_1}{X_2} < -4 \end{cases}$$

ta chia ra hai dải tần số để xét:

- Dải tần số ứng với $0 \geq \frac{X_1}{X_2} \geq -4$: từ (5.168) và (5.169) suy ra:

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} = 0 \quad (5.171a)$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{-X_1}{4X_2}} \quad (5.171b)$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} = \sqrt{1 + \frac{X_1}{4X_2}} \quad (5.171c)$$

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = 0 \quad (5.171d)$$

Từ các biểu thức (5.171a, b, c, d) có thể suy ra: $a = 0$ (5.172)

$$\sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{-X_1}{4X_2}} \quad (5.173)$$

Vậy trong dải tần số này $a = 0$ nghĩa là tín hiệu khi truyền qua không bị tắt: đây là dải thông.

Vì trong dải tần này $Z_1 Z_2 = -X_1 X_2 > 0$ và $1 + \frac{Z_1}{4Z_2} > 0$ nên từ (5.159)

suy ra các trở kháng sóng là các số thực.

- Dải tần số ứng với $-4 > \frac{X_1}{X_2}$: từ (5.168) và (5.169) suy ra:

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} = 0 \quad (5.174a)$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{-X_1}{4X_2}} \quad (5.174b)$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} = 0 \quad (5.174c)$$

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{-\left(1 + \frac{X_1}{4X_2}\right)} \quad (5.174d)$$

Từ các biểu thức (5.174a, b, c, d) suy ra:

$$\cos \frac{b}{2} = 0, \quad \sin \frac{b}{2} = \pm 1 \quad (5.175)$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-X_1}{4X_2}}, \quad \operatorname{sh} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{-\left(1 + \frac{X_1}{4X_2}\right)} \quad (5.176)$$

Vì trong dải tần này $Z_1 Z_2 > 0$ và $1 + \frac{Z_1}{4Z_2} < 0$ nên từ (5.159) suy ra các trở kháng sóng là thuần cảm hoặc dung. Khi phối hợp trở kháng nếu chọn dấu của trở kháng thích hợp thì $a > 0$, tín hiệu khi truyền qua bị tắt: dải chắn.

Tóm lại điều kiện để mạch H.5.75 là mạch lọc là X_1 và X_2 phải khác dấu, khi đó dải thông ứng với $0 \geq \frac{X_1}{X_2} \geq -4$ (các trở kháng sóng là số thực tức thuần trở) còn dải chắn ứng với $\frac{X_1}{X_2} < -4$ (các trở kháng sóng là thuần ảo tức thuần cảm hoặc thuần dung). Các công thức (5.172), (5.173), (5.175), (5.176) mô tả sự suy giảm và dịch pha trong dải thông và dải chắn của mạch lọc có cấu hình T hoặc π được cấu tạo từ các mắt xích nguyên tố hình T và Γ . Nếu bộ lọc bao gồm n mắt xích nguyên tố khi đó suy giảm tương đương và dịch pha tương đương sẽ bằng:

$$a_{td} = n \frac{a}{2} \quad (5.177)$$

$$b_{td} = n \cdot \frac{b}{2}$$

Trong phần sau ta sẽ xét hai loại mạch lọc thụ động LC hình thang là:

- Lọc loại k
- Lọc loại m

5.7.2 Lọc loại k

Mạch lọc hình thang (H.5.75) có tích các trở kháng:

$$Z_1 Z_2 = k^2 > 0 \quad (5.178)$$

trong đó k là hằng số dương, gọi là mạch lọc loại k.

Để dễ dàng nhận thấy rằng việc thỏa mãn điều kiện (5.178) chứng tỏ biểu thức sau đây cũng thỏa:

$$\frac{1}{2} Z_1 \cdot 2Z_2 = Z_{CT} \cdot Z_{C\pi} = -X_1 X_2 = |X_1| |X_2| = k^2 \quad (5.179)$$

$$\frac{X_1}{X_2} = -\frac{k^2}{X_2^2} = -\frac{X_1^2}{k^2} \text{ nên điều kiện dải thông } 0 \geq \frac{X_1}{X_2} \geq -4 \text{ tương đương với:}$$

$$0 \leq \frac{k}{2|X_2|} \leq 1 \quad (5.180a)$$

$$\text{hoặc} \quad 0 \leq \frac{|X_1|}{2k} \leq 1 \quad (5.180b)$$

Còn điều kiện dải chắn $\frac{X_1}{X_2} < -4$ tương đương với:

$$\frac{k}{2|X_2|} > 1 \quad (5.181a)$$

hoặc
$$\frac{|X_1|}{2k} > 1 \quad (5.181b)$$

Cũng thay $\frac{X_1}{X_2} = -\frac{k^2}{X_2^2} = -\frac{X_1^2}{k^2}$ vào (5.173), (5.176) ta được:

- Trong dải thông:

$$a = 0; \sin \frac{b}{2} = \pm \frac{k}{2|X_2|} = \pm \frac{|X_1|}{2k} \quad (5.182)$$

Có thể chứng minh b cùng dấu với X_1 và ngược dấu với X_2 .

- Trong dải chắn:

$$\operatorname{cha} \frac{a}{2} = \frac{k}{2|X_2|} = \frac{|X_1|}{2k}; \quad b = \pm \pi \quad (5.183)$$

Các trở kháng sóng theo (5.159) là:

$$Z_{c1\Gamma} = Z_{c2\Gamma} = Z_{c\pi} = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{\sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(\frac{|X_1|}{2k}\right)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{2|X_2|}\right)^2}} \quad (5.184)$$

$$Z_{c2\Gamma} = Z_{c1\Gamma} = Z_{c\pi} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)} = k \sqrt{1 - \left(\frac{|X_1|}{2k}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{k}{2|X_2|}\right)^2} \quad (5.185)$$

Từ (5.180a, b) và (5.181a, b) ta thấy trong dải thông các trở kháng là số thực còn trong dải chắn là thuần ảo.

Sau đây ta xét các mạch lọc loại k cụ thể.

1- Lọc thông thấp loại k

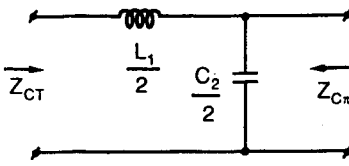
Các nửa mắt lọc hình Γ , π và các mắt lọc cơ bản hình T, π được cho trên H.5.77.

trong đó:

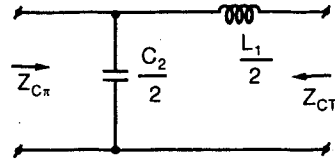
$$Z_1 = jX_1 = j\omega L_1 \quad (5.186)$$

$$Z_2 = jX_2 = \frac{1}{j\omega C_2}$$

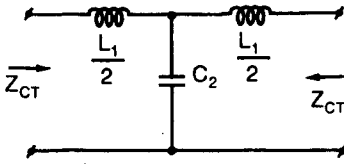
$$k = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \quad (5.187)$$



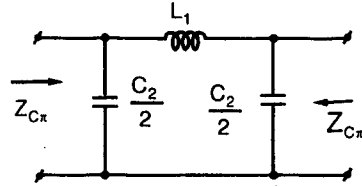
a) Hình T



b) Hình Γ



c) Hình T



d) Hình π

Hình 5.77: Nửa mắt lọc và các mắt lọc cơ bản của mạch lọc thông thấp loại k

Điều kiện dải thông theo (5.180a, b) là:

$$0 \leq \frac{\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}}{\frac{2}{\omega C_2}} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\omega \sqrt{L_1 C_2}}{2} \leq 1$$

Do đó dải thông là:

$$0 \leq \omega \leq \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}} \quad (5.188)$$

Vậy giới hạn dưới của dải thông là $\omega = 0$ (5.189a)

Giới hạn trên là $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}} = \frac{2k}{L_1} = \frac{2}{kC_2}$ (5.189b)

Các hệ số suy giảm và dịch pha, theo (5.182) và (5.183):

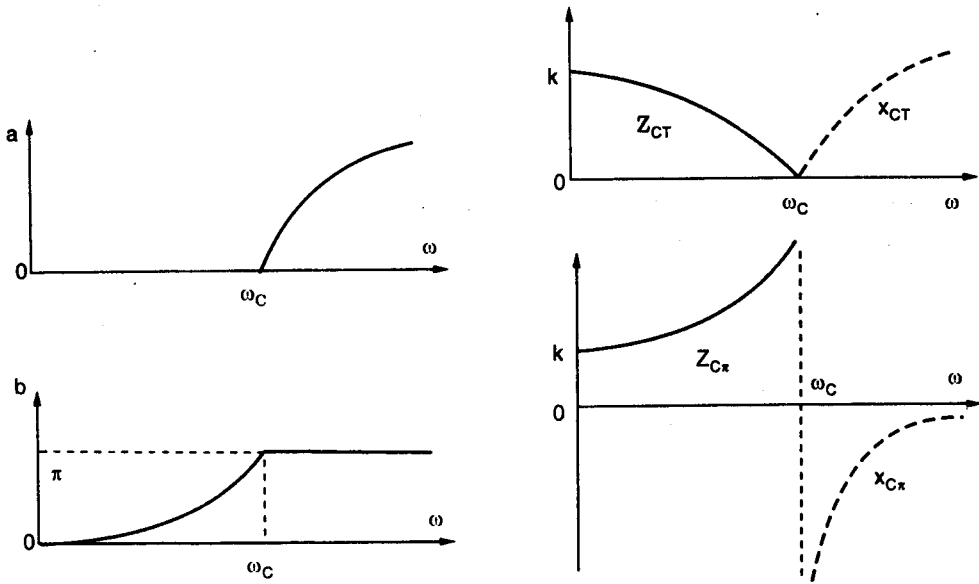
- Trong dải thông là: $a = 0$, $b = 2 \arcsin \frac{\omega}{\omega_c}$ (5.190)

- Trong dải chặn là: $a = 2 \operatorname{arch} \frac{\omega}{\omega_c}$, $b = \pi$ (5.191)

Các trở kháng sóng theo (5.184) và (5.185) là:

$$Z_{CT} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}, \quad Z_{C\pi} = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}} \quad (5.192)$$

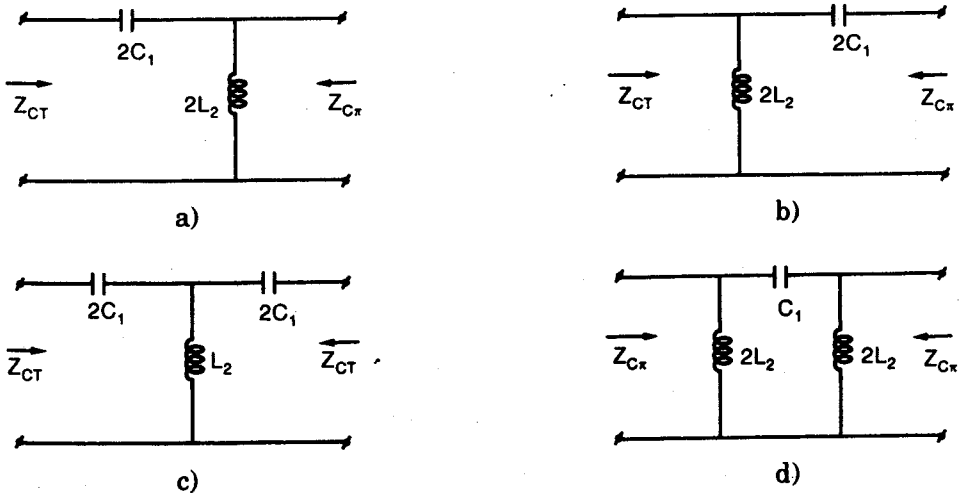
Đồ thị của a , b , Z_{CT} , $Z_{C\pi}$ theo tần số ω được vẽ trên H.5.78.



Hình 5.78: Các thông số sóng của mạch lọc thông thấp loại *k*

Trong giải thông Z_{CT} , $Z_{C\pi}$ là số thực; trong dải chắn $Z_{CT} = jX_{CT}$ và $Z_{C\pi} = jX_{C\pi}$.

2- Lọc thông cao loại *k*



Hình 5.79: Mạch lọc thông cao loại *k*

Trên H.5.79 giới thiệu các nửa mắt lọc và các mắt lọc cơ bản của mạch lọc thông cao loại *k*. Trong đó:

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1}, Z_2 = j\omega L_2 \quad (5.193)$$

$$k = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \quad (5.194)$$

Từ (5.180a, b) suy ra dải thông là:

$$\omega \geq \frac{1}{2\sqrt{L_2 C_1}} \quad (5.195)$$

Giới hạn dưới của dải thông là:

$$\omega_c = \frac{1}{2\sqrt{L_2 C_1}} = \frac{k}{2L_2} = \frac{1}{2kC_1} \quad (5.196)$$

Giới hạn trên là: $\omega = \infty$

Các hệ số suy giảm và dịch pha, theo (5.182), (5.183):

- Trong dải thông: $a = 0$

$$b = -2\arcsin \frac{\omega_c}{\omega} \quad (5.197)$$

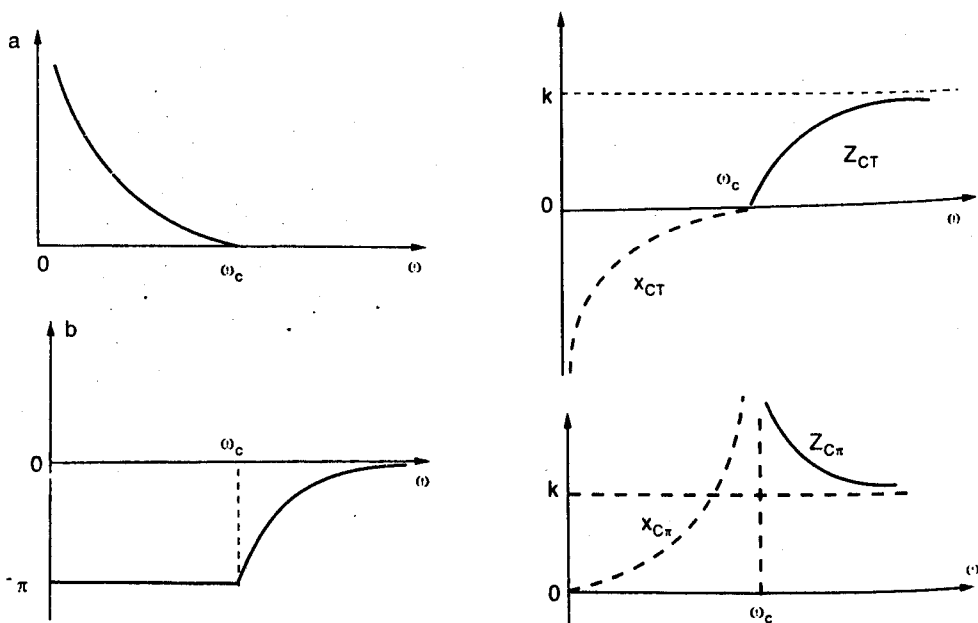
- Trong dải chắn: $a = 2\operatorname{arch} \frac{\omega_c}{\omega}$ (5.198a)

$$b = -\pi \quad (5.198b)$$

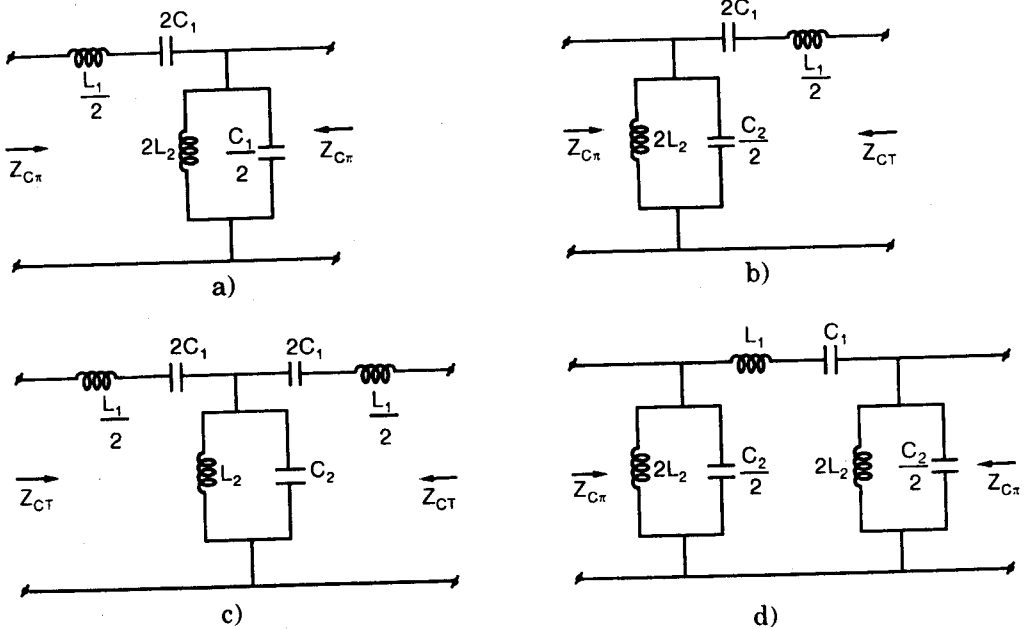
Các trở kháng sóng theo (5.184), (5.185) là:

$$Z_{CT} = k\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}; \quad Z_{C\pi} = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \quad (5.199)$$

Đồ thị của a , b , Z_{CT} , $Z_{C\pi}$ cho trên H.5.80.



Hình 5.80: Các thông số sóng của mạch lọc thông cao loại k



Hình 5.81: Mạch lọc thông dải loại k

3- Lọc thông dải loại k

Các cấu trúc cơ bản của mạch lọc thông dải cho trên H.5.81.

Trong đó:

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 \quad (5.200)$$

$$Z_1 = j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \quad (5.201)$$

$$Z_2 = \frac{1}{j \left(\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2} \right)} \quad (5.202)$$

$$k = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$$

Nhánh dọc và nhánh ngang có cộng hưởng áp hoặc dòng ở tần số:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad (5.203)$$

Từ (5.180a, b) suy ra dải thông là:

$$\omega_{C1} \leq \omega \leq \omega_{C2} \quad (5.204)$$

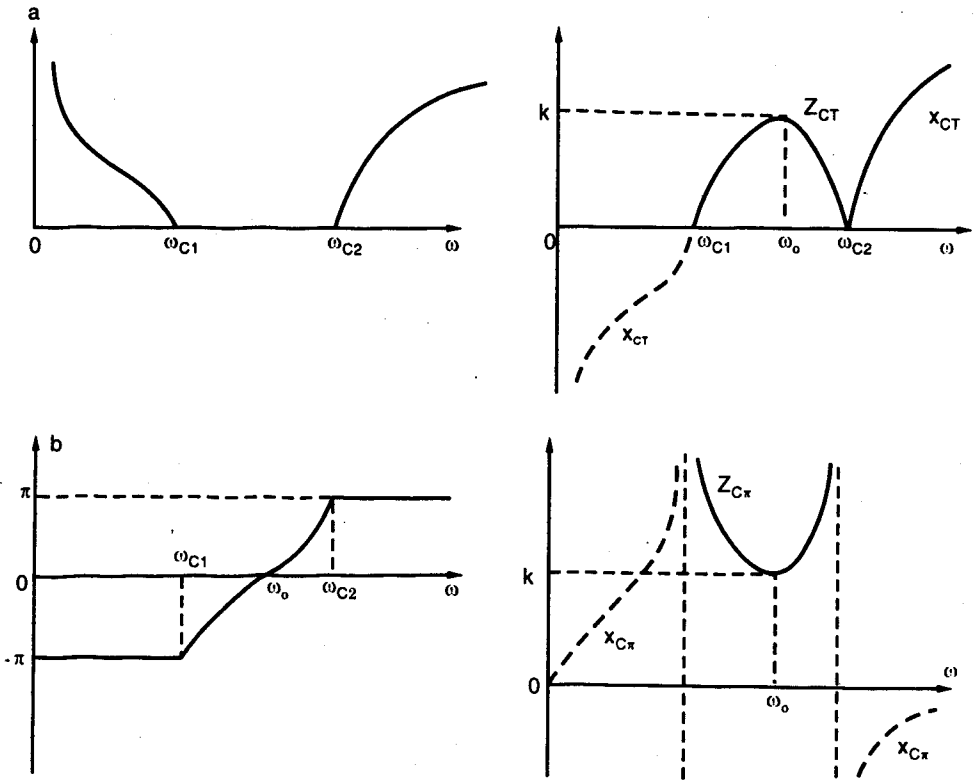
với

$$\omega_{C1} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} - \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \quad (5.205a)$$

là tần số giới hạn dưới của dải thông

và
$$\omega_{C2} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_2}} + \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \quad (5.205b)$$

là tần số giới hạn trên của dải thông.



Hình 5.82: Các thông số sóng của mạch lọc thông dải loại k

Ta có quan hệ:

$$\omega_{C1} \cdot \omega_{C2} = \omega_0^2 \quad (5.206)$$

Từ (5.182) và (5.183) suy ra các hệ số suy giảm và dịch pha:

- Trong dải thông: $a = 0$ (5.207)

và
$$b = 2 \arcsin \left[\frac{\omega + \omega_0}{2\omega} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\Omega} \right] \quad (5.208)$$

trong đó
$$\Delta\Omega = \frac{1}{2}(\omega_{C2} - \omega_{C1}) = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \quad (5.209)$$

- Trong dải chắn: $b = \pm\pi$ (5.210)

và
$$a = 2 \operatorname{arch} \left[\frac{\omega + \omega_0}{2\omega} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\Omega} \right] \quad (5.211)$$

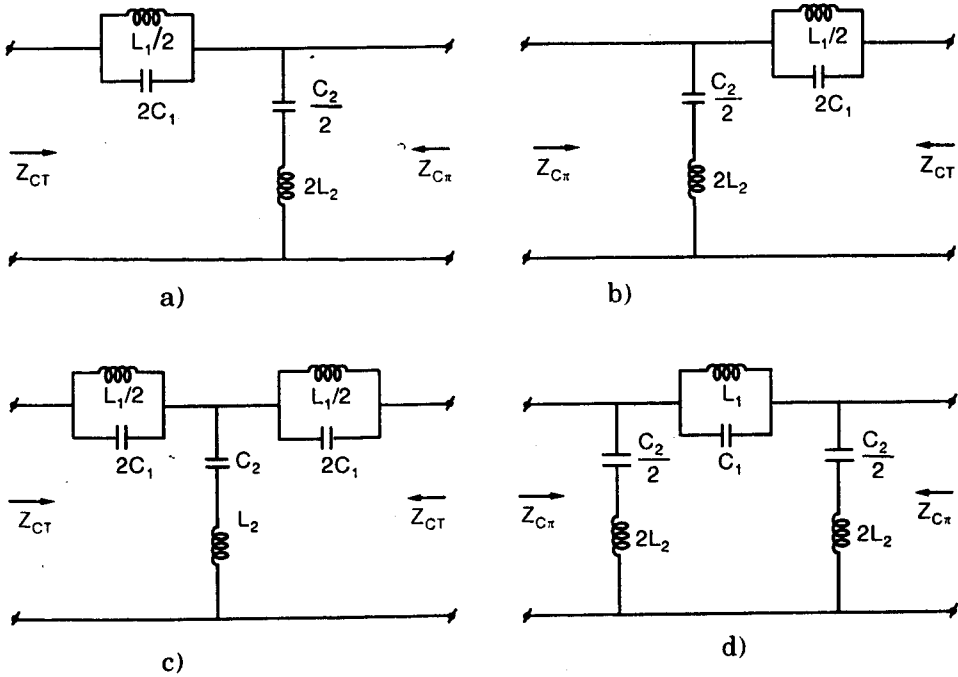
Với $\Delta\Omega$ cho bởi (5.209)

Từ (5.184) và (5.185) có thể suy ra các trở kháng sóng:

$$Z_{C\pi} = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega + \omega_0}{2\omega} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\Omega} \right)^2}} \quad (5.212)$$

$$Z_{CT} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\omega + \omega_0}{2\omega} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\Omega} \right)^2} \quad (5.213)$$

4- Lọc chắn dải loại k



Hình 5.83: Mạch lọc chắn dải loại k

Lọc chắn dải loại k được vẽ trên H.5.83 với:

$$L_1 C_1 = L_2 C_2$$

Nhánh dọc và nhánh ngang có cộng hưởng áp và dòng ở tần số:

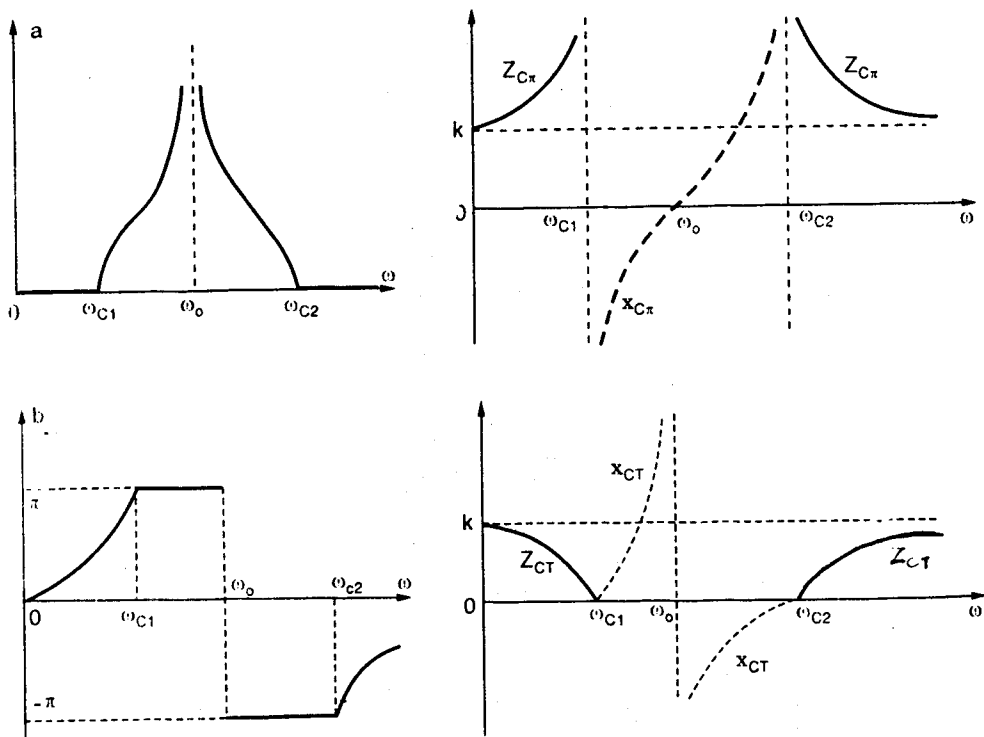
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

$$Z_1 = \frac{1}{j \left(\omega C_1 - \frac{1}{\omega L_1} \right)}; \quad Z_2 = j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)$$

Từ (5.180a, b) suy ra dải thông là:

$$0 \leq \omega \leq \omega_{C1} \text{ và } \omega \geq \omega_{C2} \quad (5.214)$$

dải chắn là $\omega_{C1} < \omega < \omega_{C2}$



Hình 5.84: Các thông số sóng của mạch lọc chắn dải loại k

Với:
$$\omega_{C1} = \left(\sqrt{\frac{1}{L_2 C_1} + \frac{16}{L_2 C_2}} - \frac{1}{\sqrt{L_2 C_1}} \right) \frac{1}{4} \quad (5.215)$$

$$\omega_{C2} = \left(\sqrt{\frac{1}{L_2 C_1} + \frac{16}{L_2 C_2}} + \frac{1}{\sqrt{L_2 C_1}} \right) \frac{1}{4} \quad (5.216)$$

Ta có quan hệ: $\omega_{C1} \cdot \omega_{C2} = \omega_0^2$

Đặt
$$\Delta\Omega = \frac{\omega_{C2} - \omega_{C1}}{2} = \frac{1}{4\sqrt{L_2 C_1}} \quad (5.217)$$

Từ (5.182) và (5.183) suy ra các hệ số suy giảm và dịch pha:

- Trong dải thông: $a = 0$

và
$$b = -2\arcsin\left(\frac{2\omega}{\omega + \omega_0} \cdot \frac{\Delta\Omega}{\omega - \omega_0}\right) \quad (5.218)$$

- Trong dải chắn: $b = \pm\pi$

và
$$a = 2\operatorname{arch}\left(\frac{2\omega}{\omega + \omega_0} \cdot \frac{\Delta\Omega}{\omega - \omega_0}\right) \quad (5.219)$$

Từ (5.184) và (5.185) suy ra các trở kháng sóng:

$$Z_{C\pi} = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\omega}{\omega + \omega_0} \cdot \frac{\Delta\Omega}{\omega - \omega_0} \right)^2}} \quad (5.220)$$

$$Z_{CT} = k \sqrt{1 - \left(\frac{2\omega}{\omega + \omega_0} \cdot \frac{\Delta\Omega}{\omega - \omega_0} \right)^2} \quad (5.221)$$

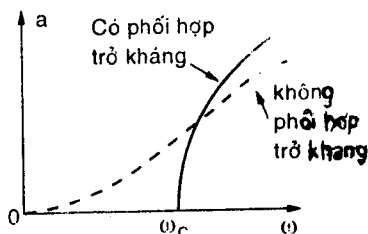
Kết luận: Từ việc phân tích bốn loại mạch lọc k trên cho thấy rằng:

a) Trong dải thông trở kháng sóng là thực và là hàm của tần số, ngoài dải thông là ảo và cũng là hàm của tần số. Để đảm bảo phối hợp sóng (phối hợp trở kháng) trong dải thông cả về hai phía sơ cấp và thứ cấp, các trở kháng tải và trở kháng trong của nguồn cung cấp cũng phải thực và bằng các trở kháng sóng Z_{CT} và $Z_{C\pi}$ tùy theo dạng các nửa mặt lọc ở hai đầu mạch lọc.

b) Từ đồ thị các thông số sóng theo tần số của các loại lọc trên cho thấy nhược điểm cơ bản của mạch lọc loại k là:

- Trở kháng sóng thay đổi nhanh trong dải thông làm cho việc phối hợp trở kháng giữa bộ lọc với nguồn và với tải khó thực hiện. Nếu không phối hợp trở kháng tốt thì đặc tính tần $a(\omega)$ của hệ số suy giảm sẽ kém chất lượng (ví dụ như H.5.85).

- Sự tăng của hệ số suy giảm a trong dải chắn quá chậm.



Hình 5.85: Hệ số suy giảm $a(\omega)$ của lọc thông thấp loại k khi có và không có phối hợp trở kháng

5.7.3 Lọc loại m

Những nguyên nhân dẫn đến phải xét mạch lọc loại m là:

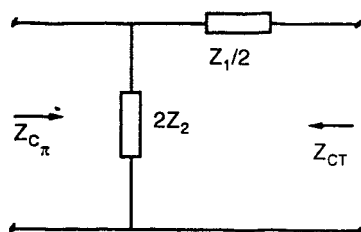
- Cần có trở kháng sóng không thay đổi trong dải thông.
- Tăng tốc độ tăng của hệ số suy giảm a trong dải chắn.

Để thực hiện các mục tiêu trên, cần phải thay đổi các thành phần của nửa mặt lọc cơ bản loại k , để sao cho với nửa mặt lọc đã bị thay đổi ta có được trở kháng Z_{CT} hoặc $Z_{C\pi}$ không bị thay đổi. Mặt lọc bị thay đổi như vậy được gọi là lọc loại m . Sự bằng nhau giữa trở kháng sóng của mặt lọc loại k và lọc loại m đảm bảo hai loại mạch lọc có cùng dải thông cũng như cho phép nối dây chuyển giữa chúng với nhau.

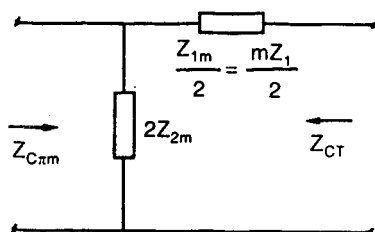
1- Cách tạo mạch lọc loại m từ mạch lọc loại k

Sau đây là hai cách để tạo mạch lọc loại m từ mạch lọc loại k :

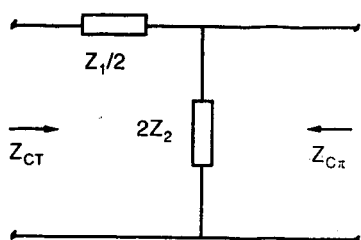
• Tạo mạch lọc loại m nối tiếp:



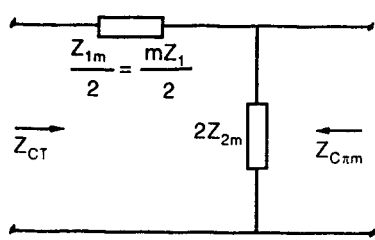
a) Lọc Γ loại k



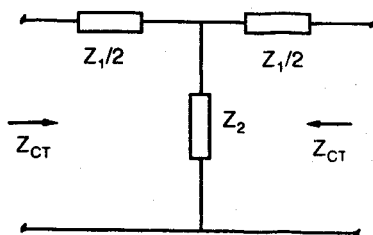
b) Lọc Γ loại m nối tiếp



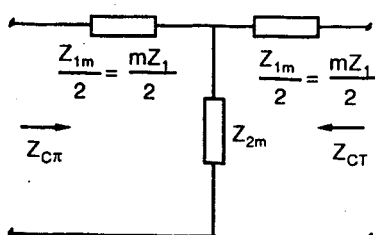
c) Lọc T loại k



d) Lọc T loại m nối tiếp



e) Lọc T loại k



f) Lọc T loại m

Hình 5.86: Tạo mạch lọc loại m nối tiếp

Xét H.5.86

Chọn $Z_{1m} = mZ_1$

(5.222)

với $0 \leq m \leq 1$

Ta tìm Z_{2m} để cho $Z_{CTm} = Z_{CT}$

Ta có:
$$Z_{CT} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)}$$

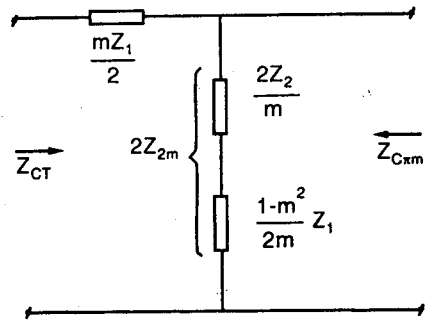
$$Z_{CTm} = \sqrt{Z_{1m} Z_{2m} \left(1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} \right)} = \sqrt{mZ_1 Z_{2m} \left(1 + \frac{mZ_1}{4Z_{2m}} \right)}$$

$$Z_{CT} = Z_{CTm} \Rightarrow mZ_1 Z_{2m} \left(1 + \frac{mZ_1}{4Z_{2m}} \right) = Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)$$

$$\Rightarrow Z_{2m} = \frac{Z_2}{m} + \frac{Z_1(1-m^2)}{4m} \quad (5.223)$$

Vậy Z_{2m} gồm hai trở kháng $\frac{Z_2}{m}$ và $\frac{Z_1(1-m^2)}{4m}$ nối tiếp, vì vậy ta gọi là mạch lọc loại m nối tiếp.

Ứng với một mạch lọc thông thấp (thông cao, thông dải hoặc chắn dải) loại k ta sẽ có một mạch lọc thông thấp (thông cao, thông dải hoặc chắn dải) loại m nối tiếp tương ứng.



Hình 5.87: Lọc loại m nối tiếp

Ví dụ với lọc thông thấp loại k thì:

$$Z_1 = j\omega L_1 \quad \Leftrightarrow \text{điện cảm } L_1$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2} \quad \Leftrightarrow \text{điện dung } C_2$$

$$\Rightarrow Z_{1m} = mZ_1 = j\omega m L_1 \Leftrightarrow \text{điện cảm } mL_1$$

$$Z_{2m} = \frac{Z_2}{m} + \frac{Z_1(1-m^2)}{4m}$$

$$= \frac{1}{j\omega m C_2} + j\omega \frac{1-m^2}{4m} L_1$$

$$\Leftrightarrow \text{điện dung } mC_2 \text{ mắc nối tiếp với điện cảm } \frac{1-m^2}{4m} L_1.$$

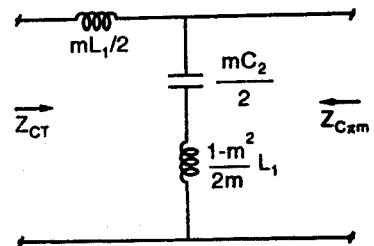
H.5.88 là lọc thông thấp loại m nối tiếp hình 7.

Trở kháng sóng $Z_{Cxm} \neq Z_{C\pi}$ và là:

$$Z_{Cxm} = \sqrt{\frac{Z_{1m} Z_{2m}}{1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}}}$$

thay $Z_{1m} = mZ_1$ và Z_{2m} bởi (5.223) ta được:

$$Z_{Cxm} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} \left[1 + \frac{(1-m^2)Z_1}{4Z_2} \right]}$$



Hình 5.88: Lọc thông thấp hình 7 loại m nối tiếp

$$\Rightarrow Z_{C\pi m} = Z_{C\pi} \left[1 + \frac{(1-m^2)Z_1}{4Z_2} \right] \quad (5.224)$$

• Tạo mạch lọc loại m song song:

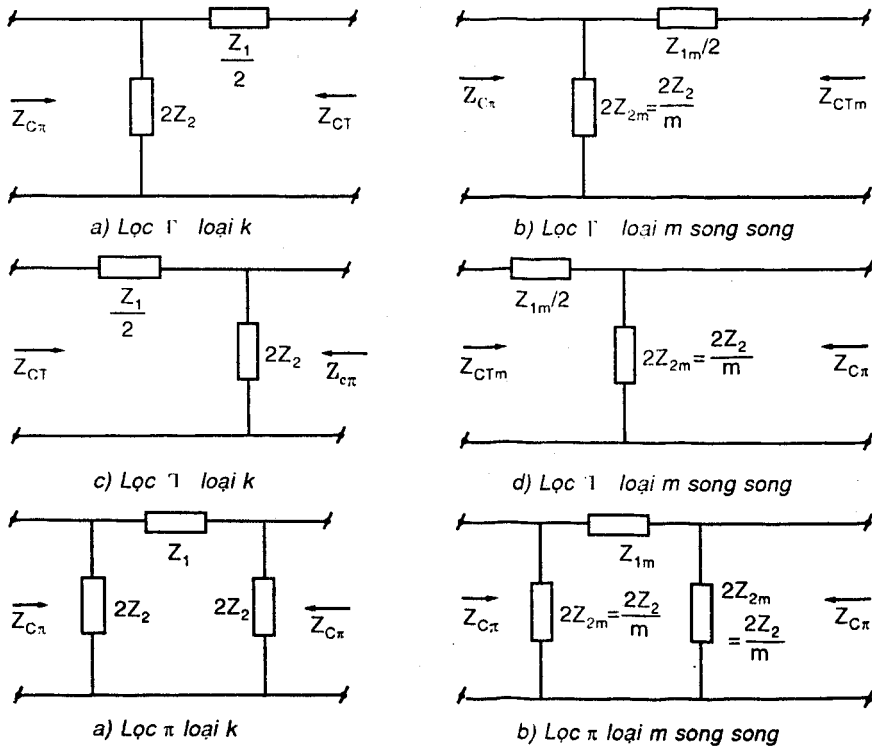
Xét H.5.89

$$\text{Chọn } Z_{2m} = \frac{Z_2}{m} \text{ với } 0 \leq m \leq 1 \quad (5.225)$$

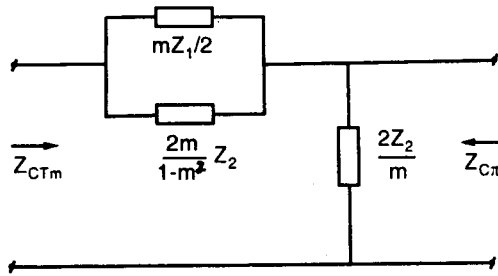
Ta tính Z_{1m} để cho $Z_{C\pi m} = Z_{C\pi}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } Z_{C\pi} &= \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + Z_1/4Z_2}} = Z_{C\pi m} = \sqrt{\frac{Z_{1m} Z_{2m}}{1 + Z_{1m}/4Z_{2m}}} \\ \Rightarrow \frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} &= \frac{Z_{1m} Z_{2m}}{1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}} \Rightarrow \frac{1}{Z_{1m}} = \frac{1}{mZ_1} + \frac{1}{\frac{4m}{1-m^2} Z_2} \end{aligned} \quad (5.226)$$

Ta thấy Z_{1m} gồm hai trở kháng mZ_1 và $\frac{4m}{1-m^2} Z_2$ mắc song song nên ta gọi là mạch lọc loại m song song.



Hình 5.89: Tạo mạch lọc loại m song song



Hình 5.90: Lọc T loại m song song

Trở kháng sóng $Z_{CTm} \neq Z_{CT}$ và là:

$$Z_{CTm} = \sqrt{Z_{1m} Z_{2m} \left(1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} \right)}$$

thay $Z_{2m} = \frac{Z_2}{m}$ và Z_{1m} bởi (5.226) ta được:

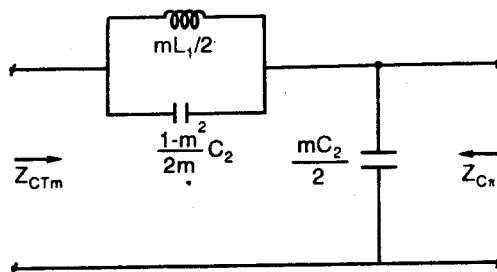
$$Z_{CTm} = Z_{CT} \cdot \frac{1}{\left[1 + \frac{(1-m^2)Z_1}{4Z_2} \right]} \quad (5.227)$$

Với một mạch lọc thông thấp (thông cao, thông dải hoặc chắn dải) loại k ta sẽ có một mạch lọc thông thấp (thông cao, thông dải hoặc chắn dải) loại m song song tương ứng.

Ví dụ với lọc thông thấp loại k thì $Z_1 = j\omega L_1$, $Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2}$

Suy ra: $Z_{2m} = \frac{Z_2}{m} = \frac{1}{j\omega m C_2} \Leftrightarrow$ điện dung mC_2

$$\frac{1}{Z_{1m}} = \frac{1}{mZ_1} + \frac{1}{\frac{4m}{1-m^2}Z_2} = \frac{1}{j\omega m L_1} + \frac{1}{j\omega \frac{1-m^2}{4m} C_2}$$



Hình 5.91: Lọc thông thấp hình T loại m song song

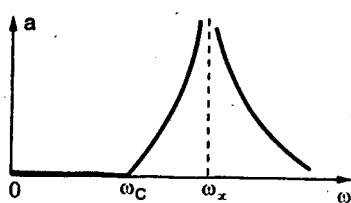
$\Leftrightarrow$ điện cảm mL_1 mắc song song với điện dung $\frac{1-m^2}{4m} C_2$.

Hình 5.91 trình bày lọc thông thấp loại m song song hình T.

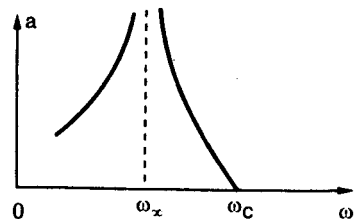
2- Tính chất của mạch lọc loại m

• Nếu dùng biểu thức (5.176) để khảo sát hệ số suy giảm a trong dải chắn của mạch lọc loại m, ta sẽ thấy đặc tính tần $a(\omega)$ có dạng định tính như trong các H.5.92a, b, c, d.

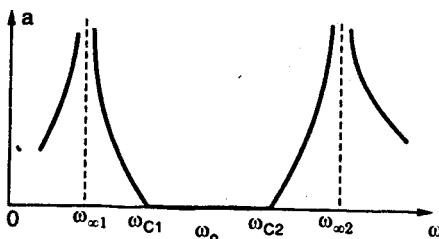
Từ H.5.92 có nhận xét ở mạch lọc loại m trong dải chắn xuất hiện các tần số mà ở đó hệ số suy giảm a lớn vô cùng. Các tần số này có tên gọi là tần số suy giảm vô cùng ω_∞ . Tần số này phụ thuộc vào giá trị của hệ số m. Ví dụ H.5.93 trình bày sự thay đổi của ω_∞ theo vài giá trị của m đối với lọc thông thấp loại m. Như vậy ta thấy có thể làm cho đặc tuyến suy giảm $a(\omega)$ khi đi ra khỏi dải thông có độ dốc lớn tùy ý bằng cách chọn hệ số m thích hợp. Đây là một ưu điểm lớn của lọc loại m so với lọc loại k vì độ dốc của a của lọc loại k khi đi ra khỏi dải thông có giá trị hữu hạn và không lớn lắm. Tuy nhiên từ H.5.93 cũng thấy rằng khi tần số đi ra khỏi tần số suy giảm vô cùng vào sâu trong dải chắn thì a lại giảm xuống khá nhỏ. Đây là một nhược điểm lớn của lọc loại m so với lọc loại k vì trong lọc loại k tần số càng đi xa khỏi dải thông thì a càng lớn.



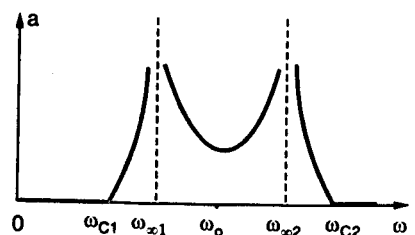
a) Lọc thông thấp loại m



b) Lọc thông cao loại m



c) Lọc thông dải loại m

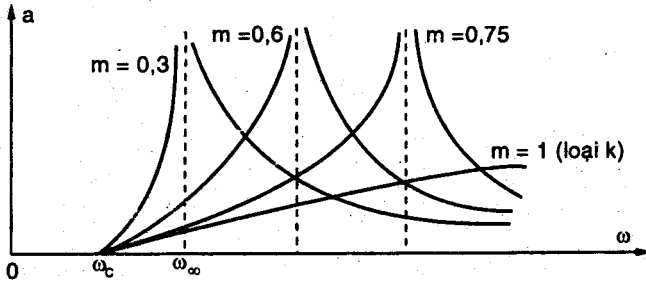


d) Lọc chắn dải loại m

Hình 5.92: Đặc tính tần $a(\omega)$ của lọc loại m

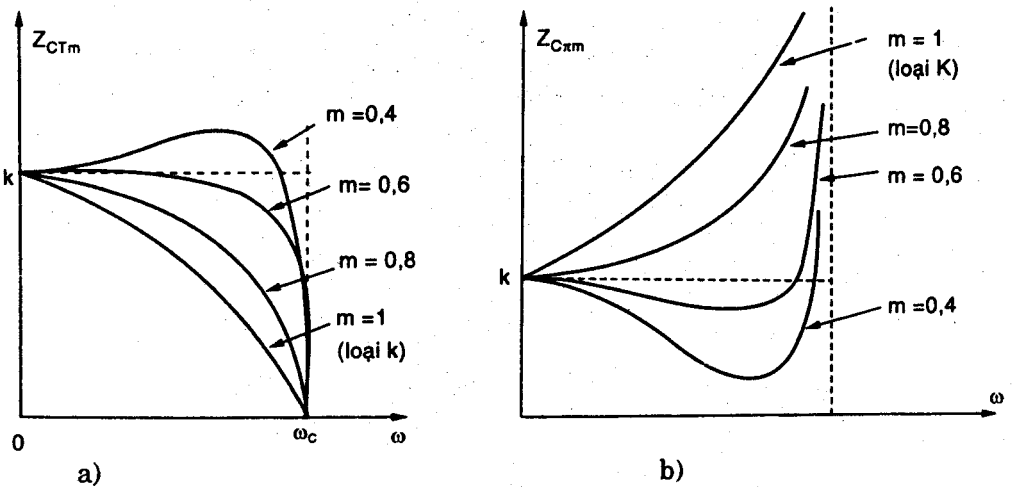
Sự tồn tại của các tần số suy giảm vô cùng ở mạch lọc loại m có thể được thấy bằng cách nhận xét rằng: khác với lọc loại k ở lọc loại m các nhánh Z_{1m} và Z_{2m} phức tạp hơn (ví dụ xem các H.5.88, H.5.91) và trong chúng có thể xảy ra hiện tượng cộng hưởng nối tiếp hoặc song song làm ngắn mạch $Z_{2m} = 0$ hoặc hở mạch $Z_{1m} = 0$ mà dẫn đến a vô cùng lớn (tín hiệu hoàn toàn bị chặn lại) ở một vài tần số nào đó.

hiệu hoàn toàn bị chặn lại) ở một vài tần số nào đó.



Hình 5.93

Từ (5.224) và (5.227) ta thấy rằng các trở kháng sóng Z_{CTm} và $Z_{C\pi m}$ phụ thuộc vào hệ số m . Điều đó chỉ ra khả năng nếu chọn m thích hợp có thể làm cho Z_{CTm} và $Z_{C\pi m}$ ít phụ thuộc vào tần số nhất, nhờ đó việc phối hợp trở kháng được thực hiện dễ dàng hơn.



Hình 5.94

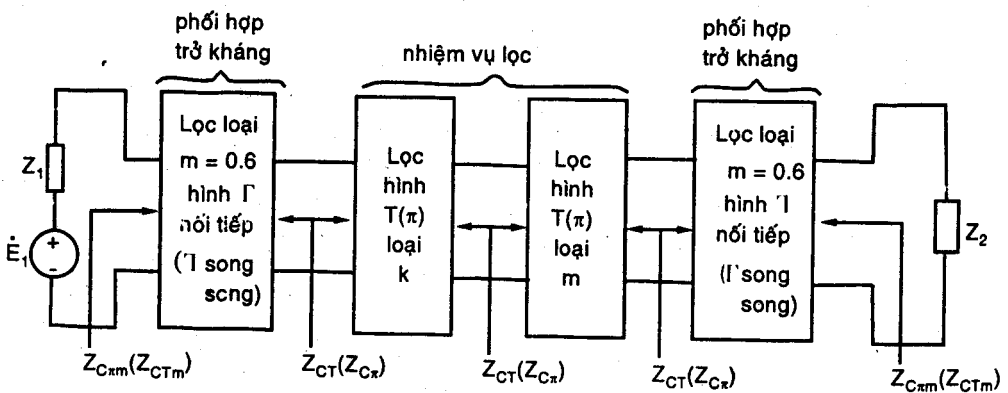
Ví dụ trên H.5.94a, b trình bày ảnh hưởng của m lên trở kháng sóng Z_{CTm} và $Z_{C\pi m}$ đối với mạch lọc thông thấp loại m . Ta thấy trở kháng sóng ít phụ thuộc tần số nhất trong dải thông nếu chọn $m \approx 0,6$. Như vậy có thể dùng các mắt lọc hình T hoặc Γ loại m nối tiếp hoặc song song để phối hợp trở kháng với nguồn và tải như trên H.5.95.

Trong H.5.95 nhiệm vụ lọc được đảm nhận bởi hai lọc hình T(π) loại k và loại m mà bổ sung ưu khuyết điểm cho nhau. Mắt lọc T(π) loại m để đảm bảo khi ra khỏi dải thông α tăng rất nhanh. Mắt lọc T(π) loại k để

đảm bảo khi đi sâu vào dải chắn a tăng lớn.

Nếu hai mắt lọc ở giữa là hình T, thì để phối hợp trở kháng với nguồn ta dùng nửa mắt lọc hình Γ loại m nối tiếp với $m = 0,6$ (xem H.5.86b) và $Z_1 = Z_{C_{xm}}$, còn để phối hợp trở kháng với tải Z_2 dùng nửa mắt lọc hình T loại m nối tiếp với $m = 0,6$ (xem H.5.86d) với $Z_2 = Z_{C_{xm}}$.

Nếu hai mắt lọc ở giữa là hình π , thì dùng nửa mắt lọc hình T loại $m = 0,6$ song song (H.5.89d) với $Z_1 = Z_{CTm}$ để phối hợp trở kháng với nguồn, và dùng nửa mắt lọc hình Γ loại $m = 0,6$ song song (H.5.89a) với $Z_2 = Z_{CTm}$ để phối hợp trở kháng với tải Z_2 .



Hình 5.95

Tài liệu tham khảo

1. DAVID E. JOHNSON - JOHNNY R. JOHNSON - JOHN L. HILBURN, *Electric Circuit Analysis*, Prentice Hall, 1989.
2. DAVID IRWIN J., *Basic Engineering Circuit Analysis*, Prentice Hall, 1996.
3. JOSEPH A. EDMINISTFR, *Schaum's Outline Of Theory And Problems Of Electric Circuit*, McGraw Hill, 1965.
4. LEON O. CHUA - CHARLES A. DESOER - ERNEST S. KUH, *Linear And Nonlinear Circuits*, McGraw Hill, 1987.
5. LEON O. CHUA - PEN - MIN LIN, *Computer - Aided Analysis Of Electronic Circuits*, Prentice Hall, 1975.
6. NANNAPANENI NARAYANA RAO, *Elements Of Engineering Electromagnetics*, Prentice Hall, 1987.
7. NGUYỄN BÌNH THÀNH - NGUYỄN TRẦN QUÂN - PHẠM KHẮC CHƯỜNG, *Cơ Sở Lý Thuyết Mạch*, NXB Giáo dục, 1992.
8. NGUYỄN QUÂN, *Lý Thuyết Mạch*, Trường Đại học Bách khoa TP Hồ Chí Minh, 1994.
9. PHƯƠNG XUÂN NHÂN - HỒ ANH TÚY, *Lý Thuyết Mạch*, NXB Khoa học Kỹ thuật, 1993.
10. SANDER K. F., *Electric Circuit Analysis*, Addison Wesley, 1992.

MẠCH ĐIỆN I

Phạm Thị Cư (Chủ biên)

Lê Minh Cường, Trương Trọng Tuấn Mỹ

NHÀ XUẤT BẢN

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH

KP 6, P. Linh Trung, Q. Thủ Đức, TPHCM

Số 3 Công trường Quốc tế, Q.3, TPHCM

ĐT: 38239172, 38239170

Fax: 38239172; Email: vnuhp@vnuhcm.edu.vn

★ ★ ★

Chịu trách nhiệm xuất bản

TS HUỖNH BÁ LÂN

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm về tác quyền

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA – ĐHQG TPHCM

Biên tập

PHẠM VĂN THỊNH

NGUYỄN HUỖNH

Sửa bản in

TRẦN VĂN THẮNG

Trình bày bìa

TRƯƠNG NGỌC TUẤN

In tái bản 1.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm

Số đăng ký KHXB: 84-2011/CXB/234-04/ĐHQG-TPHCM

Quyết định xuất bản số: 475/QĐ-ĐHQG-TPHCM/TB

ngày 21/7/2011 của Nhà xuất bản ĐHQG TPHCM

In tại Xưởng in Đại học Bách khoa - ĐHQG TP.HCM

Nộp lưu chiếu tháng 9 năm 2011.