

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Nguyễn Thạch

ÁNH XẠ TỰA ĐƠN ĐIỀU TẮNG

Chuyên ngành: **Toán giải tích**

Mã số: **60 46 01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS.TS. NGUYỄN BÍCH HUY

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy PGS.TS. Nguyễn Bích Huy đã tận tình hướng dẫn tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn quý thầy cô phản biện đã cho tôi những nhận xét quý báu, giúp tôi có thêm kinh nghiệm trong quá trình nghiên cứu .

Tôi xin chân thành cảm ơn quý thầy cô đã nhiệt tình giảng dạy trong thời gian tôi học tại trường Đại học Sư phạm Tp HCM và đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn bạn bè, đồng nghiệp và người thân đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và thực hiện luận văn.

TP.HCM, tháng 10 năm 2010

Học viên

Nguyễn Thạch

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài.

Lý thuyết phương trình trong không gian Banach có thứ tự được xây dựng từ những năm 1950, được phát triển và hoàn thiện cho tới hôm nay. Lý thuyết này một mặt cho phép nghiên cứu sâu hơn các tính chất của nghiệm như tính dương, tính lồi... Mặt khác nó cho phép sử dụng các tính chất của thứ tự để thay thế tính liên tục, compact của ánh xạ. Do đó lý thuyết phương trình trong không gian có thứ tự tìm được các ứng dụng rộng rãi trong các bài toán xuất phát từ vật lý, hóa học, sinh học và kinh tế học.

Trong lý thuyết phương trình trong không gian có thứ tự thì lớp phương trình với ánh xạ tăng đóng vai trò quan trọng. Các ánh xạ này có thể không liên tục và rất thích hợp để mô tả các hiện tượng trong tự nhiên. Lớp phương trình với ánh xạ tăng đã được nghiên cứu khá hoàn chỉnh và sự phát triển nội tại của lý thuyết cũng như nhu cầu của thực tế đặt ra yêu cầu mở rộng ánh xạ tăng. Năm 1972, Volkmann đưa ra lớp ánh xạ tựa đơn điệu tăng và ứng dụng chúng để nghiên cứu sự duy nhất nghiệm của phương trình vi phân trong không gian Banach cũng như để so sánh nghiệm của hai phương trình, nghiên cứu sự phụ thuộc đơn điệu của nghiệm vào điều kiện ban đầu... đây là những tính chất chưa được nghiên cứu khi phương trình được xét trong không gian không có thứ tự.

Cho đến nay tài liệu về ánh xạ tựa đơn điệu tăng chỉ là các bài báo khoa học đăng trên các tạp chí chuyên ngành bằng tiếng anh, tiếng đức. Và được trình bày rất cô đọng, vắn tắt. Luận văn này có mục tiêu trình bày khái niệm ánh xạ gần đơn điệu tăng và các ứng dụng của nó một cách hệ thống với các chứng minh chi tiết, rõ ràng hơn.

2. Nội dung của luận văn.

Nội dung luận văn gồm có 4 chương.

Chương 1: Không gian Banach với thứ tự sinh bởi nón.

Trong chương này nhắc lại các khái niệm, kết quả được sử dụng trong luận văn. Các kết quả này được trích dẫn từ tài liệu tham khảo.

Chương 2: Ánh xạ tựa đơn điệu tăng.

Chương này gồm khái niệm về Ánh xạ tựa đơn điệu tăng và các định lý.

2.1 Ánh xạ tựa đơn điệu tăng

2.2 Ánh xạ tựa đơn điệu tăng và bất phương trình vi phân

Chương 3: Phương trình vi phân chứa ánh xạ tựa đơn điệu tăng

Chương 4: Điểm bất động của ánh xạ tựa đơn điệu tăng

3. Phương pháp nghiên cứu

- Sử dụng các định lý cơ bản về tập hợp có thứ tự như bổ đề Zorn, nguyên lý Entropy, các kết quả về thứ tự trong không gian Banach sinh bởi nó.
- Sử dụng các phương pháp điểm bất động và phương pháp xấp xỉ liên tiếp để nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân.

Chương I

KHÔNG GIAN BANACH VỚI THỨ TỰ SINH BỞI NÓN

1.1 Không gian Banach với thứ tự sinh bởi nón

Định nghĩa 1.1.1:

Cho X là không gian Banach và K là tập con của X . K được gọi là nón nếu:

- i) K đóng khác rỗng và $K \neq \{\theta\}$.
- ii) $a, b \in \mathbb{R}; a, b \geq 0; x, y \in K \Rightarrow ax + by \in K$.
- iii) $x \in K$ và $-x \in K \Rightarrow x = 0$.

Ví dụ: Cho $X = \mathbb{R}^n$ và $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$. Thì K là nón trong X .

Định nghĩa 1.1.2:

Trong không gian Banach với nón K , ta xét quan hệ thứ tự như sau:

$$\forall x, y \in X, x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

Khi đó, quan hệ $\leq$ là một quan hệ thứ tự.

Thật vậy, ta có:

- Phản xạ: $x - x = 0 \in K \Rightarrow x \leq x, \forall x \in X$.
- Phản đối xứng: $\forall x, y \in X$, nếu $x \leq y, y \leq x$ thì $y - x \in K, x - y \in K$.

Do iii) trong định nghĩa 1.1.1, ta có $x - y = 0 \Rightarrow x = y$

- Bắc cầu:

$$\forall x, y, z \in X, \text{ nếu } x \leq y, y \leq z \text{ thì } y - x \in K, z - y \in K.$$

Do ii) trong định nghĩa 1.1.1, ta có

$$z - x = (z - y) + (y - x) \in K \Rightarrow x \leq z.$$

Mệnh đề 1.1.1:

Cho X là không gian Banach với thứ tự $\leq$ sinh bởi nón K . Khi đó

- i) $\forall \lambda > 0, \forall x, y, z \in X$ nếu $x \leq y$ thì $\lambda x \leq \lambda y$ và $x + z \leq y + z$.
- ii) Nếu $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ thì $x \leq y$.
- iii) Nếu dãy (x_n) tăng (hoặc giảm) và hội tụ về x thì $x_n \leq x$ (hoặc $x_n \geq x$) với mọi n .

Chứng minh:

i) Nếu $x \leq y$ thì $x - y \in K \Rightarrow \lambda y - \lambda x = \lambda(x - y) \in K \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$.

Nếu $x \leq y$ thì $x - y \in K \Rightarrow y - x = (y + z) - (x + z) \in K \Rightarrow x + z \leq y + z$.

ii) Nếu $x_n \leq y_n, \forall n \in N$ thì $y_n - x_n \in K$. Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = y - x$ và K đóng nên

$y - x \in K \Rightarrow x \leq y$.

iii) Giả sử (x_n) tăng. Với mỗi n , ta có: $x_n \leq x_{n+m}$. Cho $m \rightarrow \infty$, ta được $x_n \leq x$, với mọi n . ■

Định nghĩa 1.1.3:

Cho $(X, \leq)$ là một tập có thứ tự. Tập $M \subset X$ được gọi là tập sắp thẳng của X nếu: $\forall x, y \in M$ thì $x \leq y$ hoặc $y \leq x$.

Bổ đề Zorn:

Giả sử X là một tập có thứ tự. Nếu mọi tập con sắp thẳng của X đều có cận trên (cận dưới) thì X có ít nhất một phần tử cực đại (phần tử cực tiểu).

Mệnh đề 1.1.2:

Cho X là không gian Banach với thứ tự $\leq$ sinh bởi nón K , tập $M \subset X$ là tập con sắp thẳng của X và dãy $(x_n) \subset M$. Khi đó từ dãy (x_n) ta có thể rút ra dãy con (x_{n_k}) đơn điệu.

Chứng minh:

Ta đặt $N_0 = \{n \in N : x_n \geq x_k, \forall k \geq n\}$.

Ta có các trường hợp:

- N_0 hữu hạn:

Khi đó tồn tại $n_0 \in N$ sao cho $\forall n \geq n_0$ thì $n \notin N_0$.

Lúc đó tồn tại $k \geq n$ sao cho $x_n \leq x_k$ (Do M là tập sắp thẳng).

Do đó, từ dãy (x_n) ta có thể chọn được dãy con (x_{n_k}) với $x_{n_0} \leq x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq \dots$, đây chính là dãy con cần tìm.

- N_0 vô hạn:

Giả sử $N_0 = \{n_1, n_2, \dots\}$ với $n_1 < n_2 < \dots$.

Khi đó dãy (x_{n_k}) với $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq \dots$ là dãy con cần tìm. ■

Định nghĩa 1.1.4: (Nón chuẩn)

Nón K trong không gian Banach X được gọi là nón chuẩn nếu tồn tại $N > 0$ sao cho:

$$\forall x, y \in K, x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N\|y\|.$$

Khi đó, số N được gọi là hằng số chuẩn của nón K .

Ví dụ:

- Trong không gian $X = C^1[0,1]$, nón $K = \{f \in C^1[0,1] : f \geq 0\}$ không phải là nón chuẩn.
- Trong không gian $X = C^1[0,1]$, nón sau đây là nón chuẩn:

$$K = \{f \in C^1[0,1] : f(t) \geq 0, f'(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]\}.$$

Mệnh đề 1.1.3:

Cho K là nón chuẩn trong không gian Banach X .

- $\forall u, v \in X, u \leq v$ thì $\langle u, v \rangle = \{x \in X : u \leq x \leq v\}$ là một tập đóng và bị chặn.
- Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n$ ($n = 1, 2, \dots$) và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$.
- Nếu dãy đơn điệu (x_n) có dãy con (x_{n_k}) hội tụ về x thì dãy (x_n) hội tụ về x .
- Nếu dãy (x_n) đơn điệu hội tụ yếu về x thì dãy (x_n) hội tụ về x .

Chứng minh:

i)

- Giả sử dãy $(x_n) \subset \langle u, v \rangle$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Ta có: $u \leq x_n \leq v, \forall n$. Suy ra $u \leq x \leq v \Rightarrow \langle u, v \rangle$ đóng.

- $\forall x \in \langle u, v \rangle$ thì $x - u \in K, v - u \in K$ và $x - u \leq v - u$. Do K là nón chuẩn nên tồn tại hằng số chuẩn $N > 0$ sao cho: $\|x - u\| \leq N\|v - u\|$

$$\text{Suy ra } \|x\| - \|u\| \leq N\|v - u\| \Rightarrow \|x\| \leq N\|v - u\| + \|u\|.$$

Vậy $\langle u, v \rangle$ là bị chặn.

- Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n$ thì $0 \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n$

Do K là nón chuẩn nên $\|y_n - x_n\| \leq N\|z_n - x_n\|$.

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$ nên $z_n - x_n \rightarrow 0$

Suy ra $y_n - x_n \rightarrow 0$

Vậy $y_n = (y_n - x_n) + x_n \rightarrow x$.

- Ta có: $x_{n_k} \leq x, \forall k$ và $x_n \leq x_{n_k} \Rightarrow x_n \leq x, \forall n$.

Vì $x_{n_k} \rightarrow x$ nên $\forall \varepsilon, \exists k_0 : \|x - x_{n_{k_0}}\| < \frac{\varepsilon}{N}$.

Khi đó:

$$\forall n \geq n_{k_0}, x_{n_{k_0}} \leq x_n \leq x \Rightarrow 0 \leq x - x_n \leq x - x_{n_{k_0}} \Rightarrow \|x - x_n\| \leq N \|x - x_{n_{k_0}}\| < \varepsilon$$

Vậy ta có $x_n \rightarrow x$.

iv) Giả sử (x_n) là dãy đơn điệu và hội tụ yếu về x . Gọi N là hằng số chuẩn của nón chuẩn K .

Với mỗi $f \in K^*$, ta có:

$$f(x_n) \leq f(x_m) \text{ với } n \leq m.$$

Cho $m \rightarrow \infty$, ta được $f(x_n) \leq f(x) \Rightarrow x_n \leq x, \forall n$.

Theo định lý Mazur, $\forall \varepsilon > 0, \exists z = \sum_{i=1}^m t_i x_{n_i} : \|z - x\| < \frac{\varepsilon}{N+1}$

Đặt $n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ thì ta có:

$$\forall n \geq n_0, z \leq x_n \Rightarrow 0 \leq x_n - z \leq x - z$$

$$\Rightarrow \|x_n - z\| \leq N \|x - z\| < \frac{N\varepsilon}{N+1}$$

$$\Rightarrow \|x_n - x\| \leq \|x_n - z\| + \|z - x\| < \varepsilon$$

Vậy dãy (x_n) hội tụ về x . ■

Định nghĩa 1.1.5 (Nón chính quy)

Nón K trong không gian Banach X được gọi là nón chính quy nếu mọi dãy đơn điệu tăng, bị chặn trên trong X đều hội tụ.

Ví dụ:

- Trong không gian $X = L[0,1]$, nón K là nón các hàm không âm hầu khắp nơi là nón chính quy.
- Trong không gian $X = C[0,1]$, nón K là nón các hàm không âm không phải là nón chính quy.

Mệnh đề 1.1.4:

Cho K là nón trong không gian Banach X .

- i) K là nón chính quy trong X khi và chỉ khi mọi dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới trong X đều hội tụ.
- ii) K là nón chính quy thì K là nón chuẩn.

Chứng minh:

i) Giả sử K là nón chính quy trong X .

Ta xét dãy (x_n) giảm, bị chặn dưới: $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots \geq x$.

Khi đó, dãy $(x_1 - x_n)$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi $x_1 - x$.

Vì K là nón chính quy nên dãy hội tụ.

Vậy (x_n) hội tụ.

Giả sử mọi dãy giảm, bị chặn dưới trong X đều hội tụ.

Ta xét dãy (x_n) tăng, bị chặn trên: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq x$.

Khi đó, dãy $(x_1 - x_n)$ là dãy giảm và bị chặn dưới bởi $(x_1 - x)$ nên dãy $(x_1 - x_n)$ hội tụ.

Suy ra (x_n) hội tụ.

Vậy K là nón chính quy.

ii) Giả sử ngược lại K không phải là nón chuẩn.

Khi đó $\forall N, \exists x_N \in K, \exists y_N \in K, 0 \leq x_N \leq y_N$ nhưng $\|x_N\| \geq N\|y_N\|$.

Cho $N = n^2$, ta được các dãy $(x_n) \subset K, (y_n) \subset K$ thỏa mãn:

$$0 \leq x_n \leq y_n, \|x_n\| \geq n^2 \|y_n\|$$

Với $x_n \neq 0$, ta xét các dãy: $x'_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ và $y'_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$.

Ta có: $0 \leq x'_n \leq y'_n, \|x'_n\| = 1, \|y'_n\| < \frac{1}{n^2}$. Suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} y'_n$ hội tụ.

Đặt $y = \sum_{n=1}^{\infty} y'_n$ thì $\sum_{k=1}^n y'_k \leq y, \forall n$.

Ta thấy dãy $z_n = x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n$ tăng và bị chặn trên bởi y nên (z_n) hội tụ

(vì K là nón chính quy).

Suy ra $x_n = (z_n - z_{n-1}) \rightarrow 0$

Mâu thuẫn với điều kiện $\|x'_n\| = 1$

Vậy K là nón chuẩn. ■

1.2 Nón liên hợp:

Định nghĩa 1.2.1:

Nếu K là nón thì ta định nghĩa nón liên hợp của K như

$$K^* = \left\{ f \in X^* : f(x) \geq 0, \forall x \in K \right\}$$

K^* có tính chất i), ii) trong định nghĩa nón.

Ta có thể chứng minh : $K^* \cap (-K^*) = \{ \theta_{X^*} \} \Leftrightarrow \overline{K - K} = X$.

Mệnh đề 1.2.1 : $x_0 \in K \Leftrightarrow f(x_0) \geq 0, \forall f \in K^*$.

Chứng minh :

$\Leftarrow$) Giả sử $f(x_0) \geq 0 \quad \forall f \in K^*$ nhưng $x_0 \notin K$

Theo định lý tách tập lồi $\exists g \in X^* : g(x_0) < g(y), \forall y \in K$

Cố định $x \in K$, ta có $g(x_0) < g(tx), \forall t > 0$. Cho $t \rightarrow \infty$ ta có $g(x_0) \geq 0$

Vậy $g \in K^*$, nhưng $g(x_0) < 0$.

Định nghĩa 1.2.2: Cho E là không gian Banach thực với nón được sắp K .

K gọi là nón solid nếu $\text{int}(K) \neq \emptyset$.

1.3 Chuẩn P

Định nghĩa 1.3.1:

Cho không gian banach $(E, \|\cdot\|)$ với nón solid K và $p \in \overset{\circ}{K}$. Khi đó với mọi $x \in E$ tồn tại số

$\lambda > 0$ để $-\lambda p \leq x \leq \lambda p$.

Chứng minh:

Thật vậy, giả sử r là số thực dương thỏa mãn $B(p, r) \subset K$.

Khi đó với $x \neq 0$ ta có

$$p \pm \frac{r}{2\|x\|}x \in B(p, r) \Rightarrow p \pm \frac{r}{2\|x\|}x \in K \Rightarrow -\frac{2\|x\|}{r}p \leq x \leq \frac{2\|x\|}{r}p$$

+ Ta xây dựng một chuẩn như sau:

$$\|x\|_p = \inf \{ \lambda > 0 \mid -\lambda p \leq x \leq \lambda p \}$$

Dễ thấy: $-\|x\|_p \cdot p \leq x \leq \|x\|_p \cdot p, \forall x \in E$

Ngoài ra, nếu $0 \leq x \leq y$ thì vì

$$\{ \lambda > 0 \mid -\lambda p \leq y \leq \lambda p \} \subset \{ \lambda > 0 \mid -\lambda p \leq x \leq \lambda p \} \text{ nên } \|x\|_p \leq \|y\|_p$$

Định lí 1.3.1:

Giả sử K là nón chuẩn, solid và $p \in K^\circ$. Khi đó chuẩn $\|\cdot\|_p$ có tính chất sau:

- 1) $(E, \|\cdot\|_p)$ là không gian Banach
- 2) $\|\cdot\|_p$ tương đương với chuẩn ban đầu trong E .

Chứng minh:

1) Vì K là nón chuẩn nên $[-p; p]$ bị chặn hay

$$\exists m > 0: \forall x \in [-p; p] \Rightarrow \|x\| \leq m$$

$$\text{Ta có: } -\|x\|_p \cdot p \leq x \leq \|x\|_p \cdot p \text{ nên } \frac{x}{\|x\|_p} \in [-p; p]$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_p} \right\| \leq m \text{ hay } \|x\| \leq m \|x\|_p \quad (1)$$

Xét $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong $(E, \|\cdot\|_p)$. Do (1) ta thấy $\{x_n\}$ cũng là dãy Cauchy trong $(E, \|\cdot\|)$, ta sẽ chứng minh $x = \lim x_n$ trong $(E, \|\cdot\|_p)$.

Xét $\varepsilon > 0$ tùy ý; do

$$-\|x_n - x_m\|_p \cdot p \leq x_n - x_m \leq \|x_n - x_m\|_p \cdot p \text{ và } \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_p = 0$$

Nên tồn tại n_0 sao cho $-\varepsilon p \leq x_n - x_m \leq \varepsilon p, \forall n, m \geq n_0$

Cho $m \rightarrow \infty$, ta có $-\varepsilon p \leq x_n - x \leq \varepsilon p, \forall n \geq n_0$

Do đó theo định nghĩa chuẩn $\|\cdot\|_p$, ta có $\|x_n - x\| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$

Vậy ta đã chứng minh $x = \lim x_n$ trong $(E, \|\cdot\|_p)$

Do $(E, \|\cdot\|)$ và $(E, \|\cdot\|_p)$ là các không gian Banach và các chuẩn $\|\cdot\|, \|\cdot\|_p$ thỏa (1) nên theo hệ quả của định lý ánh xạ ngược Banach chúng tương đương nhau.

CHƯƠNG 2:

ÁNH XẠ TỰA ĐƠN ĐIỀU TĂNG

2.1 Ánh xạ tựa đơn điệu tăng:

Định nghĩa 2.1.1: Cho E là không gian Banach, K là nón solid trong E và $D \subseteq E$,

1. Một ánh xạ $f : D \rightarrow E$ gọi là đơn điệu tăng nếu

$$\forall x, y \in D, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

2. Một ánh xạ $f : D \rightarrow E$ gọi là tựa đơn điệu tăng nếu

$$\forall x, y \in D, \forall \varphi \in K^* : x \leq y, \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(f(x)) \leq \varphi(f(y)).$$

3. Một ánh xạ $f : [a; b] \times D \rightarrow E$ gọi là tựa đơn điệu tăng đối với x nếu ánh xạ $x \rightarrow f(t, x)$ là ánh xạ tựa đơn điệu tăng, $\forall t \in [a; b]$.

Nhận xét

1) Trên $\mathbb{R}$ với các thứ tự thông thường thì mọi hàm số đều là tựa đơn điệu tăng.

Thật vậy, vì $\varphi \in \mathbb{R}^*$ do đó φ có dạng ax , $a \neq 0$ nên

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y \Rightarrow \varphi(f(x)) = \varphi(f(y)), \forall f$$

2) Nếu f là ánh xạ đơn điệu tăng thì f là ánh xạ tựa đơn điệu tăng nhưng không có chiều ngược lại.

Thật vậy: $\forall x, y \in D, \forall \varphi \in K^*, x \leq y, \varphi(x) = \varphi(y)$ ta có

$$f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow f(y) - f(x) \in K \Rightarrow \varphi(f(y) - f(x)) \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(f(x)) \leq \varphi(f(y))$$

3) Nếu f ánh xạ đơn điệu tăng thì $f + \lambda id$ là ánh xạ tựa đơn điệu tăng.

Thật vậy, với $x, y \in D, \varphi \in K^*$ và $x \leq y, \varphi(x) = \varphi(y)$ ta có $f(x) \leq f(y)$

$$\Rightarrow \varphi(f(x) + \lambda x) = \varphi(f(x)) + \lambda \varphi(x) \leq \varphi(f(y)) + \lambda \varphi(y) = \varphi(f(y) + \lambda y)$$

4. Với mỗi $\lambda \in \mathbb{R}$, ánh xạ $x \rightarrow \lambda x$ là ánh xạ tựa đơn điệu tăng nhưng không là ánh xạ tăng khi $\lambda < 0$.

Định lí 2.1.1 :

Trong $\mathbb{R}^n$, ta có thứ tự sinh bởi nón tự nhiên

Xét ánh xạ $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g(x) = (g_1(x); \dots; g_n(x))$. Các mệnh đề sau là tương đương.

1) g là ánh xạ tựa đơn điệu tăng.

2) $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \leq y \text{ và } x_k = y_k \Rightarrow g_k(x) \leq g_k(y), \forall k = \overline{1, n})$

Chứng minh:

Thật vậy: $K^* = K = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}\}$

$\Rightarrow$) Giả sử g là ánh xạ tựa đơn điệu tăng.

Cho $x \leq y, x_k = y_k$. Xét $\xi = (0; \dots; \underbrace{1}_k; 0; \dots 0) \in K^*$

Ta có $\xi \cdot x = \xi \cdot y \Rightarrow \xi \cdot g(x) \leq \xi \cdot g(y) \Leftrightarrow g_k(x) \leq g_k(y)$

$\Leftarrow$) Giả sử $x, y \in \mathbb{R}^n, x \leq y$ và $x_k = y_k \Rightarrow g_k(x) \leq g_k(y), \forall k = \overline{1, n}$

ta chứng minh g là ánh xạ tựa đơn điệu tăng

Thật vậy: Giả sử $\xi \in K^*, \xi \cdot x = \xi \cdot y, x \leq y$

Vì $\xi_i x_i \leq \xi_i y_i (i = \overline{1, n})$ và $\xi x = \xi y$ nên ta suy ra $\xi_i x_i = \xi_i y_i (i = \overline{1, n})$

Nếu $\xi_i \neq 0$ thì ta có $x_i = y_i \Rightarrow g_i(x) \leq g_i(y) \Rightarrow \xi_i g_i(x) \leq \xi_i g_i(y)$

Vậy ta luôn có $\xi_k g_k(x) \leq \xi_k g_k(y)$

Vậy g là ánh xạ tựa đơn điệu tăng.

Ý nghĩa: Nếu nón được xét là nón tự nhiên không gian hữu hạn chiều thì ánh xạ f là tựa đơn điệu tăng khi và chỉ khi nếu cố định biến thứ k thì hàm f_k tăng theo các biến còn lại.

Ví dụ: Hàm số $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ với $f(x, y) = (e^y \sin^2 x, x \cos^2 y)$ là một ánh xạ tựa đơn điệu tăng.

2.2 Ánh xạ tựa đơn điệu tăng và bất đẳng thức vi phân.

Định lý 2.2.1:

Cho E là không gian Banach với nón solid $K, f: [a; b] \times D \rightarrow E$ gọi là tựa đơn điệu tăng đối với x

và $u, v \in C^1([a, b], E)$, thỏa:

$$u'(t) - f(t, u(t)) \ll v'(t) - f(t, v(t))$$

$$u(a) \ll v(a)$$

Khi đó: $u(t) \ll v(t), \forall t \in [a, b]$.

Chứng minh

Giả sử ngược lại nghĩa là tồn tại số $c \in [a, b]$ sao cho $(v(c) - u(c)) \notin K^\circ$

Do u, v liên tục, $(v-u)(a) \in K^\circ$ nên tồn tại $t_0 \in [a, b]$ sao cho

$$(v(x) - u(x)) \in K^\circ, \quad \forall x \in [a, t_0] \quad \text{và} \quad (v(t_0) - u(t_0)) \in \delta K$$

Ta có: $(v(t_0) - u(t_0)) \in \delta K$ nên $\exists \varphi \in K^* \setminus \{0\}$ sao cho:

$$\begin{aligned} \varphi(v(t_0) - u(t_0)) &= 0 \\ \Rightarrow \varphi(v(t_0)) &= \varphi(u(t_0)) \\ \Rightarrow \varphi(f(t_0, u(t_0))) &\leq \varphi(f(t_0, v(t_0))) \end{aligned}$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned} v(t_0) - u(t_0) &\geq 0 \quad \forall t \in [a, t_0) \\ \Rightarrow \varphi(v(t_0) - u(t_0)) &\geq 0 \quad \forall t \in [a, t_0) \end{aligned}$$

Mà $\varphi(v(t_0) - u(t_0)) = 0$ nên $\varphi'(v(t_0) - u(t_0)) \leq 0$ (*)

Mặt khác ta có :

$$\begin{aligned} v'(t_0) - u'(t_0) &\gg f(t_0, v(t_0)) - f(t_0, u(t_0)) \\ \Rightarrow \varphi(v'(t_0) - u'(t_0)) &> \varphi(f(t_0, v(t_0)) - f(t_0, u(t_0))) \geq 0 \\ \Rightarrow \varphi'(v(t_0) - u(t_0)) &> 0 \end{aligned} \quad (**)$$

Từ (*), (**) ta suy ra vô lí.

Vậy $u(t) \ll v(t) \quad \forall t \in [a, b]$

Định nghĩa 2.2.1:

Hàm $f : [a, b] \times D \rightarrow E$ được gọi là Lipschitz địa phương liên tục đối với x nếu $\forall r > 0 : \exists L_r \in \mathbb{R}^+$ sao cho:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_r \|x - y\| \quad (\forall t \in [a, b], \|x\| \leq r, \|y\| \leq r)$$

Định lí 2.2.2:

Cho E không gian Banach, $D \subset E$. Cho $f : [a, b] \times D \rightarrow E$ gọi là tựa đơn điệu tăng, Lipschitz địa phương, liên tục đối với x theo chuẩn p và

$u, v : [a, b] \rightarrow E$ khả vi nếu:

$$u'(t) - f(t, u(t)) \leq v'(t) - f(t, v(t)), \quad \forall t \in [a, b]; \quad u(a) \leq v(a)$$

thì $u(t) \leq v(t), \quad \forall t \in [a, b]$.

Chứng minh

Chọn $r > 0$ sao cho $\|u(t)\| \leq r-1, \|v(t)\| \leq r-1, \quad \forall t \in [a, b]$

f liên tục, Lipschitz địa phương, ta có :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_p \leq L \|x - y\|_p, \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x, y \text{ thỏa } \|x\| \leq r; \|y\| \leq r$$

Xét hàm số $h_\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$h_\varepsilon(t) = \varepsilon \left(\frac{1}{L} \exp(L(t-a)) - \frac{1}{2L} \right)$$

Đặt $u_\varepsilon(t) = u(t) - h_\varepsilon(t)p, v_\varepsilon(t) = v(t) - h_\varepsilon(t)p$. Ta có:

$u_\varepsilon(a) \gg v_\varepsilon(a)$ thì

Chọn ε sao cho $h_\varepsilon \leq 1$ trên $[a, b]$

Ta có:

$$\begin{aligned} \|f(t, u(t)) - f(t, u_\varepsilon(t))\|_p &\leq L \|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_p \\ \Rightarrow f(t, u(t)) - f(t, u_\varepsilon(t)) &\leq L \|h_\varepsilon(t)p\| \cdot p \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} u'_\varepsilon(t) - f(t, u_\varepsilon(t)) &= u'(t) - h'_\varepsilon(t)p - f(t, u(t)) + f(t, u(t)) - f(t, u_\varepsilon(t)) \\ &\leq v'(t) - f(t, v(t)) - h'_\varepsilon(t)p + L \|h_\varepsilon(t)p\| p \\ &\leq v'_\varepsilon(t) - f(t, v(t)) - 2h'_\varepsilon(t)p + f(t, v_\varepsilon(t)) - f(t, v(t)) + Lh_\varepsilon(t)p \\ &\leq v'_\varepsilon(t) - f(t, v_\varepsilon(t)) - 2h'_\varepsilon(t)p + 2Lh_\varepsilon(t)p \\ &\leq v'_\varepsilon(t) - f(t, v_\varepsilon(t)) - 2\varepsilon p \\ &\ll v'_\varepsilon(t) - f(t, v_\varepsilon(t)) \end{aligned}$$

Áp dụng định lý 2.2.1 ta suy ra $u_\varepsilon(t) \ll v_\varepsilon(t)$. Cho $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ta có $u(t) \leq v(t)$.

Định lý 2.2.3 :

Cho D mở $D \subseteq E, f \in C(D, E)$ thỏa

$$\begin{cases} \forall v, v \in C([a, b], E) \quad u'(t) - f(t, u(t)) \ll v'(t) - f(t, v(t)), \quad \forall t \in [a, b] \\ u(a) \ll v(a) \end{cases} \\ \Rightarrow u(t) \ll v(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

Khi đó f là tựa đơn điệu tăng.

Chứng minh

Cố định $p \in \overset{\circ}{K}$, xét $x, y \in D, x \leq y$ và $\varphi \in K^*$ mà $\varphi(x) = \varphi(y)$

Đặt

$$\begin{cases} \tilde{u}(t) = x + (t-a)(f(x) - p) \\ \tilde{v}(t) = y + (t-a)p + (t-a)(f(y) + p) \end{cases}$$

Ta có: $\lim [\tilde{u}(t) - x + p] = p \in K^\circ$ (mở)

$$\lim [\tilde{v}(t) - y - 2p] = -2p \in E \setminus K$$

$$\Rightarrow \exists c : \forall t < c \quad \begin{aligned} f(\tilde{u}(t)) - f(x) + p &\in K^\circ \\ f(\tilde{v}(t)) - f(y) - 2p &\in E \setminus K \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } u(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t) & \text{với } a \leq t \leq c \\ \tilde{u}(c) & \text{với } c < t \leq b \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} \tilde{v}(t) & \text{với } a \leq t \leq c \\ \tilde{v}(c) & \text{với } c < t \leq b \end{cases}$$

Ta có:

$$\forall u, v \in C([a, b]) \quad (1)$$

$$v(a) - u(a) = \tilde{v}(a) - \tilde{u}(a) = y - x \geq 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow v(a) \geq u(a)$$

$$u'(t) - f(u(t)) = f(x) - p - f(u(t)) \ll 0$$

$$v'(t) - f(v(t)) = p + f(x) = p - f(u(t)) \gg 0$$

$$\Rightarrow u'(t) - f(u(t)) \ll v'(t) - f(v(t)) \quad (3)$$

Từ (1);(2);(3) ta có:

$$u(b) \ll v(b)$$

$$\Rightarrow x + (c - a)(f(x) - p) \ll y + (c - a)p + (c - a)[f(y) + p]$$

$$\Rightarrow f(x) \ll f(y) + \frac{y - x}{c - a} + 3p$$

$$\Rightarrow \varphi(f(x)) \leq \varphi(f(y) + 3p)$$

$$p \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi(f(x)) \leq \varphi(f(y))$$

Vậy f là ánh xạ tựa đơn điệu tăng.

Định lí 2.2.4 :

Cho K là nón chính quy và $S \subseteq K^* \setminus \{0\}$ thỏa:

$$\{x \in K, \exists \varphi \in S : \varphi(x) = 0\} \text{ là trù mật trên } \delta K,$$

Giả sử $D \subseteq E$, D là tập mở và ánh xạ $f \in C(E, D)$ có tính chất

$$x, y \in D, x \leq y, \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(f(x)) \leq \varphi(f(y))$$

Khi đó f là ánh xạ tựa đơn điệu tăng.

Chứng minh

Lấy $u, v \in C([a, b], E)$ thỏa

$$u(a) \ll v(a)$$

$$u'(t) - f(u(t)) \ll v'(t) - f(v(t))$$

Ta chứng minh: $u(t) \ll v(t) \quad \forall t \in [a, b]$

Đặt $w(t) = v(t) - u(t)$, giả sử tồn tại c sao cho $w(\tilde{c}) \notin \overset{\circ}{K}$

Vì $w(a) \in \overset{\circ}{K}$ nên tồn tại c sao cho

$$w(t) \in \overset{\circ}{K}, \quad \forall t < c, \quad w(c) \in \delta K$$

Ta có:

$$u'(c) - f(u(c)) \ll v'(c) - f(v(c))$$

$$\Rightarrow f(v(c) - u(c)) \ll w'(c)$$

$$\Rightarrow f(v(c) - u(c)) \ll \frac{w(c) - w(k)}{c - k} \quad \forall k \in (c - \delta, c) \text{ và } \delta > 0 \text{ đủ nhỏ}$$

$$\left(\forall w'(c) = \lim_{k \rightarrow c} \frac{w(c) - w(k)}{c - k} \right)$$

Do f liên tục nên tồn tại $V(O_E)$ sao cho:

$$\varphi(1) = 0 \tag{1}$$

Chọn $d \subset O_E$ sao cho tồn tại $\varphi \in S: \varphi(w(c) + d) = 0$

Ta có:

$$\varphi(v(c) + d - u(c)) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(v(c) + d) = \varphi(u(c))$$

Và $v(c) + d \geq u(c)$ nên do tính chất của f , ta suy ra

$$\Rightarrow \varphi(f(v(c) + d) - f(u(c))) = 0 \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\varphi(w(c) + d) - \varphi(w(k)) \geq 0$$

$$\Rightarrow \varphi(w(k)) \leq 0$$

Điều này vô lý vì $u'(t) = f(t, u(t)) - \mu p, u(t_0) = u_0$.

Vậy

$$w(t) \gg 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

$$\Rightarrow v(t) > u(t) \quad \forall t \in (a, b)$$

Do đó f là ánh xạ tựa đơn điệu tăng theo định lý 2.2.4

Định lí 2.2.5:

Cho D mở, lồi, $D \subseteq E, f : D \rightarrow E$ khả vi trên D . Khi đó f là tựa đơn điệu tăng khi và chỉ khi ánh xạ $x \rightarrow f'(v)x$ là tựa đơn điệu tăng $\forall v \in D$.

Chứng minh

➤ Cho f là tựa đơn điệu tăng, chứng minh $x \rightarrow f'(v)x$ là tựa đơn điệu tăng $\forall v \in D$

Cố định $v \in D, x, y \in D, \varphi \in K$ mà $x \leq y, \varphi(x) = \varphi(y)$,

Do f là tựa đơn điệu tăng nên $f(\varphi(x)) \leq f(\varphi(y))$

Ta có: $\forall t \in [0; 1]: v \leq v + t(y - x)$

$$\varphi(v) = \varphi(v + t(y - x)) \quad (\text{vì } \varphi(y) = \varphi(x))$$

$$\Rightarrow \varphi(f(v)) \leq \varphi[f(v + t(y - x))]$$

Do đó:

$$\begin{aligned} f'(v)(y - x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(v + t(y - x)) - f(v)}{t} \\ \Rightarrow \varphi[f'(v)(y - x)] &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi[f(v + t(y - x))] - \varphi[f(v)]}{t} \geq 0 \\ \Rightarrow \varphi[f'(v)(x)] &\leq \varphi[f'(v)(y)] \end{aligned}$$

Vậy $f'(v)$ là tựa đơn điệu tăng $\forall v \in D$

➤ Cho $x \rightarrow f'(v)x$ là tựa đơn điệu tăng $\forall v \in D$, chứng minh f là tựa đơn điệu tăng:

Cố định $x, y \in D, x \leq y, \varphi \in K : \varphi(x) = \varphi(y)$.

Xét hàm

$$\begin{aligned} g : [0; 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(t) &= \varphi(f(y)) - \varphi(f(x)) \end{aligned}$$

Thì ta có $g(1) - g(0) = \varphi(f(y)) - \varphi(f(x))$

Áp dụng định lí giá trị trung bình cho hàm số g ta có:

$$\begin{aligned} \exists t_0 \in (0; 1) : g(1) - g(0) &= g(t_0) \\ \Rightarrow \varphi(f(y)) - \varphi(f(x)) &= \varphi[f'(x + t_0(y - x))(y - x)] \\ &= \varphi[f'(v)(y - x)] \end{aligned}$$

Với $v \leq x + t_0(y - x)$. Do $x \rightarrow f'(v)x$ là tựa đơn điệu tăng nên:

$$\begin{aligned} \varphi(f'(v)(x)) &\leq \varphi(f'(v)(y)) \\ \Rightarrow \varphi(f(x)) &\geq \varphi(f(y)) \end{aligned}$$

Vậy f là tựa đơn điệu tăng.

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHỨA ÁNH XẠ TỰA ĐƠN ĐIỀU TĂNG

Trong chương này, ta khảo sát nghiệm của phương trình vi phân cấp 1

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

Bổ đề 3.1:

Cho ánh xạ $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ liên tục, tựa đơn điệu tăng; $\varepsilon > 0$, $R > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Khi đó tồn tại

ánh xạ liên tục $f_\varepsilon : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ thỏa

1. $\|f(t, x) - f_\varepsilon(t, x)\| \leq \varepsilon, \forall (t, x) \in [0, T] \times \overline{B}(u_0, R)$
2. $\exists c > 0 : \|f_\varepsilon(t, x)\| \leq c, \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$
3. $\exists L > 0 : \|f_\varepsilon(t, x) - f_\varepsilon(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \forall (t, x), (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$
4. f_ε là tựa đơn điệu tăng.

Chứng minh:

Do f liên tục nên chọn số $\delta \in (0, 1)$ sao cho

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \varepsilon, \forall (t, x), (t, y) \in [0, T] \times \overline{B}(u_0, R + 1)$$

Giả sử $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ là hàm thỏa mãn các điều kiện $h(x) \geq 0$, $\text{supp } h \subset B(0, \delta)$, $\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx = 1$.

Ta định nghĩa ánh xạ f_ε như sau:

$$f_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(z - x) f(t, z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} h(z) f(t, z + x) dz$$

Như trong chứng minh ở các tài liệu về phương trình vi phân, ánh xạ f_ε được định nghĩa trên thỏa mãn các tính chất 1, 2, 3. ta đi chứng minh f_ε là tựa đơn điệu tăng.

Xét $x, y \in \mathbb{R}^n, \varphi \in K^*$ sao cho $x \leq y, \varphi(x) = \varphi(y)$. Khi đó $\forall z \in \mathbb{R}^n$

ta có $z + x \leq z + y$ và $\varphi(z + x) = \varphi(z + y)$ nên

$$\varphi(f_\varepsilon(t, x)) = \int_{\mathbb{R}^n} h(z) \varphi(f(t, z + x)) dz \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(z) \varphi(f(t, z + y)) dz = \varphi(f_\varepsilon(t, y)) \quad \blacksquare$$

Định lý 3.1:

Cho $f : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ liên tục và tựa đơn điệu tăng và bị chặn. Nếu $u, v : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ là nghiệm của phương trình

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

sao cho $u(t_0) \ll v(t_0)$ thì tồn tại $w : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ là nghiệm của phương trình thỏa

$$u(t_0) \leq \omega(t_0) \ll v(t_0)$$

Chứng minh.

Vì f bị chặn nên $\exists c > 0 : \|f(t, x)\|_p \leq c, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$

Cố định $\varepsilon \in (0; 1), R = T(c + 3)$. Chọn hàm $f_\varepsilon : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ thỏa mãn các điều kiện của bổ đề

3.1. Đặt:

$$q(\varepsilon) = \max \left(\|f(t, u(t)) - f_\varepsilon(t, u(t))\|_p + \|f(t, v(t)) - f_\varepsilon(t, v(t))\|_p \right)$$

Với mỗi $\lambda \in [0; 1]$ ta xét hàm:

$$F_\lambda : [0; 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, x) \mapsto f_\varepsilon(t, x) + (1 - \lambda)(f(t, u(t)) - f_\varepsilon(t, u(t))) + \\ + \lambda(f(t, v(t)) - f_\varepsilon(t, v(t))) + \lambda q(\varepsilon)p$$

Do f_ε là tựa đơn điệu tăng nên dễ thấy các hàm F_λ cũng tựa đơn điệu tăng.

Xét phương trình: $\omega'_\lambda(t) = F_\lambda(t, \omega_\lambda(t))$; $\omega(0) = x_0$ (*)

$\forall (t, x), (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, Ta có $F_\lambda(t, x) - F_\lambda(t, y) = f_\varepsilon(t, x) - f_\varepsilon(t, y)$.

Do đó, theo cách chọn f_ε ta có F_λ là Lipschitz nên phương trình (*) luôn có nghiệm duy nhất

$$\omega_\lambda : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Hơn nữa, ta có:

$$\begin{aligned} \bullet \quad v'(t) - F_1(t, v(t)) &= v'(t) - f(t, v(t)) - q(\varepsilon)p \\ &= -q(\varepsilon)p \ll 0 = \omega'_1(t) - F_1(t, \omega_1(t)) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad v(0) = x_0 = \omega_1(0)$$

$$\Rightarrow v(t) \leq \omega_1(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\Rightarrow u(t_0) \leq v(t_0) \ll \omega(t_0)$$

Lại có:

$$\begin{aligned}\omega'_1(t) - F_0(t, \omega_\lambda(t)) &= \omega'_\lambda(t) - F_\lambda(t, \omega_\lambda(t)) + F_\lambda(t, \omega_\lambda(t)) - F_0(t, \omega_\lambda(t)) \\ &= \lambda [q(\varepsilon)p + (f(t, v(t)) - f_\varepsilon(t, v(t)) - (f(t, u(t)) - f_\varepsilon(t, u(t))))] \geq 0\end{aligned}$$

(Do cách chọn $q(\varepsilon)$ và định nghĩa $\|\cdot\|_p$)

Nên:

- $\omega'_\lambda(t) - F_0(t, \omega_\lambda(t)) \geq 0 = \omega'_0(t) - F_0(t, \omega_0(t))$
- $\omega_\lambda(0) = x_0 = \omega_0(0)$

$$\Rightarrow \omega_\lambda \geq \omega_0(t) = u(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Áp dụng định lý số gia giới nội cho các hàm u, v ta được:

$$\begin{aligned}\|u(t) - x_0\|_p &\leq t.c \leq T.c \leq R \\ \|v(t) - x_0\|_p &\leq t.c \leq T.c \leq R, \quad \forall t \in [0, T]\end{aligned}$$

Do đó, theo cách chọn f_ε ta có:

$$\begin{aligned}\|f(t, (u(t))) - f_\varepsilon(t, (u(t)))\|_p &\leq \varepsilon, \|f(t, (v(t))) - f_\varepsilon(t, (v(t)))\|_p \leq \varepsilon \\ \Rightarrow \|F_\lambda(t, x)\|_p &\leq c + 3\varepsilon\end{aligned}$$

Lần nữa áp dụng định lý số gia giới nội cho hàm ω_λ ta được:

$$\begin{aligned}\|\omega(t) - x_0\|_p &\leq T.(c + 3\varepsilon) \leq R, \quad \forall t \in [0, T] \\ \Rightarrow \|f(t, (\omega_\lambda(t))) - f_\varepsilon(t, (\omega_\lambda(t)))\|_p &\leq \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T] \\ \Rightarrow \|F_\lambda(t, (\omega_\lambda(t))) - f(t, (\omega_\lambda(t)))\|_p &\leq 4\varepsilon, \quad \forall t \in [0, T]\end{aligned}$$

Ta đi chứng minh nghiệm ω_λ phụ thuộc liên tục vào λ hay ánh xạ

$$\varphi: [0; 1] \rightarrow C([0, T], \mathbb{R}^n)$$

$$\lambda \mapsto \omega_\lambda$$

là liên tục.

Thật vậy, giả sử ngược lại, tức là tồn tại $\beta > 0$ và $\{\lambda_n\}_n$ sao cho $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ và $\|\omega_{\lambda_n} - \omega_{\lambda_0}\| \geq \beta$

Chú ý rằng, bằng cách áp dụng định lý số gia giới nội, $\forall \lambda \in [0; 1]$ ta luôn có

- $\|\omega_\lambda(t)\|_p \leq \|x_0\|_p + R, \quad \forall t \in [0, T]$
- $\|\omega_\lambda(t_1) - \omega_\lambda(t_2)\|_p \leq c|t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T]$

Nên theo định lí Azela – Ascoli tập $A = \{\omega_\lambda \mid \lambda \in [0, T]\}$ là compact tương đối trong $C([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Vì $\{\omega_{\lambda_n}\}_n \subset A$ nên tồn tại dãy con $\{\omega_{\lambda_{n_k}}\}_k : \omega_{\lambda_{n_k}} \rightarrow \omega_0$ trong $C([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Mặt khác:

$$\omega_{\lambda_{n_k}}(t) = x_0 + \int_0^t F_{\lambda_{n_k}}(s, \omega_{\lambda_{n_k}}(s)) ds \quad (**)$$

Mà ta lại có $F_{\lambda_{n_k}}(s, \omega_{\lambda_{n_k}}(s)) \rightarrow F_{\lambda_0}(s, \omega(s))$ khi $\lambda_{n_k} \rightarrow \lambda_0$ (do các hàm f, f_ε liên tục) và $\forall k$:

$$\begin{aligned} \left\| F_{\lambda_{n_k}}(s_1, \omega_{\lambda_{n_k}}(s_1)) - F_{\lambda_{n_k}}(s_2, \omega_{\lambda_{n_k}}(s_2)) \right\|_p &= \left\| f_\varepsilon(s_1, \omega_{\lambda_{n_k}}(s_1)) - f_\varepsilon(s_2, \omega_{\lambda_{n_k}}(s_2)) \right\|_p \\ &\leq L \left\| \omega_{\lambda_{n_k}}(s_1) - \omega_{\lambda_{n_k}}(s_2) \right\|_p \\ &\leq Lc |s_1 - s_2| \end{aligned}$$

Suy ra dãy hàm $\left\{ F_{\lambda_{n_k}}(s, \omega_{\lambda_{n_k}}(s)) \right\}_k$ là họ liên tục đồng bậc.

$$\Rightarrow F_{\lambda_{n_k}}(s, \omega_{\lambda_{n_k}}(s)) \xrightarrow{u} F_{\lambda_0}(s, \omega_0(s))$$

Do đó, ta có thể cho $k \rightarrow +\infty$ trong $(**)$ và được:

$$\omega_0(t) = x_0 + \int_0^t F_{\lambda_0}(s, \omega_0(s)) ds$$

$\Rightarrow \omega_0$ là một nghiệm của phương trình $\omega'(t) = F_{\lambda_0}(t, \omega(t))$, $\omega(0) = x_0$. Do phương trình này có

nghiệm duy nhất nên $\omega_0 \equiv \omega_{\lambda_0}$. Điều này mâu thuẫn vì $\left\| \omega_{\omega_{n_k}} - \omega_{\lambda_0} \right\| \geq \beta$.

Vậy φ liên tục

Vì $u(t_0) \ll v(t_0)$ nên tồn tại $\delta > 0$ đủ nhỏ sao cho $x \ll v(t_0)$ với mỗi x mà $\|x - u(t_0)\|_p \leq \delta$ (khi đó

$$\|v(t_0) - u(t_0)\| > \delta)$$

Xét hàm:

$$\phi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lambda \mapsto \phi(\lambda) = \left\| \omega_\lambda(t_0) - u(t_0) \right\|_p - \delta$$

Ta có ϕ là hàm liên tục (do là hợp của các hàm liên tục) và

- $\phi(0) = -\delta < 0$
- $\phi(1) = \left\| \omega_1(t_0) - u(t_0) \right\|_p - \delta \geq \left\| v(t_0) - u(t_0) \right\|_p - \delta > 0$

Nên tồn tại $\lambda = \lambda_\varepsilon \in (0;1)$ sao cho $\phi(\lambda_\varepsilon) = 0$

Như vậy với mỗi $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, ta xây dựng được hàm $\omega_k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ thỏa:

a) $u(t) \leq \omega_k(t), \forall t \in [0, T]$

b) $\omega'_k(t) = f(t, \omega_k(t)) + g_k(t), \|g_k(t)\|_p \leq \frac{4}{k}, \forall t \in [0, T]$

c) $\|\omega_k(t_0) - u(t_0)\|_p = \delta.$

Vì tập $\{\omega_\lambda \mid \lambda \in [0, 1]\}$ là compact tương đối nên tìm được dãy con của dãy $\{\omega_k\}_k$ hội tụ về ω .

Bằng cách chuyển phương trình vi phân ở điều kiện b) thành phương trình tích phân với chú ý rằng các hàm dưới dấu tích phân lập thành một dãy hàm hội tụ đều về hàm $f(t, \omega(t))$ nên ta cho $k \rightarrow +\infty$ trong phương trình này và được $\omega'(t) = f(t, \omega(t))$.

Rõ ràng $\omega(0) = x_0, \omega(t_0) \geq u(t_0)$ và do cách chọn δ nên $\omega(t_0) \ll v(t_0)$.

Vậy ta đã tìm được hàm ω thỏa mãn đề bài. ■

Chú ý:

Ta có thể thay thế điều kiện $u(t_0) \leq \omega(t_0) \ll v(t_0)$ bởi $u(t_0) \ll \omega(t_0) \leq v(t_0)$ nhưng tổng quát không thể tìm được nghiệm $\omega(t)$ thỏa mãn

$$u(t_0) \ll \omega(t_0) \ll v(t_0).$$

Bổ đề 3.2:

Cho E là không gian Banach và $x_0 \in E$. Ánh xạ $f : [a, b] \times E \rightarrow E$ là liên tục và bị chặn. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại hàm $x_\varepsilon : [a, b] \rightarrow E$ sao cho

$$\|x'_\varepsilon(t) - f(t, x_\varepsilon(t))\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b], \quad x_\varepsilon(a) = x_0.$$

Chứng minh:

Do f liên tục nên tồn tại hàm $f_\varepsilon : [a, b] \times E \rightarrow E$ Lipschitz địa phương xấp xỉ f . Vì f bị chặn nên f_ε cũng bị chặn, đặt $c = \max_{[a, b] \times E} \|f_\varepsilon(t, x)\|$. Gọi L, α, β là các số thỏa

$$\|f_\varepsilon(t, x) - f_\varepsilon(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \text{ mà } |t - a| \leq \alpha, \quad \|x - x_0\| \leq \beta, \quad \|y - y_0\| \leq \beta.$$

Chọn $\alpha_1 = \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{c} \right\}.$

Đặt $X = \left\{ x \in C([a, a + \alpha_1], E) \mid \max_{[a, a + \alpha_1]} \|x(t) - x_0\| \leq \beta \right\}$, ta thấy X là một không gian metric đầy đủ

với metric $d(x, y) = \max_{[a, a + \alpha_1]} \|e^{-L(t-a)}(x(t) - y(t))\|$

Xét ánh xạ

$$T : X \rightarrow X$$

$$x \mapsto x_0 + \int_a^t f_{\varepsilon}(s, x(s)) ds$$

Ta có $\forall x, y \in X$

$$\begin{aligned} \|T(x(t)) - T(y(t))\| &= \left\| \int_a^t (f_{\varepsilon}(s, x(s)) - f_{\varepsilon}(s, y(s))) ds \right\| \\ &\leq \int_a^t \|f_{\varepsilon}(s, x(s)) - f_{\varepsilon}(s, y(s))\| ds \\ &\leq \int_a^t L \|x(s) - y(s)\| ds = \int_a^t L e^{-L(s-a)} \|x(s) - y(s)\| e^{L(s-a)} ds \\ &\leq d(x, y) \int_a^t L e^{L(s-a)} ds \leq d(x, y) (e^{L\alpha_1} - 1), \quad \forall t \in [a, a + \alpha_1] \end{aligned}$$

$\Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq (1 - e^{-L\alpha_1}) d(x, y)$ Do đó, theo nguyên lí ánh xạ co T có điểm bất động

x^* , đây cũng là nghiệm của phương trình vi phân

$$x'(t) = f_{\varepsilon}(t, x(t)), \quad x(a) = x_0 \quad (1)$$

trên đoạn $[a, a + \alpha_1]$

Xét phương trình

$$x'(t) = f_{\varepsilon}(t, x(t)), \quad x(a + \alpha_1) = x^*(a + \alpha_1) \quad (2)$$

Bằng cách lập luận hoàn toàn tương tự, ta tìm được $\alpha_2 > 0$ sao cho (2) có nghiệm trên

$[a + \alpha_1, a + \alpha_2]$. Khi đó ta có thể mở rộng liên tục nghiệm của (1) lên $[a, a + \alpha_1 + \alpha_2]$.

Tiếp tục quá trình ta có thể mở rộng nghiệm của phương trình (1) đến b . Thật vậy, đặt

$c = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a + \alpha_1 + \dots + \alpha_n)$. Giả sử $c < b$, chú ý rằng:

$$\forall t_1 < t_2 < c, x^*(t_2) - x^*(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f_\varepsilon(t, x^*(t)) dt$$

$$\Rightarrow \|x(t_2) - x(t_1)\| \leq c \cdot |t_2 - t_1|$$

nên $\lim_{t \rightarrow c} x^*(t)$ tồn tại (do E là không gian Banach). Gọi giới hạn này là x_0^* , ta xét phương trình

$$x'(t) = f_\varepsilon(t, x(t)), x(c) = x_0^* \quad (2)$$

Và khi đó, ta có thể mở rộng nghiệm của (1) lên $[a, c + \alpha']$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của c . Như vậy, $c = b$ và do $\lim_{t \rightarrow c} x^*(t)$ tồn tại nên ta có thể mở rộng nghiệm đến b . ■

Định lí 3.2:

Cho K là nón chính quy, $f: [0, T] \times E \rightarrow E$ liên tục, tựa đơn điệu tăng đối với x và bị chặn. Khi đó, phương trình vi phân

$$x'(t) = f(t, x(t)), x(0) = x_0 \text{ có nghiệm } x: [0, T] \rightarrow E.$$

Chứng minh:

Có định $p \in K^\circ$. Giả sử M là hằng số thỏa $\|x\|_p \leq M\|x\|, \forall x \in E$

Theo bổ đề 3.2, tồn tại các hàm $u_n: [0, T] \rightarrow E$ thỏa

$$\left\| u'_n(t) - \left(f(t, u_n(t)) - \frac{2n+1}{n(n+1)} p \right) \right\| \leq \frac{1}{Mn(n+1)}, \forall t \in [0, T], (*)$$

$$u_n(0) = x_0 - \frac{1}{n} p$$

Từ (*) ta có: $\forall t \in [0, T]$

$$-\frac{1}{n(n+1)} p \leq u'_n(t) - f(t, u_n(t)) + \frac{2n+1}{n(n+1)} p \leq \frac{1}{n(n+1)} p$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{n} p \leq u'_n(t) - f(t, u_n(t)) \leq -\frac{2}{n+1} p$$

Do đó:

$$u'_n(t) - f(t, u_n(t)) \leq u'_{n+1}(t) - f(t, u_{n+1}(t)), \forall t \in [0, T].$$

Kết hợp với $u_n(0) = x_0 - \frac{1}{n} p \leq x_0 - \frac{1}{n+1} p = u_{n+1}(0)$ suy ra

$$u_n(t) \leq u_{n+1}(t), \forall t \in [0, T], \forall n$$

Mặt khác, theo định lí số gia giới nội ta có

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_n(0)\| + T \left(M' + \frac{2n+1}{n(n+1)} \|p\| + \frac{1}{Mn(n+1)} \right)$$

trong đó $M' = \sup_{[0,T] \times E} \|f(t,x)\|$.

Như vậy, với mỗi $t \in [0, T]$ ta có dãy $\{u_n(t)\}_n$ tăng và bị chặn trên. Do K là nón chính quy nên tồn tại

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t)$$

và rõ ràng hàm $u : [0, T] \rightarrow E$ chính là nghiệm của phương trình

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad \blacksquare$$

Định lí 3.3:

Cho K solid và $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ liên tục, tựa đơn điệu tăng đối với x và bị chặn. Nếu

$u, w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ thỏa, $\forall t \in [0, T]$

$$u'(t) \geq f(t, u(t)), \quad w'(t) \leq f(t, w(t)), \quad u(t) \leq w(t)$$

thì tồn tại $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ là nghiệm của phương trình

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (u(0) \leq x_0 \leq w(0))$$

thỏa $u(t) \leq v(t) \leq w(t), \quad \forall t \in [0, T]$.

Chứng minh:

Đặt $\tilde{f}(t, x) = f(t, \bar{x}) - (x - \bar{x})$ với

$$\bar{x}^i = \begin{cases} w^i(t) & \text{nếu } x^i > w^i(t) \\ x^i & \text{nếu } u^i(t) \leq x^i \leq w^i(t) \\ u^i(t) & \text{nếu } x^i < u^i(t) \end{cases}$$

Ta có $\tilde{f}$ liên tục, tựa đơn điệu tăng đối với x . Do đó phương trình vi phân

$$x'(t) = \tilde{f}(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

có nghiệm địa phương. Gọi $v : [0, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ là nghiệm tối đại của phương trình này.

Ta đi chứng minh $\alpha = T$. Thật vậy, giả sử $\alpha < T$. Vì f bị chặn và các hàm u, v liên tục nên

$$\exists M = \sup_{[0,T] \times \mathbb{R}^n} \|f(t,x)\| + \max \left\{ \sup_{[0,T]} u(t), \sup_{[0,T]} v(t) \right\}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{f}(t,x)\| \leq M + \|x\|, \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \|v(t)\| \leq \|x_0\| + \int_0^t (M + \|v(s)\|) ds, \quad \forall t \in (0, \alpha)$$

Đặt $z(t) = \|x_0\| + \int_0^t (M + \|v(s)\|) ds$ ta có:

$$z'(t) - z(t) = M + \|v(t)\| - \left(\|x_0\| + \int_0^t (M + \|v(s)\|) ds \right) \leq M, \quad \forall t \in [0, \alpha)$$

nên theo bất đẳng thức Gronwall

$$z(t) \leq (\|x_0\| + \alpha M) e^t, \quad \forall t \in [0, \alpha)$$

$$\Rightarrow \|v(t)\| \leq z(t) \leq (\|x_0\| + \alpha M) e^\alpha, \quad \forall t \in [0, \alpha)$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết v là nghiệm tối đại

Ta lại có

$$\forall t_1 < t_2 < T, v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{f}(t, v(t)) dt$$

$$\Rightarrow \|x(t_2) - x(t_1)\| \leq (M + (\|x_0\| + TM) e^T) |t_2 - t_1|$$

do đó $\lim_{t \rightarrow T} v(t)$ tồn tại và có thể mở rộng nghiệm của phương trình đến T .

Vậy phương trình có nghiệm $v: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ta đi chứng minh $u(t) \leq v(t) \leq w(t), \quad \forall t \in [0, T]$

Lấy $\varepsilon > 0$, ta chứng minh

$$v^i(t) \leq w^i(t) + \varepsilon, \quad \forall n \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, \quad \forall t \in [0, T]$$

Thật vậy, giả sử $\exists t_0 \in [0, T], i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $v^{i_0}(t_0) > w^{i_0}(t_0) + \varepsilon$. Khi đó, tồn tại

$$c = \inf \left\{ t \in [0, T] : v^{i_0}(t) > w^{i_0}(t) + \varepsilon, \quad \forall t' \in [t, t_0] \right\}$$

Do u^{i_0}, w^{i_0} liên tục và $u^{i_0}(0) \leq w^{i_0}(0) < w^{i_0}(0) + \varepsilon$ nên $c > 0$ và $v^{i_0}(c) = w^{i_0}(c) + \varepsilon$

Ta có: $\forall t \in [c, t_0]$

$$v^{i_0}(t) \geq w^{i_0}(t) + \varepsilon \Rightarrow \bar{v}^{i_0}(t) = w^{i_0}(t)$$

và $\bar{v}^i(t) = w^i(t), \quad \forall i \neq i_0$ (do cách chọn $\bar{v}^i(t)$)

vì thế, kết hợp với giả thiết f là tựa đơn điệu tăng đối với x , ta được

$$\begin{aligned}
\tilde{f}^{i_0}(t, v(t)) &= f^{i_0}(t, \bar{v}(t)) - \left(v^{i_0}(t) - w^{i_0}(t) \right) \\
&\leq f^{i_0}(t, v(t)) - \varepsilon \\
&< f^{i_0}(t, v(t)) < \left(w^{i_0} \right)'(t), \quad \forall t \in [c, t]
\end{aligned} \tag{*}$$

Mặt khác, lấy $h > 0$ đủ nhỏ ta có

$$\begin{aligned}
v^{i_0}(c+h) - v^{i_0}(c) &\geq w^{i_0}(c+h) + \varepsilon - \left(w^{i_0}(c) + \varepsilon \right) = w^{i_0}(c+h) - w^{i_0}(c) \\
\Rightarrow \tilde{f}\left(c, w^{i_0}(c)\right) &= \left(v^{i_0} \right)'(c) \geq \left(w^{i_0} \right)'(c)
\end{aligned} \tag{**}$$

Từ (*) và (**) dẫn tới điều mâu thuẫn

Vậy $v^i(t) \leq w^i(t) + \varepsilon, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \forall t \in [0, T]$ cho $t \rightarrow 0^+$ ta nhận được $v(t) \leq w(t), \quad \forall t \in [0, T]$

Tương tự, ta cũng chứng minh được $u(t) \leq v(t), \quad \forall t \in [0, T]$. Và khi đó

$$\tilde{f}(t, v(t)) = f(t, v(t)), \quad \forall t \in [0, T]$$

Hay nói cách khác v chính là nghiệm của phương trình vi phân

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad \blacksquare$$

Định lí 3.4:

Cho $f: [0; +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ liên tục, tựa đơn điệu tăng đối với x ,

$\psi \in K^*, p \in K$ và $L: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục thỏa

$$\psi(f(t, y)) - f(t, x) \leq L(t)\psi(y - x), \quad \forall t \geq 0, y \geq x$$

Khi đó, các phương trình dạng

$$x'(t) = f(t, v(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

có duy nhất nghiệm trên $[t_0; +\infty)$. Nếu ta kí hiệu nghiệm này là x_{t_0, x_0} thì

$$\left\| x_{t_0, x_0}(t) - x_{t_0, y_0}(t) \right\|_p \leq N \left\| x_0 - y_0 \right\|_p e^{\int_{t_0}^t L(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0 \tag{*}$$

Chứng minh:

Gọi $x: [t_0; w) \rightarrow \mathbb{R}^n$ là nghiệm tối đại của phương trình

$$x'(t) = f(t, v(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

Đặt $g: [0; +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto g(t, x) = f(t, x) - f(t, 0)$. Vì f liên tục, tựa đơn điệu tăng đối với x nên g cũng là liên tục, tựa đơn điệu tăng đối với x .

Đặt $\lambda : [0; +\infty) \rightarrow [1; +\infty)$, $t \mapsto \|f(t, 0)\|_p + 1$. Thì $\forall t \in [0; +\infty)$ ta có

$$\begin{aligned} -f(t, 0) + \lambda(t)p &\gg 0 \\ -f(t, 0) - \lambda(t)p &\ll 0 \end{aligned}$$

Chọn μ sao cho $-\mu p \ll x_0 \ll \mu p$ (nếu $x_0 = 0$ chọn $\mu = 1$, nếu $x_0 \neq 0$ chọn $\mu = 2\|x_{0p}\|$).

Gọi $u : [t_0; w) \rightarrow \mathbb{R}^n, v : [t_0; w) \rightarrow \mathbb{R}^n$ lần lượt là nghiệm tối đại của các phương trình

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(t, x(t)) - \lambda(t)p, \quad x(t_0) = -\mu p \\ x'(t) &= g(t, x(t)) + \lambda(t)p, \quad x(t_0) = \mu p \end{aligned}$$

Giả sử $w_1, w_2 < +\infty$. Đặt $u_1 : [t_0; w_1) \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto 0$. Ta có

- $u'(t) - g(t, u(t)) = -\lambda(t)p \ll 0 = u'_1(t) - g(t, u_1(t)), \forall t \in [t_0, w_1)$
- $u(t) = -\mu p \ll 0 = u(t_0)$

$$\Rightarrow u(t) \ll u_1(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, w_1)$$

Tương tự, ta cũng có $v(t) \gg 0, \forall t \in [t_0, w_2)$.

Xét

$$\begin{aligned} (\psi \circ (-u))'(t) &= \psi((-u)'(t)) \\ &= \psi(f(t, 0) - f(t, u(t)) + \lambda(t)\psi(p)) \\ &\leq L(t)(\psi \circ (-u))(t) + \lambda(t)\psi(p) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$\psi(-u(t)) \leq \left(\psi(-u(t_0)) + \int_{t_0}^t \lambda(s)\psi(p)e^{-\int_{t_0}^s L(r)dr} ds \right) e^{\int_{t_0}^t L(s)ds}$$

Đặt vế phải của bất đẳng thức là $h(t)$. Rõ ràng h liên tục trên $[t_0, w_1]$ nên tồn tại $M = \max_{[t_0, w_1]} h(t)$.

Vì $\psi \in K^{\circ*}$ nên theo mệnh đề 1.9 tồn tại $\alpha, \beta > 0$ sao cho

$$\alpha\|x\|_p \leq \psi(x) \leq \beta\|x\|_p, \quad \forall x \in K$$

Do đó, ta có

$$\|u(t)\|_p \leq \frac{\psi(-u(t))}{\alpha} \leq \frac{h(t)}{\alpha} \leq \frac{M}{\alpha}, \quad \forall t \in [t_0, w_1)$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết u là tối đại. Suy ra $w_1 = +\infty$

Tương tự, ta cũng chứng minh được $w_2 = +\infty$

Ta lại có

- $x'(t) - f(t, x(t)) = 0 \gg -f(t, 0) - \lambda(t)p = u'(t) - f(t, u(t))$
- $x'(t) - f(t, x(t)) = 0 \ll -f(t, 0) + \lambda(t)p = v'(t) - f(t, v(t)), \forall t \in [t_0, w]$
- $u(t_0) \ll x(t_0) = 0 \ll v(t_0)$

$$\Rightarrow u(t) \ll x(t) \ll v(t), \forall t \in [t_0, w]$$

$$\Rightarrow \|x(t) - u(t)\|_p \ll \|v(t) - u(t)\|_p, \forall t \in [t_0, w].$$

Giả sử $w < +\infty$, khi đó vì u, v là các hàm liên tục trên $[t_0, w]$ nên tồn tại

$$M_1 = \max_{[t_0, w]} \|x(t)\|_p, M_2 = \max_{[t_0, w]} \|v(t) - u(t)\|_p$$

$\Rightarrow \|x(t)\|_p \leq M_1 + M_2, \forall t \in [t_0, w]$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết x là nghiệm tối đại.

Vậy $w = +\infty$

Ta đi chứng minh nghiệm x là duy nhất. Cố định $\varepsilon > 0$, xét các phương trình

$$x'(t) = f_1(t, x(t)), x(t_0) = x_0 - \varepsilon p \quad (1)$$

$$x'(t) = f_2(t, x(t)), x(t_0) = x_0 + \varepsilon p \quad (2)$$

Trong đó $f_1(t, x) = f(t, x) - \varepsilon p, f_2(t, x) = f(t, x) + \varepsilon p$

Ta có f_1, f_2 liên tục, tựa đơn điệu đối với x và với $y \geq x$

$\psi(f_1(t, y) - f_1(t, x)) = \psi(f_2(t, y) - f_2(t, x)) = \psi(f(t, y) - f(t, x)) \leq L(t)\psi(y - x)$ Do đó theo chứng minh trên (1) và (2) có nghiệm lần lượt là

$$u_\varepsilon : [t_0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, v_\varepsilon : [t_0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Đề ý rằng khi đó:

- $u'_\varepsilon(t) - f(t, u_\varepsilon(t)) = -\varepsilon p \ll x'(t) - f(t, x(t)), \forall t \geq t_0$
- $v'_\varepsilon(t) - f(t, v_\varepsilon(t)) = \varepsilon p \gg x'(t) - f(t, x(t)), \forall t \geq t_0$
- $u_\varepsilon(t_0) = x_0 - \varepsilon p \ll x(t_0) \ll x_0 + \varepsilon p = v_\varepsilon(t_0)$

$$\Rightarrow u_\varepsilon(t) \ll x(t) \ll v_\varepsilon(t), \forall t \geq t_0$$

Bây giờ, giả sử $y : [t_0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ cũng là nghiệm của phương trình

$$x'(t) = f(t, v(t)), x(t_0) = x_0$$

ta cũng có được $u_\varepsilon(t) \ll y(t) \ll v_\varepsilon(t), \forall t \geq t_0$

$\Rightarrow u_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t) \ll x(t) - y(t) \ll v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t), \forall t \geq t_0$. Nên

$$\|x(t) - y(t)\|_p \ll \|v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t)\|_p \ll \frac{1}{\alpha} \psi(v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t)), \quad \forall t \geq t_0$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} (\psi \circ (v_\varepsilon - u_\varepsilon))'(t) &= \psi((v_\varepsilon - u_\varepsilon)'(t)) \\ &= \psi(f(t, v_\varepsilon(t)) - f(t, u_\varepsilon(t))) + 2\varepsilon \psi(p) \\ &\leq L(t) \psi(v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t) + 2\varepsilon \psi(p) \quad \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall ta được:

$$\psi \circ (v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t))(t) \leq \left(\psi \circ (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t_0) + 2\varepsilon \psi(p)(t - t_0) \right) e^{\int_{t_0}^t L(s) ds}$$

Cố định $t \geq t_0$, cho $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ta được $\|x(t) - y(t)\|_p \leq 0$

$$\Rightarrow x(t) = y(t), \quad \forall t \geq t_0 \text{ hay } x \equiv y$$

Ta đi chứng minh (*). Cố định $\varepsilon > 0$, đặt:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - \|x_0 - y_0\|_p) - \varepsilon p \\ v_0 &= \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - \|x_0 - y_0\|_p) + \varepsilon p \end{aligned}$$

Ta có: $u_0 \ll x_0 \ll v_0$; $u_0 \ll y_0 \ll v_0$ và $\|v_0 - u_0\|_p = \|x_0 - y_0\|_p + 2\varepsilon$

Xét các phương trình

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) - \varepsilon p, \quad x(t_0) = u_0 \\ x'(t) &= f(t, v(t)) + \varepsilon p, \quad x(t_0) = v_0 \end{aligned}$$

Các phương trình này có nghiệm lần lượt là

$$u_\varepsilon : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, v_\varepsilon : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Ta có

$$\begin{aligned} \bullet \quad u'_\varepsilon(t) - f(t, u_\varepsilon(t)) &= -\varepsilon p \ll 0 = x'_{t_0, x_0}(t) - f(t, x_{t_0, x_0}(t)) \\ &= x'_{t_0, y_0}(t) - f(t, x_{t_0, y_0}(t)), \quad \forall t \geq t_0 \\ v'_\varepsilon(t) - f(t, v_\varepsilon(t)) &= -\varepsilon p \ll 0 = x'_{t_0, x_0}(t) - f(t, x_{t_0, x_0}(t)) \\ &= x'_{t_0, y_0}(t) - f(t, x_{t_0, y_0}(t)), \quad \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad u_\varepsilon(t_0) \ll x_{t_0, x_0}(t_0) \ll v_\varepsilon(t_0); \quad u_\varepsilon(t_0) \ll x_{t_0, y_0}(t_0) \ll v_\varepsilon(t_0)$$

$$\Rightarrow u_\varepsilon(t) \ll x_{t_0, x_0}(t) \ll v_\varepsilon(t); \quad u_\varepsilon(t) \ll x_{t_0, y_0}(t) \ll v_\varepsilon(t), \quad \forall t \geq t_0$$

Lại có

$$\begin{aligned}
 (\psi \circ (v_\varepsilon - u_\varepsilon))'(t) &= \psi \left((v_\varepsilon - u_\varepsilon)'(t) \right) \\
 &= \psi \left(f(t, v_\varepsilon(t)) - f(t, u_\varepsilon(t)) \right) + 2\varepsilon \psi(p) \\
 &\leq L(t) \psi \circ (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t) + 2\varepsilon \psi(p), \quad \forall t \geq t_0
 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall ta được:

$$\begin{aligned}
 \psi \circ (v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t))(t) &\leq \left(\psi \circ (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t_0) + 2\varepsilon \psi(p)(t - t_0) \right) e^{\int_{t_0}^t L(s) ds} \\
 &= \left(\psi(v_0 - u_0) + 2\varepsilon \psi(p)(t - t_0) \right) e^{\int_{t_0}^t L(s) ds} \\
 &\leq \left(\beta \|v_0 - u_0\|_p + 2\varepsilon \psi(p)(t - t_0) \right) e^{\int_{t_0}^t L(s) ds} \quad \text{Do đó } \forall t \geq t_0 \\
 &\leq \left(\beta (\|x_0 - y_0\|_p + 2\varepsilon) + 2\varepsilon \psi(p)(t - t_0) \right) e^{\int_{t_0}^t L(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0
 \end{aligned}$$

$$\|x_{t_0, x_0}(t) - x_{t_0, y_0}(t)\|_p \ll \frac{\beta}{\alpha} \left(\beta (\|x_0 - y_0\|_p + 2\varepsilon) + 2\varepsilon \psi(p)(t - t_0) \right) e^{\int_{t_0}^t L(s) ds}$$

Cho $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ta được (*)

■

Chương 4:

ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ TỰA ĐƠN ĐIỀU TĂNG

4.1. ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ TỰA ĐƠN ĐIỀU TĂNG

Đối với ánh xạ tăng ta có định lý điểm bất động sau:

Giả sử f là ánh xạ tăng và tồn tại các phần tử $u_0, v_0, u_0 \leq v_0$ sao cho

$$1. \quad u_0 \leq f(u_0), f(v_0) \leq v_0$$

2. Với mọi dãy tăng $\{x_n\} \subset [u_0, v_0]$ thì dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ

Khi đó f có điểm bất động trong $[u_0, v_0]$

Trong chương này ta sẽ mở rộng định lý trên cho ánh xạ tự đơn điệu tăng.

Định lý 4.1.1:

Cho $T > 0$, g là một hàm khả vi và $y: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ là nghiệm của phương trình $y'(t) = g(y(t))$.

Khi đó:

- *y tăng nếu $g(y(0)) \geq 0$*
- *y giảm nếu $g(y(0)) \leq 0$*

Chứng minh:

Giả sử $g(y(0)) \geq 0$, ta đi chứng minh y tăng.

Đặt

$$f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(t, x) = g'(y(t))x$$

Dễ thấy rằng f là tự đơn điệu tăng và Lipschitz địa phương đối với x .

Đặt $u, v: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ $u(t) = 0$ và $v(t) = y'(t)$. Ta có

$$\bullet \quad u'(t) - f(t, u(t)) = 0 - f(t, 0) = 0$$

$$v'(t) - f(t, v(t)) = y''(t) - g'(y(t))y'(t) = 0$$

$$\Rightarrow u'(t) - f(t, u(t)) \leq v'(t) - f(t, v(t))$$

$$\bullet \quad u(0) = 0 \leq g(y(0)) = y'(0) = v(0)$$

Nên suy ra $0 = u(t) \leq v(t) = y'(t), \forall t \in [0, T]$. Vậy hàm số y tăng

Chứng minh tương tự cho trường hợp $g(y(0)) \leq 0$ ■

Định lý 4.1.2:

Cho $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^n$, g khả vi liên tục, tựa đơn điệu tăng sao cho $u_0 \leq v_0$, $g(u_0) \geq 0$, $g(v_0) \leq 0$. Khi đó, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sao cho $g(x_0) = 0$.

Chứng minh :

Do g là tựa đơn điệu tăng nên phương trình $y'(t) = g(y(t))$ có nghiệm.

Gọi u, v lần lượt là nghiệm của các phương trình

$$y'(t) = g(y(t)), \quad y(0) = u_0$$

$$y'(t) = g(y(t)), \quad y(0) = v_0$$

trên $[0, +\infty)$

Xét hàm $f(t, x) = g(x)$, ta có f tựa đơn điệu tăng, Lipschitz địa phương và:

$$u'(t) - f(t, u(t)) = 0 = v'(t) - f(t, v(t))$$

$$u(0) = u_0 \leq v_0 = v(0)$$

$$\Rightarrow u(t) \leq v(t), \quad \forall t \in [0; +\infty)$$

Theo định lí 4.1 ta có u là hàm tăng, v là hàm giảm.

Vì u tăng và $u(t) \leq v(t) \leq v_0$, $t \geq 0$ nên tồn tại $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$. Đặt giới hạn này là x_0 thì ta có

$g(x_0) = 0$. Thật vậy, với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ vì g_i liên tục nên $g_i(x_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g_i(u(t))$. Chú ý rằng u_i

là hàm khả vi và $g_i(u(t)) = u'_i(t)$, ta tìm được dãy $\{t_n\}_n$ sao cho $t_n \in (n-1, n)$ và

$u_i(n) - u_i(n-1) = g_i(u(t_n))$, $\forall n$. Ta viết

$$u_i(n) = \sum_{k=1}^n (u_i(k) - u_i(k-1)) = \sum_{k=1}^n g_i(u(t_k)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_i(n) = x_0^i$ nên chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} g_i(u(t_k))$ hội tụ. Điều này dẫn tới $\lim_{n \rightarrow \infty} g_i(u(t_k)) = 0$ hay

$$g_i(x_0) = 0$$

■

Định lí 4.1.3 Cho $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ khả vi liên tục và tựa đơn điệu tăng. Cho $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^n$ sao cho $u_0 \leq v_0$, $g(u_0) \geq u_0$, $g(v_0) \leq v_0$. Khi đó g có điểm bất động trong đoạn thứ tự $[u_0, v_0]$

Chứng minh: Áp dụng định lí 4.2 cho $x \rightarrow g(x) - x$

■

Định lí 4.1.4:

Cho không gian Banach E có thứ tự sinh bởi nón chính quy K , $f : E \rightarrow E$ liên tục và tựa đơn điệu tăng. Giả sử tồn tại $\eta, \xi \in E$ thỏa

- Nếu $x \geq \eta$ thì $f(x) \leq \xi$
- $\eta \ll f(\eta)$

Khi đó f có điểm bất động z_0 thỏa $\eta \ll z_0 \ll \xi$.

Chứng minh:

Đặt $p = \frac{f(\eta) - \eta}{2}$ ta có $p \in \overset{\circ}{K}$ và $f(\eta) - \eta - p \gg 0$

Xét ánh xạ

$$g : [0, +\infty) \times E \rightarrow E \quad (t, x) \mapsto g(t, x) = f(x) - x - e^{-t} \cdot p$$

Thấy rằng g là liên tục, tựa đơn điệu tăng nên phương trình vi phân

$$x'(t) = f(t, x(t)); \quad x(0) = \eta \tag{1}$$

có nghiệm địa phương. Gọi $x : [0, a) \rightarrow E$ là nghiệm tối đại, ta có:

$$x'(0) = g(0, x(0)) = f(\eta) - \eta - p \gg 0$$

Do đó, tồn tại $\delta \in (0, a)$ để $x(t) \geq \eta = x(0)$

- x tăng trên $[0, a)$. Thật vậy, lấy $\tau \in (0, \delta]$, đặt

$$x_\tau(t) = x(t + \tau), \quad t \in [0, a - \tau)$$

Ta có:

$$x'(t) - g(t, x(t)) = 0 \ll \left(e^{-t} - e^{-t-\tau} \right) \cdot p = x'(t) - g(t, x_\tau(t)) \quad \forall t \in [0, a - \tau)$$

$$x(0) \ll x_\tau(0)$$

$$\Rightarrow x(t) \ll x_\tau(t) \text{ hay } x(t) \ll x(t + \tau) \quad \forall t \in [0, a - \tau); \forall \tau \in (0, \delta]$$

Với $0 \leq t_1 \ll t_2 < a$, ta chia đoạn t_1, t_2 bởi các điểm chia

$t_1 = t'_1 < t'_2 < \dots < t'_n = t_2$ sao cho $0 < t'_i - t'_{i-1} \leq \delta$, $i = 1, 2, \dots, n$. Khi đó, ta có:

$$x(t_1) = x(t'_1) \ll x(t'_2) \ll \dots \ll x(t'_n) = x(t_2)$$

- Ta đi chứng minh x bị chặn trên $[0, a)$. Thật vậy, chú ý rằng với mỗi $t \geq 0$, $x(t) \geq x(0) = \eta$ nên $f(x(t)) \leq \xi$ và ta có

$$x'(t) = f(x(t)) - x(t) - e^{-t} \cdot p; \quad x(0) = \eta$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-t} \cdot \eta + \int_0^t e^{s-t} f(x(s)) ds - t \cdot e^{-t} \cdot p$$

$$\begin{aligned} &\leq e^{-t} \cdot \eta + (1 - e^{-t}) \xi - t \cdot e^{-t} \cdot p \\ &= e^{-t} \cdot (\eta - \xi - t \cdot p) + \xi \leq \xi \end{aligned}$$

Do đó, vì K là nón chính quy, nên $\lim_{x \rightarrow \infty} x(t)$ tồn tại. Đặt giới hạn này là z_0 , ta có $\eta \ll z_0 \leq \xi$.

Cho $\varepsilon > 0$, vì $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = z_0$ nên tồn tại t_1 sao cho $\|f(x(t)) - f(z_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall t > t_1$. Và $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$

$$\left(I(t) = \int_0^{t_1} e^{s-t} [f(x(s)) - f(z_0)] ds - e^{-t} f(z_0) \right)$$

nhên tồn tại t_2 sao cho $\|I(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall t > t_2$

Ta viết

$$\begin{aligned} &\int_0^t e^{s-t} f(x(s)) ds - f(z_0) = \int_0^{t_1} e^{s-t} [f(x(s)) - f(z_0)] ds - e^{-t} f(z_0) = \\ &= \int_0^{t_1} e^{s-t} [f(x(s)) - f(z_0)] ds + \int_{t_1}^t e^{s-t} [f(x(s)) - f(z_0)] ds - e^{-t} f(z_0) \\ &\Rightarrow \left\| \int_0^t e^{s-t} f(x(s)) ds - f(z_0) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} (1 - e^{t_1-t}) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall t > \max\{t_1, t_2\}. \end{aligned}$$

Hay $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{s-t} f(x(s)) ds = f(z_0)$. Cho $t \rightarrow +\infty$ trong (*) ta được $z_0 = f(z_0)$. ■

4.2 Ánh xạ tựa đơn điệu tăng và bài toán cực trị.

Trong phần này ta sẽ nghiên cứu sự tồn tại của điểm bất động bội của toán tử liên tục tựa đơn điệu tăng trong không gian Hilbert.

Phương pháp sử dụng trong phần này dựa trên khái niệm tập bất biến theo quỹ đạo giảm.

* Các khái niệm.

Cho H là không gian Hilbert, $f: H \rightarrow H, f \in C^{2-0}, f' = x - Ax$ và $A: H \rightarrow H$ là toán tử tựa đơn điệu tăng.

Xét bài toán IVP sau :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax - x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Theo lý thuyết phương trình vi phân trong không gian Banach, bài toán (4.2.1) có nghiệm duy nhất, kí hiệu bởi $x(t, x_0)$, với khoảng tồn tại nghiệm lớn nhất bên phải là $[0, \eta(x_0))$.

Định nghĩa 4.2.1:

Cho M , là một tập con của H . Nếu $\overline{\{x(t, x_0) \mid t \in [0, \eta(x_0))\}} \subset M$, thì M được gọi là tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f .

Ta có các bổ đề sau:

Bổ đề 4.2.1: $f(x(t, x_0))$ là giảm với mọi $t \in [0, \eta(x_0))$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(x(t, x_0)) &= f'(x(t, x_0), x'(t, x_0)) \\ &= (x(t, x_0) - Ax(t, x_0), x'(t, x_0)) \\ &= (-x'(t, x_0), x'(t, x_0)) \\ &= -\|x'(t, x_0)\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

■

Bổ đề 4.2.2 : Các kết luận sau là đúng:

- (i) H là tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f .
- (ii) Nếu $\{M_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$ là một họ các tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f , ở đây Λ là một tập chỉ số, thì các tập $\bigcup_{\mu \in \Lambda} M_\mu, \bigcap_{\mu \in \Lambda} M_\mu$ cũng là tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f .
- (iii) Với mọi $a \in \mathbb{R}$, các tập $f_a^\leq$ và $f_a^<$ đều là các tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f .

Định nghĩa 4.2.2 : Cho M và D là các tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f , $D \subset M$. Đặt

$$C_M(D) = \{x_0 \mid x_0 \in M, \text{ tồn tại } t' \in [0, \eta(x_0)) \text{ thỏa } x(t', x_0) \in D\}.$$

Khi đó $C_M(D)$ gọi là một tập bất biến theo quỹ đạo giảm sinh bởi D .

Nếu $D = C_M(D)$, thì D gọi là một tập bất biến theo quỹ đạo giảm đầy đủ của f đối với M .

Nhận xét:

- 1) H là một tập bất biến theo quỹ đạo giảm đầy đủ của H .
- 2) Nếu D_1, D_2 là hai tập bất biến theo quỹ đạo giảm rời nhau của f , thì

$$C_M(D_1) \cap C_M(D_2) = \emptyset.$$

Bổ đề 4.2.3: Giả sử tập liên thông M là một tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f , D là một tập con mở của M và là một tập bất biến theo quỹ đạo giảm đầy đủ của f . Nếu $D \neq M$ thì biên của D đối với M , ký hiệu $\partial_M D$, khác rỗng và là tập bất biến theo quỹ đạo giảm đầy đủ của f .

Chứng minh

Do các giả thiết M liên thông và $D \neq M$ nên ta có $\partial_M D \neq \emptyset$

Thật vậy, nếu $\partial_M D = \emptyset$ thì $D \cup (M \setminus \overline{D}^M) = M, D \cap (M \setminus \overline{D}^M) = \emptyset$

(Ký hiệu $\overline{D}^M$ để chỉ bao đóng của D đối với M). Điều này mâu thuẫn với giả thiết M là tập liên thông.

Trước hết ta chứng minh $\partial_M D$ là tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f , tức là

$$\overline{\{x(t, x_0) \mid t \in [0, \eta(x_0))\}} \subset \partial_M D, \text{ với mọi } x_0 \in \partial_M D.$$

Giả sử trái lại, với mọi $x_0 \in \partial_M D$, ta xét bài toán IVP (4.2.1). Nếu tồn tại $t' \in [0, \eta(x_0))$ sao cho

$$x(t', x_0) \notin \partial_M D, \text{ khi đó } x(t', x_0) \in D \cup (M \setminus \overline{D}^M) \text{ (theo định nghĩa của biên)}$$

Nếu $x(t', x_0) \in D$ thì $x_0 \in C_M(D) = D$ (vì D là tập bất biến theo quỹ đạo giảm đầy đủ của f). Điều này mâu thuẫn với $x_0 \in \partial_M D$ và D là tập con mở của M .

Mặt khác, nếu $M \setminus \overline{D}^M \neq \emptyset, x(t', x_0) \in M \setminus \overline{D}^M$, chú ý rằng $M \setminus \overline{D}^M$ là mở đối với M , do sự phụ thuộc liên tục của phương trình vi phân với điều kiện đầu, ta biết rằng tồn tại một lân cận U của

x_0 trong M sao cho với mọi $x'_0 \in U$, tồn tại $t'' \in [0, \eta(x'_0))$ sao cho $x(t'', x'_0) \in M \setminus \overline{D}^M$ ta có thể

lấy $x'_0 \in D \cap U$ sao cho $x(t'', x'_0) \in M \setminus \overline{D}^M$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết D là tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f .

$$\text{Vậy } \overline{\{x(t, x_0) \mid t \in [0, \eta(x_0))\}} \subset \partial_M D.$$

Vì $\partial_M D$ là một tập đóng đối với M nên $\partial_M D$ là tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f .

Tiếp theo, ta chứng minh $\partial_M D$ là tập bất biến theo quỹ đạo giảm đầy đủ của f , tức là

$$C_M(\partial_M D) = \partial_M D$$

Hiển nhiên, ta có $\partial_M D \subset C_M(\partial_M D)$

Ta chứng minh $C_M(\partial_M D) \subset \partial_M D$.

Với $x_0 \in C_M(\partial_M D) \subset M$, thì tồn tại $t_1 \in [0, \eta(x_0))$ sao cho $x(t_1, x_0) \in \partial_M D$. Khi đó $x_0 \notin D$ (vì D là tập bất biến theo quỹ đạo giảm đầy đủ của f).

Giả sử $x_0 \in M \setminus \bar{D}^M$. Xét bài toán IVP sau:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - Ax \\ x(0) = x(t_1, x_0) \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Gọi $\bar{x}(t)$ là nghiệm duy nhất của (4.2.2). Đặt $\tau = t_1 - t$, khi đó

$$\begin{aligned} & \frac{dx(t_1 - t, x_0)}{dt} \\ &= \frac{dx(\tau, x_0)}{d(t_1 - \tau)} \\ &= -\frac{dx(\tau, x_0)}{d\tau} \\ &= x(t_1 - t, x_0) - A(x(t_1 - t, x_0)) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Điều này có nghĩa $x(t_1 - t, x_0)$ là nghiệm của hệ (4.2.2).

Do tính duy nhất nghiệm của hệ (4.2.2), ta có

$$\bar{x}(t) = x(t_1 - t, x_0) \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (4.2.4)$$

và $\bar{x}(t) = x(0, x_0) = x_0$. Do sự phụ thuộc liên tục của phương trình vi phân với điều kiện đầu, tồn tại một lân cận U của $\bar{x}(0)$ trong M sao cho với mọi $x_0^* \in U$, tồn tại $t' \in [0, \eta(x_0^*))$ Thỏa

$\bar{x}^*(t') \in M \setminus \bar{D}^M$. Ở đây, $\bar{x}^*(t)$ kí hiệu cho nghiệm duy nhất của hệ

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - Ax \\ x(0) = x_0^* \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Và $[0, \eta(x_0^*))$ kí hiệu cho khoảng tồn tại nghiệm lớn nhất của $\bar{x}^*(t)$. Đặc biệt ta có thể lấy

$x_0^* \in U \cap D$ và xét bài toán IVP sau:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax - x \\ x(0) = \bar{x}^*(t') \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Bằng cách chứng minh tương tự như (4.2.3) và (4.2.4), ta có

$$x(t, \bar{x}^*(t')) = \bar{x}^*(t' - t), 0 \leq t \leq t'. \quad (4.2.7)$$

Lấy $t = t'$ trong (4.2.7), ta được $x(t, \bar{x}^*(t')) = \bar{x}^*(0) = x_0^* \in D$.

Do đó, $\bar{x}^*(t) \in C_M(D)$. Vì $C_M(D) = D$, nên $\bar{x}^*(t') \in D$. Điều này mâu thuẫn với $\bar{x}^*(t') \in M \setminus \bar{D}^M$.

Do đó $x_0 \notin M \setminus \bar{D}^M$ hay $x_0 \in D \cup \partial_M D$. Vì $x_0 \notin D$, nên $x_0 \in \partial_M D$.

Bổ đề 4.2.3 được chứng minh. ■

Bổ đề 4.2.4 : Cho M là tập liên thông và là tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f , D là một tập con mở của M và cũng là một tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f . Khi đó

i) $C_M(D)$ là một tập con mở của M .

ii) Nếu $C_M(D) \neq M$, $\inf_{x \in \partial_M D} f(x) > -\infty$, thì $\inf_{x \in \partial_M C_M(D)} f(x) \geq \inf_{x \in \partial_M D} f(x)$ trong đó $\partial_M D$ và $\partial_M C_M(D)$ lần lượt là biên của D và của $C_M(D)$ đối với M .

Chứng minh.

Do tính phụ thuộc liên tục của phương trình vi phân vào điều kiện đầu, nên ta có kết luận thứ nhất của bổ đề.

Giả sử kết luận của ii) không đúng, khi đó tồn tại $x_0 \in \partial_M C_M(D)$ sao cho $f(x_0) < \inf_{x \in \partial_M D} f(x)$. Vì

$f(x)$ liên tục nên tồn tại một lân cận mở U của x_0 trong M sao cho $U \cap C_M(D) \neq \emptyset$, và với mọi $x_1 \in U$, $f(x_1) < \inf_{x \in \partial_M D} f(x)$. Ta có thể chọn $x_1 \in U \cap C_M(D)$ và xét bài toán IVP (4.2.1) với giá trị

đầu là x_1 . Khi đó, tồn tại $t' \in [0, \eta(x_1))$ sao cho $x(t', x_1) \in D$. Do đó, tồn tại $\bar{t} \in (0, t')$ với

$x(\bar{t}, x_1) \in \partial_M D$. Theo Bổ đề 4.2.1 (f là hàm giảm), và do $x(\bar{t}, x_1) \geq x_1 = x(0)$. (f giảm theo biến t , $\bar{t} \in (0, t)$), ta có

$$f(x(\bar{t}, x_1)) \leq f(x_1) < \inf_{x \in \partial_M D} f(x).$$

Điều này mâu thuẫn. Vậy kết luận ii) của bổ đề được chứng minh. ■

Định lý 4.2.1:

Giả sử M là tập đóng bất biến theo quỹ đạo giảm của f , f thỏa điều kiện P.S. trên M , và $\inf_{x \in M} f(x) > -\infty$. Khi đó, f có ít nhất một điểm tới hạn trong M , và $c = \inf_{x \in M} f(x)$ là giá trị tới hạn của f .

Chứng minh

Đặt $c = \inf_{x \in M} f(x)$. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại x_0^n sao cho $c \leq f(x_0^n) \leq c + \frac{1}{n}$.

Đặt $x(t, x_0^n)$ là nghiệm duy nhất của (4.2.1) và $[0, \eta(x_0^n))$ là khoảng tồn tại nghiệm lớn nhất.

$$\text{Ta có } \frac{d}{dt} f(x(t, x_0^n)) = f'(x(t, x_0^n)), x'(t, x_0^n) = -\|x'(t, x_0^n)\|^2 \leq 0. \quad (4.2.8)$$

Do bất đẳng thức Holder, ta có

$$\int_{t_1}^{t_2} \|x'(t, x_0^n)\|^2 dt \leq \left(\int_{t_1}^{t_2} \|x'(t, x_0^n)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} (t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2.9)$$

Mặt khác từ (4.2.8), ta suy ra

$$\int_{t_1}^{t_2} \|x'(t, x_0^n)\|^2 dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(x(t, x_0^n)) dt = f(x(t_1, x_0^n)) - f(x(t_2, x_0^n)) \quad (4.2.10)$$

Do f là hàm giảm theo biến t trên $[0, \eta(x_0^n))$, $0 \leq t_1 < t_2 < \eta(x_0^n)$, ta suy ra

$$f(x(t_1, x_0^n)) \leq f(x(0, x_0^n)) = f(x_0^n) \quad (4.2.11)$$

Vì $c = \inf_{x \in M} f(x)$, $x(t_2, x_0^n) \in M$,

$$\text{Nên } f(x(t_2, x_0^n)) \geq c \text{ hay } -f(x(t_2, x_0^n)) \leq -c \quad (4.2.12)$$

Từ (4.2.9), (4.2.10), (4.2.11), (4.2.12), ta suy ra

$$\|x(t_2, x_0^n) - x(t_1, x_0^n)\| \leq (f(x_0^n) - c)^{\frac{1}{2}} (t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2.13)$$

Bây giờ ta chứng minh $\eta(x_0^n) = +\infty$. Giả sử trái lại $\eta(x_0^n) < +\infty$,

Do (4.2.13), ta thấy $\|x(t_2, x_0^n) - x(t_1, x_0^n)\| \rightarrow 0$ khi $t_1 \rightarrow \eta(x_0^n)^-$ và $t_2 \rightarrow \eta(x_0^n)^+$. Do đó tồn tại $x^* \in M$ sao cho $\lim_{t \rightarrow \eta(x_0^n)^-} x(t, x_0^n) = x^*$.

Suy ra, khoảng tồn tại nghiệm lớn nhất của $x(t, x_0^n)$ là $[0, \eta(x_0^n)) + \delta(x^*)$ với $\delta(x^*) > 0$. Điều này mâu thuẫn với tính cực đại của $[0, \eta(x_0^n))$

Vậy $[0, \eta(x_0^n)) = +\infty$.

Từ (4.2.8) với mọi $t > 0$ ta có

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f'(x(t, x_0^n))\|^2 dt = f(x(0, x_0^n)) - f(x(t, x_0^n)) < f(x_0^n) - c < +\infty$$

Vì thế tồn tại $t_n \in \{x(t, x_0^n) | t \in [0, \eta(x_0^n))\}$, $t_n \rightarrow +\infty$ sao cho

$$c \leq f(x(t_n, x_0^n)) \leq f(x_0^n) \leq c + \frac{1}{n}, \quad \|f'(x(t_n, x_0^n))\| \leq \frac{1}{n}$$

Phiếm hàm f thỏa: với mọi dãy $\{y_n\}$, $y_n = x(t_n, x_0^n)$, $\{f(y_n)\}$ bị chặn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f'(y_n)\| = 0$, nên theo điều kiện $P.S.$ dãy $\{y_n\}$ có dãy con $\{y_{n_k}\}$ hội tụ. Giả sử $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_0$, khi đó $y_0 \in M$ (vì M đóng).

$$\text{Do } f(y_{n_k}) \leq f(x_0^n) \leq c + \frac{1}{n_k}$$

Cho $k \rightarrow \infty$ trong (4.2.14), ta được $f(y_0) \leq c$.

Mặt khác, do $c = \inf_{x \in M} f(x)$, $y_0 \in M$ nên $c \leq f(y_0)$.

Do đó $f(y_0) = c = \inf_{x \in M} f(x)$.

Điều này chứng tỏ y_0 là điểm tới hạn của f và $f(y_0) = c = \inf_{x \in M} f(x)$. ■

Từ các Bổ đề 4.2.3 và 4.2.4 ta có định lý sau:

Định lý 4.2.2:

Giả sử M là tập liên thông và là một tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f , D là một tập con mở của M và cũng là một tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f . Khi đó

- i) $C_M(D)$ là một tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f và $C_M(D)$ là một tập con mở của M .
 ii) nếu $C_M(D) \neq M$, thì $\partial_M C_M(D)$ là một tập bất biến theo quỹ đạo giảm đầy đủ.
 iii) Nếu $C_M(D) \neq M$ và $\inf_{x \in \partial_M D} f(x) > -\infty$ thì $\inf_{x \in \partial_M C_M(D)} f(x) \geq \inf_{x \in \partial_M D} f(x)$.

Định lý 4.2.3:

Giả sử M là tập liên thông và là tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f , D là một tập con đóng của M , $\text{int } D \neq \emptyset$. ($\text{int } D$ ký hiệu cho phần trong của D đối với M), và D là tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f . Giả sử f thỏa điều kiện P.S. trên $\partial_M D$, f không có điểm tới hạn trên $\partial_M D$ và $\inf_{x \in \partial_M D} f(x) > -\infty$. Khi đó, các kết luận của định lý 4.2.2 vẫn đúng

Chứng minh

Ta chỉ cần chứng minh $C_M(D)$ là một tập con mở của M .

Với mọi $x_0 \in C_M(D)$ tồn tại $t' \in [0, \eta(x_0))$ sao cho $x(t', x_0) \in \text{int } D$

Khi đó do tính phụ thuộc liên tục của phương trình vi phân vào điều kiện đầu, ta có $C_M(D)$ là một tập con mở của M .

Định lý 4.2.3 được chứng minh. ■

4.3 Sự tồn tại nhiều điểm bất động của các toán tử tựa đơn điệu tăng.

Trong phần này, chúng ta đề cập tới các điểm bất động bội của toán tử tựa đơn điệu tăng.

Bổ đề 4.3.1:

Cho P là nón trên E . Giả sử rằng.

(i) $u, v \in C[(t_0, t_0 + a), E]$, $f \in C[(t_0, t_0 + a) \times E, E]$ và $f(t, x)$ là tựa đơn điệu tăng theo x với mỗi $t \in [t_0, t_0 + a)$.

(ii) $u'(t) - f(t, u(t)) \leq v'(t) - f(t, v(t))$, $t \in [t_0, t_0 + a)$.

(iii) $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq g(t, \|x - y\|)$, $x \in E \setminus P$, $y \in \partial P$, với g là hàm duy nhất.

Khi đó, nếu $u(t_0) \leq v(t_0)$, thì $u(t) \leq v(t)$, $t \in [t_0, t_0 + a)$.

Bây giờ, ta đặt thêm một số điều kiện:

(H_1) Cho H là một không gian Hilbert, $P \subset H$ là nón solid, $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm thuộc C^{2-0} . Giả sử

$f'(x) = x - Ax$, $A : P \rightarrow P$ là tựa đơn điệu tăng, và f thỏa điều kiện P.S. trên P .

(H_2) Tồn tại $x_0 \in \text{int } D$, $y_0 \in \text{int } D$ sao cho $Ax_0 \leq x_0$, $Ay_0 \geq y_0$.

Với điều kiện (H_1), thì P là một tập bất biến theo quỹ đạo giảm.

Định lý 4.3.1

Giả sử rằng các điều kiện (H_1) , (H_2) đúng.

i) $y_0 \not\leq x_0$

ii) $\inf_{x \in D_1} f(x) > -\infty$, f không có điểm tới hạn trên $\partial_P D_1$, trong đó $D_1 = [\theta, x_0]$.

Khi đó A có ít nhất hai điểm bất động trên P .

Chứng minh

Đặt $D_2 = \{x \in P : x \geq y_0\}$. Vì H là không gian Hilbert và P là tập lồi đóng nên theo bổ đề 4.3.1 thì D_1, D_2 là các tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f . Vì $y_0 \not\leq x_0$ nên $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Theo định nghĩa của $C_P(D_1)$, ta có $C_P(D_1) \cap D_2 = \emptyset, C_P(D_1) \neq P$.

Từ đó, theo Định lý 4.2.3 thì $\partial_P C_P(D_1)$ là một tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f và

$$c_1 = \inf_{x \in \partial_P C_P(D_1)} f(x) \geq \inf_{x \in \partial_P D_1} f(x) > -\infty.$$

Đặt $c_2 = \inf_{x \in D_1} f(x)$. Theo Định lý 4.2.1 thì c_1, c_2 là các giá trị tới hạn và tồn tại x_1, x_2 sao cho

$$x_1 \in \partial_P C_P(D_1), \quad x_2 \in D_1, \quad f(x_i) = c_i, \quad i = 1, 2.$$

Do đó $f'(x_1) = 0$, suy ra $x_1 - Ax_1 = 0$ hay $x_1 = Ax_1$. Vậy x_1 là điểm bất động của A trên P .

Tương tự ta cũng có x_2 là điểm bất động của A trên P .

Định lý được chứng minh. ■

Định lý 4.3.2:

Giả sử các điều kiện $(H_1), (H_2)$ thỏa và

i) $y_0 \leq x_0$.

ii) Tồn tại $z_0 \in D_2$ với $z_0 \not\leq x_0$ sao cho $\max\{f(\theta), f(z_0)\} < \inf_{x \in \partial_P(D_1 \cap D_2)} f(x)$, ở đây

$$D_1 = [\theta, x_0], D_2 = \{x \in P \mid x \geq y_0\}.$$

iii) f không có điểm tới hạn trên $\partial_P(D_1 \cap D_2)$, $\inf_{x \in \partial_P(D_1 \cup D_2)} f(x) > -\infty$.

Khi đó, A có ít nhất 5 điểm bất động.

Chứng minh

Đặt $D_3 = D_1 \cap D_2$. Theo Bổ đề 4.3.1 ta suy ra D_1, D_2 là hai tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f .

Vậy D_3 cũng là tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f . Theo (4.3.1), ta suy ra

$$\theta \notin C_{D_1}(D_3), z_0 \notin C_{D_2}(D_3).$$

Từ Định lý 4.2.3, ta có $\partial_{D_1} C_{D_1}(D_3), \partial_{D_2} C_{D_2}(D_3)$ là hai tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f .

Đặt $F_1 = D_1 \setminus C_{D_1}(D_3)$, $F_2 = D_2 \setminus C_{D_2}(D_3)$ ta chứng minh được rằng $F_i (i=1,2)$ là các tập bất biến theo quỹ đạo giảm của f .

Đặt

$$c_1 = \inf_{x \in \partial_{D_1} C_{D_1}(D_3)} f(x), c_2 = \inf_{x \in \partial_{D_2} C_{D_2}(D_3)} f(x) \\ c_3 = \inf_{x \in F_1} f(x), c_4 = \inf_{x \in F_2} f(x), c_5 = \inf_{x \in D_3} f(x)$$

Theo Định lý 4.2.1, ta có $c_i (i=1,2,3,4,5)$ là các giá trị tới hạn, và tồn tại năm điểm

$x_i (i=1,2,3,4,5)$ sao cho $f(x_i) = c_i (i=1,2,3,4,5)$.

Rõ ràng $x_i (i=1,2,3,4,5)$ là năm điểm cô định của A .

Định lý được chứng minh. ■

Bổ đề 4.3.2:

Cho $X = \mathbb{R}^2$, $f: X \rightarrow X, f((x, y)) = (f_1(x, y); f_2(x, y))$. nếu $f_1(x, y)$ là hàm tăng theo biến y và $f_2(x, y)$ là hàm tăng theo biến x thì f là tựa đơn điệu tăng.

Chứng minh.

Đặt $K = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0\}$ và $K^* = \{(a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2 | a_1 \geq 0, a_2 \geq 0\}$.

Với $(x; y), (x'; y') \in K; (x; y) \leq (x'; y'), \forall \varphi = (a_1; a_2) \in K^*$ thỏa $\varphi((x, y)) = \varphi((x', y'))$, ta cần chứng minh $\varphi(f(x, y)) \leq \varphi(f(x', y'))$

Thật vậy, ta có $\varphi(f(x, y)) = a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y)$,

$$\varphi(f(x', y')) = a_1 f_1(x', y') + a_2 f_2(x', y')$$

Từ $\varphi((x, y)) = \varphi((x', y'))$, suy ra $a_1 x + a_2 y = a_1 x' + a_2 y'$ hay $a_1(x - x') = a_2(y' - y)$

(4.3.2)

Vì $a_1 \geq 0$ và $x \leq x'$ nên $a_1(x - x') \leq 0$

Tương tự, vì $a_2 \geq 0$ và $y \leq y'$ nên $a_2(y' - y) \geq 0$

Do đó (4.3.2) xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a_1 = 0 \text{ và } a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \text{ và } y = y' \\ a_2 = 0 \text{ và } x = x' \\ x = x' \text{ và } y = y' \end{cases}$$

- Nếu $a_1 = a_2 = 0$, thì $\varphi(f(x, y)) = \varphi(f(x', y')) = 0$
- Nếu $a_1 = 0$ và $y = y'$, thì $\varphi(f(x, y)) = a_2(f_2(x, y))$ và $\varphi(f(x', y')) = a_2(f_2(x', y'))$

Do f_2 là hàm tăng theo x và $x \leq x'$, nên $\varphi(f(x, y)) \leq \varphi(f(x', y'))$

- Nếu $a_2 = 0$ và $x = x'$, thì $\varphi(f(x, y)) = a_1(f_1(x, y))$ và $\varphi(f(x', y')) = a_1(f_1(x, y'))$

Do f_1 là hàm tăng theo y và $y \leq y'$ nên $\varphi(f(x, y)) \leq \varphi(f(x', y'))$

- Nếu $x = x'$ và $y = y'$ thì $\varphi(f(x, y)) \leq \varphi(f(x', y'))$

Vậy Bổ đề được chứng minh. ■

Ví dụ 4.3.1.

Cho $H = \mathbb{R}^2$, $P = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Xét ánh xạ $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$A((x_1, x_2)) = \left(\frac{1}{8}(1 + \sin x_1) + \frac{1}{4}x_2, \frac{1}{4}x_1 + 5\pi(1 + \cos x_2) \right); (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \text{ Khi đó } A \text{ có ít nhất hai điểm}$$

bất động trên P .

Thật vậy

Ta có $A: P \rightarrow P$ là tựa đơn điệu tăng vì ánh xạ $x_2 \mapsto \frac{1}{8}(1 + \sin x_1) + \frac{1}{4}x_2$ tăng với mọi x_1 và

$x_1 \mapsto \frac{1}{4}x_1 + 5\pi(1 + \cos x_2)$ tăng với mọi x_2 .

Đặt

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - g(x_1, x_2),$$

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{8}x_1 - \frac{1}{8}x_1 \cos x_1 + \frac{1}{4}x_1 x_2 + 5\pi x_2 + 5\pi \sin x_2.$$

$$\text{Khi đó, ta có } \left(\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) = \left(\frac{1}{8}(1 + \sin x_1) + \frac{1}{4}x_2, \frac{1}{4}x_1 + 5\pi(1 + \cos x_2) \right) \\ = A((x_1, x_2))$$

$$\left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) = (x_1, x_2) - \left(\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) \\ = x - A((x_1, x_2))$$

với $x = (x_1, x_2)$

đặt $x_0 = (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $y_0 = (\pi, 8\pi)$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} Ax_0 &= \left(\frac{1}{8} \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{4} \pi, \frac{1}{4} \frac{\pi}{2} + 5\pi(1 + \cos \pi) \right) \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8} \right) \leq \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) = x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ay_0 &= \left(\frac{1}{8} (1 + \sin \pi) + 2\pi, \frac{1}{4} \pi + 5\pi(1 + \cos 8\pi) \right) \\ &= \left(\frac{1}{8} + 2\pi, \frac{41}{4} \pi \right) > (\pi, 8\pi) = y_0. \end{aligned}$$

Bây giờ ta chứng minh $f(x_1, x_2) > -5\pi^2 - \frac{\pi}{16}, (x_1, x_2) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi]$.

Thật vậy, hàm $g(x_1) = \frac{1}{8} \cos x_1 - \frac{1}{8} x_1$ giảm trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, nên $g(x_1) \geq g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{16}$, hàm

$g(x_2) = -5\pi x_2 - 5\pi \sin x_2$ giảm trên $[0, \pi]$ nên $g(x_2) \geq g(\pi) = -5\pi$, và $\forall (x_1, x_2) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi]$,

ta có $h(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{4}x_1x_2 \geq x_1x_2 - \frac{1}{4}x_1x_2 = \frac{3}{4}x_1x_2 \geq 0$.

Từ $y_0 > x_0, y_0 x_0$ (do $x_0 - y_0 \notin P$) và

$$f(x_1, x_2) > -5\pi^2 - \frac{\pi}{16}, \forall (x_1, x_2) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi],$$

Ta suy ra $\inf_{x \in [\theta, x_0]} f(x_1, x_2) > -5\pi^2 - \frac{\pi}{16}$

Ta cũng chứng minh được rằng $A\left(\frac{\pi}{2}, y\right) \neq \left(\frac{\pi}{2}, y\right), A(x, \pi) \neq (x, \pi), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \pi$.

Vậy f không có điểm tới hạn trên biên của $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi]$. Theo Định lý 4.3.1, thì A có ít nhất hai điểm bất động trên P .

KẾT LUẬN

Từ quá trình nghiên cứu tài liệu, cùng với sự hướng dẫn, tận tình lí giải thêm của thầy hướng dẫn tôi đã nắm được nội dung lý thuyết về ánh xạ tựa đơn điệu tăng trên không gian có thứ tự. Đến nay theo cách hiểu của mình, tôi đã trình bày lại các kết quả nghiên cứu được trong luận văn với bốn chương. Trong luận văn này tôi đã cố gắng lý giải chi tiết hơn, cụ thể hơn những chỗ khó với mong muốn bạn đọc chỉ cần có những kiến thức cơ sở về giải tích số và giải tích hàm cũng có thể tiếp nhận được nội dung của tài liệu này. Đồng thời tôi cũng thêm vào một số mệnh đề mà theo tôi nghĩ với kết quả của nó chúng ta sẽ dễ dàng hơn khi tiếp cận với các chứng minh, các kết quả trong tài liệu. Tôi hy vọng với luận văn này sẽ góp phần làm cho lý thuyết về không gian có thứ tự, ánh xạ tựa đơn điệu tăng trở nên phổ biến hơn, gần gũi hơn với các sinh viên học toán. Và tôi nghĩ nếu đề tài được tiếp tục nghiên cứu và phát triển chắc chắn sẽ còn nhiều điều thú vị được tìm thấy. Đây là lần đầu tiên tôi soạn thảo một tài liệu lớn; với quỹ thời gian cũng tương đối ngắn và kiến thức cá nhân cũng còn hạn hẹp và tôi cũng chưa có kinh nghiệm trong việc trình bày một văn bản vì thế chắc chắn sẽ có những hạn chế, thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý chân tình của quý thầy cô và các bạn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] K. Deimling (1984)

Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag.

[2] G. Herzog (1988).

A fixed point theorem for quasimonotone increasing mappings.

Acta Sci. Math (Szeged), 64, 293, - 297 v57, 35-43

[3] G. Herzog (2000).

On quasimonotone increasing systems of ordinary differential equations.

Portugaliae Math, v57, 35-43

[4] G. Herzog (2000).

A funnel section property for systems with quasimonotone increasing right- hand side.

Glasgow Math. J, 239 – 242.

[5] G. Herzog (2000).

Quasimonotonicity..

Nonlin Anal, 47, 2213 – 2224.

[6] S. Hu (1988)

Fixed points for quasimonotone maps in $\mathbb{R}^n$.

Proc. Amer. Math. Soc, 115, 1111 – 1114.

[7] P. Volkmann (1972)

*Gewöhnliche differentialungleichungen mit quasimonotone wachsenden
functionen in topologische vektorraumen.*

Math. Z, 127, 157 – 164.