

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

NGUYỄN VĂN TIẾN

**BÀI TOÁN BIÊN DẠNG TUẦN HOÀN
CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
HÀM BẬC NHẤT PHI TUYẾN**

Chuyên ngành : **Toán Giải tích**

Mã số : **60.46.01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS.TS. NGUYỄN ANH TUẤN

Thành phố Hồ Chí Minh - 2011

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đến **PGS.TS Nguyễn Anh Tuấn**, người đã tận tâm hướng dẫn và tạo điều kiện tôi đã để tôi có thể hoàn thành luận văn.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến Quý Thầy, Cô trong Hội đồng chấm luận văn đã giành thời gian đọc, chỉnh sửa và đóng góp ý kiến giúp cho tôi hoàn thành luận văn này một cách hoàn chỉnh.

Tôi xin cảm ơn Ban Giám Hiệu, Phòng KHCN-Sau Đại học cùng toàn thể thầy cô khoa Toán-Tin học trường Đại học Sư Phạm TP. Hồ Chí Minh đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt thời gian nghiên cứu đề tài.

Cuối cùng, trong quá trình viết luận văn này khó tránh khỏi những thiếu sót, rất mong nhận được sự góp ý của Quý Thầy Cô và bạn đọc nhằm bổ sung và hoàn thiện đề tài hơn.

Xin chân thành cảm ơn.

TP Hồ Chí Minh tháng 12 năm 2010

BẢNG CÁC KÍ HIỆU

$\mathbb{N}$	Tập hợp số tự nhiên.
R	Tập hợp số thực.
$R_+ = [0, +\infty)$	Tập hợp số thực không âm.
$R_- = (-\infty, 0]$	Tập hợp số thực không dương.
$\overline{A}$	Bao đóng của tập A.
$C([a, b]; R)$	Không gian Banach các hàm liên tục $v: [a, b] \rightarrow R$ với chuẩn $\ v\ _C = \max \{ v(t) : a \leq t \leq b\}$
$C([a, b]; D)$	Không gian các hàm liên tục $v: [a, b] \rightarrow D, D \subseteq R$
$C_{\lambda\mu}([a, b]; D)$	Không gian các hàm liên tục $v: [a, b] \rightarrow D$ thỏa mãn điều kiện $\lambda v(a) + \mu v(b) = 0$
$\widetilde{C}([a, b]; D)$	Tập các hàm liên tục tuyệt đối $v: [a, b] \rightarrow D$.
$B_{\lambda\mu}^i([a, b]; R)$	Tập các hàm $v \in C([a, b]; R)$ thỏa mãn điều kiện $[\lambda v(a) + \mu v(b)] \operatorname{sgn}((2-i)\lambda v(a) + (i-1)\mu v(b)) \leq c$ trong đó $\lambda, \mu, c \in R$ và $i \in \{1, 2\}$.
$L([a, b]; R)$	Không gian Banach các hàm khả tích Lebesgue $p: [a, b] \rightarrow R$ với chuẩn $\ p\ _L = \int_a^b p(s) ds$.
$L([a, b]; D)$	Không gian các hàm $p: [a, b] \rightarrow D$ khả tích Lebesgue, D là tập con của R.
M_{ab}	Tập các hàm đo được $\tau: [a, b] \rightarrow [a, b]$;
L_{ab}	Tập các toán tử $\ell: C([a, b]; R) \rightarrow L([a, b]; R)$ tuyến tính bị chặn sao cho với mỗi ℓ tồn tại $\eta \in L([a, b]; R_+)$ thỏa mãn bất đẳng thức $ \ell(v)(t) \leq \eta(t) \ v\ _C \quad \forall t \in [a, b], v \in C([a, b]; R)$ Khi đó ℓ được gọi là toán tử tuyến tính bị chặn mạnh.
P_{ab}	Tập các toán tử $\ell: C([a, b]; R_+) \rightarrow L([a, b]; R_+)$ sao cho ℓ tuyến tính và $\ell \in L_{ab}$.

K_{ab}

Tập các toán tử $F : C([a, b]; R) \rightarrow L([a, b]; R)$ liên tục thoả mãn điều kiện Carathéodory, nghĩa là với mỗi $r > 0$ tồn tại $q_r \in L([a, b]; R_+)$ sao cho

$$|F(v)(t)| \leq q_r(t), \forall t \in [a, b], \|v\|_C \leq r.$$

$K([a, b] \times A; B)$

Tập các hàm $f : [a, b] \times A \rightarrow B, (A \in R^n, B \subseteq R, n \in \mathbb{N})$ thoả điều kiện Carathéodory, nghĩa là :

- + Hàm $f(\cdot, x) : [a, b] \rightarrow B$ đo được với mỗi $x \in A$
- + Hàm $f(t, \cdot) : A \rightarrow B$ liên tục với mỗi $t \in [a, b]$
- + Với mỗi $r > 0$ tồn tại $q_r \in L([a, b]; R_+)$ sao cho

$$|f(t, x)| \leq q_r(t) \quad \forall t \in [a, b], \|x\| \leq r.$$

Toán tử t_0 -Volterra ($t_0 \in [a, b]$)

Tập các toán tử $\ell \in L_{ab}$ sao cho với hai số tùy ý

$a_1 \in [a, t_0], b_1 \in [t_0, b]$ sao cho $a_1 \neq b_1$ và với mọi hàm

$v \in C([a, b]; R)$ thoả mãn điều kiện : $v(t) = 0, t \in [a_1, b_1]$

ta có $\ell(v)(t) = 0$ hầu khắp nơi trên $[a_1, b_1]$.

$$[x]_+ = \frac{1}{2}(|x| + x) = \frac{1}{2}x(\operatorname{sgn} x + 1) \quad [x]_- = \frac{1}{2}(|x| - x) = \frac{1}{2}x(\operatorname{sgn} x - 1)$$

Toán tử $\ell \in L_{ab}$ được gọi là không tầm thường, nếu $\ell(1) \neq 0$.

MỞ ĐẦU

Phương trình vi phân hàm (PTVPH) xuất hiện vào thế kỉ 18 với vai trò như những công thức toán học trong các bài toán vật lí và hình học. Ta có thể tìm thấy chúng trong những công trình của Ôle và Condorcet. Tuy nhiên, cho đến cuối thế kỉ 19, PTVPH chỉ được nghiên cứu về những ứng dụng cá biệt và chưa được nghiên cứu một cách hệ thống.

Chỉ trong các công trình của E.Schmidt, F.Shurer và E.Hilb ở những năm đầu thế kỉ 20, những cố gắng đầu tiên về một nghiên cứu có tính hệ thống về những phương trình đặc biệt với đối số chậm xuất hiện. Tầm quan trọng trong dạng PTVPH này đã nảy sinh trong thập niên 30 đặc biệt là những ứng dụng mở rộng trong cơ học, sinh học và kinh tế. Tại thời điểm này, những cơ sở của lý thuyết định tính về phương trình đối số chậm và phương trình vi tích phân được đặt ra trong công trình của Myshkis và R.Bellman. Họ và một số nhà toán học khác theo hướng này đã được công nhận trong việc xây dựng lý thuyết định tính mở rộng của PTVPH tồn tại cho đến bây giờ. Lý thuyết đó không chỉ quan trọng trong ứng dụng mà còn ảnh hưởng rộng rãi đến nhiều lãnh vực của toán học thuần túy.

Trong thập kỉ 70, người ta chú ý nhiều đến việc xây dựng lý thuyết về bài toán biên của PTVPH. Nhiều phương pháp khác nhau đã được đưa ra sử dụng trong vấn đề này. Thí dụ: lý thuyết toán tử Fredholm, phương pháp tham số nhỏ, phương pháp topo,...v.v..

Từ quan điểm đương thời, có thể nói rằng phương pháp giải tích hàm và phương pháp topo là những phương pháp hữu dụng nhất. Qua những ứng dụng có tính hệ thống của các phương pháp này, cơ sở lý thuyết về bài toán biên cho một lớp rộng PTVPH đã được xây dựng.

Tuy nhiên cho đến tận bây giờ, thực tế bài toán biên cho PTVPH được nghiên cứu chỉ với những thành công bộ phận. Khó khăn nảy sinh trong việc nghiên cứu về PTVPH nằm trong đặc trưng không cục bộ của phương trình và chúng xuất hiện ngay cả trong phương trình tuyến tính. Ví dụ, câu hỏi về tính giải được của bài toán biên đơn giản nhất (bài toán giá trị đầu):

$$u'(t) = p(t)u(\tau(t)) + q(t), \quad u(a) = 0,$$

(với $p, q: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả tích Lebesgue và $\tau: [a; b] \rightarrow [a; b]$ là hàm đo được), không bao giờ trở nên tầm thường như với phương trình vi phân thông thường, có nghĩa là trong trường hợp $\tau(t) = t, t \in [a; b]$.

Bởi vậy ta cũng không ngạc nhiên khi biết rằng trong những tài liệu chuyên khảo không có nhiều các thông tin chi tiết về tính giải được của bài toán giá trị đầu.

Mặt khác, nếu độ lệch $\tau(t) - t$ là “nhỏ” (có nghĩa là nếu phương trình là “đóng” với PTVP thường), thì một cách trực giác ta trông đợi bài toán đã cho có nghiệm duy nhất. Trong những trường hợp đơn giản, hiệu lực của các giả thiết có thể thử lại trực tiếp. Với những bài toán phức tạp

hơn thì phương pháp toàn cục không cung cấp đủ độ chính xác, do đó tự nhiên ta cần tìm một kỹ thuật chính xác hơn để nghiên cứu về PTVPH phát sinh.

Về phần PTVP thường, một lý thuyết hoàn toàn hiệu quả đã được xây dựng cho bài toán giá trị biên, sử dụng những phương pháp mà cơ sở của nó nằm trong giải tích toán học. Việc này tương ứng với những nỗ lực để điều chỉnh các phương pháp của giải tích toán học trong việc nghiên cứu PTVPH. Trong một vài năm sau cùng những nỗ lực này đã thành công trong trường hợp một vài bài toán biên của PTVPH. Đặc biệt trong các công trình của I.Kiguradze và P.Buza, những điều kiện phức tạp về tính giải được và giải được duy nhất của một lớp rộng thật sự bài toán biên cho PTVPH cả tuyến tính lẫn phi tuyến đã được tìm ra.

Được truyền cảm hứng từ những kết quả này tôi quyết định sử dụng phương pháp giải tích toán học và các nghiên cứu kỹ thuật về bài toán biên của PTVP thông thường với những điều chỉnh phù hợp cho PTVPH. Phần lớn phương pháp là đánh giá tiên nghiệm và kỹ thuật về bất đẳng thức vi phân.

Trong luận văn này tôi nghiên cứu bài toán biên dạng tuần hoàn cho phương trình vi phân hàm bậc nhất phi tuyến. Bài toán có dạng như sau:

Xét sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân hàm phi tuyến:

$$u'(t) = F(u)(t)$$

với điều kiện biên

$$\lambda u(a) + \mu u(b) = h(u)$$

Trong đó $F \in K_{ab}$, $\lambda, \mu \in R, |\lambda| + |\mu| \neq 0$, $h: C([a, b]; R) \rightarrow R$ là hàm liên tục thoả mãn $\forall r > 0, \exists M_r \in R_+$ sao cho $|h(v)| \leq M_r$ khi $\|v\|_C \leq r$

Nghiệm của bài toán trên là hàm $u \in \widetilde{C}([a, b]; R)$ sao cho $u'(t) = F(u)(t)$ hầu khắp nơi trên $[a, b]$ và thoả mãn điều kiện biên $\lambda u(a) + \mu u(b) = h(u)$.

Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1. Chúng ta xây dựng điều kiện cần và đủ để một toán tử tuyến tính và bị chặn mạnh ℓ thuộc vào lớp $V_{ab}^+(\lambda, \mu)$.

Chương 2. Đây là nội dung chính của luận văn. Trong chương 2 chúng ta xây dựng các điều kiện đủ để bài toán biên dạng tuần hoàn cho phương trình vi phân hàm bậc nhất phi tuyến có nghiệm và có duy nhất nghiệm.

Chương 3. Trong chương 3 chúng ta xây dựng các tính chất hiệu quả để bài toán biên dạng tuần hoàn cho phương trình vi phân hàm bậc nhất phi tuyến có nghiệm và có duy nhất nghiệm. Trong phần cuối của chương, chúng ta áp dụng các kết quả của bài toán biên dạng tuần hoàn cho

phương trình vi phân hàm phi tuyến để nghiên cứu các điều kiện đủ cho việc tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán biên dạng tuần hoàn cho phương trình vi phân đối số lệch.

CHƯƠNG 1:

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC VI PHÂN

Trong luận văn này, chúng ta nghiên cứu tính giải được của bài toán biên dạng tuần hoàn cho phương trình vi phân hàm bậc nhất phi tuyến. Trước hết ta giới thiệu các bất đẳng thức vi phân.

1.1 BÀI TOÁN BIÊN DẠNG TUẦN HOÀN CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM BẬC NHẤT TUYẾN TÍNH

Xét phương trình vi phân hàm tuyến tính bậc nhất:

$$u'(t) = \ell(u)(t) + q(t) \quad (1.1)$$

với điều kiện biên

$$\lambda u(a) + \mu u(b) = c \quad (1.2)$$

trong đó $\ell \in L_{ab}$, $q \in L([a, b]; \mathbb{R})$; $c \in \mathbb{R}$ và $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sao cho $|\lambda| + |\mu| \neq 0$ và $\lambda\mu < 0$.

Nghiệm của bài toán (1.1), (1.2) là hàm $u \in \tilde{C}([a, b]; \mathbb{R})$ thỏa mãn phương trình (1.1) hầu khắp nơi trên $[a, b]$ và thỏa mãn điều kiện biên (1.2).

Lưu ý. Các đẳng thức và bất đẳng thức của các hàm khả tích đều hiểu là hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Cùng với bài toán (1.1), (1.2) ta xét bài toán thuần nhất tương ứng

$$u'(t) = \ell(u)(t) \quad (1.1_0)$$

$$\lambda u(a) + \mu u(b) = 0 \quad (1.2_0)$$

Từ các kết quả của I. Kiguradze, B. Puza trong [1] ta có định lý sau:

Định lý 1.1. Bài toán (1.1), (1.2) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi bài toán thuần nhất tương ứng (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường.

Chú ý 1.2. Theo định lý Riesz-Schauder thì nếu bài toán thuần nhất (1.1₀), (1.2₀) không có nghiệm tầm thường thì tồn tại $q \in L([a, b]; \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ sao cho bài toán (1.1), (1.2) không có nghiệm.

1.2 MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC VI PHÂN

Giả sử rằng $|\lambda| + |\mu| \neq 0$ và $\lambda\mu \leq 0$.

Hơn nữa, trong trường hợp $\lambda = -\mu$ thì toán tử $\ell \in L_{ab}$ phải là toán tử không tầm thường, nghĩa là $\ell(1) \not\equiv 0$.

Định nghĩa 1.3 Ta nói toán tử $\ell \in L_{ab}$ thuộc vào tập hợp $V_{ab}^+(\lambda, \mu)$, nếu ℓ thỏa mãn 2 điều kiện sau:

(i) Bài toán (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường

(ii) Với mọi $q \in L([a, b]; R_+)$, $c \in R$ thỏa mãn

$$(\operatorname{sgn} \lambda - \operatorname{sgn} \mu)c \geq 0 \quad (1.3)$$

thì bài toán (1.1), (1.2) có nghiệm không âm.

Chú ý 1.4. Theo định nghĩa, toán tử $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ nếu và chỉ nếu với mọi $u, v \in \widetilde{C}([a, b]; \mathbb{R})$ thỏa mãn các bất đẳng thức sau:

$$(i) \quad u'(t) \leq \ell(u)(t) + q(t), \quad t \in [a, b]$$

$$(ii) \quad v'(t) \geq \ell(v)(t) + q(t), \quad t \in [a, b]$$

$$(iii) \quad |\lambda|u(a) - |\mu|u(b) \leq |\lambda|v(a) - |\mu|v(b)$$

thì $u(t) \leq v(t)$ với $t \in [a, b]$.

Chứng minh.

Đặt $h(t) = v(t) - u(t)$. Theo (i), (ii), (iii) ta có

$$h'(t) \geq \ell(h)(t), \quad t \in [a, b] \quad \text{và} \quad |\lambda|h(a) - |\mu|h(b) \geq 0$$

Dễ thấy $h(t)$ là nghiệm của phương trình sau:

$$h'(t) = \ell(h)(t) + q(t) \quad \text{và} \quad \lambda h(a) + \mu h(b) = c$$

với

$$q(t) = h'(t) - \ell(h)(t) \geq 0, \quad c = \lambda h(a) + \mu h(b)$$

$$\text{Do } c(\operatorname{sgn} \lambda - \operatorname{sgn} \mu) = 2c \cdot \operatorname{sgn} \lambda = 2[\lambda h(a) + \mu h(b)] \operatorname{sgn} \lambda = 2[|\lambda|h(a) - |\mu|h(b)] \geq 0$$

nên theo định nghĩa của $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ ta có bài toán có nghiệm duy nhất $h(t)$ không âm. Từ đó suy ra $u(t) \leq v(t)$ với $t \in [a, b]$.

Chú ý 1.5. Theo Định lý 1.1, rõ ràng nếu $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ thì bài toán (1.1), (1.2) có nghiệm duy nhất với mỗi $c \in \mathbb{R}$ và $q \in L([a, b]; \mathbb{R})$.

Hơn nữa, nếu $\ell \in P_{ab}$ và $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ thì $|\mu| < |\lambda|$.

Chứng minh.

Do $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ nên với mọi $q \in L([a, b]; R_+)$, $c \in R$ thỏa mãn điều kiện $(\operatorname{sgn} \lambda - \operatorname{sgn} \mu)c \geq 0$, bài toán (1.1), (1.2) có nghiệm duy nhất $u(t) \in C([a, b]; R_+)$. Mặt khác, do $\ell \in P_{ab}$ nên $\ell(u)(t) \in L([a, b]; R_+)$.

Do đó ta suy ra $u'(t) = \ell(u)(t) + q(t) \geq 0$.

Do hàm $q(t)$ ta chọn là hàm dương bất kì nên ta phải có $u'(t) = \ell(u)(t) + q(t) > 0$ hay $u(t)$ là hàm tăng ngặt theo t hay $u(b) > u(a)$.

Lại do

$$\begin{cases} \lambda u(a) + \mu u(b) = c \\ (\operatorname{sgn} \lambda - \operatorname{sgn} \mu)c \geq 0 \\ \lambda \mu \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\lambda u(a) + \mu u(b)](\operatorname{sgn} \lambda - \operatorname{sgn} \mu) = c(\operatorname{sgn} \lambda - \operatorname{sgn} \mu) \geq 0 \\ \operatorname{sgn} \lambda = -\operatorname{sgn} \mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |\lambda|u(a) - |\mu|u(b) \geq 0 \Leftrightarrow |\lambda| \geq |\mu| \frac{u(b)}{u(a)} > |\mu|$$

nên ta có $|\mu| < |\lambda|$.

Mệnh đề 1.6. Giả sử $|\mu| < |\lambda|$ và

$$\ell \in P_{ab}$$

Khi đó $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ nếu và chỉ nếu bài toán

$$u'(t) \leq \ell(u)(t), \quad \lambda u(a) + \mu u(b) = 0 \quad (1.4)$$

không có nghiệm không âm khác tầm thường.

Chứng minh

Điều kiện cần: Giả sử $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$, ta chứng minh bài toán (1.4) không có nghiệm không âm khác tầm thường.

Gọi u là một nghiệm của bài toán (1.4).

Vì $\lambda \mu \leq 0$ và $\lambda u(a) + \mu u(b) = 0$ nên ta có $|\lambda|u(a) - |\mu|u(b) = 0$

Áp dụng Chú ý 1.4 với $v(t) \equiv 0$, $q(t) \equiv 0$ ta được $u(t) \leq 0$ với $t \in [a, b]$.

Do đó, bài toán (1.4) không có nghiệm không âm khác tầm thường.

Điều kiện đủ: Giả sử bài toán (1.4) không có nghiệm không tầm thường không âm. Ta chứng minh $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ theo định nghĩa (1.1)

Gọi u_0 là nghiệm của bài toán thuần nhất (1.1₀), (1.2₀). Ta chứng minh $u_0(t) \equiv 0$

Ta có:

$$|u_0(t)|' = [u_0(t) \operatorname{sgn}(u_0(t))] = u_0'(t) \operatorname{sgn} u_0(t) = \ell(u_0)(t) \operatorname{sgn} u_0(t)$$

Mặt khác, do

$$\ell \in P_{ab} \Rightarrow \begin{cases} \ell(|u_0|)(t) \geq \ell(u_0)(t) \\ \ell(|u_0|)(t) \geq -\ell(u_0)(t) \end{cases} \Rightarrow \ell(|u_0|)(t) \geq |\ell(u_0)(t)| \geq \ell(u_0)(t) \operatorname{sgn} u_0(t)$$

Do $\lambda\mu \leq 0$ nên từ điều kiện biên (2.2₀) ta có $\lambda|u_0(a)| + \mu|u_0(b)| = 0$.

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} (i) \quad & |u_0(t)|' \leq \ell(|u_0|)(t), \quad t \in [a, b] \\ (ii) \quad & \lambda|u_0(a)| + \mu|u_0(b)| = 0 \end{aligned}$$

Vì vậy, $|u_0|$ là nghiệm của bài toán (1.4). Như vậy, $|u_0| \equiv 0$ nghĩa là bài toán thuần nhất (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường.

Gọi u là nghiệm của bài toán (1.1), (1.2) với $q \in L([a, b]; \mathbb{R}_+)$ và $c \in \mathbb{R}$ sao cho $(\operatorname{sgn} \lambda - \operatorname{sgn} \mu)c \geq 0$. Ta chứng minh $u(t) \geq 0$

Dễ thấy

$$\frac{c \operatorname{sgn} \lambda}{|\lambda| - |\mu|} \geq 0$$

Đặt

$$v(t) = u(t) - \frac{c \operatorname{sgn} \lambda}{|\lambda| - |\mu|}, \quad t \in [a, b]$$

Ta có

$$\begin{aligned} v'(t) &= u'(t) = \ell(u)(t) + q(t) \geq \ell(u)(t) \\ \ell(v)(t) &= \ell\left(u - \frac{c \operatorname{sgn} \lambda}{|\lambda| - |\mu|}\right)(t) = \ell(u)(t) - \ell\left(\frac{c \operatorname{sgn} \lambda}{|\lambda| - |\mu|}\right)(t) \leq \ell(u)(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v'(t) \geq \ell(v)(t)$$

Do $\ell \in P_{ab}$ nên $|v|'(t) \leq \ell(|v|)(t)$ (chứng minh giống ở bước 1).

Do đó ta có

$$\begin{cases} |v|'(t) \leq \ell(|v|)(t) \\ v'(t) \geq \ell(v)(t) \end{cases} \Rightarrow |v|'(t) - v'(t) \leq \ell(|v|)(t) - \ell(v)(t) \Rightarrow 2[v]_-'(t) \leq \ell(2[v]_-(t))$$

$$\text{Từ đó suy ra} \quad [v(t)]_-' \leq \ell([v]_-(t)), \quad t \in [a, b] \quad (*)$$

Mặt khác, từ điều kiện biên $\lambda v(a) + \mu v(b) = 0$, do $\lambda\mu \leq 0$ ta có

$$\lambda v(a) + \mu v(b) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sgn} v(a) [\lambda v(a) + \mu v(b)] = 0 \Leftrightarrow \lambda|v(a)| + \mu|v(b)| = 0$$

$$\text{Do đó} \quad \begin{cases} \lambda v(a) + \mu v(b) = 0 \\ \lambda |v(a)| + \mu |v(b)| = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda [v(a)]_- + \mu [v(b)]_- = 0 \quad (**)$$

Từ (*), (**) ta suy ra $[v]_- \geq 0$ là nghiệm của bài toán (1.4).

Từ đó ta có $[v]_- \equiv 0 \Rightarrow |v(t)| = v(t), t \in [a, b]$

Mà $u(t) = v(t) + \frac{c \operatorname{sgn} \lambda}{|\lambda| - |\mu|}, t \in [a, b]$ nên $u(t) \geq 0, t \in [a, b]$.

Theo định nghĩa 1.3 ta có toán tử $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$.

Định lý 1.7. Giả sử $|\mu| < |\lambda|$ và $\ell \in P_{ab}$. Khi đó toán tử $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ nếu và chỉ nếu tồn tại hàm số $\gamma \in \tilde{C}([a, b]; (0, +\infty))$ thoả mãn các bất đẳng thức

$$\gamma'(t) \geq \ell(\gamma)(t), t \in [a, b] \quad (1.5)$$

$$|\lambda| \gamma(a) > |\mu| \gamma(b) \quad (1.6)$$

Chứng minh

Điều kiện cần: Giả sử tồn tại hàm số $\gamma \in \tilde{C}([a, b]; (0, +\infty))$ thoả mãn hai bất đẳng thức (1.5), (1.6).

Ta chứng minh $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ theo định nghĩa.

Bước 1. Gọi u là một nghiệm của bài toán (1.1), (1.2) với $q \in L([a, b]; \mathbb{R}_+)$ và $c \in \mathbb{R}$ thoả mãn bất đẳng thức

$$(\operatorname{sgn} \lambda - \operatorname{sgn} \mu) c \geq 0.$$

Ta chứng minh $u(t) \geq 0, t \in [a, b]$.

Do $\lambda \mu \leq 0$ nên từ bất đẳng thức $(\operatorname{sgn} \lambda - \operatorname{sgn} \mu) c \geq 0$ ta có $2c \operatorname{sgn} \lambda \geq 0$.

Do đó
$$[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn} \lambda = c \operatorname{sgn} \lambda \Leftrightarrow |\lambda| u(a) - |\mu| u(b) = c \operatorname{sgn} \lambda \geq 0$$

Từ đó suy ra
$$|\lambda| u(a) \geq |\mu| u(b)$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$u(t) \geq 0, t \in [a, b]$$

Giả sử trái lại. Khi đó tồn tại $t_0 \in [a, b]$ sao cho

$$u(t_0) < 0$$

Đặt $r = \max \left\{ -\frac{u(t)}{\gamma(t)}, t \in [a, b] \right\}$ và

$$w(t) = r \gamma(t) + u(t), t \in [a, b]$$

Theo đó ta có

$$r > 0$$

Rõ ràng

$$w(t) \geq 0, t \in [a, b]$$

và do $-\frac{u(t)}{\gamma(t)}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, nên tồn tại $t_* \in [a, b]$ sao cho $r = -\frac{u(t_*)}{\gamma(t_*)}$.

Từ đó ta có

$$w(t_*) = 0$$

Do

$$w'(t) = r\gamma'(t) + u'(t) \geq r\ell(\gamma)(t) + \ell(u)(t) + q(t) = \ell(w)(t) + q(t) \geq 0, t \in [a, b]$$

nên $w(t)$ đồng biến trên $[a, b]$. Mặt khác $w(t_*) = 0$ và $w(t) \geq 0, t \in [a, b]$ nên ta phải có $w(a) = 0$. Từ đó ta có

$$|\lambda|u(a) = -r|\lambda|\gamma(a) < -r|\mu|\gamma(b) = |\mu|(u(b) - w(b)) \leq |\mu|u(b)$$

Điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức $|\lambda|u(a) \geq |\mu|u(b)$. Vậy $u(t) \geq 0, t \in [a, b]$.

Bước 2. Ta chứng minh bài toán thuần nhất (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường.

Gọi u_0 là một nghiệm của bài toán (1.1₀), (1.2₀). Hiển nhiên $-u_0$ cũng là một nghiệm của bài toán (1.1₀), (1.2₀), như vậy, theo chứng minh trên, ta có

$$u_0(t) \geq 0, \quad -u_0(t) \geq 0, \quad t \in [a, b]$$

Do đó, $u_0 \equiv 0$

Điều kiện đủ: Giả sử $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$. Ta chứng minh tồn tại $\gamma \in \tilde{C}([a, b]; (0, +\infty))$ thỏa mãn (2.7), (2.8).

Chú ý rằng do giả thiết $|\mu| < |\lambda|$ nên ta có $\lambda \neq 0$.

Do $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ nên theo định nghĩa 1.2 bài toán

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \ell(\gamma)(t) \\ \lambda\gamma(a) + \mu\gamma(b) = \operatorname{sgn} \lambda \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất γ và

$$\gamma(t) \geq 0, \quad t \in [a, b]$$

Ta có : $\lambda\gamma(a) + \mu\gamma(b) = \operatorname{sgn} \lambda \Leftrightarrow |\lambda|\gamma(a) - |\mu|\gamma(b) = \operatorname{sgn}^2 \lambda = 1$

Ta suy ra (1.6) đúng và

$$\gamma(a) > 0$$

Kết hợp với điều kiện $\ell \in P_{ab}$ ta có $\gamma'(t) = \ell(\gamma)(t) \geq 0$, do đó ta được $\gamma(t) > 0, t \in [a, b]$

Như vậy tồn tại hàm số $\gamma \in \tilde{C}([a, b]; (0, +\infty))$ thỏa mãn các bất đẳng thức

$$\gamma'(t) \geq \ell(\gamma)(t), \quad t \in [a, b]$$

$$|\lambda|\gamma(a) > |\mu|\gamma(b)$$

Hệ quả 1.8. *Giả sử*

i. $|\mu| < |\lambda|$

ii. $\ell \in P_{ab}$

iii. Tồn tại $m, k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha = \text{const}$, $m > k$ và

$$\rho_m(t) \leq \alpha \rho_k(t), \quad t \in [a, b]$$

với $\rho_1 \equiv 1$ và

$$\rho_{i+1}(t) \triangleq \frac{|\mu|}{|\lambda| - |\mu|} \int_a^b \ell(\rho_i)(s) ds + \int_a^t \ell(\rho_i)(s) ds, \quad t \in [a, b], i \in \mathbb{N}$$

Khi đó $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$.

Chứng minh

Dễ dàng chứng minh được hàm số $\gamma(t) \triangleq (1 - \alpha) \sum_{j=1}^k \rho_j(t) + \sum_{j=k+1}^m \rho_j(t)$, $t \in [a, b]$ thỏa mãn các điều kiện của định lý 1.7.

Chú ý 1.9. Theo Hệ quả trên (trong trường hợp $k = 1$, $m = 2$), ta có:

Nếu $|\mu| < |\lambda|$, $\ell \in P_{ab}$ và $|\lambda| \int_a^b \ell(1)(s) ds < |\lambda| - |\mu|$ thì $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$.

Chú ý thêm rằng, nếu bài toán (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường và $|\lambda| \int_a^b \ell(1)(s) ds = |\lambda| - |\mu|$

thì ta cũng có $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$.

CHƯƠNG II: CÁC BỔ ĐỀ VỀ TÍNH GIẢI ĐƯỢC CỦA BÀI TOÁN BIÊN DẠNG TUẦN HOÀN CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM PHI TUYẾN BẬC NHẤT

2.1 PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

Xét sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân hàm phi tuyến:

$$u'(t) = F(u)(t) \quad (2.1)$$

với điều kiện biên

$$\lambda u(a) + \mu u(b) = h(u) \quad (2.2)$$

Trong đó $F \in K_{ab}$, $\lambda, \mu \in R$, $|\lambda| + |\mu| \neq 0$, $h: C([a, b]; R) \rightarrow R$ là hàm liên tục thoả mãn $\forall r > 0, \exists M_r \in R_+$ sao cho $|h(v)| \leq M_r$ khi $\|v\|_C \leq r$

Nghiệm của bài toán (2.1), (2.2) là hàm $u \in \widetilde{C}([a, b]; R)$ thoả mãn phương trình (2.1) hầu khắp nơi trên $[a, b]$ và thoả mãn điều kiện biên (2.2).

Chú ý: Các đẳng thức, bất đẳng thức với các hàm khả tích được hiểu là hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Từ các kết quả trong tài liệu [2] ta có kết quả sau:

Mệnh đề 2.1. *Giả sử*

- *Tồn tại $\ell \in L_{ab}$ sao cho bài toán thuần nhất (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường*
- *Với mọi $u \in C([a, b]; R)$ ta có:*

$$|F(u)(t) - \ell(u)(t)| \leq q(t, \|u\|_C) \text{ khi } t \in [a, b] \quad (2.3)$$

$$|h(u)| \leq c \quad (2.4)$$

trong đó $c \in R_+$ và $q \in K([a, b] \times R_+; R_+)$ là hàm không giảm theo biến thứ hai và thoả mãn điều kiện:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_a^b q(s, x) ds = 0$$

Khi đó bài toán (1.1), (1.2) có ít nhất một nghiệm.

2.2 NHỮNG BỔ ĐỀ

Phần này ta xét một vài bổ đề về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (2.1), (2.2) dựa trên các kết quả của bài toán tuyến tính (1.1), (1.2).

Bổ đề 2.2. Giả sử $\ell_0 \in L_{ab}$ và bài toán thuần nhất

$$\begin{cases} v'(t) = \ell_0(v)(t) \\ \lambda v(a) + \mu v(b) = 0 \end{cases}$$

chỉ có nghiệm tầm thường.

Khi đó, tồn tại một số $r_0 > 0$ sao cho với mọi $\bar{q} \in L([a, b]; R)$ và với mọi $\bar{c} \in R$

,ta có nghiệm $v(t)$ của bài toán:

$$\begin{cases} v'(t) = \ell_0(v)(t) + \bar{q}(t) \\ \lambda v(a) + \mu v(b) = \bar{c} \end{cases} \quad (2.5)$$

Thỏa mãn đánh giá

$$\|v\|_C \leq r_0 \left(|\bar{c}| + \|\bar{q}\|_L \right) \quad (2.6)$$

Chứng minh.

Đặt $R \times L([a, b]; R) = \{(\bar{c}, \bar{q}) : \bar{c} \in R, \bar{q} \in L([a, b]; R)\}$

$R \times L([a, b]; R)$ là không gian Banach với chuẩn sau

$$\|(\bar{c}, \bar{q})\|_{R \times L} = |\bar{c}| + \|\bar{q}\|_L.$$

Dễ thấy bài toán thuần nhất chỉ có nghiệm tầm thường nên theo định lí 1.1 bài toán (2.5) có nghiệm duy nhất $v(t) \in C([a, b]; R)$.

Xét ánh xạ Ω xác định như sau:

$$\begin{aligned} \Omega: R \times L([a, b]; R) &\rightarrow C([a, b]; R) \\ (\bar{c}, \bar{q}) &\rightarrow v(t) \end{aligned}$$

Theo định lí 1.4 về tính xấp xỉ nghiệm của bài toán tuyến tính trong [1] ta có Ω là một toán tử tuyến tính bị chặn.

Đặt $r_0 = \|\Omega\|$. Khi đó với bất kì cặp $(\bar{c}, \bar{q}) \in R \times L([a, b]; R)$ ta đều có:

$$\|\Omega(\bar{c}, \bar{q})\|_C \leq r_0 \left(|\bar{c}| + \|\bar{q}\|_L \right),$$

Hay

$$\|v\|_C \leq r_0 \left(|\bar{c}| + \|\bar{q}\|_L \right)$$

Do đó định lí được chứng minh.

Bổ đề 2.3. Giả sử tồn tại $\rho > 0$ và toán tử $\ell \in L_{ab}$ sao cho bài toán thuần nhất $(1.1_0), (1.2_0)$ có nghiệm tầm thường và với mọi $\delta \in (0,1)$, mọi $u \in \tilde{C}([a,b];R)$ là nghiệm của bài toán

$$u'(t) = \ell(u)(t) + \delta[F(u)(t) - \ell(u)(t)], \quad t \in [a,b], \quad (2.7)$$

$$\lambda u(a) + \mu u(b) = \delta h(u) \quad (2.8)$$

đều thỏa mãn đánh giá

$$\|u\|_C \leq \rho \quad (2.9)$$

Khi đó bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất một nghiệm.

Chứng minh.

Do $\ell \in L_{ab}$ và $F \in K_{ab}$ nên với số $\rho > 0$ tồn tại $\eta, \omega \in L([a,b];R_+)$ sao cho

$$|\ell(v)(t)| \leq \eta(t)\|v\|_C, \quad \forall t \in [a,b], \quad \forall v \in C([a,b];R).$$

$$|F(v)(t)| \leq \omega(t), \quad \forall t \in [a,b], \quad \forall v \in C([a,b];R) \text{ và } \|v\|_C \leq 2\rho.$$

Hơn nữa, tồn tại $\alpha \in R_+$ sao cho

$$|h(v)| \leq \alpha, \quad \forall v \in C([a,b];R) \text{ và } \|v\|_C \leq 2\rho.$$

Đặt

$$\gamma(t) = \omega(t) + 2\rho\eta(t), t \in [a,b]$$

$$\sigma(s) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq s \leq \rho \\ 2 - \frac{s}{\rho} & , \rho < s < 2\rho \\ 0 & , s \geq 2\rho \end{cases}$$

$$q_0(v)(t) = \sigma(\|v\|_C)[F(v)(t) - \ell(v)(t)], t \in [a,b]$$

$$c_0(v) = \sigma(\|v\|_C)h(v)$$

Khi đó với mọi $v \in C([a,b];R)$ ta có:

$$|q_0(v)(t)| \leq \gamma(t), \quad |c_0(v)| \leq \alpha \quad \text{hầu khắp nơi trên } [a,b].$$

Với mỗi hàm $u \in C([a,b];R)$ cố định, ta xét bài toán sau:

$$\begin{cases} v'(t) = \ell(v)(t) + q_0(v)(t) \\ \lambda v(a) + \mu v(b) = c_0(u) \end{cases} \quad (2.10)$$

Theo giả thiết bài toán thuần nhất tương ứng chỉ có nghiệm tầm thường nên bài toán (2.10) có nghiệm duy nhất $v(t)$, hơn nữa theo Bổ đề 2.2 tồn tại số $\beta > 0$ sao cho

$$\|v\|_C \leq \beta \left(\|c_0(u)\| + \|q_0(u)\|_L \right)$$

Do đó, với hàm $u \in C([a, b]; R)$ cố định, nghiệm duy nhất $v(t)$ của bài toán (2.10) thỏa mãn đánh giá sau:

$$\|v\|_C \leq \rho_0, \quad |v'(t)| \leq \gamma^*(t), \quad t \in [a, b] \quad (2.11)$$

Trong đó $\rho_0 = \beta(\|\gamma\|_L + \alpha)$ và $\gamma^*(t) = \rho_0 \eta(t) + \gamma(t), t \in [a, b]$

Đặt $\Omega: C([a, b]; R) \rightarrow C([a, b]; R)$ là toán tử biến mỗi hàm $u \in C([a, b]; R)$ thành nghiệm $v(t)$ của bài toán đang xét. Từ định lý 1.4 trong [1] ta có Ω là toán tử liên tục. Mặt khác, do bất đẳng thức (2.11), với mọi $u \in C([a, b]; R)$ ta có

$$\begin{aligned} \|\Omega(u)\|_C &\leq \rho_0 \\ |\Omega(u)(t) - \Omega(u)(s)| &\leq \left| \int_s^t \gamma^*(\varepsilon) d\varepsilon \right|, \quad s, t \in [a, b] \end{aligned}$$

Khi đó toán tử Ω ánh xạ liên tục không gian Banach $C([a, b]; R)$ vào một tập con compact tương đối của nó.

Theo nguyên lý Schauder, tồn tại $u \in C([a, b]; R)$ sao cho:

$$\Omega(u)(t) = u(t), \quad t \in [a, b]$$

Do cách đặt $q_0(v)(t)$ và $c_0(v)$, dễ thấy u là một nghiệm của bài toán (2.7), (2.8) với

$$\delta = \sigma(\|u\|_C)$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng hàm u thỏa mãn đánh giá (2.9). Giả sử ngược lại. Khi đó ta có

$$\rho < \|u\|_C < 2\rho \quad \text{hoặc} \quad \|u\|_C \geq 2\rho$$

+ Nếu $\rho < \|u\|_C < 2\rho$ thì $\delta = \sigma(\|u\|_C) \in (0, 1)$. Theo giả thiết của bổ đề ta có đánh giá $\|u\|_C \leq \rho$.

Từ đó ta có mâu thuẫn.

+ Nếu $\|u\|_C \geq 2\rho$ thì $\delta = \sigma(\|u\|_C) = 0$. Do đó, u là nghiệm của bài toán (1.1₀), (1.2₀). Nhưng điều này là không thể do bài toán (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường.

Do đó, u thỏa mãn đánh giá (2.9) tức là $\|u\|_C \leq \rho$.

Từ đó ta suy ra $\delta = \sigma(\|u\|_C) = 1$ và do đó u là nghiệm của bài toán (2.1), (2.2).

2.2.1 TẬP HỢP $A^i(\lambda, \mu)$, $i \in \{1, 2\}$

Định nghĩa 2.4.

Toán tử $\ell_0 \in L_{ab}$ được gọi là thuộc tập hợp $A^i(\lambda, \mu)$, $i \in \{1, 2\}$, nếu tồn tại số $r > 0$ sao cho với mọi $q^* \in L([a, b]; R_+)$, $c \in R_+$, mọi hàm $u \in \widetilde{C}([a, b]; R)$ thỏa mãn các bất đẳng thức

$$[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}((2-i)\lambda u(a) + (i-1)\mu u(b)) \leq c, \quad (2.12)$$

$$(-1)^{i+1} [u'(t) - \ell(u)(t)] \operatorname{sgn} u(t) \leq q^*(t), \quad t \in [a, b] \quad (2.13)$$

thì

$$\|u\|_C \leq r(c + \|q^*\|_L) \quad (2.14)$$

Bổ đề 2.5. Giả sử $i \in \{1, 2\}$, $c \in R_+$,

$$h(v) \operatorname{sgn}[(2-i)\lambda v(a) + (i-1)\mu v(b)] \leq c, \quad v \in C([a, b]; R) \quad (2.15)$$

và tồn tại $\ell \in A^i(\lambda, \mu)$ sao cho với mọi $v \in B_{\lambda\mu}^i([a, b]; R)$ bất đẳng thức

$$(-1)^{i+1} [F(v)(t) - \ell(v)(t)] \operatorname{sgn} v(t) \leq q(t, \|v\|_C), \quad t \in [a, b] \quad (2.16)$$

được thỏa mãn, trong đó $q \in K([a, b] \times R_+; R_+)$ là hàm không giảm theo biến thứ hai và thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_a^b q(s, x) ds = 0$$

Khi đó bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất 1 nghiệm.

Chứng minh.

Do $\ell \in A^i(\lambda, \mu)$ nên bài toán thuần nhất (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường.

Thật vậy, gọi u là nghiệm của (1.1₀), (1.2₀), khi đó u thỏa mãn (2.12) và (2.13) với $c = 0$, $q^* \equiv 0$.

Do đó, từ (2.14) ta suy ra $\|u\|_C \leq 0$ hay $u \equiv 0$. Tức là bài toán (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường.

Gọi r là số dương trong định nghĩa 2.4.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_a^b q(s, x) ds = 0$ nên tồn tại $\rho > 2rc$ sao cho

$$\frac{1}{x} \int_a^b q(s, x) ds < \frac{1}{2r}, \quad \forall x > \rho$$

Bây giờ giả sử hàm $u \in \widetilde{C}([a, b]; R)$ là nghiệm của bài toán:

$$\begin{cases} u'(t) = \ell(u)(t) + \delta[F(u)(t) - \ell(u)(t)], & t \in [a, b] \\ \lambda u(a) + \mu u(b) = \delta h(u) \end{cases} \quad (2.17)$$

với $\delta \in (0, 1)$

Thế thì do (2.15) ta có hàm u thỏa mãn bất đẳng thức

$$[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}((2-i)\lambda u(a) + (i-1)\mu u(b)) \leq c,$$

hay $u \in B_{\lambda\mu c}^i([a, b]; R)$

Do (2.16) chúng ta có được bất đẳng thức (2.13)

$$(-1)^{i+1} [u'(t) - \ell(u)(t)] \operatorname{sgn} u(t) \leq q^*(t), \quad t \in [a, b] \text{ với } q^*(t) = q(t, \|u\|_C).$$

Do điều kiện $\ell \in A^i(\lambda, \mu)$ nên theo định nghĩa 2.1 ta có $\|u\|_C \leq r(c + \|q^*\|_L) \leq \rho$

và u thỏa đánh giá (2.9).

Nên theo Bổ đề 2.3, bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất một nghiệm.

Bổ đề 2.6. Giả sử $i \in \{1, 2\}$,

$$[h(v) - h(w)] \operatorname{sgn}((2-i)\lambda(v(a) - w(a)) + (i-1)\mu(v(b) - w(b))) \leq 0, \quad \forall v, w \in C([a, b]; R) \quad (2.18)$$

và giả sử tồn tại $\ell \in A^i(\lambda, \mu)$ sao cho bất đẳng thức

$$(-1)^{i+1} [F(v)(t) - F(w)(t) - \ell(v-w)(t)] \operatorname{sgn}(v(t) - w(t)) \leq 0, \quad t \in [a, b] \quad (2.19)$$

đúng với $v, w \in B_{\lambda\mu c}^i([a, b]; R)$, và $c = |h(0)|$.

Khi đó, bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh.

Theo (2.18) ta có $h(v) \operatorname{sgn}[(2-i)\lambda v(a) + (i-1)\mu v(b)] \leq c$ với $c = |h(0)|$.

Do (2.19) ta thấy rằng trên tập hợp $B_{\lambda\mu c}^i([a, b]; R)$ bất đẳng thức

$$(-1)^{i+1} [F(v)(t) - \ell(v)(t)] \operatorname{sgn} v(t) \leq q(t, \|v\|_C), \quad t \in [a, b] \text{ đúng với } q \equiv |F(0)|.$$

Như vậy các giả thiết của Bổ đề 2.5 được thỏa mãn. Do đó, bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất một nghiệm. Phần còn lại ta sẽ chứng minh bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm duy nhất.

Đặt u_1, u_2 là 2 nghiệm tùy ý của bài toán (2.1), (2.2).

Đặt $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$, $t \in [a, b]$

Khi đó, từ (2.18) và (2.19) ta có:

$$\begin{aligned} (i) \quad & [\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}[(2-i)\lambda u(a) + (i-1)\mu u(b)] \leq 0, \\ (ii) \quad & (-1)^{i+1} [u'(t - \ell(u)(t))] \operatorname{sgn} u(t) \leq 0, \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Điều này, kết hợp với điều kiện $\ell \in A^i(\lambda, \mu)$ ta có kết quả $u \equiv 0$. Do đó $u_1 \equiv u_2$.

Bổ đề 2.7 Giả sử $0 \neq |\mu| \leq |\lambda|$ và giả sử tồn tại toán tử $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ sao cho

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \ell = \ell_0 - \ell_1 \\ \blacksquare \quad & \|\ell_0(1)\|_L < 1 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\blacksquare \quad \frac{\|\ell_0(1)\|_L}{1 - \|\ell_0(1)\|_L} - \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\mu|} < \|\ell_1(1)\|_L < 2\sqrt{1 - \|\ell_0(1)\|_L} \tag{2.21}$$

Khi đó $\ell \in A^1(\lambda, \mu)$.

Chứng minh.

Ta chứng minh $\ell \in A^1(\lambda, \mu)$ theo định nghĩa 2.4 với $i = 1$.

Lấy $q^* \in L([a, b]; R_+)$, $c \in R_+$ và $u \in \tilde{C}([a, b]; R)$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} (i) \quad & [\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}[\lambda u(a)] \leq c \\ (ii) \quad & [u'(t) - \ell(u)(t)] \operatorname{sgn}[u(t)] \leq q^*(t), \quad t \in [a, b] \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh tồn tại số $r > 0$ sao cho $\|u\|_C \leq r(c + \|q^*\|_L)$.

Với $r > 0$ xác định như sau:

$$r = \frac{\mu_0 + \lambda_0(\|\mu\|\ell_1(1)\|_L + |\lambda| - |\mu|)}{(1 - \|\ell_0(1)\|_L)(\|\mu\|\ell_1(1)\|_L + |\lambda| - |\mu|) - \|\mu\|\ell_0(1)\|_L} + \frac{\lambda_0(\|\ell_1(1)\|_L + 1)}{1 - \|\ell_0(1)\|_L - \frac{1}{4}\|\ell_1(1)\|_L^2}$$

Bước 1

Đặt $\tilde{q}(t) = u'(t) - \ell(u)(t)$, $t \in [a, b]$, ta có:

$$\blacksquare \quad u'(t) = \ell_0(u)(t) - \ell_1(u)(t) + \tilde{q}(t), \quad t \in [a, b] \tag{2.22}$$

$$\blacksquare \quad \tilde{q}(t) \operatorname{sgn} u(t) \leq q^*(t) \text{ khi } t \in [a, b] \tag{2.23}$$

$$\blacksquare \quad [\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\lambda u(a)) \leq c \tag{2.24}$$

Bước 2 Giả sử rằng u là hàm không đổi dấu.

Do $\lambda\mu \leq 0, \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \in (0,1]$ từ (2.24) ta có

$$|\lambda||u(a)| - |\mu||u(b)| \leq c \text{ hay } |u(a)| - \frac{|\mu|}{|\lambda|}|u(b)| \leq \frac{c}{|\lambda|}$$

Từ đó suy ra
$$|u(a)| - |u(b)| \leq \frac{c}{|\lambda|} \quad (2.25)$$

Một cách tương tự, do

$$|\lambda||u(a)| - |\mu||u(b)| \leq c \text{ hay } \frac{|\lambda|}{|\mu|}|u(a)| - |u(b)| \leq \frac{c}{|\mu|}$$

ta có
$$|u(a)| - |u(b)| \leq |u(a)| \frac{|\mu| - |\lambda|}{|\mu|} + \frac{c}{|\mu|} \quad (2.26)$$

Đặt $\overline{M} = \max \{|u(t)| : t \in [a, b]\}$, $\overline{m} = \min \{|u(t)| : t \in [a, b]\}$

Gọi $t_1, t_2 \in [a, b]$ là các số sao cho $t_1 \neq t_2$ và $|u(t_1)| = \overline{M}$, $|u(t_2)| = \overline{m}$

Dễ thấy $\overline{M} \geq 0$, $\overline{m} \geq 0$

Do
$$\begin{cases} \ell_0, \ell_1 \in P_{ab} \\ \tilde{q}(t) \operatorname{sgn} u(t) \leq q^*(t), t \in [a, b] \\ u'(t) = \ell_0(u)(t) - \ell_1(u)(t) + \tilde{q}(t), t \in [a, b] \end{cases} \quad \text{ta suy ra}$$

$$|u(t)|' \leq \overline{M}\ell_0(1)(t) - \overline{m}\ell_1(1)(t) + q^*(t), \quad t \in [a, b] \quad (2.27)$$

❖ Nếu $t_1 < t_2$

Lấy tích phân biểu thức (2.27) với cận từ a đến t_1 và từ t_2 đến b, ta có

$$(i) \quad \int_a^{t_1} |u(s)|' ds \leq \int_a^{t_1} [\overline{M}\ell_0(1)(s) - \overline{m}\ell_1(1)(s) + q^*(s)] ds$$

hay
$$\overline{M} - |u(a)| \leq \overline{M} \int_a^{t_1} \ell_0(1)(s) ds - \overline{m} \int_a^{t_1} \ell_1(1)(s) ds + \int_a^{t_1} q^*(s) ds$$

suy ra
$$\overline{M} - |u(a)| \leq \overline{M} \int_a^{t_1} \ell_0(1)(s) ds + \int_a^{t_1} q^*(s) ds$$

$$(ii) \quad \int_{t_2}^b |u(s)|' ds \leq \int_{t_2}^b [\overline{M} \ell_0(1)(s) - \overline{m} \ell_1(1)(s) + q^*(s)] ds$$

hay

$$|u(b)| - \overline{m} \leq \overline{M} \int_{t_2}^b \ell_0(1)(s) ds - \overline{m} \int_{t_2}^b \ell_1(1)(s) ds + \int_{t_2}^b q^*(s) ds$$

suy ra

$$|u(b)| - \overline{m} \leq \overline{M} \int_{t_2}^b \ell_0(1)(s) ds + \int_{t_2}^b q^*(s) ds$$

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} \overline{M} - |u(a)| &\leq \overline{M} \int_a^{t_1} \ell_0(1)(s) ds + \int_a^{t_1} q^*(s) ds, \\ |u(b)| - \overline{m} &\leq \overline{M} \int_{t_2}^b \ell_0(1)(s) ds + \int_{t_2}^b q^*(s) ds. \end{aligned}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên theo vế, do điều kiện $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ và (2.25) ta đạt được

$$\overline{M} - \overline{m} - \frac{c}{|\lambda|} \leq \overline{M} - \overline{m} + |u(b)| - |u(a)| \leq \overline{M} \|\ell_0(1)\|_L + \|q^*\|_L$$

❖ Nếu $t_1 > t_2$

Lấy tích phân biểu thức (2.27) từ t_2 đến t_1 , ta được:

$$(iii) \quad \int_{t_2}^{t_1} |u(s)|' ds \leq \int_{t_2}^{t_1} [\overline{M} \ell_0(1)(s) - \overline{m} \ell_1(1)(s) + q^*(s)] ds$$

hay

$$\overline{M} - \overline{m} \leq \overline{M} \int_{t_2}^{t_1} \ell_0(1)(s) ds - \overline{m} \int_{t_2}^{t_1} \ell_1(1)(s) ds + \int_{t_2}^{t_1} q^*(s) ds$$

suy ra

$$\overline{M} - \overline{m} \leq \overline{M} \int_{t_2}^{t_1} \ell_0(1)(s) ds + \int_{t_2}^{t_1} q^*(s) ds$$

Do đó, ta có bất đẳng thức sau:

$$\overline{M} - \overline{m} - \frac{c}{|\lambda|} \leq \overline{M} - \overline{m} \leq \overline{M} \|\ell_0(1)\|_L + \|q^*\|_L$$

Vậy trong cả 2 trường hợp $t_1 > t_2$ hoặc $t_1 < t_2$ ta đều có :

$$\overline{M} - \overline{m} - \frac{c}{|\lambda|} \leq \overline{M} \|\ell_0(1)\|_L + \|q^*\|_L \quad (2.28)$$

Mặt khác lấy tích phân biểu thức (2.27) từ a đến b ta có:

$$(iv) \quad \int_a^b |u(s)|' ds \leq \int_a^b [\overline{M}\ell_0(1)(s) - \overline{m}\ell_1(1)(s) + q^*(s)] ds$$

hay
$$|u(b)| - |u(a)| \leq \overline{M} \int_a^b \ell_0(1)(s) ds - \overline{m} \int_a^b \ell_1(1)(s) ds + \int_a^b q^*(s) ds$$

suy ra
$$|u(b)| - |u(a)| \leq \overline{M} \|\ell_0(1)\|_L - \overline{m} \|\ell_1(1)\|_L + \|q^*\|_L$$

hay
$$\overline{m} \|\ell_1(1)\|_L \leq \overline{M} \|\ell_0(1)\|_L + |u(a)| - |u(b)| + \|q^*\|_L$$

Từ đây, do (2.26), giả thiết $|\mu| \leq |\lambda|$ ta có:

$$\overline{m} \|\ell_1(1)\|_L \leq \overline{M} \|\ell_0(1)\|_L + |u(a)| \frac{|\mu| - |\lambda|}{|\mu|} + \frac{c}{|\mu|} + \|q^*\|_L \leq \overline{M} \|\ell_0(1)\|_L + \overline{m} \frac{|\mu| - |\lambda|}{|\mu|} + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\mu|}$$

suy ra
$$\overline{m} \|\ell_1(1)\|_L \leq \overline{M} \|\ell_0(1)\|_L + \overline{m} \frac{|\mu| - |\lambda|}{|\mu|} + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\mu|}$$

hay
$$\overline{m} \left(\|\ell_1(1)\|_L + \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\mu|} \right) \leq \overline{M} \|\ell_0(1)\|_L + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\mu|}$$

Từ bất đẳng thức (2.28), điều kiện $\|\ell_0(1)\|_L \leq 1$ và giả thiết $\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \in (0, 1]$ ta được:

$$0 \leq \overline{M} (1 - \|\ell_0(1)\|_L) \leq \overline{m} + \frac{c}{|\mu|} + \|q^*\|_L.$$

Do đó ta có:

$$0 \leq \overline{m} \left(\|\ell_1(1)\|_L + \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\mu|} \right) \leq \overline{M} \|\ell_0(1)\|_L + \frac{c}{|\mu|} + \|q^*\|_L,$$

$$0 \leq \overline{M} (1 - \|\ell_0(1)\|_L) \leq \overline{m} + \frac{c}{|\lambda|} + \|q^*\|_L.$$

Đặt $B = |\mu| \|\ell_1(1)\|_L + |\lambda| - |\mu|$ và $\lambda_0 = \max \left\{ 1, \frac{1}{|\lambda|} \right\}$; $\mu_0 = \max \{1, |\mu|\}$ hai bất đẳng thức trên thành

$$0 \leq \overline{m} B \leq \overline{M} |\mu| \|\ell_0(1)\|_L + \mu_0 (c + \|q^*\|_L),$$

$$0 \leq \overline{M} (1 - \|\ell_0(1)\|_L) \leq \overline{m} + \lambda_0 (c + \|q^*\|_L).$$

Từ đó ta có:

$$\overline{M} (1 - \|\ell_0(1)\|_L) B \leq \overline{M} |\mu| \|\ell_0(1)\|_L + \mu_0 (c + \|q^*\|_L) + \lambda_0 B (c + \|q^*\|_L)$$

hay
$$\overline{M} \left[(1 - \|\ell_0(1)\|_L) B - |\mu| \|\ell_0(1)\|_L \right] \leq (\mu_0 + \lambda_0 B) (c + \|q^*\|_L)$$

Do (2.21) nên

$$\|\ell_1(1)\|_L + \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\mu|} > \frac{\|\ell_0(1)\|_L}{1 - \|\ell_0(1)\|_L}$$

suy ra $(1 - \|\ell_0(1)\|_L)(\|\mu\|\ell_1(1)\|_L + |\lambda| - |\mu|) > \|\ell_0(1)\|_L |\mu|$

hay $(1 - \|\ell_0(1)\|_L)B > \|\ell_0(1)\|_L |\mu|$

Do đó từ bất đẳng thức trên ta được

$$\overline{M} \leq (\mu_0 + \lambda_0 B) \left[(1 - \|\ell_0(1)\|_L)B - |\mu|\|\ell_0(1)\|_L \right]^{-1} (c + \|q^*\|_L)$$

Đặt $r_1 = (\mu_0 + \lambda_0 B) \left[(1 - \|\ell_0(1)\|_L)B - |\mu|\|\ell_0(1)\|_L \right]^{-1}$

Ta có bất đẳng thức $\|u\|_C = \overline{M} \leq r_1 (c + \|q^*\|_L)$

Bước 3 Giả sử rằng u là hàm đổi dấu.

Đặt:

$$M = \max \{u(t) : t \in [a, b]\}, \quad m = -\min \{u(t) : t \in [a, b]\}$$

Gọi $t_m, t_M \in [a, b]$ là các số sao cho $u(t_M) = M$, $u(t_m) = -m$

Dễ dàng thấy rằng $M > 0$, $m > 0$

❖ **Nếu** $t_M > t_m$

Dễ thấy tồn tại $\alpha_2 \in (t_m, t_M)$ sao cho

$$u(\alpha_2) = 0, \quad \text{và } u(t) > 0, \quad t \in (\alpha_2, t_M] \quad (2.29)$$

Đặt $\alpha_1 = \inf \{t \in [a, t_m] : u(s) < 0, \quad t \leq s \leq t_m\}$

Ta có

$$u(t) < 0, \quad \forall t \in (\alpha_1, t_m] \quad (2.30)$$

và nếu $\alpha_1 > a$ thì $u(\alpha_1) = 0$.

Đặt
$$\alpha_3 = \begin{cases} b & , \quad u(b) \geq 0 \\ \inf \{t \in (t_M, b] : u(s) < 0, \quad t \leq s \leq b\} & , \quad u(b) < 0 \end{cases}$$

Dễ thấy:

$$\text{nếu } \alpha_3 < b \text{ thì } u(t) < 0, \quad \alpha_3 \leq b \text{ và } u(\alpha_3) = 0 \quad (2.31)$$

Lấy tích phân biểu thức (2.22) từ α_1 đến t_m , ta có

$$\int_{\alpha_1}^{t_m} u'(s)ds = \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_0(u)(s)ds - \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_1(u)(s)ds + \int_{\alpha_1}^{t_m} \tilde{q}(s)ds$$

hay

$$m + u(\alpha_1) = \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_1(u)(s)ds - \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_0(u)(s)ds - \int_{\alpha_1}^{t_m} \tilde{q}(s)ds$$

suy ra

$$\begin{aligned} m + u(\alpha_1) &\leq \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_1(M)(s)ds + \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_0(m)(s)ds + \int_{\alpha_1}^{t_m} \tilde{q}(s) \operatorname{sgn} u(s)ds \\ &\leq M \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_1(1)(s)ds + m \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_0(1)(s)ds + \int_{\alpha_1}^{t_m} q^*(s)ds \end{aligned}$$

Lấy tích phân biểu thức (2.22) từ α_2 đến t_M

$$\int_{\alpha_2}^{t_M} u'(s)ds = \int_{\alpha_2}^{t_M} \ell_0(u)(s)ds - \int_{\alpha_2}^{t_M} \ell_1(u)(s)ds + \int_{\alpha_2}^{t_M} \tilde{q}(s)ds$$

hay

$$M - u(\alpha_2) = \int_{\alpha_2}^{t_M} \ell_0(u)(s)ds - \int_{\alpha_2}^{t_M} \ell_1(u)(s)ds + \int_{\alpha_2}^{t_M} \tilde{q}(s)ds$$

suy ra

$$\begin{aligned} M &\leq \int_{\alpha_2}^{t_M} \ell_0(M)(s)ds + \int_{\alpha_2}^{t_M} \ell_1(m)(s)ds + \int_{\alpha_2}^{t_M} \tilde{q}(s) \operatorname{sgn} u(s)ds \\ &\leq M \int_{\alpha_2}^{t_M} \ell_0(1)(s)ds + m \int_{\alpha_2}^{t_M} \ell_1(1)(s)ds + \int_{\alpha_2}^{t_M} q^*(s)ds \end{aligned}$$

Lấy tích phân biểu thức (2.22) từ α_2 đến t_M

$$\int_{\alpha_3}^b u'(s)ds = \int_{\alpha_3}^b \ell_0(u)(s)ds - \int_{\alpha_3}^b \ell_1(u)(s)ds + \int_{\alpha_3}^b \tilde{q}(s)ds$$

hay

$$u(b) - u(\alpha_3) = \int_{\alpha_3}^b \ell_0(u)(s)ds - \int_{\alpha_3}^b \ell_1(u)(s)ds + \int_{\alpha_3}^b \tilde{q}(s)ds$$

suy ra

$$\begin{aligned} u(\alpha_3) - u(b) &= \int_{\alpha_3}^b \ell_1(u)(s)ds - \int_{\alpha_3}^b \ell_0(u)(s)ds + \int_{\alpha_3}^b \tilde{q}(s) \operatorname{sgn} u(s)ds \\ &\leq M \int_{\alpha_3}^b \ell_1(1)(s)ds + m \int_{\alpha_3}^b \ell_0(1)(s)ds + \int_{\alpha_3}^b q^*(s)ds \end{aligned}$$

Từ đó ta có các bất đẳng thức sau :

$$u(\alpha_1) + m \leq M \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_1(1)(s)ds + m \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_0(1)(s)ds + \int_{\alpha_1}^{t_m} q^*(s)ds, \quad (2.32)$$

$$M \leq M \int_{\alpha_2}^{t_M} \ell_0(1)(s)ds + m \int_{\alpha_2}^{t_M} \ell_1(1)(s)ds + \int_{\alpha_2}^{t_M} q^*(s)ds, \quad (2.33)$$

$$u(\alpha_3) - u(b) \leq M \int_{\alpha_3}^b \ell_1(1)(s) ds + m \int_{\alpha_3}^b \ell_0(1)(s) ds + \int_{\alpha_3}^b q^*(s) ds \quad (2.34)$$

➤ Nếu $u(b) \geq 0$ ta chứng minh $u(a) \geq -\frac{c}{|\lambda|}$. Thật vậy

+ Nếu $u(a) \geq 0$ thì $u(a) \geq -\frac{c}{|\lambda|}$.

+ Nếu $u(a) < 0$, từ (2.24) ta có :

$$(|\lambda|u(a) - |\mu|u(b)) \operatorname{sgn}(u(a)) \leq c$$

hay

$$-|\lambda|u(a) + |\mu|u(b) \leq c$$

suy ra

$$-|\lambda|u(a) \leq c$$

hay

$$u(a) \geq -\frac{c}{|\lambda|}$$

Ta cũng có :

$$u(\alpha_1) \geq -\frac{c}{|\lambda|}.$$

Do đó từ (2.32) ta suy ra

$$-\frac{c}{|\lambda|} + m \leq M \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_1(1)(s) ds + m \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_0(1)(s) ds + \int_{\alpha_1}^{t_m} q^*(s) ds, \quad (2.35)$$

➤ Nếu $u(b) < 0$. Theo $\lambda\mu \leq 0$ ta có

$$\begin{aligned} [\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\lambda u(a)) &= [|\lambda|u(a) - |\mu|u(b)] \operatorname{sgn} u(a) \\ &= \begin{cases} [|\lambda|u(a) - |\mu|u(b)] & , u(a) > 0 \\ -[|\lambda|u(a) - |\mu|u(b)] & , u(a) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó ta có bất đẳng thức:

$$[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\lambda u(a)) \geq -[|\lambda|u(a) - |\mu|u(b)]$$

Kết hợp với (2.24) ta có bất đẳng thức sau :

$$\left[u(a) - \frac{|\mu|}{|\lambda|} u(b) \right] \geq -\frac{1}{|\lambda|} [\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\lambda u(a)) \geq -\frac{c}{|\lambda|}$$

Do đó ta được:

$$u(\alpha_1) - \frac{|\mu|}{|\lambda|} u(b) \geq -\frac{c}{|\lambda|}$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$-\frac{|\mu|}{|\lambda|} u(b) \leq u(\alpha_3) - u(b)$$

Thật vậy,

$$+ \text{ nếu } u(b) \geq 0 \text{ thì } -\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|u(b) \leq 0 = u(\alpha_3) - u(b)$$

$$+ \text{ nếu } u(b) < 0 \text{ thì } u(\alpha_3) - u(b) = -u(b) \geq -\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|u(b)$$

Do đó, từ (2.34) ta có:

$$-\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|u(b) \leq M \int_{\alpha_3}^b \ell_1(1)(s)ds + m \int_{\alpha_3}^b \ell_0(1)(s)ds + \int_{\alpha_3}^b q^*(s)ds,$$

$$u(\alpha_1) + m \leq M \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_1(1)(s)ds + m \int_{\alpha_1}^{t_m} \ell_0(1)(s)ds + \int_{\alpha_1}^{t_m} q^*(s)ds,$$

Cộng bất đẳng trên với (2.32), từ bất đẳng thức $u(\alpha_1) - \left|\frac{\mu}{\lambda}\right|u(b) \geq -\frac{c}{|\lambda|}$ ta thấy bất đẳng thức

$$(2.35) \text{ đúng với } I = [\alpha_1, t_m] \cup [\alpha_3, b].$$

Do đó ta luôn có bất đẳng thức

$$-\frac{c}{|\lambda|} + m \leq M \int_I \ell_1(1)(s)ds + m \int_I \ell_0(1)(s)ds + \int_I q^*(s)ds, I = [\alpha_1, t_m] \cup [\alpha_3, b] \quad (2.36)$$

đúng với mọi trường hợp của $u(b)$.

Theo (2.33) và (2.36), ta đặt

$$A_1 = \int_{\alpha_2}^{t_M} \ell_1(1)(s)ds, \quad B_1 = \int_I \ell_1(1)(s)ds$$

$$C_1 = \int_{\alpha_2}^{t_M} \ell_0(1)(s)ds > 0, \quad D_1 = \int_I \ell_0(1)(s)ds > 0$$

Từ đó ta có

$$M(1 - C_1) \leq mA_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|},$$

$$m(1 - D_1) \leq MB_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|}. \quad (2.37)$$

Do $\|\ell_0(1)\|_L < 1$ ta có $C_1 < 1$, $D_1 < 1$.

Ta xét hai trường hợp :

$$\text{➤ Nếu } MB_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \leq m$$

Từ (2.37) ta có :

$$\begin{aligned}
M(1-C_1)(1-D_1) &\leq A_1 \left(MB_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) + \frac{1}{m} \left(\|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) \left(MB_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) \\
&\leq A_1 \left(MB_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) + \left(\|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right)
\end{aligned}$$

➤ Nếu $MB_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \leq m$

Từ (2.37) ta có :

$$\begin{aligned}
M(1-C_1)(1-D_1) &\leq M(1-C_1) \leq mA_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \\
&\leq A_1 \left(MB_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|}
\end{aligned}$$

Do đó từ (2.37) suy ra (trong cả 2 trường hợp) :

$$\begin{aligned}
M(1-C_1)(1-D_1) &\leq A_1 \left(MB_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \\
&\leq MA_1B_1 + A_1 \left(\|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) + \left(\|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) \leq MA_1B_1 + (\|\ell_1(1)\|_L + 1) \left(\|q^*\|_L + \frac{1}{|\lambda|} c \right) \\
&\leq MA_1B_1 + \lambda_0 (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_1(1)\|_L + 1)
\end{aligned}$$

và tương tự

$$\begin{aligned}
m(1-C_1)(1-D_1) &\leq B_1 \left(mA_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \\
&\leq mA_1B_1 + B_1 \left(\|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) + \left(\|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) \leq mA_1B_1 + (\|\ell_1(1)\|_L + 1) \left(\|q^*\|_L + \frac{1}{|\lambda|} c \right) \\
&\leq mA_1B_1 + \lambda_0 (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_1(1)\|_L + 1)
\end{aligned}$$

Vậy ta có các bất đẳng thức sau :

$$\begin{aligned}
0 &< M(1-C_1)(1-D_1) \leq MA_1B_1 + \lambda_0 (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_1(1)\|_L + 1) \\
0 &< m(1-C_1)(1-D_1) \leq mA_1B_1 + \lambda_0 (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_1(1)\|_L + 1).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Từ các bất đẳng thức (dễ dàng chứng minh)

$$\begin{aligned}
(1-C_1)(1-D_1) &\geq 1 - (C_1 + D_1) \geq 1 - \|\ell_0(1)\|_L > 0 \\
4A_1B_1 &\leq (A_1 + B_1)^2 \leq \|\ell_1(1)\|_L^2.
\end{aligned}$$

kết hợp điều kiện (2.21) và bất đẳng thức (2.38) ta thu được các bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}
& M(1 - \|\ell_0(1)\|_L) \leq M \frac{\|\ell_1(1)\|_L^2}{4} + \lambda_0(\|q^*\|_L + c)(\|\ell_1(1)\|_L + 1) \\
\text{hay} \quad & 0 < M \left(1 - \|\ell_0(1)\|_L - \frac{\|\ell_1(1)\|_L^2}{4} \right) \leq \lambda_0(\|q^*\|_L + c)(\|\ell_1(1)\|_L + 1) \\
& m(1 - \|\ell_0(1)\|_L) \leq m \frac{\|\ell_1(1)\|_L^2}{4} + \lambda_0(\|q^*\|_L + c)(\|\ell_1(1)\|_L + 1) \\
\text{hay} \quad & 0 < m \left(1 - \|\ell_0(1)\|_L - \frac{\|\ell_1(1)\|_L^2}{4} \right) \leq \lambda_0(\|q^*\|_L + c)(\|\ell_1(1)\|_L + 1)
\end{aligned}$$

$$\text{Đặt} \quad r_2 = \lambda_0 \left(1 - \|\ell_0(1)\|_L - \frac{1}{4} \|\ell_1(1)\|_L^2 \right)^{-1} (\|\ell_1(1)\|_L + 1) > 0 \quad (2.39)$$

$$\text{Từ đó, ta có đánh giá} \quad \|u\|_C \leq r_2 (c + \|q^*\|_L).$$

❖ Nếu $t_M < t_m$

Dễ thấy tồn tại $\alpha_5 \in (t_M, t_m)$ sao cho $u(t) < 0$ khi $\alpha_5 < t \leq t_m$ và $u(\alpha_5) = 0$.

Đặt $\alpha_4 = \inf \{t \in [a, t_M] : u(s) > 0, t \leq s \leq t_M\}$

Ta có: $u(t) > 0$ khi $\alpha_4 < t \leq t_M$ và nếu $\alpha_4 > a$ thì $u(\alpha_4) = 0$.

$$\text{Đặt} \quad \alpha_6 = \begin{cases} b & , u(b) \leq 0 \\ \inf \{t \in (t_m, b] : u(s) > 0, t \leq s \leq b\} & , u(b) > 0 \end{cases}$$

Dễ thấy nếu $\alpha_6 < b$ thì $u(t) > 0$ khi $\alpha_6 < t \leq b$ và $u(\alpha_6) = 0$.

Lấy tích phân biểu thức (2.22) từ α_4 đến t_M ; từ α_5 đến t_m và từ α_6 đến b , kết hợp với các kết quả trên ta suy ra

$$M - u(\alpha_4) \leq M \int_{\alpha_4}^{t_M} \ell_0(1)(s) ds + m \int_{\alpha_4}^{t_M} \ell_1(1)(s) ds + \int_{\alpha_4}^{t_M} q^*(s) ds, \quad (2.40)$$

$$m \leq M \int_{\alpha_5}^{t_m} \ell_1(1)(s) ds + m \int_{\alpha_5}^{t_m} \ell_0(1)(s) ds + \int_{\alpha_5}^{t_m} q^*(s) ds, \quad (2.41)$$

$$u(b) - u(\alpha_6) \leq M \int_{\alpha_6}^b \ell_0(1)(s) ds + m \int_{\alpha_6}^b \ell_1(1)(s) ds + \int_{\alpha_6}^b q^*(s) ds \quad (2.42)$$

➤ Nếu $u(b) \leq 0$ thì do (2.24) và $\lambda\mu \leq 0$ ta có:

$$u(\alpha_4) \leq \frac{c}{|\lambda|}$$

Do đó từ (2.40) ta suy ra

$$-\frac{c}{|\lambda|} + M \leq M \int_{\alpha_4}^{t_M} \ell_0(1)(s) ds + m \int_{\alpha_4}^{t_M} \ell_1(1)(s) ds + \int_{\alpha_4}^{t_M} q^*(s) ds, \quad (2.43)$$

➤ Nếu $u(b) > 0$. Theo (2.24) và $\lambda\mu \leq 0$ dễ thấy:

$$\frac{|\mu|}{|\lambda|} u(b) - u(a) \geq -\frac{1}{|\lambda|} [\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn} \lambda u(a) \geq -\frac{c}{|\lambda|}$$

Và do đó ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{|\mu|}{|\lambda|} u(b) - u(\alpha_4) \geq -\frac{c}{|\lambda|} \quad (2.44)$$

Từ (2.42) với giả thiết $\frac{|\mu|}{|\lambda|} \in (0, 1]$, ta chứng minh được:

$$\frac{|\mu|}{|\lambda|} u(b) \leq M \int_{\alpha_6}^b \ell_0(1)(s) ds + m \int_{\alpha_6}^b \ell_1(1)(s) ds + \int_{\alpha_6}^b q^*(s) ds,$$

Cộng bất đẳng thức cuối với (2.40), từ (2.44) ta thấy bất đẳng thức (2.43) đúng với

$$J = [\alpha_4, t_M] \cup [\alpha_6, b]$$

Do đó trong cả hai trường hợp $u(b) \leq 0$ hoặc $u(b) > 0$ bất đẳng thức

$$-\frac{c}{|\lambda|} + M \leq M \int_{\alpha_4}^{t_M} \ell_0(1)(s) ds + m \int_{\alpha_4}^{t_M} \ell_1(1)(s) ds + \int_{\alpha_4}^{t_M} q^*(s) ds, \quad (2.45)$$

đúng với $J = [\alpha_4, t_M] \cup [\alpha_6, b]$.

Theo (2.41) và (2.45), đặt

$$A_2 = \int_{\alpha_5}^{t_m} \ell_1(1)(s) ds, \quad B_2 = \int_J \ell_1(1)(s) ds$$

$$C_2 = \int_{\alpha_5}^{t_m} \ell_0(1)(s) ds, \quad D_2 = \int_J \ell_0(1)(s) ds$$

ta được

$$\begin{aligned} m(1 - C_2) &\leq MA_2 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|}, \\ M(1 - D_2) &\leq mB_2 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Do $\|\ell_0(1)\|_L < 1$ nên $C_2 < 1$, $D_2 < 1$. Từ đó, do (2.46) suy ra

$$\begin{aligned}
0 < m(1-C_2)(1-D_2) &\leq A_2 \left(mB_2 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \\
&\leq mA_2B_2 + \lambda_0 (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_1(1)\|_L + 1); \\
0 < M(1-C_2)(1-D_2) &\leq B_2 \left(MA_2 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \\
&\leq MA_2B_2 + \lambda_0 (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_1(1)\|_L + 1);
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Từ hai bất đẳng thức:

$$\begin{aligned}
(1-C_2)(1-D_2) &\geq 1 - (C_2 + D_2) \geq 1 - \|\ell_0(1)\|_L > 0 \\
4A_2B_2 &\leq (A_2 + B_2)^2 \leq \|\ell_1(1)\|_L^2.
\end{aligned}$$

Nên từ (2.47) ta có:

$$\begin{aligned}
m(1-C_2)(1-D_2) &\leq mA_2B_2 + \lambda_0 (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_1(1)\|_L + 1) \\
\text{suy ra} \quad m(1 - \|\ell_0(1)\|_L) &\leq m \frac{\|\ell_1(1)\|_L^2}{4} + \lambda_0 (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_1(1)\|_L + 1) \\
\text{hay} \quad m \left(1 - \|\ell_0(1)\|_L - \frac{1}{4} \|\ell_1(1)\|_L^2 \right) &\leq \lambda_0 (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_1(1)\|_L + 1) \\
\text{suy ra} \quad m &\leq \lambda_0 \left(1 - \|\ell_0(1)\|_L - \frac{1}{4} \|\ell_1(1)\|_L^2 \right)^{-1} (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_1(1)\|_L + 1)
\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có

$$M \leq \lambda_0 \left(1 - \|\ell_0(1)\|_L - \frac{1}{4} \|\ell_1(1)\|_L^2 \right)^{-1} (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_1(1)\|_L + 1)$$

Do đó ta có bất đẳng thức

$$\|u\|_C = \max\{M; m\} \leq r_2 (\|q^*\|_L + c)$$

$$\text{với} \quad r_2 = \lambda_0 \left(1 - \|\ell_0(1)\|_L - \frac{1}{4} \|\ell_1(1)\|_L^2 \right)^{-1} (\|\ell_1(1)\|_L + 1) > 0$$

Từ đó suy ra trong cả 2 trường hợp hàm u là hàm đổi dấu hay không đổi dấu ta đều có đánh giá

$\|u\|_C \leq r(c + \|q^*\|_L)$ với r xác định như sau

$$r = r_1 + r_2 = \frac{\mu_0 + \lambda_0 (\|\mu\| \|\ell_1(1)\|_L + |\lambda| - |\mu|)}{(1 - \|\ell_0(1)\|_L)(\|\mu\| \|\ell_1(1)\|_L + |\lambda| - |\mu|) - \|\mu\| \|\ell_0(1)\|_L} + \frac{\lambda_0 (\|\ell_1(1)\|_L + 1)}{1 - \|\ell_0(1)\|_L - \frac{1}{4} \|\ell_1(1)\|_L^2} \quad \text{Vậy} \quad \text{với}$$

$q^* \in L([a, b]; R_+)$, $c \in R_+$ và $u \in \widetilde{C}([a, b]; R)$ thỏa mãn

- (i) $[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}[\lambda u(a)] \leq c$
(ii) $[u'(t) - \ell(u)(t)] \operatorname{sgn}[u(t)] \leq q^*(t), \quad t \in [a, b]$

tồn tại số $r > 0$ sao cho $\|u\|_C \leq r(c + \|q^*\|_L)$.

Theo định nghĩa 2.4 ta suy ra $\ell \in A^1(\lambda, \mu)$.

Bổ đề 2.8. Giả sử $0 \neq |\mu| \leq |\lambda|$ và giả sử tồn tại toán tử $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ sao cho

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \ell = \ell_0 - \ell_1. \\ \blacksquare \quad & \|\ell_1(1)\|_L < \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\blacksquare \quad \frac{|\lambda|}{|\mu| - |\lambda| \|\ell_1(1)\|_L} - 1 < \|\ell_0(1)\|_L < 2\sqrt{\left| \frac{\mu}{\lambda} \right|} - \|\ell_1(1)\|_L \tag{2.49}$$

Khi đó $\ell \in A^2(\lambda, \mu)$.

Chứng minh.

Tương tự Bổ đề 2.7, ta chứng minh Bổ đề 2.8 bằng định nghĩa.

Lấy $q^* \in L([a, b]; R_+)$, $c \in R_+$ và $u \in \widetilde{C}([a, b]; R)$ thỏa mãn

- (i) $[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}[\mu u(b)] \leq c$
(ii) $-[u'(t) - \ell(u)(t)] \operatorname{sgn}[u(t)] \leq q^*(t), \quad t \in [a, b]$

Ta chứng minh tồn tại $r > 0$ sao cho $\|u\|_C \leq r(c + \|q^*\|_L)$

$$\text{trong đó } r = \frac{\lambda_0 |\lambda| (\|\ell_0(1)\|_L + 1)}{\|\ell_0(1)\|_L (|\mu| - |\lambda| \|\ell_1(1)\|_L) - |\lambda| \|\ell_1(1)\|_L - |\lambda| + |\mu|} + \frac{\lambda_0 (\|\ell_0(1)\|_L + 1)}{\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - \|\ell_1(1)\|_L - \frac{1}{4} \|\ell_0(1)\|_L^2}$$

Bước 1

Đặt $\tilde{q}(t) = u'(t) - \ell(u)(t)$, $t \in [a, b]$, ta có:

- $u'(t) = \ell_0(u)(t) - \ell_1(u)(t) + \tilde{q}(t), \quad t \in [a, b]$
- $-\tilde{q}(t) \operatorname{sgn} u(t) \leq q^*(t), \quad t \in [a, b]$
- $[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\mu u(b)) \leq c$

Bước 2. Giả sử rằng u là hàm không đổi dấu.

Do $[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\mu u(b)) \leq c$ và các điều kiện $\mu\lambda \leq 0, \left|\frac{\mu}{\lambda}\right| \in (0,1]$ ta chứng minh được:

$$\left|\frac{\mu}{\lambda}\right| |u(b)| - |u(a)| \leq \frac{c}{|\lambda|} \quad \text{và} \quad |u(b)| - |u(a)| \leq |u(b)| \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\lambda|} + \frac{c}{|\lambda|}$$

Đặt $\overline{M} = \max\{|u(t)| : t \in [a, b]\} \geq 0, \quad \overline{m} = \min\{|u(t)| : t \in [a, b]\} \geq 0$

Khi đó tồn tại $t_1, t_2 \in [a, b]$ sao cho $t_1 \neq t_2$ và $|u(t_1)| = \overline{M}, \quad |u(t_2)| = \overline{m}.$

Từ $u'(t) = \ell_0(u)(t) - \ell_1(u)(t) + \tilde{q}(t), t \in [a, b]$ và điều kiện $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ ta chứng minh được:

$$-|u(t)|' \leq \overline{M}\ell_1(1)(t) - \overline{m}\ell_0(1)(t) + q^*(t), t \in [a, b] \quad (2.50)$$

➤ Nếu $t_1 > t_2$ thì lấy tích phân (2.50) từ t_1 đến b , ta được:

$$-\int_{t_1}^b |u(s)|' ds \leq \int_{t_1}^b [\overline{M}\ell_1(1)(s) - \overline{m}\ell_0(1)(s) + q^*(s)] ds$$

$$\text{hay} \quad \overline{M} - |u(b)| \leq \overline{M} \int_{t_1}^b \ell_1(1)(s) ds + \int_{t_1}^b q^*(s) ds \quad (\text{do } \overline{m} \geq 0)$$

$$\text{suy ra} \quad \left|\frac{\mu}{\lambda}\right| \overline{M} - \left|\frac{\mu}{\lambda}\right| |u(b)| \leq \left|\frac{\mu}{\lambda}\right| \left(\overline{M} \int_{t_1}^b \ell_1(1)(s) ds + \int_{t_1}^b q^*(s) ds \right)$$

$$\text{Từ đó ta có:} \quad \left|\frac{\mu}{\lambda}\right| \overline{M} - \left|\frac{\mu}{\lambda}\right| |u(b)| \leq \overline{M} \int_{t_1}^b \ell_1(1)(s) ds + \int_{t_1}^b q^*(s) ds \quad \left(\text{do } \left|\frac{\mu}{\lambda}\right| \leq 1 \right)$$

Vậy

$$\left|\frac{\mu}{\lambda}\right| \overline{M} - \left|\frac{\mu}{\lambda}\right| |u(b)| \leq \overline{M} \int_{t_1}^b \ell_1(1)(s) ds + \int_{t_1}^b q^*(s) ds \quad (2.51)$$

Lấy tích phân (2.50) từ a đến t_2 ta được:

$$-\int_a^{t_2} |u(s)|' ds \leq \int_a^{t_2} [\overline{M}\ell_1(1)(s) - \overline{m}\ell_0(1)(s) + q^*(s)] ds$$

$$\text{suy ra} \quad |u(a)| - \overline{m} \leq \overline{M} \int_a^{t_2} \ell_1(1)(s) ds + \int_a^{t_2} q^*(s) ds \quad (\text{do } \overline{m} \geq 0)$$

Cộng bất đẳng thức trên với (2.51), và kết hợp với bất đẳng thức

$$\left|\frac{\mu}{\lambda}\right| |u(b)| - |u(a)| \leq \frac{c}{|\lambda|} \quad \text{ta có:}$$

$$\left|\frac{\mu}{\lambda}\right| \overline{M} - \overline{m} - \frac{c}{|\lambda|} \leq \left|\frac{\mu}{\lambda}\right| \overline{M} - \overline{m} + |u(a)| - \left|\frac{\mu}{\lambda}\right| |u(b)| \leq \overline{M} \|\ell_1(1)\|_L + \|q^*\|_L$$

➤ Nếu $t_1 < t_2$ lấy tích phân biểu thức (2.50) từ t_1 đến t_2 ta được:

$$-\int_{t_1}^{t_2} |u(s)|' ds \leq \int_{t_1}^{t_2} [\overline{M}\ell_1(1)(s) - \overline{m}\ell_0(1)(s) + q^*(s)] ds$$

suy ra
$$M - \overline{m} \leq \overline{M} \int_{t_1}^{t_2} \ell_1(1)(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} q^*(s) ds \leq \overline{M} \|\ell_1(1)\|_L + \|q^*\|_L$$

Do đó ta có

$$\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \overline{M} - \overline{m} - \frac{c}{|\lambda|} \leq \overline{M} - \overline{m} \leq \overline{M} \|\ell_1(1)\|_L + \|q^*\|_L$$

hay
$$\overline{M} \left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - \|\ell_1(1)\|_L \right) \leq \overline{m} + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|}$$

suy ra
$$0 \leq \overline{M} \left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - \|\ell_1(1)\|_L \right) \leq \overline{m} + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|}$$

Vậy trong cả 2 trường hợp là $t_1 > t_2$ hoặc $t_2 > t_1$ ta đều có bất đẳng thức

$$0 \leq \overline{M} \left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - \|\ell_1(1)\|_L \right) \leq \overline{m} + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \quad (2.52)$$

Mặt khác lấy tích phân (2.50) từ a đến b ta được

$$|u(a)| - |u(b)| \leq \overline{M} \|\ell_1(1)\|_L - \overline{m} \|\ell_0(1)\|_L + \|q^*\|_L$$

Từ đây, do bất đẳng thức $|u(b)| - |u(a)| \leq |u(b)| \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\lambda|} + \frac{c}{|\lambda|}$ ở trên ta có:

hay
$$\begin{aligned} |u(a)| - |u(b)| &\leq \overline{M} \|\ell_1(1)\|_L - \overline{m} \|\ell_0(1)\|_L + \|q^*\|_L \\ \overline{m} \|\ell_0(1)\|_L &\leq \overline{M} \|\ell_1(1)\|_L + |u(b)| - |u(a)| + \|q^*\|_L \\ &\leq \overline{M} \|\ell_1(1)\|_L + |u(b)| \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\lambda|} + \frac{c}{|\lambda|} + \|q^*\|_L \\ &\leq \overline{M} \|\ell_1(1)\|_L + \overline{M} \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\lambda|} + \frac{c}{|\lambda|} + \|q^*\|_L \\ &\leq \overline{M} \left(\|\ell_1(1)\|_L + \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\lambda|} \right) + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\mu|} \end{aligned}$$

Hai bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} 0 \leq \overline{m} \|\ell_0(1)\|_L &\leq \overline{M} \left(\|\ell_1(1)\|_L + \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\lambda|} \right) + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\mu|} \\ 0 \leq \overline{M} \left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - \|\ell_1(1)\|_L \right) &\leq \overline{m} + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \end{aligned}$$

kết hợp với (2.49) và đặt $\lambda_0 = \max \left\{ 1, \frac{1}{|\lambda|} \right\}$ ta có:

$$\|u\|_C = \overline{M} \leq r_1 \lambda_0 |\lambda| (\|\ell_0(1)\|_L + 1) (c + \|q^*\|_L),$$

trong đó

$$r_1 = \left[(|\mu| - |\lambda| \|\ell_1(1)\|_L) \|\ell_0(1)\|_L - |\lambda| \|\ell_1(1)\|_L - |\lambda| + |\mu| \right]^{-1}$$

Đặt

$$r_2 = r_1 \lambda_0 |\lambda| (\|\ell_0(1)\|_L + 1) > 0$$

Ta có bất đẳng thức

$$\|u\|_C \leq r_2 (c + \|q^*\|_L).$$

Bước 3. Giả sử rằng u là hàm đổi dấu.

Đặt

$$M = \max \{u(t) : t \in [a, b]\}, \quad m = -\min \{u(t) : t \in [a, b]\}$$

Khi đó, tồn tại $t_m \neq t_M \in [a, b]$: $u(t_m) = M$, $u(t_M) = -m$

Dễ dàng thấy rằng $M > 0, m > 0$.

➤ Nếu $t_M > t_m$.

Khi đó, tồn tại số $\alpha_1 \in (t_m, t_M)$ sao cho $u(t) < 0$ khi $t_m \leq t < \alpha_1$ và $u(\alpha_1) = 0$.

Đặt $\alpha_2 = \sup \{t \in [t_M, b] : u(s) > 0, t_M \leq s \leq t\}$

Dễ thấy $u(t) > 0, t_M \leq t < \alpha_2$ và nếu $\alpha_2 < b$, thì $u(\alpha_2) = 0$

Đặt $\alpha_3 = \begin{cases} a & , u(a) \leq 0 \\ \sup \{t \in [a, t_m] : u(s) > 0 \text{ với } a \leq s \leq t\} & , u(a) > 0 \end{cases}$

Ta có: nếu $\alpha_3 > a$ thì $u(t) > 0, a < t \leq \alpha_3$ và $u(\alpha_3) = 0$.

Tích phân biểu thức

$$u'(t) = \ell_0(u)(t) - \ell_1(u)(t) + \tilde{q}(t), t \in [a, b]$$

từ t_m đến α_1 ; từ t_M đến α_2 và từ a đến α_3 . Ta chứng minh được:

$$m \leq M \int_{t_m}^{\alpha_1} \ell_0(1)(s) ds + m \int_{t_m}^{\alpha_1} \ell_1(1)(s) ds + \int_{t_m}^{\alpha_1} q^*(s) ds, \quad (2.53)$$

$$M - u(\alpha_2) \leq M \int_{t_M}^{\alpha_2} \ell_1(1)(s) ds + m \int_{t_M}^{\alpha_2} \ell_0(1)(s) ds + \int_{t_M}^{\alpha_2} q^*(s) ds, \quad (2.54)$$

$$u(a) - u(\alpha_3) \leq M \int_a^{\alpha_3} \ell_1(1)(s) ds + m \int_a^{\alpha_3} \ell_0(1)(s) ds + \int_a^{\alpha_3} q^*(s) ds \quad (2.55)$$

+ Nếu $u(a) \leq 0$, nếu $\alpha_2 = b \Rightarrow u(b) > 0$, ta có:

$$[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\mu u(b)) \leq c$$

$$\text{hay} \quad -|\lambda|u(a) + |\mu|u(\alpha_2) \leq c$$

$$\text{suy ra} \quad |\mu|u(\alpha_2) \leq c$$

$$\text{hay} \quad u(\alpha_2) \leq \frac{c}{|\lambda|}$$

Hiển nhiên, nếu $\alpha_2 < b$ ta cũng có $0 = u(\alpha_2) \leq \frac{c}{|\mu|}$.

Vậy với $u(a) \leq 0$, ta có $u(\alpha_2) \leq \frac{c}{|\mu|}$.

Do đó từ (2.54) và điều kiện $\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \in (0, 1]$ ta suy ra

$$\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| M - \frac{c}{|\lambda|} \leq M \int_{t_M}^{\alpha_2} \ell_1(1)(s) ds + m \int_{t_M}^{\alpha_2} \ell_0(1)(s) ds + \int_{t_M}^{\alpha_2} q^*(s) ds, \quad (2.56)$$

+ Nếu $u(a) > 0$. Ta có:

$$[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\mu u(b)) \leq c$$

$$\text{suy ra} \quad \begin{cases} [\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\mu u(b)) \leq c \\ [\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\mu u(b)) = |\mu|u(b) - |\lambda|u(a) \operatorname{sgn} u(b) \geq |\mu|u(b) - |\lambda|u(a) \end{cases}$$

$$\text{suy ra} \quad |\mu|u(b) - |\lambda|u(a) \leq c$$

$$\text{hay} \quad u(a) - \frac{|\mu|}{|\lambda|} u(b) \geq -\frac{c}{|\lambda|}$$

Và do tính chất của số α_2 ở trên $\begin{cases} u(\alpha_2) = 0 \\ \alpha_2 = b \end{cases}$. Từ đó suy ra:

$$u(a) - \frac{|\mu|}{|\lambda|} u(\alpha_2) \geq -\frac{c}{|\lambda|} \quad (2.57)$$

Do $\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \in (0, 1]$, nên từ (2.54) ta có:

$$\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| M - \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| u(\alpha_2) \leq M \int_{t_M}^{\alpha_2} \ell_1(1)(s) ds + m \int_{t_M}^{\alpha_2} \ell_0(1)(s) ds + \int_{t_M}^{\alpha_2} q^*(s) ds,$$

Cộng bất đẳng thức cuối với (2.55), ta được

$$u(a) - u(\alpha_3) + \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| M - \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| u(\alpha_2) \leq M \int_I \ell_1(1)(s) ds + m \int_I \ell_0(1)(s) ds + \int_I q^*(s) ds$$

với $I = [a, \alpha_3] \cup [t_M, \alpha_2]$

từ tính chất của α_3 và (2.57) ta có bất đẳng thức:

$$\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| M - \frac{c}{|\lambda|} \leq M \int_I \ell_1(1)(s) ds + m \int_I \ell_0(1)(s) ds + \int_I q^*(s) ds, \quad I = [a, \alpha_3] \cup [t_M, \alpha_2]$$

Theo (2.53) và (2.56), đặt

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{t_m}^{\alpha_1} \ell_1(1)(s) ds, & B_1 &= \int_I \ell_1(1)(s) ds \\ C_1 &= \int_{t_m}^{\alpha_1} \ell_0(1)(s) ds & D_1 &= \int_I \ell_0(1)(s) ds \end{aligned}$$

Do $\|\ell_1(1)\|_L < \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \leq 1$ ta có $A_1 < 1$, $B_1 < \left| \frac{\mu}{\lambda} \right|$, từ đó ta có hai bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} 0 &< m(1 - A_1) \leq MC_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|}, \\ 0 &< M \left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - B_1 \right) \leq mD_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Dễ thấy, $\left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - B_1 \right) \leq \frac{1}{M} \left(mD_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) < 1$

Từ (2.58) suy ra

$$\begin{aligned} 0 &< m(1 - A_1) \left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - B_1 \right) \leq C_1 \left(mD_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \\ &\leq mC_1D_1 + \lambda_0 (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_1(1)\|_L + 1); \\ 0 &< M(1 - A_1) \left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - B_1 \right) \leq D_1 \left(MC_1 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \right) + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|} \\ &\leq MC_1D_1 + \lambda_0 (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_1(1)\|_L + 1); \end{aligned} \tag{2.59}$$

Dễ thấy với điều kiện $\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \in (0, 1]$ ta có hai bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} (1 - A_1) \left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - B_1 \right) &\geq \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| A_1 - B_1 \geq \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - \|\ell_1(1)\|_L > 0 \\ 4C_1D_1 &\leq (C_1 + D_1)^2 \leq \|\ell_0(1)\|_L^2. \end{aligned}$$

Bởi các bất đẳng thức cuối và (2.49), từ (2.59) ta có:

$$\begin{cases} M \leq r_3 \lambda_0 (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_0(1)\|_L + 1); \\ m \leq r_3 \lambda_0 (\|q^*\|_L + c) (\|\ell_0(1)\|_L + 1) \end{cases} \quad (2.60)$$

Với

$$r_3 = \left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - \|\ell_1(1)\|_L - \frac{1}{4} \|\ell_0(1)\|_L^2 \right)^{-1} \quad (2.61)$$

Do đó ta có $\|u\|_C = \max\{M, m\} \leq r_3 \lambda_0 (\|\ell_0(1)\|_L + 1) (\|q^*\|_L + c)$

Đặt $r_4 = r_3 \lambda_0 (\|\ell_0(1)\|_L + 1)$

Vậy ta có bất đẳng thức $\|u\|_C \leq r_4 (c + \|q^*\|_L)$.

➤ Nếu $t_m > t_M$

Khi đó, tồn tại số $\alpha_4 \in (t_M, t_m)$ sao cho

$$u(t) > 0, t_M \leq t < \alpha_4 \text{ và } u(\alpha_4) = 0.$$

Đặt $\alpha_5 = \sup\{t \in [t_m, b] : u(s) < 0, t_m \leq s \leq t\}$

Dễ thấy $u(t) < 0, t_m \leq t < \alpha_5$ và nếu $\alpha_5 < b$ thì $u(\alpha_5) = 0$.

$$\text{Đặt } \alpha_6 = \begin{cases} a & , u(b) \geq 0 \\ \sup\{t \in [a, t_M] : u(s) < 0, a \leq s \leq t\} & , u(b) < 0 \end{cases}$$

Dễ thấy nếu $\alpha_6 > a$ thì $u(t) < 0, a \leq t < \alpha_6$ và $u(\alpha_6) = 0$.

Lấy tích phân biểu thức

$$u'(t) = \ell_0(u)(t) - \ell_1(u)(t) + \tilde{q}(t), t \in [a, b]$$

từ t_M đến α_4 và từ t_m đến α_5 và từ a đến α_6 . Ta chứng minh được:

$$M \leq M \int_{t_M}^{\alpha_4} \ell_1(1)(s) ds + m \int_{t_M}^{\alpha_4} \ell_0(1)(s) ds + \int_{t_M}^{\alpha_4} q^*(s) ds, \quad (2.62)$$

$$m + u(\alpha_5) \leq M \int_{t_m}^{\alpha_5} \ell_0(1)(s) ds + m \int_{t_m}^{\alpha_5} \ell_1(1)(s) ds + \int_{t_m}^{\alpha_5} q^*(s) ds, \quad (2.63)$$

$$u(\alpha_6) - u(a) \leq M \int_a^{\alpha_6} \ell_0(1)(s) ds + m \int_a^{\alpha_6} \ell_1(1)(s) ds + \int_a^{\alpha_6} q^*(s) ds \quad (2.64)$$

Nếu $u(a) \geq 0$, giả sử $\alpha_5 = b$

$$[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\mu u(b)) \leq c$$

hay
$$|\lambda|u(a) - |\mu|u(\alpha_5) \leq c$$

suy ra
$$-|\mu|u(\alpha_5) \leq c \Leftrightarrow u(\alpha_5) \geq -\frac{c}{|\mu|}$$

Hiển nhiên nếu $\alpha_5 < b$ ta cũng có $0 = u(\alpha_5) \geq -\frac{c}{|\mu|}$

Từ đó, ta có $u(\alpha_5) \geq -\frac{c}{|\mu|}$.

Do đó từ (2.63) và $\left|\frac{\mu}{\lambda}\right| \in (0,1]$ ta suy ra

$$\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|m - \frac{c}{|\lambda|} \leq M \int_J \ell_0(1)(s) ds + m \int_J \ell_1(1)(s) ds + \int_J q^*(s) ds, \quad I = [t_m, \alpha_5] \quad (2.65)$$

Nếu $u(a) < 0$. Ta có:

$$[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\mu u(b)) \leq c$$

hay
$$|\lambda|u(a) - |\mu|u(b) \leq c$$

hay
$$-\frac{1}{|\lambda|}(|\lambda|u(a) - |\mu|u(b)) \operatorname{sgn} u(b) \leq -\frac{c}{|\lambda|}$$

Từ đó ta có:

$$\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|u(b) - u(a) \geq -\frac{1}{|\lambda|}[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn} \mu u(b) \geq -\frac{c}{|\lambda|}$$

Do tính chất của α_5 , ta chứng minh được

$$\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|u(\alpha_5) - u(a) \geq -\frac{c}{|\lambda|} \quad (2.66)$$

Nhân 2 vế của (2.63) cho $\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|$ và kết hợp giả thiết $\left|\frac{\mu}{\lambda}\right| \in (0,1]$, ta có:

$$\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|u(\alpha_5) + \left|\frac{\mu}{\lambda}\right|m \leq M \int_{t_m}^{\alpha_5} \ell_0(1)(s) ds + m \int_{t_m}^{\alpha_5} \ell_1(1)(s) ds + \int_{t_m}^{\alpha_5} q^*(s) ds,$$

Cộng bất đẳng thức cuối với (2.64), từ (2.66) và các tính chất trên ta thấy bất đẳng thức (2.65) đúng với $J = [a, \alpha_6] \cup [t_m, \alpha_5]$

Do đó trong cả hai trường hợp $u(a) \geq 0$ hoặc $u(a) < 0$ bất đẳng thức (2.65) đều đúng với

$$J = [a, \alpha_6] \cup [t_m, \alpha_5].$$

Theo (2.62) và (2.65) và đặt

$$A_2 = \int_{\iota_M}^{\alpha_4} \ell_1(1)(s) ds, \quad B_2 = \int_J \ell_1(1)(s) ds$$

$$C_2 = \int_{\iota_M}^{\alpha_4} \ell_0(1)(s) ds \quad D_2 = \int_J \ell_0(1)(s) ds$$

Do $\|\ell_1(1)\|_L < \left| \frac{\mu}{\lambda} \right|$ ta có $A_2 < \left| \frac{\mu}{\lambda} \right|$, $B_2 < \left| \frac{\mu}{\lambda} \right|$

ta có

$$0 < M(1 - A_2) \leq mC_2 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|},$$

$$0 < m\left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - B_2\right) \leq MD_2 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|}. \quad (2.67)$$

Từ (2.67) suy ra

$$0 < M(1 - A_2)\left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - B_2\right) \leq C_2\left(MD_2 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|}\right) + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|}$$

$$\leq MC_2D_2 + \lambda_0(\|q^*\|_L + c)(\|\ell_0(1)\|_L + 1);$$

$$0 < m(1 - A_2)\left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - B_2\right) \leq D_2\left(mC_2 + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|}\right) + \|q^*\|_L + \frac{c}{|\lambda|}$$

$$\leq mC_2D_2 + \lambda_0(\|q^*\|_L + c)(\|\ell_0(1)\|_L + 1); \quad (2.68)$$

Do hai bất đẳng thức sau

$$(1 - A_2)\left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - B_2\right) \geq \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| A_2 - B_2 \geq \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - \|\ell_1(1)\|_L > 0$$

$$4C_2D_2 \leq (C_2 + D_2)^2 \leq \|\ell_0(1)\|_L^2.$$

và (2.58), từ (2.68) ta suy ra bất đẳng thức

$$\|u\|_C \leq r_4\left(c + \|q^*\|_L\right)$$

với r_3 xác định bởi (2.61) và $r_4 = r_3\lambda_0(\|\ell_0(1)\|_L + 1)$.

Kết hợp các bất đẳng thức đạt được trong 2 trường hợp hàm u đổi dấu và không đổi dấu ta có bất đẳng thức

$$\|u\|_C \leq r\left(c + \|q^*\|_L\right)$$

$$\text{với } r = r_2 + r_4 = \frac{\lambda_0 |\lambda| (\|\ell_0(1)\|_L + 1)}{\|\ell_0(1)\|_L (|\mu| - |\lambda| \|\ell_1(1)\|_L) - |\lambda| \|\ell_1(1)\|_L - |\lambda| + |\mu|} + \frac{\lambda_0 (\|\ell_0(1)\|_L + 1)}{\left| \frac{\mu}{\lambda} - \|\ell_1(1)\|_L - \frac{1}{4} \|\ell_0(1)\|_L^2 \right|}$$

Vậy với $q^* \in L([a, b]; R_+)$, $c \in R_+$ và $u \in \tilde{C}([a, b]; R)$ thỏa mãn

- (i) $[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}[\mu u(b)] \leq c$
- (ii) $-[u'(t) - \ell(u)(t)] \operatorname{sgn}[u(t)] \leq q^*(t), \quad t \in [a, b]$

Ta thấy tồn tại $r > 0$ sao cho $\|u\|_C \leq r(c + \|q^*\|_L)$

Từ đây, theo định nghĩa 2.4 (trường hợp $i = 2$) ta suy ra $\ell \in A^2(\lambda, \mu)$.

2.2.2 TẬP HỢP $B(\lambda, \mu)$

Định nghĩa 2.9. Ta nói cặp toán tử $(\ell_0, \ell_1) \in P_{ab} \times L_{ab}$ thuộc vào tập hợp $B(\lambda, \mu)$ nếu tồn tại một số $r > 0$ sao cho với mọi $q^* \in L([a, b]; R_+)$, $c \in R_+$ và mọi hàm $u \in \tilde{C}([a, b]; R)$ thỏa mãn các bất đẳng thức:

$$[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\lambda u(a)) \leq c \quad (2.69)$$

$$[u'(t) + \ell_1(u)(t)] \operatorname{sgn} u(t) \leq \ell_0(|u|)(t) + q^*(t), \quad t \in [a, b] \quad (2.70)$$

thì ta có đánh giá $\|u\|_C \leq r(c + \|q^*\|_L)$.

Bổ đề 2.10. Giả sử tồn tại $c \in R_+$ sao cho

$$h(v) \operatorname{sgn}(\lambda v(a)) \leq c, \quad v \in C([a, b]; R) \quad (2.71)$$

và giả sử tồn tại $(\ell_0, \ell_1) \in B(\lambda, \mu)$ sao cho bất đẳng thức

$$[F(v)(t) + \ell_1(v)(t)] \operatorname{sgn} v(t) \leq \ell_0(|v|)(t) + q(t, \|v\|_C), \quad t \in [a, b] \quad (2.72)$$

được thỏa mãn với mọi $v \in B_{\lambda\mu}^1([a, b]; R)$, trong đó $q \in K([a, b] \times R_+; R_+)$ là hàm không giảm theo

biến thứ hai thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_a^b q(s, x) ds = 0$.

Khi đó bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất một nghiệm.

Chứng minh

Xét bài toán thuần nhất

$$\begin{cases} u'(t) = -\ell_1(u)(t) \\ \lambda u(a) + \mu u(b) = 0 \end{cases}$$

chỉ có nghiệm tầm thường do $(\ell_0, \ell_1) \in B(\lambda, \mu)$. Thật vậy, chọn $c = 0, q^* \equiv 0$. Do u là nghiệm của bài toán thuần nhất nên u thỏa mãn (2.69), (2.70).

Do đó ta có bất đẳng thức $\|u\|_C \leq r(c + \|q^*\|_L) = 0$. Suy ra bài toán thuần nhất ở trên chỉ có nghiệm tầm thường.

Gọi r là số dương trong định nghĩa 2.9

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_a^b q(s, x) ds = 0$ nên tồn tại $\rho > 2rc$ sao cho

$$\frac{1}{x} \int_a^b q(s, x) ds < \frac{1}{2r} \text{ khi } x > \rho$$

Giả sử $u \in \widetilde{C}([a, b]; R)$ thỏa mãn (2.7), (2.8) với $\delta \in (0, 1)$, $\ell \equiv -\ell_1$ có nghĩa là :

$$\begin{aligned} u'(t) + \ell_1(u)(t) &= \delta [F(u)(t) + \ell_1(u)(t)], & t \in [a, b], \\ \lambda u(a) + \mu u(b) &= \delta h(u) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Theo (2.71) ta có:

$$h(u) \operatorname{sgn}(\lambda u(a)) \leq c$$

$$\text{Suy ra} \quad \frac{[\lambda u(a) + \mu u(b)]}{\delta} \operatorname{sgn}(\lambda u(a)) \leq c$$

$$\text{Do đó} \quad (\lambda u(a) + \mu u(b)) \operatorname{sgn}(\lambda u(a)) \leq c$$

Vậy u thỏa mãn bất đẳng thức (2.69) hay $u \in B_{\lambda, \mu}^1([a, b]; R)$.

Do các điều kiện (2.72), (2.73) ta có

$$[u'(t) + \ell_1(u)(t)] \operatorname{sgn} u(t) \leq \delta [\ell_0(|u|)(t) + q(t, \|u\|_C)] \leq \ell_0(|u|)(t) + q(t, \|u\|_C)$$

Từ đó hàm u thỏa mãn bất đẳng thức (2.70) với $q^*(t) = q(t, \|u\|_C)$, $t \in [a, b]$

Kết hợp điều kiện $(\ell_0, \ell_1) \in B(\lambda, \mu)$ ta có:

$$\|u\|_C \leq r(c + \|q^*\|_L)$$

Nếu $\|u\|_C > \rho$ thì do tính chất $\frac{1}{x} \int_a^b q(s, x) ds < \frac{1}{2r}$ khi $x > \rho$ ở trên ta có:

$$\frac{1}{\|u\|_C} \int_a^b q(s, \|u\|_C) ds < \frac{1}{2r} \text{ hay } 2r \int_a^b q(s, \|u\|_C) ds < \|u\|_C.$$

Từ đó ta có $2r\|q^*\|_L < \|u\|_C$.

Kết hợp bất đẳng thức $\|u\|_C \leq r(c + \|q^*\|_L)$ ta suy ra $\|u\|_C \leq 2rc < \rho$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\|u\|_C > \rho$ ở trên.

Vậy ta phải có $\|u\|_C \leq \rho$.

Do ρ không phụ thuộc vào u hoặc δ nên theo bổ đề 2.3 bài toán có ít nhất một nghiệm.

Bổ đề 2.11.

Giả sử trên $C([a, b]; R)$ bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$[h(v) - h(w)] \operatorname{sgn}(\lambda(v(a) - w(a))) \leq 0, \quad (2.74)$$

và giả sử tồn tại $(\ell_0, \ell_1) \in B(\lambda, \mu)$ sao cho trên tập $B_{\lambda\mu}^1([a, b]; R)$ với $c = |h(0)|$ bất đẳng thức sau

$$[F(v)(t) - F(w)(t) + \ell_1(v - w)(t)] \operatorname{sgn}(v(t) - w(t)) \leq \ell_0(|v - w|)(t), \quad t \in [a, b] \quad (2.75)$$

được thỏa mãn.

Khi đó bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh

Do (2.74) nên điều kiện (2.71) đúng. Với $c = |h(0)|$

Do (2.75) ta thấy trên $u \in B_{\lambda\mu}^1([a, b]; R)$ bất đẳng thức (2.72) đúng với $q \equiv |F(0)|$

Do các điều kiện của bổ đề 2.10 đúng nên bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất một nghiệm. Sau đây ta chứng minh đó là nghiệm duy nhất của bài toán.

Gọi u_1, u_2 là hai nghiệm tùy ý của bài toán (2.1), (2.2).

Đặt $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ với $t \in [a, b]$.

Do các điều kiện (2.74), (2.75) ta có

$$\begin{aligned} [\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(\lambda u(a)) &\leq 0, \\ [u'(t) + \ell_1(u)(t)] \operatorname{sgn} u(t) &\leq \ell_0(|u|)(t) \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện $(\ell_0, \ell_1) \in B(\lambda, \mu)$ ta có $u \equiv 0$. Từ đó suy ra $u_1 \equiv u_2$

Bổ đề 2.12. *Giả sử $|\mu| < |\lambda|$ và tồn tại $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ sao cho*

$$\ell_0 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu), -\ell_1 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu).$$

Khi đó $(\ell_0, \ell_1) \in B(\lambda, \mu)$

Chứng minh.

Ta chứng minh Bổ đề 2.12 bằng định nghĩa.

Lấy $q^* \in L([a, b]; R_+)$, $c \in R_+$, và $u \in \tilde{C}([a, b]; R)$ thỏa mãn

$$[\lambda u(a) + \mu u(b)] \operatorname{sgn}(u(a)) \leq c, \quad (2.76)$$

$$[u'(t) + \ell_1(u)(t)] \operatorname{sgn} u(t) \leq \ell_0(|u|)(t) + q^*(t), \quad t \in [a, b] \quad (2.77)$$

Ta chứng minh tồn tại $r > 0$ sao cho (2.14) đúng.

Do $\ell_0 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ nên các giả thiết của Bổ đề 2.2 được thỏa mãn. Chúng ta sẽ chứng minh rằng bất đẳng thức (2.14) là chính xác với $r = r_0$ là số dương trong Bổ đề 2.2

Đặt $\tilde{q}(t) = u'(t) + \ell_1(u)(t)$, khi $t \in [a, b]$, ta có:

- $u'(t) = -\ell_1(u)(t) + \tilde{q}(t), \quad t \in [a, b]$
- $\tilde{q}(t) \operatorname{sgn} u(t) \leq \ell_0(|u|)(t) + q^*(t) \quad \text{khi } t \in [a, b]$

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} [u(t)]_+' &\leq \ell_1([u]_-)(t) + \ell_0(|u|)(t) + q^*(t) = \\ &= -\ell_1([u]_+)(t) + \ell_1(|u|)(t) + \ell_0(|u|)(t) + q^*(t), \quad t \in [a, b] \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} [u(t)]_-' &\leq \ell_1([u]_+)(t) + \ell_0(|u|)(t) + q^*(t) = \\ &= -\ell_1([u]_-)(t) + \ell_1(|u|)(t) + \ell_0(|u|)(t) + q^*(t), \quad t \in [a, b] \end{aligned}$$

Do $-\ell_1 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ nên theo Định lý 1.1 bài toán

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= -\ell_1(\alpha)(t) + \ell_1(|u|)(t) + \ell_0(|u|)(t) + q^*(t) \\ \lambda \alpha(a) + \mu \alpha(b) &= c \operatorname{sgn} \lambda \end{aligned}$$

Có nghiệm duy nhất α . Do $\lambda \mu \leq 0$ và (2.76) ta có:

$$|\lambda| [u(a)]_+ - |\mu| [u(b)]_+ \leq c, \quad |\lambda| [u(a)]_- - |\mu| [u(b)]_- \leq c$$

Từ $\lambda \mu \leq 0$, các bất đẳng thức ở trên, kết hợp điều kiện $-\ell_1 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ và chú ý 1.4 dẫn đến

$$[u(t)]_+ \leq \alpha(t), \quad [u(t)]_- \leq \alpha(t), \quad t \in [a, b]$$

Suy ra $|u(t)| \leq \alpha(t), \quad t \in [a, b]$.

Do đó, ta chứng minh được

$$\alpha'(t) \leq \ell_0(\alpha)(t) + q^*(t), \quad t \in [a, b]$$

Do $\ell_0 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$, $\lambda\alpha(a) + \mu\alpha(b) = c \operatorname{sgn} \lambda$ từ bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\alpha(t) \leq v(t), \quad t \in [a, b]$$

Trong đó v là nghiệm của bài toán

$$v'(t) = \ell_0(v)(t) + \bar{q}(t), \quad \lambda v(a) + \mu v(b) = \bar{c}$$

với $\bar{q} \equiv q^*$ và $\bar{c} = c \operatorname{sgn} \lambda$. Và do đó theo Bổ đề 2.2 đánh giá (2.14) là chính xác với $r = r_0$

CHƯƠNG 3:
CÁC TIÊU CHUẨN HIỆU QUẢ VỀ TÍNH GIẢI ĐƯỢC CỦA BÀI TOÁN BIÊN DẠNG
TUẦN HOÀN CHO PHƯƠNG TRÌNH
VI PHÂN HÀM PHI TUYẾN BẬC NHẤT

Ở chương 3, ta thiết lập những điều kiện cụ thể cho tính giải được và giải được duy nhất của bài toán (2.1), (2.2) khi điều kiện biên (2.2) là một dạng tuần hoàn, nghĩa là khi bất đẳng thức $\lambda\mu \leq 0$ được thoả mãn. Mục 3.1 nói về các định lý tồn tại nghiệm của bài toán; mục 3.2 nói về các định lý duy nhất nghiệm của bài toán. Mục 3.3 đề cập đến phương trình vi phân đối số lệch. Mục 3.4 đưa ra ví dụ nhằm chứng minh tính tối ưu của bất đẳng thức ở Định lý 3.1. Các định lý trong chương 3 chỉ giải quyết vấn đề khi $|\mu| \leq |\lambda|$, còn trường hợp $|\mu| \geq |\lambda|$, ta có thể giải quyết theo hướng tương tự. Trong phần này ta giả sử rằng hàm $q \in K([a; b] \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ là hàm không giảm theo đối số thứ hai và thoả mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_a^b q(s, x) ds = 0$$

3.1. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ TỒN TẠI NGHIỆM

Định lý 3.1. *Giả sử $0 \neq |\mu| \leq |\lambda|$ và*

- *Giả sử tồn tại $c \in \mathbb{R}_+$ sao cho trên tập $C([a, b]; \mathbb{R})$ ta có*

$$h(v) \operatorname{sgn}(\lambda v(a)) \leq c,$$

- *Giả sử tồn tại $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ sao cho*

$$\text{o} \quad \|\ell_0(1)\|_L < 1 \tag{3.1}$$

$$\text{o} \quad \frac{\|\ell_0(1)\|_L}{1 - \|\ell_0(1)\|_L} - \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\mu|} < \|\ell_1(1)\|_L < 2\sqrt{1 - \|\ell_0(1)\|_L} \tag{3.2}$$

- o *Trên tập $B_{\lambda\mu}^1([a; b]; \mathbb{R})$ ta có bất đẳng thức:*

$$[F(v)(t) - \ell_0(v)(t) + \ell_1(v)(t)] \operatorname{sgn} v(t) \leq q(t, \|v\|_C), \quad t \in [a, b].$$

Khi đó, bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất một nghiệm.

Chứng minh.

Từ (3.1),(3.2) ta thấy các điều kiện của Bổ đề 2.7 được thỏa mãn. Từ đó suy ra $\ell_0 - \ell_1 \in A^1(\lambda, \mu)$.

Đặt $\ell = \ell_0 - \ell_1 \in A^1(\lambda, \mu)$.

Do các bất đẳng thức

$$h(v) \operatorname{sgn}(\lambda v(a)) \leq c,$$

$$[F(v)(t) - \ell_0(v)(t) + \ell_1(v)(t)] \operatorname{sgn} v(t) \leq q(t, \|v\|_C), \quad t \in [a, b]$$

ta thấy các điều kiện của Bổ đề 2.5 được thỏa mãn với $i=1$ và $\ell = \ell_0 - \ell_1 \in A^1(\lambda, \mu)$

Vậy bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất một nghiệm.

Chú ý 3.2. Giả sử $0 \neq |\mu| \leq |\lambda|$. Đặt D là tập hợp các cặp số thực dương $(x, y) \in R_+ \times R_+$ thỏa mãn điều kiện

$$x < 1, \quad \frac{x}{1-x} - \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\mu|} < y < 2\sqrt{1-x}$$

Định lý 3.1 được viết lại như sau :

Giả sử $0 \neq |\mu| \leq |\lambda|$ và

- Giả sử tồn tại $c \in R_+$ sao cho trên tập $C([a, b]; R)$ ta có

$$h(v) \operatorname{sgn}(\lambda v(a)) \leq c, \quad (a)$$

- Giả sử tồn tại $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ sao cho

$$o \quad (\|\ell_0(1)\|_L, \|\ell_1(1)\|_L) \in D$$

- o Trên tập $B_{\lambda\mu}^1([a, b]; R)$ ta có bất đẳng thức:

$$[F(v)(t) - \ell_0(v)(t) + \ell_1(v)(t)] \operatorname{sgn} v(t) \leq q(t, \|v\|_C), \quad t \in [a, b]. \quad (b)$$

Khi đó, bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất một nghiệm.

Ở mục 3.4 ta sẽ chứng tỏ rằng với mọi $x_0, y_0 \in R_+, x_0, y_0 \notin D$, tồn tại hàm $F \in K_{ab}, \ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ và $c_0 \in R$ sao cho các điều kiện (a) và (b) đúng với $h \equiv c_0, c = |c_0|$

$$x_0 = \|\ell_0(1)\|_L, y_0 = \|\ell_1(1)\|_L,$$

nhưng bài toán (2.1), (2.2) với $h \equiv c_0$ không có nghiệm.

Định lý 3.3. Giả sử $0 \neq |\mu| \leq |\lambda|$ và

- Giả sử tồn tại $c \in R_+$ sao cho trên tập $C([a, b]; R)$ ta có bất đẳng thức

$$h(v)\operatorname{sgn}(\mu v(b)) \leq c$$

- Giả sử tồn tại $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ sao cho

$$\text{o} \quad \|\ell_1(1)\|_L < \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \quad (3.3)$$

$$\text{o} \quad \frac{|\lambda|}{|\mu| - |\lambda| \|\ell_1(1)\|_L} - 1 < \|\ell_0(1)\|_L < 2\sqrt{\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| - \|\ell_1(1)\|_L} \quad (3.4)$$

- o Trên $B_{\lambda\mu}^2([a,b];R)$ ta có bất đẳng thức:

$$\left[F(v)(t) - \ell_0(v)(t) + \ell_1(v)(t) \right] \operatorname{sgn} v(t) \geq -q(t, \|v\|_C), \text{ khi } t \in [a, b].$$

Khi đó, bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất một nghiệm.

Chứng minh.

Từ (3.3), (3.4) ta thấy các điều kiện của Bổ đề 2.8 được thỏa mãn. Từ đó suy ra $\ell_0 - \ell_1 \in A^2(\lambda, \mu)$.

Đặt $\ell = \ell_0 - \ell_1 \in A^2(\lambda, \mu)$.

Do các bất đẳng thức

$$h(v)\operatorname{sgn}(\mu v(b)) \leq c,$$

$$\left[F(v)(t) - \ell_0(v)(t) + \ell_1(v)(t) \right] \operatorname{sgn} v(t) \geq -q(t, \|v\|_C), \quad t \in [a, b]$$

ta thấy các điều kiện của Bổ đề 2.5 được thỏa mãn với $i=2$ và $\ell = \ell_0 - \ell_1 \in A^2(\lambda, \mu)$

Vậy bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất một nghiệm.

Định lý 3.4 Giả sử $|\mu| < |\lambda|$ và

- Giả sử tồn tại $c \in R_+$ sao cho trên tập $C([a,b];R)$ ta có bất đẳng thức

$$h(v)\operatorname{sgn}(\lambda v(a)) \leq c,$$

- Giả sử tồn tại $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ sao cho

$$\text{o} \quad \ell_0 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu), \quad -\ell_1 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$$

- o Trên tập hợp $B_{\lambda\mu}^1([a,b];R)$ bất đẳng thức

$$\left[F(v)(t) + \ell_1(v)(t) \right] \operatorname{sgn} v(t) \leq \ell_0(|v|)(t) + q(t, \|v\|_C), \quad t \in [a, b]$$

Khi đó bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất một nghiệm.

Chứng minh.

Do $\ell_0 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu), -\ell_1 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ nên theo Bổ đề 2.12 ta có $(\ell_0, \ell_1) \in B(\lambda, \mu)$

Kết hợp với các bất đẳng thức ở trên ta thấy các điều kiện của Bổ đề 2.10 được thỏa mãn. Do đó bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất một nghiệm.

3.2 CÁC ĐỊNH LÝ DUY NHẤT NGHIỆM

Định lý 3.5. *Giả sử $0 \neq |\mu| \leq |\lambda|$, và*

- *Trên tập $C([a, b]; R)$ ta có bất đẳng thức*

$$[h(v) - h(w)] \operatorname{sgn}(\lambda(v(a) - w(a))) \leq 0, ,$$

- *Giả sử tồn tại $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ sao cho*

$$\circ \quad \|\ell_0(1)\|_L < 1$$

$$\circ \quad \frac{\|\ell_0(1)\|_L}{1 - \|\ell_0(1)\|_L} - \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\mu|} < \|\ell_1(1)\|_L < 2\sqrt{1 - \|\ell_0(1)\|_L}$$

- o *Trên tập $B_{\lambda\mu}^1([a, b]; R)$ với $c = |h(0)|$ ta có bất đẳng thức:*

$$[F(v)(t) - F(w)(t) - \ell_0(v - w)(t) + \ell_1(v - w)(t)] \operatorname{sgn}(v(t) - w(t)) \leq 0, \quad t \in [a, b]$$

Khi đó, bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh.

Từ các bất đẳng thức của các toán tử ℓ_0, ℓ_1 ta thấy các điều kiện của Bổ đề 2.7 được thỏa mãn. Suy ra $\ell_0 - \ell_1 \in A^1(\lambda, \mu)$

Điều này kết hợp với các bất đẳng thức còn lại ta suy ra các điều kiện trong Bổ đề 2.6 được thỏa mãn với $i=1$ và $\ell = \ell_0 - \ell_1$

Từ đó bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm duy nhất.

Định lý 3.6. *Giả sử $0 \neq |\mu| \leq |\lambda|$, và giả sử*

- *Trên tập $C([a, b]; R)$ ta có bất đẳng thức*

$$[h(v) - h(w)] \operatorname{sgn}(\mu(v(b) - w(b))) \leq 0, ,$$

- *Tồn tại $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ sao cho*

$$\circ \quad \|\ell_1(1)\|_L < \frac{|\mu|}{|\lambda|},$$

$$\circ \quad \frac{|\lambda|}{|\mu| - |\lambda| \|\ell_1(1)\|_L} - 1 < \|\ell_0(1)\|_L < 2\sqrt{\frac{|\mu|}{|\lambda|}} - \|\ell_1(1)\|_L,$$

o Trên tập $B_{\lambda\mu}^2([a,b];R)$ với $c = |h(0)|$ ta có bất đẳng thức:

$$\left[F(v)(t) - F(w)(t) - \ell_0(v-w)(t) + \ell_1(v-w)(t) \right] \operatorname{sgn}(v(t) - w(t)) \geq 0, \quad t \in [a,b]$$

Khi đó, bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh.

Từ các bất đẳng thức của các toán tử ℓ_0, ℓ_1 ta thấy các điều kiện của Bổ đề 2.8 được thỏa mãn. Suy ra $\ell_0 - \ell_1 \in A^2(\lambda, \mu)$

Điều này kết hợp với các bất đẳng thức còn lại ta suy ra các điều kiện trong Bổ đề 2.6 được thỏa mãn với $i=2$ và $\ell = \ell_0 - \ell_1$

Từ đó bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm duy nhất.

Định lý 3.7. Giả sử $|\mu| < |\lambda|$ và giả sử

- Trên tập $C([a,b];R)$ ta có bất đẳng thức

$$\left[h(v) - h(w) \right] \operatorname{sgn}(\lambda(v(a) - w(a))) \leq 0,$$

- Tồn tại $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ sao cho

$$\ell_0 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu), \quad -\ell_1 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu),$$

- o Trên tập $B_{\lambda\mu}^1([a,b];R)$ với $c = |h(0)|$, ta có bất đẳng thức:

$$\left[F(v)(t) - F(w)(t) + \ell_1(v-w)(t) \right] \operatorname{sgn}(v(t) - w(t)) \leq \ell_0(|v-w|)(t), \quad t \in [a,b]$$

Khi đó, bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh.

Từ điều kiện $\ell_0 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$, $-\ell_1 \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$ ở trên theo Bổ đề 2.12 ta có $(\ell_0, \ell_1) \in B(\lambda, \mu)$. Điều này kết hợp với các bất đẳng thức còn lại ta suy ra các điều kiện của Bổ đề 2.11 được thỏa mãn. Do đó bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm duy nhất.

3.3 BÀI TOÁN BIÊN DẠNG TUẦN HOÀN CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐỐI SỐ LỆCH

Trong mục này ta xét một trường hợp riêng của bài toán (2.1), (2.2). Đó là bài toán biên dạng tuần hoàn cho phương trình vi phân đối số lệch

$$u'(t) = \sum_{k=1}^n \left(p_k(t)u(\tau_k(t)) - g_k(t)u(v_k(t)) \right) + f(t, u(t), u(\zeta_1(t)), \dots, u(\zeta_n(t))), \quad (3.5)$$

Với điều kiện biên:

$$\lambda u(a) + \mu u(b) = h(u) \quad (3.6)$$

Trong đó $f \in K([a, b] \times R^{n+1}; R)$, $p_k, g_k \in L([a, b]; R_+)$, $\mu\lambda \leq 0$

và $\tau_k, \nu_k \in M_{ab}(k = \overline{1, m})$, $\zeta_j \in M_{ab}(j = \overline{1, n})$, $m, n \in N$; $h: C([a, b]; R) \rightarrow R$ là hàm liên tục thoả mãn

$\forall r > 0, \exists M_r \in R_+$ sao cho $|h(v)| \leq M_r$ khi $\|v\|_C \leq r$

Ta giả sử $q \in K([a, b] \times R_+; R_+)$ là hàm không giảm theo biến thứ 2 và thoả mãn đẳng thức

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_a^b q(s, x) ds = 0.$$

Ta đưa bài toán (3.5), (3.6) về dạng (2.1), (2.2) bằng cách đặt như sau:

Đặt

$$\begin{aligned} F(v)(t) &= \sum_{k=1}^m (p_k(t)v(\tau_k(t)) - g_k(t)v(\nu_k(t))) + f(t, v(t), v(\zeta_1(t)), \dots, v(\zeta_n(t))), \\ \ell_0(v)(t) &= \sum_{k=1}^m p_k(t)v(\tau_k(t)), & \ell_1(v)(t) &= \sum_{k=1}^m g_k(t)v(\nu_k(t)), \\ p_0(t) &= \sum_{j=1}^m p_j(t), & g_0(t) &= \sum_{j=1}^m g_j(t). \end{aligned}$$

Khi đó bài toán (3.5), (3.6) thành

$$\begin{aligned} u'(t) &= F(u)(t) \\ \lambda u(a) + \mu u(b) &= h(u) \end{aligned}$$

Ta chứng minh được các toán tử ℓ_0, ℓ_1 và F thoả mãn các điều kiện của bài toán (2.1), (2.2) và

$$\|\ell_0(1)\|_L = \|p_0\|_L, \quad \|\ell_1(1)\|_L = \|g_0\|_L.$$

3.3.1 CÁC ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM

Định lý 3.8. Giả sử $0 \neq |\mu| \leq |\lambda|$ và

- Giả sử tồn tại $c \in R_+$ sao cho trên tập $C([a, b]; R)$ ta có bất đẳng thức:

$$h(v) \operatorname{sgn}(\lambda v(a)) \leq c$$

- Trên tập hợp $[a, b] \times R^{n+1}$ ta có bất đẳng thức:

$$f(t, x, x_1, \dots, x_n) \operatorname{sgn} x \leq q(t, |x|) \quad (3.7)$$

- Giả sử tồn tại $p_k, g_k \in L([a, b]; R_+)$ ($k = 1, \dots, m$) sao cho

$$0 \qquad \qquad \qquad \|p_0\|_L < 1, \quad (3.8)$$

$$o \quad \frac{\|p_0\|_L}{1-\|p_0\|_L} - \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\mu|} < \|g_0\|_L < 2\sqrt{1-\|p_0\|_L} \quad (3.9)$$

Khi đó, bài toán (3.5), (3.6) có ít nhất một nghiệm.

Chứng minh.

Từ (3.7) ta có:

$$f(t, v(t), v(\varsigma_1(t)), \dots, v(\varsigma_n(t))) \cdot \operatorname{sgn} v(t) \leq q(t, |v(t)|), \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\text{Mà} \quad q(t, |v(t)|) \leq q(t, \|v\|_C), \quad t \in [a, b]$$

$$\text{Nên ta có:} \quad f(t, v(t), v(\varsigma_1(t)), \dots, v(\varsigma_n(t))) \cdot \operatorname{sgn} v(t) \leq q(t, \|v\|_C), \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\text{Hay} \quad [F(v)(t) - \ell_0(v)(t) + \ell_1(v)(t)] \operatorname{sgn} v(t) \leq q(t, \|v\|_C), \quad \forall t \in [a, b]$$

Kết hợp với (3.8), (3.9) ta thấy các điều kiện của định lý 3.1 được thỏa mãn. Do đó, theo định lý 3.1 bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm. Từ đó suy ra bài toán (3.5), (3.6) có ít nhất một nghiệm.

Chú ý. Bất đẳng thức nghiêm ngặt (3.8), (3.9) không thể thay thế bởi bất đẳng thức không ngặt. Chi tiết có thể xem mục Chú ý phần 3.4.

Định lý 3.9. Giả sử $0 \neq |\mu| \leq |\lambda|$ và

- Giả sử tồn tại $c \in R_+$ sao cho trên tập $C([a, b]; R)$ ta có bất đẳng thức:

$$h(v) \operatorname{sgn}(\mu v(b)) \leq c,$$

- Trên tập hợp $[a, b] \times R^{n+1}$ ta có bất đẳng thức:

$$f(t, x, x_1, \dots, x_n) \operatorname{sgn} x \geq -q(t, |x|) \quad (3.10)$$

- Giả sử tồn tại $p_k, g_k \in L([a, b]; R_+)$ ($k=1, \dots, m$) sao cho

$$o \quad \|g_0\|_L < \frac{|\mu|}{|\lambda|}, \quad (3.11)$$

$$o \quad \frac{|\lambda|}{|\mu| - |\lambda| \|g_0\|_L} - 1 < \|p_0\|_L < 2\sqrt{\frac{|\mu|}{|\lambda|} - \|g_0\|_L} \quad (3.12)$$

Khi đó, bài toán (3.5), (3.6) có ít nhất một nghiệm.

Chứng minh.

Một cách tương tự như ở định lý 3.8. Từ (3.10), (3.11), (3.12) ta thấy các điều kiện của định lý 3.3 đúng. Do đó, theo định lý 3.3 bài toán (2.1), (2.2) có ít nhất một nghiệm. hay bài toán (3.5), (3.6) có ít nhất một nghiệm.

3.3.2. ĐỊNH LÝ TỒN TẠI DUY NHẤT NGHIỆM

Định lý 3.10. *Giả sử $0 \neq |\mu| \leq |\lambda|$*

- *Giả sử tồn tại $c \in R_+$ sao cho trên tập $C([a, b]; R)$ ta có bất đẳng thức*

$$[h(v) - h(w)] \operatorname{sgn}(\lambda(v(a) - w(a))) \leq 0,$$

- *Trên tập hợp $[a, b] \times R^{n+1}$ ta có bất đẳng thức:*

$$[f(t, x, x_1, \dots, x_n) - f(t, y, y_1, \dots, y_n)] \operatorname{sgn}(x - y) \leq 0$$

- *Giả sử tồn tại $p_k, g_k \in L([a, b]; R_+)$ ($k = 1, \dots, m$) sao cho*

$$\circ \quad \|p_0\|_L < 1,$$

$$\circ \quad \frac{\|p_0\|_L}{1 - \|p_0\|_L} - \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\mu|} < \|g_0\|_L < 2\sqrt{1 - \|p_0\|_L}$$

Khi đó, bài toán (3.5), (3.6) nghiệm duy nhất.

Chứng minh.

Dễ thấy các điều kiện của định lý 3.5 được thỏa mãn. Vậy, theo định lý 3.5 bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm duy nhất. Từ đó bài toán (3.5), (3.6) có nghiệm duy nhất.

Định lý 3.11. *Giả sử $0 \neq |\mu| \leq |\lambda|$,*

- *Giả sử tồn tại $c \in R_+$ sao cho trên tập $C([a, b]; R)$ ta có*

$$[h(v) - h(w)] \operatorname{sgn}[\mu(v(b) - w(b))] \leq 0,$$

- *Trên tập hợp $[a, b] \times R^{n+1}$ ta có bất đẳng thức:*

$$[f(t, x, x_1, \dots, x_n) - f(t, y, y_1, \dots, y_n)] \operatorname{sgn}(x - y) \geq 0$$

- *Giả sử tồn tại $p_k, g_k \in L([a, b]; R_+)$ ($k = 1, \dots, m$) sao cho*

$$\circ \quad \|g_0\|_L < \frac{|\mu|}{|\lambda|},$$

$$\circ \quad \frac{|\lambda|}{|\mu| - |\lambda| \|g_0\|_L} - 1 < \|p_0\|_L < 2\sqrt{\frac{|\mu|}{|\lambda|} - \|g_0\|_L}$$

Khi đó, bài toán (3.5), (3.6) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh.

Dễ thấy các điều kiện của định lý 3.6 được thỏa mãn. Vậy, theo định lý 3.6 bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm duy nhất. Từ đó bài toán (3.5), (3.6) có nghiệm duy nhất.

3.4 CHÚ Ý

Cho $0 \neq |\mu| \leq |\lambda|$.

Rõ ràng nếu $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+$ và $(x_0, y_0) \notin D$ thì (x_0, y_0) sẽ thuộc ít nhất một trong các tập sau:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : 1 \leq x\}, \\ D_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\lambda|} \leq x < 1, y \leq \frac{x}{1-x} - \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\lambda|} \right\}, \\ D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : x < 1, 2\sqrt{1-x} \leq y\} \end{aligned}$$

Cho $(x_0, y_0) \in D_1$. Đặt $a = 0, b = 3, \varepsilon = \frac{|\mu|}{|\lambda|(1+y_0)}$ ($0 < \varepsilon < 1$)

$$\begin{aligned} p(t) &= \begin{cases} -y_0 & , t \in [0, 1) \\ x_0 & , t \in [1, 2) \\ 0 & , t \in [2, 3] \end{cases} \quad , \quad z(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [0, 2) \\ -\frac{x_0 + \varepsilon - 1}{1 - (x_0 + \varepsilon - 1)(t - 3)} & , t \in [2, 3] \end{cases} \\ \tau(t) &= \begin{cases} 1 & , t \in [0, 1) \\ 3 & , t \in [1, 3] \end{cases} \end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh được

$$x_0 = \int_a^b [p(s)]_+ ds, \quad y_0 = \int_a^b [p(s)]_- ds \quad (3.13)$$

Và bài toán

$$u'(t) = p(t)u(\tau(t)) + z(t)u(t), \quad \lambda u(a) + \mu u(b) = 0 \quad (3.14)$$

Có nghiệm không tầm thường

$$u(t) = \begin{cases} (|\mu| - |\lambda|\varepsilon)t - |\mu| & , t \in [0, 1) \\ -x_0|\lambda|(t-1) - |\lambda|\varepsilon & , t \in [1, 2) \\ |\lambda|(x_0 + \varepsilon - 1)(t-3) - |\lambda| & , t \in [2, 3] \end{cases}$$

Khi đó theo Chú ý 1.2, tồn tại $q_0 \in L([a, b]; \mathbb{R})$ và $c_0 \in \mathbb{R}$ sao cho bài toán (2.1), (2.2) với

$$F(v)(t) = p(t)(v(\tau(t)) + z(t)v(t) + q_0(t), \quad h(v) = c_0 \quad (3.15)$$

không có nghiệm, khi đó với

$$\ell_0(v)(t) = [p(t)]_+ v(\tau(t)), \quad \ell_1(v)(t) = [p(t)]_- v(\tau(t)), \quad q = |q_0|, \quad c = |c_0| \quad (3.16)$$

Ta có $h(v)\operatorname{sgn}(\lambda v(a)) \leq c$, $v \in C([a, b]; \mathbb{R})$ và $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$

Cho $(x_0, y_0) \in D_2$. Đặt $a = 0, b = 3$

$$p(t) = \begin{cases} x_0 & , t \in [0, 1) \\ -y_0 & , t \in [1, 2) \\ 0 & , t \in [2, 3] \end{cases}, \quad \tau(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0, 1) \\ 0 & , t \in [1, 3] \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 2) \\ -\frac{|\mu| - |\lambda|(1 - x_0) - |\mu|y_0(1 - x_0)}{|\lambda|(1 - x_0) - (|\mu| - |\lambda|(1 - x_0) - |\mu|y_0(1 - x_0))(t - 3)} & t \in [2, 3] \end{cases}$$

Dễ dàng chứng minh được (3.13) thoả mãn, và bài toán (3.14) không có nghiệm tầm thường.

$$u(t) = \begin{cases} -\frac{|\mu|x_0}{1 - x_0}t - |\mu| & , t \in [0, 1) \\ |\mu|y_0(t - 1) - \frac{|\mu|}{1 - x_0} & , t \in [1, 2) \\ \left(\frac{|\mu| - |\lambda|(1 - x_0)}{1 - x_0} - |\mu|y_0 \right)(t - 3) - |\lambda| & , t \in [2, 3] \end{cases}$$

Khi đó, theo Chú ý 1.2, tồn tại $q_0 \in L([a, b]; \mathbb{R})$, $c_0 \in \mathbb{R}$ sao cho bài toán (2.1), (2.2) với F và h cho bởi (3.15) không có nghiệm, khi đó điều kiện

$$h(v) \operatorname{sgn}(\lambda v(a)) \leq c, v \in C([a, b]; \mathbb{R}) \quad \ell_0, \ell_1 \in P_{ab} \quad (3.17)$$

thoả mãn, với ℓ_0, ℓ_1, q, c được định nghĩa bởi (3.16).

Cho $(x_0, y_0) \in D_3$. Đặt $a = 0, b = 6$

$$p(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [0, 1) \cup [2, 3) \\ -\sqrt{1 - x_0} & , t \in [1, 2) \cup [3, 4) \\ x_0 & , t \in [4, 5) \\ 2\sqrt{1 - x_0} - y_0 & , t \in [5, 6] \end{cases}$$

$$\tau(t) = \begin{cases} 6 & , t \in [0, 3) \cup [4, 5) \\ 2 & , t \in [3, 4) \\ 1 & , t \in [5, 6] \end{cases}$$

Hiển nhiên, (3.13) thoả mãn. Hơn nữa, định nghĩa $G \in K_{ab}$ bởi

$$G(v)(t) = \begin{cases} -v(t)|v(t)| & , t \in [0, 1) \cup [2, 3) \\ 0 & , t \in [1, 2) \cup [3, 5) \\ q_0(t) & , t \in [5, 6] \end{cases}$$

Với $q_0 \in L([a, b]; \mathbb{R})$ sao cho

$$\int_5^6 q_0(s)ds \geq 1 + y_0 - \sqrt{1 - x_0} \quad (*)$$

Ta sẽ chứng minh rằng bài toán (2.1), (2.2) với F và h cho bởi

$$F(v)(t) = p(t)v(\tau(t)) + G(v)(t), h(v) = 0 \quad (3.18)$$

vô nghiệm, khi đó điều kiện (3.17) thỏa mãn, với ℓ_0, ℓ_1, q, c được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} \ell_0(v)(t) &= [p(t)]_+ v(\tau(t)), & \ell_1(v)(t) &= [p(t)]_- v(\tau(t)), \\ q &\equiv |q_0|, & c &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Thật vậy, giả sử ngược lại u là nghiệm của bài toán (2.1), (2.2) với F và h cho bởi (3.18), có nghĩa là điều kiện (1.1₀) đúng và

$$u'(t) = p(t)u(\tau(t)) + G(u)(t), t \in [a, b] \quad (3.20)$$

Từ (3.20) ta có

$$\begin{aligned} u(1) &= \frac{u(0)}{1 + |u(0)|}, \\ u(2) &= u(1) - u(6)\sqrt{1 - x_0}, \\ u(3) &= \frac{u(2)}{1 + |u(2)|}, \\ u(4) &= u(3) - u(2)\sqrt{1 - x_0}, \\ u(5) &= u(4) + u(6)x_0, \\ u(6) &= u(5) - (y_0 - 2\sqrt{1 - x_0})u(1) + \int_5^6 q_0(s)ds \end{aligned}$$

Từ 3 đẳng thức cuối ta suy ra

$$\begin{aligned} u(3) &= (y_0 - \sqrt{1 - x_0})u(1) - \int_5^6 q_0(s)ds \\ \int_5^6 q_0(s)ds &= (y_0 - \sqrt{1 - x_0}) \frac{u(0)}{1 + |u(0)|} - \frac{u(2)}{1 + |u(2)|} \\ &\leq (y_0 - \sqrt{1 - x_0}) \frac{u(0)}{1 + |u(0)|} + \frac{u(2)}{1 + |u(2)|} \leq 1 + y_0 - \sqrt{1 - x_0} \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức (*).

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Mục đích của luận văn là nghiên cứu các điều kiện đủ cho việc và tồn tại nghiệm của bài toán biên dạng tuần hoàn cho phương trình vi phân hàm bậc nhất phi tuyến (2.1), (2.2). Nội dung chính của luận văn gồm 3 chương:

Chương 1. Chúng ta xây dựng điều kiện cần và đủ để một toán tử tuyến tính và bị chặn mạnh $\ell \in V_{ab}^+(\lambda, \mu)$. Kết quả chính là mệnh đề 1.6 và định lý 1.7.

Chương 2. Đây là nội dung chính của luận văn. Trong chương 2 chúng ta xây dựng các điều kiện đủ để bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm và có duy nhất nghiệm. Các kết quả chính là các bổ đề 2.5, bổ đề 2.6, bổ đề 2.10 và bổ đề 2.11.

Chương 3. Trong chương 3, dựa trên các kết quả của chương 1 và chương 2 chúng ta xây dựng các tính chất hiệu quả để bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm và có duy nhất nghiệm. Kết quả chính là các định lý 3.1, định lý 3.3, định lý 3.5 và định lý 3.6.

Trong phần cuối của chương, chúng ta áp dụng các kết quả của bài toán biên dạng tuần hoàn cho phương trình vi phân hàm phi tuyến (2.1), (2.2) để nghiên cứu các điều kiện đủ cho việc tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán biên dạng tuần hoàn cho phương trình vi phân đối số lệch. Kết quả chính là các định lý 3.8 và định lý 3.10.

Từ những vấn đề đưa ra trong luận văn, một câu hỏi đặt ra là các kết quả trên còn đúng hay không cho phương trình vi phân hàm bậc cao hay bài toán biên nhiều điểm cho phương trình vi phân hàm. Hơn nữa đối với các bài toán trên chúng tôi còn chưa nghiên cứu tính xấp xỉ nghiệm của nó do thời gian có hạn.

Chính vì vậy thông qua các kết quả đã đạt được trong luận văn này, tác giả mong muốn được mở rộng và tiếp tục nghiên cứu các vấn đề nêu trên. Tuy nhiên, với sự hiểu biết hạn chế của bản thân, tác giả rất mong học hỏi từ sự góp ý và chỉ bảo của Quý Thầy, Cô trong và ngoài Hội đồng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

- [1] Haim Brezis (2002), *Giải tích hàm lý thuyết và ứng dụng*, NXB Đại Học Quốc Gia TP Hồ Chí Minh.

Tiếng Anh

- [2] I. Kiguradze and B. Puza (1997), “On boundary value problems for systems of linear functional differential equations”, *Czechoslovak Math.J*, 47(2), pp.341 – 373.
- [3] I. Kiguradze and B. Puza (1997), “Conti-Opial type theorems for systems of functional differential equations”, *Differentsial'nye Uravneniya*, 33(2), pp.185 – 194.
- [4] I. Kiguradze and B. Puza (1997), “On periodic solutions of systems of linear functional differential equations”, *Arch. Math. J*, 33(3), pp.197 – 212.
- [5] I. Kiguradze and B. Puza (1998), “On the solvability of nonlinear boundary value problems for functional differential equations”, *Georgian Math. J*, 5(3), pp.251 – 262.
- [6] R. Hakl, A. Lomatidze and J. Sremr (2002), *Some boundary value problems for first order scalar functional differential equations*, Masaryk University Brno, Czech Republic.