

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN THỊ HẢI YẾN

BÀI TOÁN BIÊN
HỖN HỢP THỨ NHẤT ĐỐI VỚI
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Chuyên ngành : Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số : 60 46 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu**

Phản biện 1: **TS. Lê Hải Trung**

Phản biện 2: **PGS. TS. Huỳnh Thế Phùng**

Luận văn được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ Toán học họp tại Đà Nẵng ngày 23 tháng 10 năm 2011.

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng.
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Phương trình vi phân đóng vai trò cực kì quan trọng trong kĩ thuật, vật lý, kinh tế và một số ngành khác. Có nhiều phương pháp để giải phương trình vi phân thỏa mãn các điều kiện (ban đầu hoặc biên) và một trong số các phương pháp đó là sử dụng lý thuyết toán tử khả nghịch phải mà được bắt đầu từ năm 1972 trong công trình của nhà toán học nữ người Ba lan Danuta Przeworska-Rolewicz và sau này được phát triển bởi nhiều nhà toán học khác nữa.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục tiêu của luận văn là tìm hiểu lý thuyết và bản chất cách giải bài toán biên hỗn hợp thứ nhất của lý thuyết toán tử khả nghịch phải thông qua bài toán nội suy Newton.

3. Đối tượng nghiên cứu và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Toán tử khả nghịch phải, toán tử ban đầu và phương trình vi phân với các điều kiện biên hỗn hợp thứ nhất.

Phạm vi nghiên cứu: Nghiên cứu bài toán nội suy Newton và bài toán biên hỗn hợp thứ nhất đối với phương trình vi phân trừu tượng.

4. Phương pháp nghiên cứu:

Nghiên cứu tài liệu, phân tích, giải thích, đánh giá, tổng hợp.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Đề tài là một chuyên đề tốt về các vấn đề nội suy và bài toán biên của phương trình vi phân trừu tượng.

Đề tài mang tính chất thuần túy toán học. Nó quan tâm đến việc tìm điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán biên hỗn hợp thứ nhất bằng cách áp dụng toán tử, và đưa ra công thức nghiệm của nó trong trường hợp nghiệm đó tồn tại duy nhất.

6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, bản luận văn của chúng tôi gồm 3 chương:

Chương 1 là những kiến thức cơ bản của Đại số đại cương và Đại số tuyến tính. Trong chương này chúng tôi trình bày các kết quả chính của các toán tử tuyến tính trong không gian tuyến tính. Nội dung của phần này được viết chủ yếu theo Nguyễn Hữu Việt Hưng [1], Nguyễn

Duy Thuận [4], và có tham khảo thêm D. Przeworska-Rolewicz [8], [7].

Chương 2 là một trong hai chương chính của luận văn. Phần đầu của chương này chúng tôi trình bày các tính chất của toán tử khả nghịch phải, toán tử ban đầu. Sau đó là phần dành riêng cho công thức Taylor-Gontcharov và trường hợp riêng của nó là công thức Taylor. Nội dung của chương này được viết theo D. Przeworska-Rolewicz [6].

Chương 3 là áp dụng công thức Taylor-Gontcharov vào việc giải bài toán: *Tìm điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán biên hỗn hợp thứ nhất*. Nội dung phần này được viết theo Nguyễn Văn Mậu [5].

Chương 1

TÍNH CHẤT CỦA TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH

1.1 Nhóm và vành

Giả sử G là một tập hợp. Mỗi ánh xạ $\circ : G \times G \rightarrow G$ được gọi là một *luật hợp thành* (hay một *phép toán hai ngôi*) trên G . Ảnh của cặp phần tử $(x, y) \in G \times G$ bởi ánh xạ $\circ$ sẽ được kí hiệu là $x \circ y$ và được gọi là *tích* hay *hợp thành* của x và y .

Định nghĩa 1.1. ([1]) Một nhóm là một cặp $(G, \circ)$, trong đó G là một tập hợp không rỗng và $\circ$ là một luật hợp thành trên G , thỏa mãn ba điều kiện sau đây: (G1) Luật hợp thành là kết hợp;

(G2) Có một phần tử $e \in G$, được gọi là phần tử trung lập, có tính chất $x \circ e = e \circ x = x$, với mọi $x \in G$;

(G3) Với mọi $x \in G$, có một phần tử $x' \in G$, được gọi là nghịch đảo của x , sao cho $x \circ x' = x' \circ x = e$.

Định nghĩa 1.2. ([1]) Ta gọi một vành là mỗi tập hợp $R \neq \emptyset$ cùng với hai phép toán hai ngôi, gồm phép cộng $+: R \times R \rightarrow R$ xác định bởi $(x, y) \mapsto x + y$, và phép nhân $\cdot : R \times R \rightarrow R$ xác định bởi $(x, y) \mapsto x \cdot y$, thỏa mãn ba điều kiện sau đây: (R1) R là một nhóm abel đối với phép cộng, tức là $x + y = y + x, \forall x, y \in R$;

(R2) Phép nhân có tính kết hợp;

(R3) Phép nhân phân phối về hai phía đối với phép cộng.

Định nghĩa 1.3. ([1]) Vành R được gọi là giao hoán nếu phép nhân của nó giao hoán. Vành R được gọi là có đơn vị nếu phép nhân của nó có đơn vị, tức là có phần tử $1 \in R$ sao cho $1x = x1 = x, \forall x \in R$.

Định nghĩa 1.4. ([6], [1]) Vành giao hoán R có đơn vị $1 \neq 0$ được gọi là trường, nếu mỗi phần tử khác không của R đều khả nghịch.

1.2 Không gian tuyến tính

Định nghĩa 1.5. ([7], [4]) Không gian tuyến tính trên trường $\mathcal{F}$ các vô hướng là một nhóm cộng giao hoán X sao cho phép nhân các phần tử

của X bởi các vô hướng của $\mathcal{F}$ được xác định và thỏa mãn các điều kiện sau: $t(x + y) = tx + ty$; $(t + s)x = tx + sx$; $(ts)x = t(sx)$; $1 \cdot x = x$, với mọi $x, y \in X$ và $t, s \in \mathcal{F}$. Phần tử $x \in X$ được gọi là một vectơ của X .

Định nghĩa 1.6. ([7]) Nếu không gian tuyến tính X là một vành (với cùng cách định nghĩa phép cộng) thì X được gọi là vành tuyến tính.

1.3 Toán tử tuyến tính. Không gian riêng. Toán tử Volterra

Định nghĩa 1.7. ([6], [4]) Giả sử X và Y là hai không gian tuyến tính trên cùng một trường vô hướng $\mathcal{F}$. Một ánh xạ A từ tập tuyến tính $\text{dom}A$ của X vào Y được gọi là toán tử tuyến tính nếu $A(x + y) = Ax + Ay$, $A(tx) = tAx$, với mọi $x, y \in \text{dom}A$, $t \in \mathcal{F}$.

Cho X và Y là hai không gian tuyến tính trên cùng một trường vô hướng $\mathcal{F}$. Tập tất cả các toán tử tuyến tính có miền xác định chứa trong X và miền giá trị chứa trong Y được ký hiệu là $L(X \rightarrow Y)$.

Định nghĩa 1.8. ([4], [6]) Tổng của hai toán tử $A, B \in L(X \rightarrow Y)$ và tích của toán tử $A \in L(X \rightarrow Y)$ với vô hướng của $\mathcal{F}$ được xác định như sau: $\text{dom}(A + B) = \text{dom}A \cap \text{dom}B$ và

$$\begin{cases} (A + B)x = Ax + Bx & \text{với } x \in \text{dom}A \cap \text{dom}B, \\ (tA)x = t(Ax) & \text{với } x \in \text{dom}A, t \in \mathcal{F}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Định nghĩa 1.9. ([6], tr.23) Giả sử X, Y, Z là các không gian tuyến tính trên trường vô hướng, $A \in L(X \rightarrow Y)$, $B \in L(Y \rightarrow Z)$ và $B\text{dom}A \subset \text{dom}B \subset Y$. Sự chồng chất (tích) AB của hai toán tử A và B xác định bởi $(AB)x = A(Bx)$ với mọi $x \in \text{dom}B$.

Định nghĩa 1.10. ([6], tr.23) Hai toán tử A và B được gọi là giao hoán nếu cả hai sự chồng chất AB, BA đều tồn tại và $AB = BA$ trên $\text{dom}A \cap \text{dom}B$.

Đặt $L_0(X \rightarrow Y) := \{A \in L(X \rightarrow Y) : \text{dom}A = X\}$,

$$L(X) := L(X \rightarrow X), L_0(X) := L_0(X \rightarrow X).$$

Khi đó $L_0(X \rightarrow Y)$ là không gian tuyến tính trên trường $\mathcal{F}$, còn $L_0(X)$ là vành tuyến tính có đơn vị và không giao hoán.

Định nghĩa 1.11. ([6]) Nếu toán tử $A \in L(X \rightarrow Y)$ là tương ứng 1-1 thì toán tử nghịch đảo A^{-1} được định nghĩa theo cách: Với mỗi $y \in A\text{dom}A$ $A^{-1}y = x$, trong đó $x \in \text{dom}A$ và $y = Ax$. Nếu toán tử $A \in L(X \rightarrow Y)$ có toán tử nghịch đảo thì ta nói A khả nghịch.

Giả sử X là không gian tuyến tính trên trường đóng đại số $\mathcal{F}$, tức là mỗi đa thức bậc n với các hệ số trong $\mathcal{F}$ có đúng n nghiệm và $A \in L_0(X)$.

Vô hướng $\lambda \in \mathcal{F}$ được gọi là *giá trị chính quy* của A nếu toán tử $A - \lambda I$ khả nghịch. Tập tất cả các vô hướng λ mà không phải là giá trị chính quy của A được gọi là *phổ* của A và ký hiệu là $\text{spectr}A$.

Định nghĩa 1.12. ([8]) Nếu $\lambda \in \text{spectr}A$ và tồn tại $x \in X$ sao cho $x \neq 0$ và $(A - \lambda I)x = 0$ thì λ được gọi là *trị riêng* của A và x là *vectơ riêng* ứng với trị riêng λ . Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của tất cả các vectơ riêng của A ứng với trị riêng λ được gọi là *không gian riêng* của toán tử A ứng với trị riêng λ .

Định nghĩa 1.13. ([8]) Toán tử $A \in L_0(X)$ được gọi là *toán tử Volterra* nếu toán tử $I - \lambda A$ khả nghịch với mọi vô hướng $\lambda \in \mathcal{F}$. Tập tất cả các toán tử Volterra thuộc $L_0(X)$ ký hiệu là $V(X)$.

Nếu $A \in V(X)$ thì phương trình thuần nhất $(I - \lambda A)x = 0$ chỉ có nghiệm không với mọi vô hướng λ .

Chương 2

PHÉP TÍNH TOÁN TỬ KHẢ NGHỊCH PHẢI

2.1 Toán tử khả nghịch phải

Cho X là một không gian tuyến tính trên trường vô hướng $\mathcal{F}$. Ký hiệu $R(X)$ là tập tất cả các toán tử khả nghịch phải thuộc $L(X)$ và $\mathcal{R}_D$ là tập tất cả các nghịch đảo phải của toán tử $D \in R(X)$, tức là:

$$\mathcal{R}_D = \{R \in L_0(X) : DR = I\}.$$

Cho $x \in X$. Tập hợp $\mathcal{R}_D x = \{R_\gamma x\}_{\gamma \in \Gamma}$ được gọi là *tích phân bất định của x* . Mỗi phần tử $R_\gamma x$ với $\gamma \in \Gamma$ được gọi là một *nguyên phân của x* . Theo định nghĩa, nếu y là một nguyên phân của x thì $Dy = x$.

Hạt nhân của toán tử $D \in R(X)$ được gọi là *không gian các hằng số trên D* và được kí hiệu là $\ker D$. Mỗi phần tử $z \in \ker D$ được gọi là một *hằng số*. Theo định nghĩa, $z \in X$ là hằng số của D nếu và chỉ nếu $Dz = 0$.

Các tính chất của toán tử khả nghịch phải ([6], tr. 50-52)

1. Nếu $D \in R(X)$, $R \in \mathcal{R}_D$ thì $D^k R^k = I$ với $k = 1, 2, \dots$
2. Nếu $D \in R(X)$, $R \in \mathcal{R}_D$ thì tích phân bất định của một phần tử $x \in X$ có dạng $\mathcal{R}_D x = \{Rx + z : z \in \ker D\} = Rx + \ker D$.
3. Nếu $D \in R(X)$ thì với mỗi $R \in \mathcal{R}_D$ ta có $\text{dom} D = RX \oplus \ker D$.
4. Giả sử $D \in R(X)$ và $R_1 \in \mathcal{R}_D$. Khi đó mỗi nghịch đảo phải của D có dạng $R = A + R_1(I - DA) = R_1 + (I - R_1 D)A$, trong đó $A \in L_0(X)$, $AX \subset \text{dom} D$.

Nhận thấy rằng nếu $D \in R(X)$, $R \in \mathcal{R}_D$ và $x \in X$ thì từ $Rx = 0$ ta suy ra $x = 0$.

Ví dụ 2.1. ([6]) Trong không gian $X = C[a, b]$ ta đặt $D = d/dt$ và $(Rx)(t) = \int_{t_0}^t x(s)ds$ với $x \in C[a, b]$. Khi đó D là toán tử khả nghịch phải

với nghịch đảo phải R và D không khả nghịch. Trong trường hợp này $\ker D = \{x \in C^1[a, b] : x'(t) = 0 \text{ với } a \leq t \leq b\}$ là không gian tất cả các hàm hằng trong $[a, b]$ nên ta có $\dim \ker D = 1$.

Tích phân bất định của hàm số $x \in C[a, b]$ được kí hiệu bởi $\int x(t)dt$. Như vậy, theo định nghĩa với $t_0 \in [a, b]$ cố định tùy ý thì

$$\int x(t) = \left\{ \int_{t_0}^t x(s)ds + c : c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nghịch đảo phải $(Rx)(t) = \int_{t_0}^t x(s)ds$ của D với $x \in C[a, b]$ là toán tử Volterra, tức là toán tử $I - \lambda R$ khả nghịch với mọi vô hướng $\lambda \in \mathbb{C}$ và

$$[(I - \lambda R)^{-1}x](t) = x(t) + \lambda \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-s)}x(s)ds \text{ với } x \in C[a, b]. \quad (2.1)$$

Ví dụ 2.2. ([6]) Trong không gian $X = (s)$ tất cả các dãy $\{x_n\}, x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ta đặt $Dx = \{x_{n+1} - x_n\}$, trong đó $x = \{x_n\} \in (s)$, với $Rx = y = \{y_n\}$, trong đó $y_1 = 0, y_{n+1} = \sum_{k=1}^n x_k$ với $n \geq 1$. Khi đó D là toán tử khả nghịch phải với nghịch đảo phải R và D không khả nghịch. Không gian các hằng số trên D có dạng $\ker D = \left\{ z = \{z_n\} : z_n = C, n \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R} \right\}$. Do đó tích phân bất định của phần tử $x \in X$ có dạng

$$\mathcal{R}_D x = \left\{ y = \{y_n\} : y_1 = C, y_{n+1} = \sum_{k=1}^n x_k + C \text{ với } n \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nghịch đảo phải $Rx = y = \{y_n\} \in (s)$ của D , trong đó $x = \{x_n\} \in (s), y_1 = 0, y_{n+1} = \sum_{k=1}^n x_k$ với $n \geq 1$, là toán tử Volterra và

$$\begin{cases} (I - \lambda R)^{-1}y = u, \text{ trong đó } y = \{y_n\}, u = \{u_n\} \in (s), \lambda \in \mathbb{C} \\ u_1 = y_1, \quad u_{n+1} = y_{n+1} + \lambda \sum_{k=1}^n (\lambda + 1)^{k-1} y_{n+1-k} (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.2)$$

2.2 Một số lưu ý về toán tử khả nghịch trái

Định nghĩa 2.1. ([6]) Toán tử $\Delta \in L_0(X)$ được gọi là khả nghịch trái nếu tồn tại một toán tử $L \in L(X)$ sao cho $L\Delta = I$. Toán tử L được gọi là nghịch đảo trái của Δ .

2.3 Toán tử ban đầu

Ký hiệu $\mathcal{F}_D$ là tập tất cả các toán tử ban đầu của D , tức là:

$$\mathcal{F}_D = \{F \in L(X) : F^2 = F, FX = \ker D \text{ và } \exists R \in \mathcal{R}_D : FR = 0\}.$$

Các tính chất của toán tử ban đầu ([6], tr. 69-72)

1. Nếu F là toán tử ban đầu của D ứng với $R \in \mathcal{R}_D$ thì $Fz = z$ với mỗi $z \in \ker D$ và $DF = 0$ trên X .

2. Điều kiện cần và đủ để toán tử $F \in L(X)$ là toán tử ban đầu của $D \in R(X)$ ứng với một $R \in \mathcal{R}_D$ là $F = I - RD$ trên $\text{dom} D$.

3. Nếu toán tử $A \in L(X)$ khả nghịch thì toán tử ban đầu khác 0 của A không tồn tại.

4. Họ $\mathcal{R}_D = \{R_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ tất cả các nghịch đảo phải của toán tử $D \in R(X)$ cảm sinh duy nhất họ $\mathcal{F}_D = \{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ các toán tử ban đầu của D được xác định bởi đẳng thức $F_\gamma = I - R_\gamma D$ trên $\text{dom} D$ với mỗi $\gamma \in \Gamma$.

5. $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$, ta có $F_\alpha F_\beta = F_\beta$ và $F_\beta R_\alpha = R_\alpha - R_\beta$.

6. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ toán tử $F_\beta R_\gamma - F_\alpha R_\gamma$ không phụ thuộc vào cách chọn toán tử $R_\gamma \in \mathcal{R}_D$.

Đặt $I_\alpha^\beta = F_\beta R_\gamma - F_\alpha R_\gamma, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$. Toán tử I_α^β được gọi là *toán tử tích phân xác định*. Với mỗi $x \in X$ phần tử $I_\alpha^\beta x$ được gọi là *tích phân xác định của x* . Các chỉ số α và β được gọi là *cận dưới và cận trên của tích phân*. Vậy $I_\alpha^\beta = F_\beta R_\alpha$, với $\alpha, \beta \in \Gamma$.

7. $\forall x \in X, \alpha, \beta \in \Gamma$ ta có $I_\alpha^\beta x = z \in \ker D$.

8. $\forall \alpha, \beta, \delta \in \Gamma$ ta có $I_\alpha^\beta = -I_\beta^\alpha, \quad I_\alpha^\delta + I_\delta^\beta = I_\alpha^\beta$.

9. Nếu $x \in X, \alpha, \beta \in \Gamma$ tùy ý và $y \in X$ là một nguyên phân bất kì của x thì $I_\alpha^\beta x = F_\beta y - F_\alpha y$.

Ví dụ 2.3. ([6]) Giả sử $X = C[a, b], D = \frac{d}{dt}$ và $(Rx)(t) = \int_{t_0}^t x(s)ds$, trong đó $a \leq t_0 \leq b$ cố định tùy ý. Theo tính chất 2 nếu $x \in \text{dom} D = C^1[a, b]$ thì $(Fx)(t) = x(t_0)$.

Xét tập hợp $\{R_c\}_{c \in [a, b]}$ trong đó $(R_c x)t = \int_c^t x(s)ds$ với $x \in C[a, b]$.

Khi đó theo tính chất 4 họ các toán tử ban đầu cảm sinh bởi họ $\{R_c\}_{c \in [a, b]}$ có dạng $\{F_c\}_{c \in [a, b]}$, trong đó $(F_c x)t = x(c)$. Nếu y là nguyên hàm tùy ý của $x \in C[a, b]$ và c_1, c_2 cố định tùy ý trong $[a, b]$ thì theo tính chất 9 ta tìm được $\int_{c_1}^{c_2} x(s)ds = y(c_2) - y(c_1)$, trong đó $y' = x$. Do vậy công

thức tính tích phân từng phần có dạng $\int_{c_1}^{c_2} x(s)y'(s)ds = [x(s)y(s)]_{c_1}^{c_2} -$

$\int_{c_1}^{c_2} x'(s)y(s)ds$, trong đó $x, y \in C^1[a, b]$ và $[u(s)]_{c_1}^{c_2} = u(c_2) - u(c_1)$, với $u \in C[a, b], a \leq c_1, c_2 \leq b$.

Ví dụ 2.4. ([6]) Giả sử X, D, R được xác định như trong ví dụ 2.2. Khi đó nếu $x \in X$ thì $z = Fx = (I - RD)x = x - RDx$, trong đó

$z = \{z_n\}$, $z_n = x_n - (x_n - x_1) = x_1$ với $n = 1, 2, \dots$. Vậy toán tử ban đầu F của D ứng với R có dạng $Fx = \{z_n\}$, trong đó $x = \{x_n\}$, $z_n = x_1$ ($n = 1, 2, \dots$)

Bây giờ giả sử $m > 1$ là một số nguyên dương cho trước. Đặt $R_mx = y = \{y_n\}$, trong đó $x = \{x_n\} \in X$, và

$$y_1 = -\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} (m-j)x_j, \quad y_n = \sum_{j=1}^{n-1} x_j - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} (m-j)x_j \text{ với } n \geq 2.$$

Khi đó R_m là nghịch đảo phải của D và toán tử ban đầu F_m của D ứng với nghịch đảo phải R_m được xác định như sau:

$$F_mx = \{z_n\}, \quad z_n = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j \quad n = 1, 2, \dots, x = \{x_n\}.$$

2.4 Công thức Taylor-Gontcharov. Công thức Taylor

Định lý 2.1. ([6], tr. 67) (Công thức Taylor-Gontcharov) Giả sử rằng $D \in R(X)$ và $\mathcal{F}_D = \{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ là họ các toán tử ban đầu cảm sinh bởi $\mathcal{R}_D = \{R_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. Cho $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ là dãy tùy ý các chỉ số. Khi đó, với mỗi số nguyên dương N trên $\text{dom} D^N$ ta có đẳng thức sau

$$I = F_{\gamma_0} + \sum_{k=1}^{N-1} R_{\gamma_0} \dots R_{\gamma_{k-1}} F_{\gamma_k} D^k + R_{\gamma_0} \dots R_{\gamma_{N-1}} D^N. \quad (2.3)$$

Hệ quả 2.1. ([6]) (Công thức Taylor) Nếu $D \in R(X)$ và F là một toán tử ban đầu của D ứng với nghịch đảo phải $R \in \mathcal{R}_D$ thì

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} R^k F D^k + R^N D^N \text{ trên } \text{dom} D^N \quad (N = 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

Hệ quả 2.2. ([6]) Giả sử tất cả các giả thiết của định lý 2.1 được thỏa mãn. Khi đó, với mỗi số nguyên dương N ta có

$$\ker D^N = \{z = z_0 + \sum_{k=1}^{N-1} R_{\gamma_0} \dots R_{\gamma_{k-1}} z_k : z_0, \dots, z_{N-1} \in \ker D\}.$$

Hệ quả 2.3. ([6]) Nếu $D \in R(X)$ và F là một toán tử ban đầu của D ứng với nghịch đảo phải $R \in \mathcal{R}_D$ thì

$$\ker D^N = \{z = \sum_{k=0}^{N-1} R^k z_k : z_0, \dots, z_{N-1} \in \ker D\} \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Ví dụ 2.5. ([6]) Với toán tử $D = d/dt$ và nghịch đảo phải tương ứng là $(Rx)(t) = \int_{t_0}^t x(s)ds$, trong đó $a \leq t_0 \leq b$ cố định tùy ý trong không gian $C[a, b]$, bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được rằng

$$(R^k x)(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} x(s)ds, \text{ với } x \in C[a, b], \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.5)$$

Từ đây và từ công thức Taylor (2.4) ta suy ra rằng mỗi hàm số $x \in C^N[a, b]$ ($N = 1, 2, \dots$) có thể biểu diễn dưới dạng

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} x^{(k)}(t_0) + R_N(t),$$

trong đó $R_N(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} x^{(N)}(s)ds$ ($N = 1, 2, \dots$) được gọi là *phần dư tích phân thứ N*. Bây giờ giả sử

$$x \in C^\infty[a, b] \text{ và } \lim_{N \rightarrow \infty} R_N(t) = 0, \text{ với } t \in [a, b]. \quad (2.6)$$

Khi đó ta có $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t_0) \frac{(t-t_0)^k}{k!}$. Chuỗi hội tụ này được gọi là *chuỗi Taylor*. Nếu điều kiện (2.6) thỏa mãn thì ta nói hàm số $x(t)$ *khai triển thành chuỗi Taylor trong khoảng* $[a, b]$. Đặc biệt, nếu $t_0 = 0$ và điều kiện (2.6) thỏa mãn thì ta nói hàm số $x(t)$ *khai triển thành chuỗi Maclaurin* ở dạng $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}$.

Ví dụ 2.6. Cho $x_i, a_i \in \mathbb{R}$ với $i = 1, 2, \dots, N$. Hãy xác định đa thức $P(x)$ có bậc không quá $N-1$ và thỏa mãn các điều kiện

$$P(x_1) = a_1, P'(x_2) = a_2, P''(x_3) = a_3, \dots, P^{(N-1)}(x_N) = a_N. \quad (2.7)$$

Giải. Trong không gian $C[a, b]$ ta đặt $D = d/dx, R_i = \int_{x_i}^x$ với $i = 1, \dots, N-1, x_i \in (a, b)$. Khi đó bài toán trở thành: Hãy xác định đa thức $P(x)$ có bậc không quá $N-1$ thỏa mãn điều kiện

$$F_i D^i P = a_{i+1}, i = 1, \dots, N-1,$$

trong đó $(F_i P)(x) = P(x_{i+1})$ là toán tử ban đầu của D ứng với nghịch đảo phải $R_i \in \mathcal{R}_D$. Áp dụng công thức Taylor-Gontcharov ta có

$$P(x) = a_1 + a_2 R^1(x_1, x) + \dots + a_N R^{N-1}(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x). \quad (2.8)$$

trong đó

$$R^i(x_1, x_2, \dots, x_i, x) = \begin{cases} \int_{x_1}^x ds_1 & \text{với } i = 1, \\ \int_{x_1}^{x_1} \int_{x_2}^{s_1} \dots \int_{x_i}^{s_{i-1}} ds_i \dots ds_2 ds_1 & \text{với } i = 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

Đa thức $P(x)$ nhận được từ (2.8) là đa thức duy nhất thỏa mãn (2.7) và có tên gọi là đa thức nội suy Newton.

Ví dụ 2.7. Cho $x_0, a_i \in \mathbb{R}$ với $i = 0, 1, \dots, N-1$. Hãy xác định đa thức $T(x)$ có bậc không quá $N-1$ và thỏa mãn các điều kiện

$$T(x_0) = a_0, T'(x_0) = a_1, T''(x_0) = a_2, \dots, T^{(N-1)}(x_0) = a_{N-1}. \quad (2.9)$$

Giải. Đặt $D = d/dx$, $R = \int_{x_0}^x$ trong $C[a, b]$ với $x_0 \in (a, b)$. Khi đó bài toán trở thành: Hãy xác định đa thức $T(x)$ có bậc không quá $N-1$ thỏa mãn điều kiện

$$FD^i T = a_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

trong đó $(FT)(x) = T(x_0)$ là toán tử ban đầu của D ứng với nghịch đảo phải R . Theo công thức Taylor và công thức (2.5) ta có

$$T(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{k!} (x - x_0)^k. \quad (2.10)$$

Đa thức $T(x)$ nhận được từ (2.10) là đa thức duy nhất thỏa mãn (2.9) và có tên gọi là đa thức nội suy Taylor.

Chương 3

BÀI TOÁN BIÊN HỖN HỢP THỨ NHẤT ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

3.1 Kết thức của phương trình

Giả sử $D \in R(X)$, $\dim \ker D \neq 0$, $R_j \in \mathcal{R}_D$ và $F_j \in \mathcal{F}_D$ là toán tử ban đầu của D ứng với $R_j (j = 0, 1, \dots, M + N - 1)$. Bài toán biên hỗn hợp thứ nhất của toán tử $Q[D]$ có dạng như sau: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$Q[D]x = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N D^m A_{mn} D^n x = y, \quad y \in X, \quad (3.1)$$

trong đó $M, N \in \mathbb{N}$, $A_{mn} \in L_0(X)$, $A_{MN} = I$, $A_{mn} X_{M+N-n} \subset X_m (n = 0, 1, \dots, N; m = 0, 1, \dots, M; m + n < M + N)$; $X_j := \text{dom } D^j$, $j = 1, 2, \dots, M + N$, thỏa mãn điều kiện biên hỗn hợp

$$F_j D^j x = y_j, \quad y_j \in \ker D \quad (j = 0, 1, \dots, M + N - 1). \quad (3.2)$$

Định nghĩa 3.1. ([6]) *Bài toán (3.1)-(3.2) được gọi là thiết lập đúng đắn nếu nó có nghiệm duy nhất với mỗi $y \in X, y_0, y_1, \dots, y_{M+N-1} \in \ker D$.*

Định nghĩa 3.2. ([5]) *Toán tử $A \in L(X)$ được gọi là khả nghịch phải (khả nghịch trái, khả nghịch) trên X_k với $k \in \mathbb{N}_0$ cho trước, nếu $X_k \subset \text{dom } A$, $A X_k \subset X_k$ và tồn tại $R_A \in \mathcal{R}_A$ (tương ứng $L_A \in \mathcal{L}_A, M_A \in \mathcal{R}_A \cap \mathcal{L}_A$) sao cho $R_A X_k \subset X_k$ (tương ứng $L_A X_k \subset X_k, M_A X_k \subset X_k$), tức là $R_A \in L_0(X_k)$ (tương ứng $L_A \in L_0(X_k), M_A \in L_0(X_k)$).*

Theo định nghĩa này, nếu A là toán tử khả nghịch phải (khả nghịch trái, khả nghịch) trên X_k ($k \in \mathbb{N}$) thì A là toán tử khả nghịch phải (khả nghịch trái, khả nghịch).

Định nghĩa 3.3. ([5]) *Đặt*

$$T' = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N R_N \dots R_{M+N-m-1} E_{mn} R_n \dots R_{N-1} \quad (3.3)$$

trong đó

$$E_{mn} = \begin{cases} A'_{0n} & \text{nếu } m = 0, \\ A'_{mn} - \sum_{k=m}^M F_{M+N-m} D^{k-m} A'_{kn} & \text{các trường hợp khác.} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$A'_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m = M, n = N, \\ A_{mn} & \text{các trường hợp khác.} \end{cases} \quad (3.5)$$

$(m = 0, 1, \dots, M; \quad n = 0, 1, \dots, N).$

Khi đó, toán tử $I + T'$ được gọi là toán tử giải của bài toán biên hỗn hợp thứ nhất (3.1)-(3.2).

3.2 Điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán biên hỗn hợp thứ nhất

Bổ đề 3.1. ([5]) Giả sử $D \in R(X)$, $\dim \ker D \neq 0$, $R_j \in \mathcal{R}_D$. Đặt

$$T = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N R_0 \dots R_{M+N-m-1} E_{mn} D^n, \quad (3.6)$$

$$T_1 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N R_N \dots R_{M+N-m-1} E_{mn} D^n, \quad (3.7)$$

trong đó E_{mn} được xác định bởi (3.4)-(3.5). Khi đó toán tử $I + T$ khả nghịch phải (khả nghịch trái, khả nghịch) trên X_{M+N} khi và chỉ khi $I + T'$ khả nghịch phải (khả nghịch trái, khả nghịch) trên X_M . Hơn nữa, nếu $R_T \in \mathcal{R}_{I+T}$ ($L_T \in \mathcal{L}_{I+T}$) thì tồn tại $R_{T'} \in \mathcal{R}_{I+T'}$ ($L_{T'} \in \mathcal{L}_{I+T'}$) sao cho

$$\begin{aligned} R_T &= I - R_0 \dots R_{N-1} R_{T'} T_1, & R_{T'} &= I - T_1 R_T R_0 \dots R_{N-1}; \\ L_T &= I - R_0 \dots R_{N-1} L_{T'} T_1, & L_{T'} &= I - T_1 L_T R_0 \dots R_{N-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I + T)^{-1} &= I - R_0 \dots R_{N-1} (I + T')^{-1} T_1, \\ (I + T')^{-1} &= I - T_1 (I + T)^{-1} R_0 \dots R_{N-1}. \end{aligned}$$

Bổ đề 3.2. ([5]) Cho $Q[D]$ và T xác định bởi (3.1) và (3.6) tương ứng. Khi đó

$$D^{M+N} (I + T) = Q[D], \quad (3.8)$$

$$F_j D^j (I + T) = F_j D^j \quad (j = 0, 1, \dots, M + N - 1). \quad (3.9)$$

Bổ đề 3.3. ([5]) Nếu $T \in L_0(X)$ và $\text{Im} T \subset X_M$ với $M \in \mathbb{N}_0$ nào đó thì $I + T$ khả nghịch phải (khả nghịch trái, khả nghịch) trên X_M khi và chỉ khi nó khả nghịch phải (khả nghịch trái, khả nghịch).

Bổ đề 3.4. ([5]) Bài toán (3.1)-(3.2) thiết lập đúng đắn khi và chỉ khi $I + T$ khả nghịch trên X_{M+N} .

Định lý 3.1. ([5]) Bài toán (3.1)-(3.2) thiết lập đúng đắn khi và chỉ khi toán tử giải $I + T'$ của nó khả nghịch.

Định lý 3.2. ([5], tr. 224) Giả sử $D \in R(X)$, $\dim \ker D \neq 0$, $R_j \in \mathcal{R}_D$ và $F_j \in \mathcal{F}_D$ là toán tử ban đầu của D ứng với $R_j (j = 0, \dots, M+N-1)$. Cho T và T' xác định bởi (3.6) và (3.3) tương ứng. Khi đó nếu $I + T'$ khả nghịch thì bài toán (3.1)-(3.2) thiết lập đúng đắn và nghiệm duy nhất của nó là

$$x = M_T(R_0 \dots R_{M+N-1}y + y_0 + \sum_{j=1}^{M+N-1} R_0 \dots R_{j-1}y_j), \quad (3.10)$$

trong đó $M_T = I - R_0 \dots R_{N-1}(I + T')^{-1}T_1$ với T_1 xác định bởi (3.7).

Ví dụ 3.1. Giải phương trình vi phân $x'' + \lambda x' = 6t$ với $t \in [0, 1]$, $x(0) = x_0$, $x'(1) = x_1$.

Đây là bài toán biên hỗn hợp thứ nhất của toán tử $D = d/dt$ trong không gian $C[0, 1]$ với các toán tử ban đầu $(F_0x)(t) = x(0)$, $(F_1x)(t) = x(1)$ ứng với các nghịch đảo phải theo thứ tự là $(R_0x)(t) = \int_0^t x(s)ds$,

$(R_1x)(t) = \int_1^t x(s)ds$, và $Q(D) = D^2 + \lambda D = D^2(I + R_0R_1\lambda D)$. Vì toán tử $I + \lambda R_1$ khả nghịch với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ nên bài toán đã cho có nghiệm duy nhất

$$\begin{aligned} x &= [I - R_0R_1(I + \lambda R_1)^{-1}\lambda D](R_0R_1y + R_0x_1 + x_0) \\ &= R_0R_1y + R_0x_1 + x_0 - \lambda R_0R_1(I + \lambda R_1)^{-1}(R_1y + x_1) \end{aligned}$$

Với $\lambda \neq 0$ ta có

$$x(t) = x_0 + \frac{e^\lambda x_1}{\lambda} - \frac{6e^\lambda}{\lambda^3} + \frac{6e^\lambda}{\lambda^2} + \frac{3}{\lambda}t^2 - \frac{6}{\lambda^2}t + \left(\frac{6e^\lambda}{\lambda^2} - \frac{6e^\lambda}{\lambda^3} - \frac{e^\lambda x_1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}.$$

Với $\lambda = 0$ thì $x(t) = (R_0R_1y + R_0x_1 + x_0)(t) = t^3 - 3t + x_1t + x_0$.

Ví dụ 3.2. Xét phương trình sai phân $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$ với $y_1 + y_2 + y_3 = 14$, $y_2 - y_1 = 2$.

Với $y = \{y_n\} \in (s)$, $x = \{x_n\} \in (s)$ ta đặt $Dy = \{y_{n+1} - y_n\}$, và $R_1x = z = \{z_n\}$ trong đó $z_1 = 0$, $z_n = \sum_{k=1}^{n-1} x_k$ ($n \geq 2$), và $R_3x = t = \{t_n\}$, trong đó $t_1 = -\frac{1}{3}(2x_1 + x_2)$, $t_n = \sum_{k=1}^{n-1} x_k - \frac{1}{3}(2x_1 + x_2)$ ($n \geq 2$).

Khi đó R_1, R_3 là các nghịch đảo phải của D và các toán tử ban đầu của D ứng với các nghịch đảo phải đó theo thứ tự là (xem các ví dụ 2.2, 2.4) $F_1x = z = \{z_n\}$ với $z_n = y_1, \quad n = 1, 2, \dots, x = \{x_n\}$ và $F_3x = t = \{t_n\}$ với $t_n = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \quad n = 1, 2, \dots, x = \{x_n\}$. Với cách đặt như vậy phương trình đã cho viết lại dưới dạng $(D^2 - D)y = 0$ với $F_3y = \{14/3\}, F_1Dy = \{2\}$. Và bài toán trở thành bài toán biên hỗn hợp thứ nhất của toán tử D trong không gian (s) . Do $I - R_1$ khả nghịch nên

$$y = [I + R_3R_1(I - R_1)^{-1}D](R_3\{2\} + \{14/3\}).$$

Áp dụng công thức (2.2) ta thu được $y_n = 2^n$ là nghiệm.

3.3 Bài toán giá trị ban đầu

Cho $R_j = R, F_j = F, j = 0, 1, \dots, M + N - 1$ trong bài toán (3.1)-(3.2) ta thu được bài toán giá trị ban đầu của toán tử $Q[D]$: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$Q[D]x = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N D^m A_{mn} D^n x = y, \quad y \in X. \quad (3.11)$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$FD^j x = y_j, \quad y_j \in \ker D \quad (j = 0, 1, \dots, M + N - 1). \quad (3.12)$$

Định lý 3.3. ([5], tr. 195) Cho $D \in R(X)$, $\dim \ker D \neq 0$, $R \in \mathcal{R}_D$ và $F \in \mathcal{F}_D$ là toán tử ban đầu của D ứng với R . Giả sử $\mathcal{Q}$ và Q được xác định như sau

$$\mathcal{Q} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N R^{M-m} B_{mn} R^{N-n}, \quad (3.13)$$

$$Q = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N R^{M+N-m} B_{mn} D^n. \quad (3.14)$$

trong đó

$$B_{mn} = \begin{cases} \hat{A}_{0n} & \text{nếu } m = 0, \\ \hat{A}_{mn} - \sum_{k=m}^M FD^{k-m} \hat{A}_{kn} & \text{các trường hợp khác.} \end{cases}$$

$$\hat{A}_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m = M, n = N, \\ A_{mn} & \text{các trường hợp khác.} \end{cases} \quad (3.15)$$

$(m = 0, 1, \dots, M; n = 0, 1, \dots, N)$.

Khi đó nếu toán tử giải $I + \mathcal{Q}$ khả nghịch thì bài toán giá trị ban đầu (3.11)-(3.12) thiết lập đúng đắn và nghiệm duy nhất của nó là

$$x = M_Q(R^{M+N}y + \sum_{j=0}^{M+N-1} R^j y_j),$$

trong đó $M_Q = I - R^N(I + \mathcal{Q})^{-1}H$ với $H = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N R^{M-m} B_{mn} D^n$.

Ví dụ 3.3. Giải phương trình vi phân $x'' + \lambda x' = 6t$ với $t \in [0, T]$ ($T > 0$), $x(0) = x_0, x'(0) = x_1$ và $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$.

Đây là bài toán giá trị ban đầu của toán tử $D = d/dt$ trong không gian $C[0, T]$ với toán tử ban đầu $(Fx)(t) = x(0)$ ứng với nghịch đảo phải $(Rx)(t) = \int_0^t x(s)ds$ và $Q = D^2 + \lambda D = D^2(I + R^2\lambda D)$. Vì toán tử $I + \lambda DR^2 = I + \lambda R$ khả nghịch với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ nên bài toán đã cho có nghiệm duy nhất

$$\begin{aligned} x &= [I - R^2(I + \lambda R)^{-1}\lambda D](R^2y + Rx_1 + x_0) \\ &= R^2y + Rx_1 + x_0 - \lambda R^2(I + \lambda R)^{-1}(Ry + x_1) \end{aligned}$$

$$\text{Với } \lambda \neq 0 \text{ thì } x(t) = x_0 + \frac{x_1}{\lambda} + \frac{6}{\lambda^3} - \frac{6}{\lambda^2}t + \frac{3}{\lambda}t^2 - \left(\frac{x_1}{\lambda} + \frac{6}{\lambda^3}\right)e^{-\lambda t}.$$

$$\text{Với } \lambda = 0 \text{ thì } x(t) = (R^2y + Rx_1 + x_0)(t) = t^3 + x_1t + x_0.$$

Ví dụ 3.4. Xét phương trình sai phân $y_{n+1} - 15y_n = -14n + 1$ với $y_3 = 228$.

Với $y_3 = 225$ thì $y_1 = 2$. Trong không gian (s) với $y = \{y_n\} \in (s)$ ta đặt $Dy = D\{y_n\} = \{y_{n+1} - y_n\}$, và $Ry = x = \{x_n\}$, trong đó $x_1 = 0, x_n = \sum_{k=1}^{n-1} x_k$. Khi đó bài toán đã cho trở thành bài toán giá trị ban đầu cho toán tử D trong không gian (s) với toán tử ban đầu $Fy = \{z_n\}$ với $z_n = y_1, n = 1, 2, \dots$ ứng với nghịch đảo phải R và $Q = D - 14 = D(I - 14R)$. Do $I - 14R$ khả nghịch nên bài toán đã cho có nghiệm duy nhất cho bởi $y = (I - 14R)^{-1}[R\{-14n + 1\} + \{2\}]$. Theo công thức (2.2) ta thu được $y_n = 15^{n-1} + n$ là nghiệm của bài toán đã cho.

KẾT LUẬN

1. Kết quả

Trong thời gian vừa qua, bằng sự cố gắng và nỗ lực của bản thân, chúng tôi đã hoàn thành luận văn này với các vấn đề được giải quyết như sau:

- Tìm hiểu và khai thác phép tính toán tử khả nghịch phải làm cơ sở cho việc tự nghiên cứu sau này trong lĩnh vực giải các bài toán biên trong các không gian tuyến tính. Qua đó thấy được các toán tử đạo hàm, toán tử sai phân, toán tử đạo hàm riêng, ... trong giải tích đều là những toán tử khả nghịch phải.

- Ứng dụng lý thuyết toán tử khả nghịch phải và công thức Taylor-Gontcharov trong việc giải bài toán biên hỗn hợp thứ nhất đối với phương trình vi phân và trường hợp riêng của nó là bài toán giá trị ban đầu.

2. Hướng phát triển của đề tài:

Đề tài đã được chúng tôi nghiên cứu một cách khá chi tiết về mặt lý thuyết và bước đầu đã thu được kết quả là sử dụng các tính chất của toán tử khả nghịch phải, công thức Taylor-Gontcharov để tìm điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán biên hỗn hợp thứ nhất đối với phương trình vi phân. Đề tài có khả năng ứng dụng hơn nữa, cụ thể là có thể tiếp tục hoàn chỉnh để thành chuyên đề chuyên sâu về lĩnh vực phương trình vi phân.

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

- [1] Nguyễn Hữu Việt Hưng (1999), *Đại số đại cương*, NXBGD.
- [2] Nguyễn Văn Mậu (2006), *Các bài toán nội suy và áp dụng*, NXBGD.
- [3] Nguyễn Văn Mậu (2007), *Đa thức đại số và phân thức hữu tỉ*, NXBGD.
- [4] Nguyễn Duy Thuận (2003), *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học sư phạm.

Tiếng nước ngoài

- [5] Nguyen Van Mau (2005), *Algebraic Elements and Boundary Value Problems in Linear Spaces*, Vietnam National University Publishers, Hanoi.
- [6] Przeworska-Rolewicz D. (1988), *Algebraic Analysis*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, D. Reidel Publishing Company.
- [7] Przeworska-Rolewicz D. (1973), *Equations With Transformed Argument An algebraic approach*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa.
- [8] Przeworska-Rolewicz D. (1968), *Equations in Linear Spaces*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa.
- [9] Fikhtengol'ts G.M. (2003), *Courses in Differential and Integral Calculus, Tom I*, (in Russian), Moscow.