BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Nguyễn Thanh Hà

BÀI TOÁN CAUCHY CẤP HAI TRONG THANG CÁC KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành : Toán Giải tích
Mã số : 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS. NGUYỄN BÍCH HUY

Thành phố Hồ Chí Minh - Năm 2005

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin chân thành bày tỏ lòng tôn kính và biết ơn sâu sắc đối với ***PGS.TS. Nguyễn Bích Huy****, người thầy đã tận tình giảng dạy, hướng dẫn tôi suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.*

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đối với ***PGS.TS. Lê Hoàn Hoá, TS. Nguyễn Anh Tuấn, PGS.TS. Dương Minh Đức****,* ***TS. Nguyễn Thành Long,*** *quý thầy đã trực tiếp trang bị cho tôi kiến thức cơ bản làm nền tảng cho quá trình nghiên cứu. Đồng thời, thông qua giảng dạy, quý thầy đã giúp tôi quen dần với công việc nghiên cứu.*

Tôi vô cùng cám ơn BGH, quý thầy cô trong khoa Toán, trong phòng KHCN Sau Đại học của trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh; UBND cùng với Sở Giáo dục Đào tạo tỉnh Bến Tre, quý thầy cô trường THPT Bình Đại A, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi học tập và nghiên cứu.

Tôi rất biết ơn gia đình, quý đồng nghiệp và bạn bè gần xa đã giúp đỡ, hổ trợ tinh thần cũng như vật chất cho tôi trong thời gian qua.

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 9 năm 2005.

Nguyễn Thanh Hà*.*

CHƯƠNG 1
MỞ ĐẦU

Nhiều bài toán từ các lĩnh vực khác nhau của khoa học, dẫn đến việc khảo sát sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm cho phương trình vi phân trong không gian Banach với điều kiện đầu (bài toán Cauchy). Có nhiều lớp phương trình vi phân được khảo sát, mỗi lớp phương trình lại có phương pháp nghiên cứu riêng.

Bài toán Cauchy trong thang các không gian Banach có nhiều ứng dụng khi nghiên cứu các bài toán chứa kỳ dị.

Ovsjannikov, Treves, Nirenberg, Nishida, Deimling và một số tác giả khác đã nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm cho bài toán Cauchy cấp một trong thang các không gian Banach và tìm ra nhiều ứng dụng khác cho Phương trình Vi phân, Vật lý và Cơ khí. Sau đó, Barkova và Zabreik đã tìm ra một kết quả tương tự cho bài toán Cauchy cấp hai thoả điều kiện Lipschitz.

Ở luận văn này chúng tôi đặc biệt quan tâm các đến bài toán Cauchy cấp hai trong thang các không gian Banach dạng

$$u'' = f(t,u)$$
$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1$$

và cùng với các kết quả đó là một vài ứng dụng đơn giản.

Trong suốt luận văn, hàm $f(t,u)$ được xét các dạng khác nhau ứng với các điều kiện khác nhau, và ta giả thiết $\left(E_\lambda, |.|_\lambda\right), \lambda \in [a,b] \subset (0,+\infty)$ là thang các không gian Banach cho trước thoã mãn: nếu $\lambda < \lambda'$ thì $E_{\lambda'} \subset E_\lambda$ và $|u|_\lambda \le |u|_{\lambda'}$, với mọi $u \in E_\lambda$.

Trong chương hai, chúng tôi trình bày bài toán Cauchy cấp hai với $f(t,u)$ được thay thế bởi $f\left(t,u,\frac{du}{dt}\right)$ thoảđiều kiện Lipschitz. Đây là một kết quả tương tự với bài toán Cauchy cấp một.

Khi $f(t,u)$ lần lượt được thay bởi hàm $A(t)u + f(t)$ rồi hàm $A\big(Bu(t),u\big)$, các giả thiết cũng được thay đổi theo nhằm đủ cho việc nghiên cứu sự tồn tại và đánh giá nghiệm của bài toán đó. Kết quả này được trình bày ở chương ba.

Ở chương bốn, điều kiện nhiễu compact được xét đến thay cho điều kiện Lipschitz. Kết quả thu được cho bài toán cấp hai tương tự với kết quả của K. Deimling về bài toán Cauchy cấp một.

Kết thúc luận văn là một vài ứng dụng cho phương trình Kirchhoff.

CHƯƠNG 2
PHƯƠNG TRÌNH CẤP HAI VỚI ĐIỀU KIỆN LIPSCHITZ

Trong chương này, ta sẽ chứng minh một kết quả về sự tồn tại nghiệm của phương trình cấp hai, tương tự với định lý Nishida-Nirenberg.

Trước hết, giả sử ta có thang $\left(E_\lambda, |.|_\lambda\right)$, $\lambda \in [0,1]$ và ánh xạ f tác dụng liên tục từ $[0,T] \times E_\lambda \times E_\lambda$ vào $E_{\lambda'}$ với mỗi cặp $\lambda < \lambda'$ và thoả điều kiện

$$\left| f(t,u_1,v_1) - f(t,u_2,v_2) \right|_{\lambda'} \le a(\lambda,\lambda')|u_1 - u_2|_\lambda + b(\lambda,\lambda')|v_1 - v_2|_\lambda ; \qquad (2.1)$$

trong đó các hàm $a(\lambda,\lambda'), b(\lambda,\lambda')$ không âm, không phụ thuộc t, u_i, v_i.

Ta xét bài toán

$$u'' = f\left(t,u,u'\right) \qquad (2.2)$$

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1 . \qquad (2.3)$$

với điều kiện (2.3) thuộc E_1.

2.1. Phương trình cấp hai với điều kiện Lipschitz với các hàm $a(\lambda,\lambda'), b(\lambda,\lambda')$ là tổng quát.

Ta cần một số xây dựng bổ trợ. Ta xét các ánh xạ từ không gian $C\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ vào chính nó như sau:

$$c(\lambda,\lambda')\,w(t) = \int_0^t \left[a(\lambda,\lambda')(t-\tau) + b(\lambda,\lambda')\right] w(\tau)\,d\tau \;\left(\lambda' < \lambda\right) \qquad (2.4)$$

$$c(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n)w(t) = \prod_{i=1}^{n} c(\lambda_{i-1},\lambda_i)w(t); \;\left(\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_n\right) \qquad (2.5)$$

(trong (2.5) , $\prod$ hiểu là hợp của các ánh xạ)

$$c_n(\lambda,\lambda')w(t) = \inf c(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)w(t);\ (\lambda' < \lambda) \tag{2.6}$$

trong (2.6) inf được lấy trên tập tất cả các bộ $n+1$ số $(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n)$ thoả điều kiện $\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > ... > \lambda_n = \lambda'$.

Cuối cùng ta định nghĩa với mỗi cặp $\lambda' < \lambda$ tập hợp

$$T(\lambda,\lambda') = \left\{T' \in [0,T] : \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n(\lambda,\lambda')1(t)} < 1,\ \ \forall t \in [0,T']\right\}$$

trong đó $1(t) \equiv 1$.

Định lý.

Nếu số $T' \in T(\lambda,\lambda')$ và hàm $h_0(t) = u_1 + \int_0^t f(\tau,u_0,0)\,d\tau$ bị chặn trong E_λ thì bài toán (4.2)-(4.3) có nghiệm $u : [0,T'] \to E_{\lambda'}$

Chứng minh.

Ta xét ánh xạ $F : C_\lambda = C([0,T'],E_\lambda) \to C_{\lambda'} = C([0,T'],E_{\lambda'})$ định bởi

$$(Fv)(t) = u_1 + \int_0^t f\left[\tau, u_0 + \int_0^\tau v(\xi)d\xi, v(\tau)\right]d\tau$$

Ta nhận thấy rằng, nếu $\overline{v}$ là điểm bất động của F thì hàm

$$\tilde{u}(t) = u_0 + \int_0^t \overline{v}(\tau)d\tau$$

là nghiệm của (4.2) – (4.3).

Thật vậy, nếu $\overline{v}$ là điểm bất động của F thì

$$\overline{v}(t) = (F\overline{v})(t) = u_1 + \int_0^t f\left(\tau, u_0 + \int_0^\tau \overline{v}(\xi)d\xi, \overline{v}(\tau)\right)d\tau$$

Từ $\tilde{u}(t) = u_0 + \int_0^t \overline{v}(\tau)d\tau$, ta có: $\tilde{u}'(t) = \overline{v}(t),\ \tilde{u}(0) = u_0$.

Nên $\tilde{u}'(t) = u_1 + \int_0^t f\left(\tau, \tilde{u}(\tau), \overline{v}(\tau)\right) d\tau$

Do đó, ta có

$\tilde{u}''(t) = f\left(t, \tilde{u}(t), \overline{v}(t)\right) = f\left(t, \tilde{u}(t), \tilde{u}'(t)\right)$ và $\tilde{u}(0) = u_0$, $\tilde{u}'(0) = u_1$

Khẳng định trên được chứng minh.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\left|(Fv_1)(t) - (Fv_2)(t)\right|_{\lambda'} \le c(\lambda,\lambda')\left(\left|v_1(t) - v_2(t)\right|_{\lambda}\right); \left(v_1, v_2 \in C_\lambda\right) \quad (2.7)$$

Từ định nghĩa ánh xạ F và điều kiện (2.1) ta có

$$\left|Fv_1(t) - Fv_2(t)\right|_{\lambda'} \le$$
$$\le \int_0^t \left| f\left(\tau, u_0 + \int_0^\tau v_1(\xi)d\xi, v_1(\tau)\right) - f\left(\tau, u_0 + \int_0^\tau v_2(\xi)d\xi, v_2(\tau)\right)\right|_{\lambda'} d\tau$$
$$\le \int_0^t \left[a(\lambda,\lambda')\int_0^\tau \left|v_1(\xi) - v_2(\xi)\right|_\lambda d\xi + b(\lambda,\lambda')\left|v_1(\tau) - v_2(\tau)\right|_\lambda \right] d\tau$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$\int_0^t a(\lambda,\lambda')\int_0^\tau \left|v_1(\xi) - v_2(\xi)\right|_\lambda d\xi . d\tau$$
$$= \left[\tau a(\lambda,\lambda')\int_0^\tau \left|v_1(\xi) - v_2(\xi)\right|_\lambda d\xi\right]_0^t - \int_0^t \tau a(\lambda,\lambda')\left|v_1(\tau) - v_2(\tau)\right|_\lambda d\tau$$
$$= \int_0^t a(\lambda,\lambda')(t-\tau)\left|v_1(\tau) - v_2(\tau)\right|_\lambda d\tau$$

Suy ra,

$$\left|Fv_1(t) - Fv_2(t)\right|_{\lambda'} \le$$
$$\le \int_0^t a(\lambda,\lambda')(t-\tau)\left|v_1(\tau) - v_2(\tau)\right|_\lambda d\tau + \int_0^t b(\lambda,\lambda')\left|v_1(\tau) - v_2(\tau)\right|_\lambda d\tau$$

Như vậy, ta có (2.7).

Với mỗi bộ số $\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n = \lambda'$, ta áp dụng (2.7) và có

$$\left|F^n v_1(t) - F^n v_2(t)\right|_{\lambda'} \le c(\lambda_{n-1},\lambda_n)\left(\left|F^{n-1}v_1(t) - F^{n-1}v_2(t)\right|_{\lambda_{n-1}}\right) \le \dots$$
$$\dots \le c(\lambda_{n-1},\lambda_n)c(\lambda_{n-2},\lambda_{n-1})\dots c(\lambda_0,\lambda_1)\left(\left|v_1(t) - v_2(t)\right|_{\lambda}\right)$$

Suy ra, với mọi $v_1, v_2 \in C_\lambda$:

$$\left|F^n v_1(t) - F^n v_2(t)\right|_{\lambda'} \le c(\lambda_{n-1},\lambda_n)c(\lambda_{n-2},\lambda_{n-1})\dots c(\lambda_0,\lambda_1)\left|v_1(t) - v_2(t)\right|_{\lambda}$$

Mà với mọi $i = 1,2,\dots,n$, ta có

$$c(\lambda_{i-1},\lambda_i)\left|(v_1 - v_2)(t)\right|_\lambda = \int_0^t \left[a(\lambda_{i-1},\lambda_i)(t-\tau) + b(\lambda_{i-1},\lambda_i)\right]\left(\left|(v_1 - v_2)(\tau)\right|_\lambda\right)d\tau$$
$$\le \left|v_1 - v_2\right|_{C_\lambda}\int_0^t \left[a(\lambda_{i-1},\lambda_i)(t-\tau) + b(\lambda_{i-1},\lambda_i)\right].1d\tau$$

tức là ta có

$$c(\lambda_{i-1},\lambda_i)\left|(v_1 - v_2)(t)\right|_\lambda \le \left|v_1 - v_2\right|_{C_\lambda} c(\lambda_{i-1},\lambda_i)1(t),\ \forall i = 1,2,\dots,n.$$

Nên

$$\left|F^n v_1(t) - F^n v_2(t)\right|_{\lambda'} \le \left(c(\lambda_{n-1},\lambda_n)c(\lambda_{n-2},\lambda_{n-1})\dots c(\lambda_0,\lambda_1)\right)1(t).\left|v_1 - v_2\right|_{C_\lambda}$$

Do đó, ta có

$$\left|F^n v_1 - F^n v_2\right|_{C_{\lambda'}} \le c_n(\lambda,\lambda')1(T').\left|v_1 - v_2\right|_{C_\lambda} \tag{2.8}$$

Nếu ta xây dựng dãy lặp $v_0(t) = 0,\ v_{n+1}(t) = Fv_n(t),\ (n = 0,1,\dots)$ thì do (2.8) sẽ có đánh giá

$$\left|v_{n+1} - v_n\right|_{C_{\lambda'}} = \left|F^n v_1 - F^n v_0\right|_{C_{\lambda'}} \le c_n(\lambda,\lambda')1(t).\left|v_1 - v_0\right|_{C_\lambda} \tag{2.9}$$

Do $v_1(t) - v_0(t) = u_1 + \int_0^t f(\tau,u_0,0)d\tau = h_0(t)$ là hàm thuộc C_λ nên từ (2.9) và định nghĩa tập $T(\lambda,\lambda')$, dãy $\{v_n\}$ sẽ hội tụ trong $C_{\lambda'}$ tới hàm $\overline{v}$ nào đó là điểm bất động của F.

2.2. Phương trình cấp hai với điều kiện Lipschitz với các hàm $a(\lambda,\lambda'), b(\lambda,\lambda')$ trong trường hợp đặc biệt .

Sử dụng định lý tổng quát trên ta sẽ chỉ ra cách đánh giá các tập $T(\lambda,\lambda')$ trong một trường hợp riêng quan trọng.

Với $Jw(t)=\int_0^t w(\tau)d\tau$, ta có: $J^2w(t)=\int_0^t Jw(\tau)d\tau=\int_0^t\left(\int_0^\tau w(\xi)d\xi\right)d\tau$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_0^t\left(\int_0^\tau w(\xi)d\xi\right)d\tau = t\int_0^t w(\tau)d\tau-\int_0^t \tau.w(\tau)d\tau=\int_0^t (t-\tau).w(\tau)d\tau$$

Do đó,

$$J^2w(t)=\int_0^t (t-\tau)w(\tau)d\tau$$

Kết hợp (2.4), ta được

$c(\lambda,\lambda')=a(\lambda,\lambda')J^2+b(\lambda,\lambda')J$, với $Jw(t)=\int_0^t w(\tau)d\tau$

Gọi $D\subseteq\{1,2,...,n\}$, ta thực hiện phép nhân phân phối vế với vế n đẳng thức

$$\begin{aligned}
&c(\lambda_0,\lambda_1)w(t)=a(\lambda_0,\lambda_1)J^2+b(\lambda_0,\lambda_1)J\\
&c(\lambda_1,\lambda_2)w(t)=a(\lambda_1,\lambda_2)J^2+b(\lambda_1,\lambda_2)J\\
&...\\
&c(\lambda_{n-1},\lambda_n)w(t)=a(\lambda_{n-1},\lambda_n)J^2+b(\lambda_{n-1},\lambda_n)J
\end{aligned}$$

ta được đẳng thức mới có vế phải là một tổng mà mỗi số hạng có dạng $\prod_{j\in D} a(\lambda_{j-1},\lambda_j)J^{2l}.\prod_{j\notin D} b(\lambda_{j-1},\lambda_j)J^{n-l}$, trong đó l là số phần tử của D, với 2l +(n-l)=k và k=n,n+1,…,2n.

Ta thấy số phần tử của D là l=k-n

Gọi M_k là tập các tập con $D \subset \{1,2,...,n\}$ thì do định nghĩa (2.5), ta có

$$c(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n) = \sum_{k=n}^{2n} d_k(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n) J^k$$

trong đó

$$d_k(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n) = \sum_{D\in M_k} \prod_{j\in D} a(\lambda_{j-1},\lambda_j) \prod_{j\notin D} b(\lambda_{j-1},\lambda_j)$$

Vì $J^k 1(t) = \dfrac{t^k}{k!}$, nên ta có

$$c\left(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n\right)1\left(t\right) = \sum_{k=n}^{2n} d_k\left(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n\right).\frac{t^k}{k!} \tag{2.10}$$

Giả sử các hàm $a(\lambda,\lambda'), b(\lambda,\lambda')$ thõa mãn điều kiện sau

Điều kiện (λ)**.**

Tồn tại các hàm $a_n(\lambda,\lambda'), b_n(\lambda,\lambda'), (n=1,2...)$ sao cho với mỗi cặp $\lambda' < \lambda$ tồn tại bộ số $\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > ... > \lambda_n = \lambda'$ sao cho $a(\lambda_{j-1},\lambda_j) = a_n(\lambda,\lambda'),\ b(\lambda_{j-1},\lambda_j) = b_n(\lambda,\lambda')\ (j=1,...,n)$.

Do d_k là một tổng gồm các số hạng (trong trường hợp này) bằng nhau; tổng số các số hạng đó bằng tổng số các tập con D của $A = \{1,2,...,n\}$, tức là bằng C_n^{k-n}.

Nên với điều kiện (λ) như vậy**,** ta có

$$d_k\left(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n\right) = C_n^{k-n} a_n^{k-n}(\lambda,\lambda') b_n^{2n-k}(\lambda,\lambda'), \tag{2.11}$$

Ta xét trường hợp

$a(\lambda,\lambda') = a.(\lambda-\lambda')^{-2}$, $b(\lambda,\lambda') = b.(\lambda-\lambda')^{-1}$ ($a>0, b>0$ là các hằng số), là một sự mở rộng tự nhiên của điều kiện dạng Lipshitz cho phương trình cấp một. Khi đó điều kiện (λ) được thỏa với

$$a_n(\lambda,\lambda')=a(\lambda_{j-1},\lambda_j)=a.(\lambda_{j-1}-\lambda_j)^{-2}=a.(\frac{\lambda-\lambda'}{n})^{-2}=an^2(\lambda-\lambda')^{-2},$$

$$b_n(\lambda,\lambda')=bn(\lambda-\lambda')^{-1}$$

và với cách chọn λ_j là các điểm chia $[\lambda',\lambda]$ làm n phần bằng nhau.

Trong trường hợp này từ (2.10) – (2.11), ta có

$$c_n(\lambda,\lambda')1(t)=\inf c(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n)1(t)\le\sum_{k=n}^{2n}d_k(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n)\frac{t^k}{k!}$$

$$\le\sum_{k=n}^{2n}C_n^{k-n}a^{k-n}(\lambda,\lambda')b^{2n-k}(\lambda,\lambda')\frac{(T')^k}{k!}$$

$$=\sum_{k=n}^{2n}C_n^{k-n}a^{k-n}b^{2n-k}n^k(\lambda-\lambda')^{-k}\frac{(T')^k}{k!};\ \forall t\in[0,T']$$

Ta có

$$n^k\le(n+1)(n+2)...k\Rightarrow\frac{n^k}{n^n}\le\frac{k!}{n!};\ (k=n,n+1,...,2n)\ \text{hay}\ \frac{n^k}{k!}\le\frac{n^n}{n!}$$

Suy ra

$$c_n(\lambda,\lambda')1(t)\le\frac{n^n}{n!}\sum_{k=n}^{2n}C_n^{k-n}a^{k-n}b^{2n-k}\left[\frac{T'}{\lambda-\lambda'}\right]^k$$

$$\le\frac{n^n}{n!}\sum_{k=n}^{2n}C_n^{k-n}a^{k-n}\left[\frac{T'}{\lambda-\lambda'}\right]^{2(k-n)}b^{2n-k}\left[\frac{T'}{\lambda-\lambda'}\right]^{2n-k},\ \forall t\in[0,T']$$

Như vậy

$$C_n(\lambda,\lambda')1(t)\le\frac{n^n}{n!}\left[aT'^2(\lambda-\lambda')^{-2}+bT'(\lambda-\lambda')^{-1}\right]^n \tag{2.12}$$

Ta biết $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=e$ nên từ (2.12), ta có

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{c_n(\lambda,\lambda')1(t)} \le e\left[a\left(\frac{T'}{\lambda-\lambda'}\right)^2 + b\frac{T'}{\lambda-\lambda'}\right]$$

Đặt $B=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{c_n(\lambda,\lambda')1(t)}$. Với T' thoả $0<T'<\dfrac{\lambda-\lambda'}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2+\dfrac{4a}{e}}\right)$,

ta có

$$B\le e\left[a\left(\frac{\frac{\lambda-\lambda'}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2+4a/e}\right)}{\lambda-\lambda'}\right)^2 + b\left(\frac{\frac{\lambda-\lambda'}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2+4a/e}\right)}{\lambda-\lambda'}\right)\right]$$

$$=e\left[a\frac{\left(-b+\sqrt{b^2+4a/e}\right)^2}{4a^2}+\frac{b}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2+4a/e}\right)\right]$$

$$=e.\frac{\frac{4a}{e}}{4a}=1$$

Theo định nghĩa của tập $T(\lambda,\lambda')$, ta có: $T'\in T(\lambda,\lambda')$.

Do đó, ta có

$$\left(0,(\lambda-\lambda')\left[-b+\sqrt{b^2+\frac{4a}{e}}\right]\Big/2a\right)\subset T(\lambda,\lambda')\ .$$

Vậy ta đã chứng minh được hệ quả sau

Hệ quả.

Giả sử ánh xạ $f:[0,T]\times E_\lambda\times E_\lambda\to E_{\lambda'}$ *liên tục với mỗi cặp* $\lambda<\lambda'$ *và thõa mãn điều kiện*

$$\left|f(t,u_1,v_1)-f(t,u_2,v_2)\right|_{\lambda'}\le\frac{a}{(\lambda-\lambda')^2}|u_1-u_2|_\lambda+\frac{b}{\lambda-\lambda'}|v_1-v_2|_\lambda$$

và hàm $h_0(t)$ *bị chặn trong* E_λ *thì bài toán (2.2) với điều kiện (2.3) có nghiệm* $u:[0,T'] \to E_{\lambda'}$ *nếu* T' *thoã điều kiện*

$$0 < T' < (\lambda - \lambda')\left(-b + \sqrt{b^2 + \frac{4a}{e}}\right) \Big/ 2a.$$

CHƯƠNG 3
PHƯƠNG TRÌNH CẤP HAI VỚI ĐIỀU KIỆN COMPACT

Khó khăn chủ yếu trong việc nghiên cứu các bài toán Cauchy là ở chỗ các toán tử được xét đi từ một không gian E_λ nào đó không vào chính nó, mà vào không gian rộng hơn $E_\beta\, (\beta < \lambda)$ trong họ các không gian Banach. Để khắc phục khó khăn này, ta áp dụng phương pháp lặp thông thường và lập luận của Ovsjannikov, Nirenberg, Nishida và Barkova, Zabreiko.

Trước hết, ta nghiên cứu sự tồn tại và đánh giá nghiệm của bài toán Cauchy tuyến tính sau đây:

$$u'' = A(t)u + f(t) \tag{3.1}$$

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1. \tag{3.2}$$

Định lý 3.1.

Giả sử các giả thiết sau đây được thoã mãn:

1) Với mỗi cặp (λ,β), $a \le \lambda < \beta \le b$, $A : I = [0,T] \to L(E_\beta, E_\lambda)$ *là toán tử liên tục và tồn tại một số* $M > 0$, *không phụ thuộc vào* t,λ,β, *sao cho:*

$$\left|A(t)u\right|_\lambda \le \frac{M}{(\beta-\lambda)^2}\left|u\right|_\beta,\ \text{với mọi } u \in E_\beta.$$

2) $u_0, u_1 \in E_b; f \in C(I, E_b)$.

Khi đó, với mỗi $\lambda \in (a,b)$, *tồn tại một số* $T_\lambda = \min\left\{T, \dfrac{b-\lambda}{\sqrt{Me}}\right\}$ *sao cho bài toán (1) có duy nhất nghiệm* $u : [0, T_\lambda) \to E_\lambda$, *thoã mãn*

$$\left|u(t)-\overline{u}(t)\right|_{\lambda} \leq \frac{K(t)(b-\lambda)}{2(b-\lambda-t\sqrt{Me})}, \tag{3.3}$$

$$\left|u'(t)-u_1\right|_{\lambda} \leq Tg(t)+\frac{4M}{\sqrt{Me}}\left(\frac{c}{b-\lambda-t\sqrt{Me}}+\frac{2K(t)(b-\lambda)}{\left(b-\lambda-t\sqrt{Me}\right)^2}\right) \tag{3.4}$$

với $t\in\left[0,T_{\lambda}\right)$, *trong đó*

$$\begin{aligned}&\overline{u}(t)=u_0+tu_1;\ c=\sup\left\{\left|\overline{u}(t)\right|_b : t\in\left[0,T\right]\right\};\\ &g(t)=\sup\left\{\left|f(s)\right|_b : s\in\left[0,t\right]\right\};\ K(t)=c+\frac{(b-\lambda)^2}{2Me}g(t)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Chứng minh.

Cố định $\lambda\in(a,b)$. Ta thay bài toán (3.1)-(3.2) bởi phương trình tích phân tương đương sau

$$u(t)=\overline{u}(t)+\int_0^t ds\int_0^s\left(A(r)u(r)+f(r)\right)dr := Fu(t). \tag{3.6}$$

Xét các phép xấp xỉ liên tiếp $u_0(t)=\overline{u}(t),\ u_n(t)=Fu_{n-1}(t)$.

Vì $\overline{u}, f\in C(I,E_b)$, nên ta có $u_n\in C(I,E_{\beta})$ với mọi n và mọi $\beta\in\left[\lambda,b\right)$.

Ta sẽ chứng minh bằng qui nạp rằng

$$\left|u_n(t)-u_{n-1}(t)\right|_{\beta} \leq K(t)\left(\frac{Met^2}{(b-\beta)^2}\right)^n \tag{3.7}$$

Với n=1 thì do giả từ thiết 1) và từ $\beta<b\Rightarrow\left|f(r)\right|_{\beta}\leq\left|f(r)\right|_b$), ta có

$$\left|u_1(t)-\overline{u}(t)\right|_{\beta}=\left|Fu_0(t)-\overline{u}(t)\right|_{\beta}\leq\int_0^t ds\int_0^s\left(\left|A(r)u_0(r)\right|_{\beta}+\left|f(r)\right|_{\beta}\right)dr$$

$$\leq\int_o^t ds\int_0^s\left(\frac{M}{(b-\beta)^2}\left|\overline{u}(r)\right|_b+\left|f(r)\right|_b\right)dr$$

Kết hợp định nghĩa số c, hàm $g(t), K(t)$ và bằng tính toán cụ thể ta có đánh giá

$$\int_o^t ds\int_0^s\left(\frac{M}{(b-\beta)^2}\left|\overline{u}(r)\right|_b+\left|f(r)\right|_b\right)dr$$
$$\le\left(\frac{Mc}{(b-\beta)^2}+g(t)\right)\frac{t^2}{2}\le\left(\frac{2Mce+g(t)(b-\beta)^2}{(b-\beta)^2}\right)\frac{t^2}{2}$$
$$\le\left(\frac{2Mce+g(t)(b-\lambda)^2}{2}\right)\frac{t^2}{(b-\beta)^2}$$
$$=\left(c+\frac{g(t)(b-\lambda)^2}{2Me}\right)\frac{t^2Me}{(b-\beta)^2}=K(t)\left(\frac{Met^2}{(b-\beta)^2}\right)^1$$

Vậy (3.7) đúng với n =1.

Nếu (3.7) đúng với n thì với chú ý rằng hàm K tăng theo t, ta có

$$\left|u_{n+1}(t)-u_n(t)\right|_\beta\le\int_0^t ds\int_0^s\left|A(r)u_n(r)-A(r)u_{n-1}(r)\right|_\beta dr$$
$$\le\frac{M}{\varepsilon^2}\int_0^t ds\int_0^s\left|u_n(r)-u_{n-1}(r)\right|_{\beta+\varepsilon}dr$$
$$\le\frac{M}{\varepsilon^2}\int_0^t ds\int_0^s K(r)\left(\frac{Mer^2}{(b-\beta-\varepsilon)^2}\right)^n dr$$
$$\le\frac{M}{\varepsilon^2}\int_0^t ds\int_0^s K(s)\frac{(Me)^n r^{2n}}{(b-\beta-\varepsilon)^{2n}}dr$$
$$=\frac{M}{\varepsilon^2}\int_0^t K(s)\frac{(Me)^n s^{2n+1}}{(2n+1)(b-\beta-\varepsilon)^{2n}}ds$$
$$\le\frac{M}{\varepsilon^2}\int_0^t K(t)\frac{(Me)^n s^{2n+1}}{(2n+1)(b-\beta-\varepsilon)^{2n}}ds$$
$$\le\frac{K(t)\left(Met^2\right)^{n+1}}{\varepsilon^2(b-\beta-\varepsilon)^{2n}(2n+1)(2n+2)e}$$

tức là ta có

$$\left|u_{n+1}(t)-u_n(t)\right|_\beta \le \frac{K(t)\left(Met^2\right)^{n+1}}{\varepsilon^2(b-\beta-\varepsilon)^{2n}(2n+1)(2n+2)e} \tag{3.8}$$

Chọn $\varepsilon = \dfrac{b-\beta}{2n+1}$, ta được

$$\varepsilon^2(b-\beta-\varepsilon)^{2n} = \left(\frac{b-\beta}{2n+1}\right)^2\left(\frac{2n(b-\beta)}{2n+1}\right)^{2n} \ge \frac{(b-\beta)^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}$$

Do $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n} < e$ nên

$$\varepsilon^2(b-\beta-\varepsilon)^{2n} \ge \frac{(b-\beta)^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)e} \tag{3.9}$$

Kết hợp (3.8) và (3.9) ta được (3.7) đúng cho trường hợp n+1.

Xét một số $t\in\left[0,T_\lambda\right)\to E_\lambda$ và chọn $\beta>\lambda$ thoả $Met^2<(b-\beta)^2$. Bất đẳng thức (3.7) chứng tỏ rằng dãy $\{u_n\}$ hội tụ trong $C\left(\left[0,t\right],E_\beta\right)$ về một hàm u.

Lấy giới hạn theo chuẩn của E_λ khi $n\to\infty$ trong đẳng thức $u_n(t)=Fu_{n-1}(t)$ ta thấy rằng hàm thu được $u:\left[0,T_\lambda\right)\to E_\lambda$ thoã mãn (3.6) và do đó nó chính là nghiệm của bài toán (3.1)-(3.2).

Tiếp theo, ta kiểm tra đánh giá (3.3), (3.4). Để đơn giản cho việc ký hiệu, ta đặt $d=\sqrt{Me}$. Từ (3.7) ta có

$$\left|u_n(t)-\overline{u}(t)\right|_\lambda \le K(t)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{td}{b-\lambda}\right)^{2i}$$

Và bằng cách cho $n\to\infty$, với $0\le t<\dfrac{b-\lambda}{d}$ thì

$$\left|u(t)-\overline{u}(t)\right|_\lambda \le \frac{d^2t^2}{(b-\lambda)^2-d^2t^2} \le \frac{K(t)(b-\lambda)^2}{(b-\lambda-td)(b-\lambda+td)}$$

Ta biết, nếu $0 < a < b$ thì $\dfrac{a}{a+b} < \dfrac{1}{2}$, nên

$$\frac{K(t)(b-\lambda)^2}{(b-\lambda-td)(b-\lambda+td)} \le \frac{K(t)(b-\lambda)}{2(b-\lambda-td)}$$

Do đó, (3.3) được thoả mãn.

Từ ký hiệu (3.5) và (3.6), ta có

$$\left|u'(t)-u_1\right|_\lambda = \left|\int_0^t \left(A(s)u(s)+f(s)\right)ds\right|_\lambda \le Tg(t) + \int_0^t \frac{M}{\left(\lambda(s)-\lambda\right)^2}\left|u(s)\right|_{\lambda(s)} ds \tag{3.10}$$

trong đó $\lambda(s) = \dfrac{b+\lambda-sd}{2}$.

Áp dụng (3.3), ta được

$$\left|u(s)\right|_{\lambda(s)} \le c + \frac{K(s)\left(b-\lambda(s)\right)}{2\left(b-\lambda(s)-sd\right)} = c + \frac{K(s)\left(b-\lambda+sd\right)}{2\left(b-\lambda-sd\right)} \le c + \frac{K(s)\left(b-\lambda\right)}{\left(b-\lambda-sd\right)},$$

với $0 \le s < \dfrac{b-\lambda}{d}$.

Do đó, từ (3.10) suy ra

$$\begin{aligned}
\left|u'(t)-u_1\right|_\lambda &\le Tg(t) + \int_0^t \frac{4M}{\left(b-\lambda-sd\right)^2}\left[c + \frac{K(s)\left(b-\lambda\right)}{\left(b-\lambda-sd\right)}\right] ds \\
&\le Tg(t) + 4M\left[c\int_0^t \frac{ds}{\left(b-\lambda-sd\right)^2} + K(t)\left(b-\lambda\right)\int_0^t \frac{ds}{\left(b-\lambda-sd\right)^3}\right] \\
&= Tg(t) + \frac{4M}{d}\left[\frac{c}{b-\lambda-sd} + \frac{K(t)(b-\lambda)}{2\left(b-\lambda-sd\right)^2}\right]\Bigg|_0^t
\end{aligned}$$

Bằng tính toán cụ thể, và để ý rằng K là hàm tăng theo t, ta được

$$\left|u'(t)-u_1\right|_\lambda \le Tg(t)+\frac{4M}{d}\left[\frac{c}{b-\lambda-td}+\frac{2K(t)(b-\lambda)}{\left(b-\lambda-td\right)^2}\right] \text{ với } t\in\left[0,T_\lambda\right).$$

Do đó, (3.4) được chứng minh.

Cuối cùng, ta chứng minh tính duy nhất nghiệm. Giả sử $v:\left[0,T'\right]\to E_\lambda$ là nghiệm của bài toán (3.1)-(3.2). Cố định $\lambda'<\lambda$, ta có thể lặp lại lập luận của chứng minh sự tồn tại với λ,b,u_n lần lượt được thay bởi λ',λ,u_n-v để được $u-v$ là nghiệm của bài toán

$$w''=A(t)w,\ \left(f(t)=0\right)$$
$$w(0)=w'(0)=0.$$

thoả đánh giá (3.3) (để ý rằng bài toán này được xét với $0\le t<T'$ và $\overline{w}(t)=0$). Vì vậy, $u(t)=v(t)$ với $0\le t<\min\left\{T',\frac{\lambda-\lambda'}{d}\right\}$, và do đó, bằng phương pháp lặp thông thường ta suy ra $u(t)=v(t)$ với $0\le t<T'$. Định lý được chứng minh.

Định lý 3.2.

Giả sử các giả thiết sau được thoã mãn

1) Với mỗi cặp (λ,β) *toán tử* $A:E_\lambda\times E_\beta\to E_\lambda$ *là dạng tuyến tính và tồn tại một số* $M>0$ *không phụ thuộc* (λ,β) *sao cho*

$$\left|A(u,v)\right|_\lambda\le\frac{M}{(\beta-\lambda)^2}\left|u\right|_\lambda.\left|v\right|_\beta\ ,\ \forall u\in E_\lambda,\forall v\in E_\beta\ .$$

2) Toán tử B là hoàn toàn liên tục từ $C^1\left(\left[0,T\right],E_a\right)$ *vào* $C\left(\left[0,T\right],E_b\right)$ *được trang bị bằng các chuẩn thông thường .*

Hơn nữa , $\sup\left\{\left|Bu(t)\right|_b .t\in\left[0,T\right];u\in C^1\left(\left[0,T\right],E_a\right)\right\}=L<\infty$

3) $u_0, u_1 \in E_b$.

Khi đó, với bất kì $\lambda \in (a,b)$, *tồn tại một số* $T_\lambda = \min\left\{T, \frac{b-\lambda}{4\sqrt{MLe}}\right\}$ *sao cho bài toán Cauchy*

$$u'' = A\big(Bu(t), u\big) \quad (3.11)$$

$$u(0) = u_0; u'(0) = u_1 \quad (3.12)$$

có một nghiệm $u : [0, T_\lambda] \to E_\lambda$.

Chứng minh.

Đặt $I = [0,T]$, trước hết chúng ta chú ý rằng , phép nhúng $I : C^1(I, E_\lambda) \to C^1(I, E_a)$ liên tục , do

$$\|I(x)\|_{C^1(I,E_a)} = \sup_{t\in I}\left\{|x(t)|_a + |x'(t)|_a\right\}$$

$$\Rightarrow \|I(x)\|_{C^1(I,E_a)} \le \sup_{t\in I}\left\{|x(t)|_\lambda + |x'(t)|_\lambda\right\} = \|x\|_{C^1(I,E_\lambda)}$$

Kết hợp giả thiết 2) ta có toán tử B cũng hoàn toàn liên tục từ $C^1(I, E_\lambda)$ vào $C(I, E_b)$,với bất kỳ $\lambda \in [a,b]$.

Cố định với $\lambda \in (a,b)$, mỗi $u \in C^1(I, E_\lambda)$, ta xét bài toán cauchy tuyến tính sau

$$v'' = A\big(Bu(t), v\big), \quad (3.13)$$

$$v(0) = u_0 \; ; v'(0) = u_1 \quad (3.14)$$

Với $\lambda \le \gamma \le \beta \le b$ và $v \in E_\beta$, do giả thiết 1) , ta có

$$\left|A\big(Bu(t), v\big) - A\big(Bu(s), v\big)\right|_\gamma \le \frac{M}{(\beta-\gamma)^2}\left|Bu(t) - Bu(s)\right|_b . |v|_\beta$$

$$\left|A\left(Bu(t),v\right)\right|_{\gamma} \le \frac{M\left|Bu(t)\right|_{\gamma}.\left|v\right|_{\beta}}{\left(\beta-\gamma\right)^{2}} \le \frac{M\left|Bu(t)\right|_{b}.\left|v\right|_{\beta}}{\left(\beta-\gamma\right)^{2}} \le \frac{ML}{\left(\beta-\gamma\right)^{2}}.\left|v\right|_{\beta}$$

Do đó, toán tử $t \to A\left(Bu(t),.\right)$ từ I vào $L\left(E_{\beta},E_{\gamma}\right)$ thoả giả thiết 1) của định lý 3.1. Vì vậy , với mỗi $\beta \in \left[\lambda,b\right)$, tồn tại $T'_{\beta} = \min\left\{T,(b-\beta)\big/\sqrt{MLe}\right\}$ để bài toán (3.13)-(3.14) có duy nhất nghiệm $v := Fu : \left[0,T'_{\beta}\right) \to E_{\beta}$

$$\left|Fu(t)-\bar{u}(t)\right|_{\beta} \le \frac{c(b-\beta)}{2(b-\beta-dt)}, \tag{3.15}$$

$$\left|Fu'(t)-u_{1}\right|_{\beta} \le \frac{4ML}{d}\left(\frac{c}{b-\beta-dt}+\frac{2c(b-\beta)}{(b-\beta-dt)^{2}}\right) \tag{3.16}$$

với $t \in \left[0,T'_{\beta}\right)$, trong đó $\bar{u}(t) = u_{0}+tu_{1}$; $c = \sup\left\{\left|\bar{u}(t)\right|_{b} : t \in I\right\}$, $d = \sqrt{MLe}$.

Để nghiên cứu tính liên tục và compact của toán tử F , ta sẽ đánh giá $\omega = Fu_{1}-Fu_{2}$

Rõ ràng , ω thoả

$$w'' = A\left(Bu_{1}(t),w\right) - A\left(Bu_{1}(t)-Bu_{2}(t);Fu_{2}(t)\right), \tag{3.17}$$

$$w(0) = w'(0) = 0 \tag{3.18}$$

Xét bài toán Cauchy (3.17)-(3.18) trong thang $\left(E_{\beta},|.|_{\beta}\right), \beta \in \left[\lambda,\lambda+\varepsilon\right]$ với $\varepsilon > 0$ sẽ chọn sau.

Bằng cách áp dụng bài toán (3.17)-(3.18) cho đánh giá (3.3), (3.4) với ký hiệu (3.5) trong định lý 3.1, ta được

$$\begin{aligned} \left|w(t)\right|_{\lambda} &\le \frac{\varepsilon^{3}}{4d^{2}(\varepsilon-dt)}\sup_{s\in[0,t]}\left|f(s)\right|_{\lambda+\varepsilon} . \\ \left|w'(t)\right|_{\lambda} &\le \left(T'_{\lambda+\varepsilon}+\frac{4ML\varepsilon^{3}}{4d^{2}(\varepsilon-dt)^{2}}\right).\sup_{s\in[0,t]}\left|f(s)\right|_{\lambda+\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.19}$$

với $0 \le t < min\left\{T, \dfrac{\varepsilon}{d}\right\}$, trong đó $f(t) = A\big(Bu_1(t) - Bu_2(t), Fu_2(t)\big)$. Theo giả thiết 1) của định lý, ta có

$$\left|f(t)\right|_{\lambda+\varepsilon} \le \frac{M}{\delta^2}\left|Bu_1(t) - Bu_2(t)\right|_{\lambda+\varepsilon}\left|Fu_2(t)\right|_{\lambda+\varepsilon+\delta} \tag{3.20}$$

và do (3.15) thì

$$\left|Fu_2(t)\right|_{\lambda+\varepsilon+\delta} \le c + \frac{c(b-\lambda-\varepsilon-\delta)}{2(b-\lambda-\varepsilon-\delta-dt)},$$

với $0 \le t < \min\{T, (b-\lambda-\varepsilon-\delta)/d\}$.

Bằng cách chọn $\varepsilon = (b-\lambda)/3,\ \delta = (b-\lambda)/6$, ta được

$$\left|Fu_2(t)\right|_{\lambda+\varepsilon+\delta} \le c + \frac{c(b-\lambda)}{2(b-\lambda-2dt)}, \text{ với } t < \min\left\{T, \frac{b-\lambda}{2d}\right\}$$

$$\le 2c \text{ , với } t < \min\left\{T, \frac{b-\lambda}{4d}\right\} \tag{3.21}$$

Cuối cùng, với $0 \le t < T_\lambda = \min\left\{T, \dfrac{b-\lambda}{4d}\right\}$, từ (3.19)-(3.21) ta có

$$\begin{aligned} &\left|Fu_1(t) - Fu_2(t)\right|_\lambda \le \frac{8Mc}{d^2}\sup_{s\in[0,t]}\left|Bu_1(s) - Bu_2(s)\right|_b, \\ &\left|\left(Fu_1 - Fu_2\right)'(t)\right|_\lambda \le \frac{48Mc(d^2+32ML)}{d^3(b-\lambda)}\sup_{s\in[0,t]}\left|Bu_1(s) - Bu_2(s)\right|_b \end{aligned} \tag{3.22}$$

Và từ (3.15), (3.16) ta có:

$$\left|Fu(t) - \overline{u}(t)\right| \le \frac{2}{3}c,\ \left|(Fu)'(t) - u_1\right| \le \frac{176c}{9d(b-\lambda)} \tag{3.23}$$

Bây giờ, ta kết thúc bằng việc chứng minh toán tử F có một điểm bất động. Ta giả sử $X = C^1\big([0, T_\lambda], E_\lambda\big)$ được trang bị bởi chuẩn

$\|u\| = \sup\left\{|u(t)|_{\lambda}, t \in [0, T_{\lambda}]\right\}$. Từ (3.23) ta có $F(X) \subset \bar{B}(\bar{u}, r)$ với $r > 0$ nào đó, và từ (3.22) thì

$\|Fu_1 - Fu_2\| \le K \sup_{t\in[o,T_\lambda]} |Bu_1(t) - Bu_2(t)|_b$ với hằng số $K > 0$ nào đó.

Như vậy, ta có

$\|Fu_1 - Fu_2\| \le K\|Bu_1 - Bu_2\|.$

Xét M là tập bị chặn, ta sẽ chứng minh $F(M)$ là tập compact tương đối.

Cho trước $\varepsilon > 0$, do B là ánh xạ hoàn toàn liên tục, nên $B(M)$ là tập compact tương đối và do đó hoàn toàn bị chặn.

Suy ra, tồn tại sao cho $B(M) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i\left(B(u_i), \dfrac{\varepsilon}{K}\right).$

Khi đó, với mọi $y \in F(M)$, tồn tại $u \in M : y = F(u)$, và do đó tồn tại $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $\|B(u) - B(u_i)\| \le \dfrac{\varepsilon}{K}$.

Vì thế, $\|F(u) - F(u_i)\| \le K\|B(u) - B(u_i)\| \le \varepsilon$, tức là ta có

$F(M) \subset B\left(F(u_i), \varepsilon\right).$

Như vậy $F(M)$ hoàn toàn bị chặn nên là tập compact tương đối.

Do đó, theo định lý Schauder, F có một điểm bất động trong X. Định lý được chứng minh.

CHƯƠNG 4
PHƯƠNG TRÌNH CẤP HAI VỚI NHIỄU COMPACT

Để thấy được tính tương tự với bài toán Cauchy cấp một, ta cần nhắc lại một kết quả sau.

4.1. Định lý.

Giả sử

1) Ánh xạ $A: I \to L\left(E_\lambda, E_\beta\right)$ *liên tục với mỗi cặp* $\beta < \lambda$ *thuộc* $[a,b]$ *và thoả:*

$$\left|A(t)\right|_{L\left(E_\lambda, E_\beta\right)} \le \frac{M}{\lambda - \beta};$$

2) Với mọi $\lambda \in [a,b)$, *ánh xạ* $g: I \times B_\lambda(u_0, r) \to E_b$ *liên tục đều và thoả:*

i) $\left|g(t,u)\right|_b \le c,$

ii) $\alpha_b\left[g(t,B)\right] \le m.\alpha_\lambda(B)$ *với mọi* $t \in I,\ B \subset \overline{B}_\lambda(u_0, r)$;

trong đó α_λ *là độ đo phi compact Kuratowski trên* E_λ, *các hằng số c, M, m, r không phụ thuộc* t, λ, β, B.

Khi đó, với mỗi $\lambda \in [a,b)$, *bài toán*

$$\frac{du}{dt} = A(t)x + g(t,u),\ t \in I = [0,T]$$
$$u(0) = u_0 \in E_b$$

có nghiệm địa phương với giá trị trong E_λ *với mỗi* $\lambda \in (a,b)$.

Việc chủ yếu của chương này là chúng tôi muốn thay đổi một ít giả thiết, chẳng hạn điều kiện độ đo phi compact được thay bởi điều kiện compact tương đối, để phù hợp với phương trình cấp hai. Với ý định thay đổi đó, chúng tôi thu được một kết quả như sau.

4.2. Mệnh đề.

Giả sử

1) Ánh xạ $A: I \to L\left(E_\beta, E_\lambda\right)$ *liên tục với mỗi cặp* $\lambda < \beta$ *thuộc* $[a,b]$ *và thoả:*

$$\left|A(t)u\right|_\lambda \le \frac{M}{(\beta-\lambda)^2}\left|u\right|_\beta, \text{với mọi } u \in E_\beta.$$

2) Với mọi $\lambda \in [a,b]$, $h: I \times E_\lambda \to E_b$ *là ánh xạ liên tục và thoả:*

i) $\left|h(t,u)\right|_b \le c_0, (t \in I)$

ii) $h(t,A) := \{h(t,u) : u \in A, (t \in I)\}$ *là compact tương đối trong* E_b, *với mọi tập* $A \subset E_\lambda$ *bị chặn.*

3) $u_0, u_1 \in E_b$.

Khi đó, với mỗi $\lambda \in [a,b)$, *bài toán*

$$u'' = A(t)u + h(t,u) \tag{4.1}$$

$$u(0) = u_0;\ u'(0) = u_1 \tag{4.2}$$

có nghiệm $u : [0, T_\lambda) \to E_\lambda$ *trong đó* $T_\lambda = \min\left\{T, \frac{b-\lambda}{\sqrt{Me}}\right\}$.

Chứng minh.

Mỗi λ cho trước thuộc $[a,b)$, cố định $u \in C\left(I, E_\lambda\right)$, ta có ánh xạ $t \mapsto h\left(t, u(t)\right)$ từ I vào E_b liên tục.

Áp dụng định lý 3.1 suy ra bài toán

$$v'' = A(t)v + h\left(t, u(t)\right) \tag{4.3}$$

$$v(0) = u_0; v'(0) = u_1 \tag{4.4}$$

có nghiệm duy nhất $v := Fu : [0, T_\beta) \to E_\beta$ với $\beta \in (a,b)$.

Ký hiệu $d = \sqrt{Me}$; chọn $\varepsilon > 0, \delta > 0$ sao cho $\lambda + \varepsilon < b, \delta < T_{\lambda+\varepsilon}$ và định nghĩa F trên $C(I, E_\lambda)$ như sau

$$Fu(t) = \begin{cases} \textit{nghiệm của bài toán } (4.3)-(4.4), \ \textit{nếu } t \in [0,\delta]; \\ Fu(\delta), \ \textit{nếu } t \in (\delta, T]. \end{cases}$$

Áp dụng điều kiện (3.3) với ký hiệu (3.5) của định lý 3.1, ta có

Với $t \in [0,\delta]$ thì

$$\left|Fu(t) - \overline{u}(t)\right|_\lambda \le \left[c + \frac{(b-\lambda)^2}{2d^2} \sup\left\{\left|h(s,u(s))\right|_b ; s \in [0,t]\right\}\right] \frac{b-\lambda}{2(b-\lambda-td)}$$

$$\le \left[c + \frac{(b-\lambda)^2}{2d^2} c_0\right] \frac{b-\lambda-\varepsilon}{2(b-\lambda-\varepsilon-td)}$$

Do $k(t) = \dfrac{b-\lambda-\varepsilon}{2(b-\lambda-\varepsilon-td)}$ là hàm tăng theo t, nên ta suy ra

$\left|Fu(t) - \overline{u}(t)\right|_\lambda \le C_1.C_2$ với mọi $t \in [0,\delta]$,

trong đó $C_1 = \dfrac{b-\lambda-\varepsilon}{2(b-\lambda-\varepsilon-\delta d)}, C_2 = c + \dfrac{(b-\lambda)^2}{2d^2}$.

Với $t \in (\delta, T]$, ta có

$$\left|Fu(t) - \overline{u}(t)\right|_\lambda \le \left|Fu(\delta) - \overline{u}(\delta)\right|_\lambda + \left|\overline{u}(\delta) - \overline{u}(t)\right|_\lambda$$

Nên

$$\left|Fu(t) - \overline{u}(t)\right|_\lambda \le \left(c + \frac{(b-\lambda)^2}{2d^2} c_0\right)\left(\frac{b-\lambda-\varepsilon}{2(b-\lambda-\varepsilon-\delta d)}\right) + 2c$$

Như vậy $\left|Fu(t) - \overline{u}(t)\right|_\lambda \le C_1 C_2 + 2c$, với mọi $t \in [0,T]$ (4.5)

Nếu Fu, Fv là nghiệm của (4.1) vơi điều kiện (4.2) thì bài toán

$$\begin{aligned} &w'' = A(t)w + h(t,u(t)) - h(t,v(t));\\ &w(0) = w'(0) = 0 \end{aligned}$$

có nghiệm là $Fu - Fv$.

Áp dụng lại ký hiệu (3.5) kết hợp điều kiện (3.3) của định lý 3.1, ta có

$$\begin{aligned} |Fu(t) - Fv(t)|_\lambda &\le \left[\frac{(b-\lambda)^2}{2d^2} \sup_{s\in[0,\,t]} \left\{ \left| h(s,u(s)) - h(s,v(s)) \right|_b \right\} \right] \frac{b-\lambda}{2(b-\lambda-td)} \\ &\le \left[\frac{(b-\lambda)^2}{2d^2} \sup_{s\in[0,\,t]} \left\{ \left| h(s,u(s)) - h(s,v(s)) \right|_b \right\} \right] \frac{b-\lambda}{2(b-\lambda-\delta d)} \end{aligned}$$

Do đó

$$|Fu(t) - Fv(t)|_\lambda \le \frac{C_1}{2d^2}(b-\lambda)^2 \sup_{s\in[0,\,t]} \left\{ \left| h(s,u(s)) - h(s,v(s)) \right|_b \right\} \qquad (4.6)$$

Ký hiệu $X_\lambda = C(I, E_\lambda)$ với chuẩn $\|u\|_\lambda = \sup_{t\in I} |u(t)|_\lambda$

Ta sẽ chứng minh ánh xạ F liên tục từ X_λ vào X_λ

Xét ánh xạ $H : X_\lambda \to X_b$, $Hu(t) = h(t,u(t))$.

Từ (4.6) , ta suy ra

$$\|F_u - F_v\|_\lambda \le c.\|H_u - H_v\|_b \qquad (4.7)$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh H liên tục.

Cố định $u \in X_\lambda$. Cho số $\varepsilon > 0$, bằng phản chứng ta chứng minh

$$\exists \delta > 0 : \forall v \in X_\lambda, \|v - u\|_\lambda < \delta \Rightarrow \left| h(t,v(t)) - h(t,u(t)) \right|_b < \varepsilon, \forall t \in I \qquad (4.8)$$

Nếu (4.8) không đúng, thì ta tìm được dãy $\{v_n\} \subset X_\lambda$ và dãy $\{t_n\} \subset I$

sao cho

$$\|v_n - u\|_\lambda < \frac{1}{n} \ , \left|h\left(t_n, v_n(t_n)\right) - h\left(t_n, u(t_n)\right)\right|_b \geq \varepsilon \tag{4.9}$$

Không mất tính tổng quát ta có thể coi $t_n \to t_0 \in I$. Khi đó , ta có :

$$|v_n(t_n) - u(t_0)| \leq |v_n(t_n) - u(t_n)| + |u(t_n) - u(t_0)| \leq \frac{1}{n} + |u(t_n) - u(t_0)|$$

Kết hợp với tính liên tục của u , ta suy ra

$$\begin{aligned} &\lim u(t_n) = u(t_0) \\ &\lim v_n(t_n) = u(t_0) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Hàm $h: I \times E_\lambda \to E_b$ liên tục tại $\left(t_0, u(t_0)\right)$, nên ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|h\left(t_n, v_n(t_n)\right) - h\left(t_n, u(t_n)\right)\right|_b = \left|h\left(t_0, u(t_0)\right) - h\left(t_0, u(t_0)\right)\right|_b = 0$$

Điều này mâu thuẩn với (4.9).

Như vậy F liên tục.

Mặt khác , do

$$\begin{aligned} &(Fu)'' = A(t)Fu + h\left(t, u(t)\right) \\ &(Fu)(0) = u_0; (Fu)'(0) = u_1 \end{aligned}$$

Nên với mọi $t, t' \in I = \left[0, T\right]$, ta có

$$\int_{t'}^{t}\left(\int_0^s (Fu)''(\tau)\,d\tau\right)ds = \int_{t'}^{t}\left(\int_0^s A(\tau)(Fu)\,d\tau\right)ds + \int_{t'}^{t}\left(\int_0^s h(\tau, u(\tau))\,d\tau\right)ds$$

$$\Rightarrow \int_{t'}^{t}(Fu)'(s)ds - u_1|t - t'| = \int_{t'}^{t}\left(\int_0^s A(\tau)(Fu)d\tau\right)ds + \int_{t'}^{t}\left(\int_0^s h(\tau, u(\tau))d\tau\right).ds$$

Lần lượt áp dụng giả thiết 2i) và 1) của mệnh đề, ta được

$$\begin{aligned} |Fu(t) - Fu(t')|_\lambda &\leq \int_{t'}^{t}\left(\int_0^s |A(\tau)Fu|_\lambda d\tau\right)ds + \int_{t'}^{t} c_0 s\,ds + u_1|t - t'| \\ &\leq \frac{M}{(\beta - \lambda)^2}\int_{t'}^{t}\left(\int_0^s |Fu|_\beta\,d\tau\right)ds + \int_{t'}^{t} c_0 s\,ds + u_1|t - t'| \end{aligned}$$

Ta thấy, (4.5) đúng với mọi $\lambda \in \left[a, b\right)$ nên với $\beta = \lambda + \varepsilon < b$, ta có

$$\begin{aligned}
\left|Fu(t)-Fu(t')\right|_\lambda &\le \frac{M}{\varepsilon^2}\int_{t'}^{t}\left(\int_0^s\left[\left|\overline{u}(t)\right|_b + C_1C_2 + 2c\right]d\tau\right)ds + \int_{t'}^{t}c_0 s\,ds + u_1\left|t-t'\right| \\
&\le \frac{M}{\varepsilon^2}\int_{t'}^{t}\left[C_1C_2+3c\right].s ds + \int_{t'}^{t}c_0 s\,ds + u_1\left|t-t'\right| \\
&\le \frac{M}{\varepsilon^2}\int_{t'}^{t}\left[C_1C_2+3c\right].T\,ds + \int_{t'}^{t}c_0 T\,ds + u_1\left|t-t'\right| \\
&\le C_3\left|t-t'\right|
\end{aligned}$$

trong đó $C_3 = \frac{MT}{\varepsilon^2}\left(3c + C_1C_2\right) + c_0T + u_1$.

Do đó, với mọi $t, t' \in I = [0,T]$, $C_3 = \frac{MT}{\varepsilon^2}\left(3c + C_1C_2\right) + c_0T + u_1$, ta có

$$\left|Fu(t)-Fu(t')\right|_\lambda \le C_3\left|t-t'\right|. \tag{4.11}$$

Ta gọi K là tập hợp các hàm u thuộc $C(I, E_\lambda)$ thoả:

$\left|u(t)-u(t')\right|_\lambda \le C_3\left|t-t'\right|$ với $t, t' \in I = [0,T]$

thì K lồi, đóng và bị chặn.

Hơn nữa, F liên tục từ K vào K .

Ta sẽ chứng minh $F(K)$ compact tương đối trong $X = C\left([0,T_\lambda], E_\lambda\right)$.

Với $\varepsilon > 0$ cho trước, $u \in K$, ta chọn $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{c_3}$.

Nếu với mọi $t, t' \in I$ thoả $\left|t-t'\right| < \delta_1$ thì từ (4.11), ta có $\left|Fu(t)-Fu(t')\right|_\lambda \le \varepsilon$.

Điều đó chứng tỏ $\{Fu,\ u \in K\}$ liên tục đồng bậc.

Ta cần chứng minh $\forall t \in I : \{Hu(t),\ u \in K\}$ compact tương đối trong E_λ, rồi kết hợp (4.7) để suy ra $\forall t \in I : \{Fu(t),\ u \in K\}$ cũng compact tương đối.

Ta có $K \subset X_\lambda$ là tập bị chặn.

Khi đó, $K' = \{u(t) : t \in [0,T], u \in K\} \subset E_\lambda$ là tập bị chặn. Và do đó, áp dụng giả thiết 2.ii) ta có $\{h(t,v) : v \in K'\}$ là tập compact tương đối.

Mà $\{Hu(t) : u \in K\} = \{h(t,u(t)) : u \in K\} \subset \{h(t,v) : v \in K'\}$

Nên $\{Hu(t) : u \in K\}$ là tập compact tương đối trong E_λ.

Áp dụng định lý Schauder, ta thấy F có điểm bất động trong K. Điểm bấe động đó chính là nghiệm trên $[0,\delta]$ với giá trị trong E_λ.

CHƯƠNG 5
MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Nhiều bài toán về bề mặt của sóng nước, phương trình truyền nhiệt, của lý thuyết phương trình đạo hàm riêng với các toán tử giả phân v.v… đưa đến việc nghiên cứu các bài toán Cauchy trong thang các không gian Banach. Trong chương này, ta xét đến ứng dụng cho phương trình Kirchhoff. Bài toán ứng dụng này được xét trong thang của các không gian các hàm trong lớp Gevrey.

5.1. Thang của các không gian các hàm trong lớp Gevrey.

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một tập con mở, ta ký hiệu $\mathcal{A}(\Omega)$ là lớp các hàm thực thoả:

$$\exists K > 0, \exists c > 0 : \left\| D^\alpha u \right\| \le K \frac{\alpha!}{c^{|\alpha|}}, \text{ với mọi } \alpha \in \mathbb{N}^n \tag{5.1}$$

trong đó ta giả sử $\|v\| = \sup\left\{ |v(x)| : x \in \Omega \right\}$ và với $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ta định nghĩa $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_n!$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Với $\lambda > 0$ bất kỳ, ta ký hiệu E_λ là không gian các hàm $u \in C^\infty(\Omega)$ thoả $|u|_\lambda := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left\| D^\alpha u \right\| \frac{\lambda^{|\alpha|}}{\alpha!} < \infty$

Ta biết rằng họ (E_λ) lập thành một thang các không gian Banach. Hơn nữa, nếu hàm u thoả điều kiện (5.1), thì với $\lambda < c$, ta có

$$|u|_\lambda = \sum_\alpha \left\| D^\alpha u \right\| \frac{c^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^{|\alpha|} \le K \sum_{i=0}^\infty (i+1) \left(\frac{\lambda}{c} \right)^i < \infty,$$

Nên $u \in E_\lambda$.

Do đó, ta có $\mathcal{A}(\Omega) = \cup\left\{E_\lambda : \lambda > 0\right\}$.

Bổ đề.

Thang các không gian Banach $\left(E_\lambda, |\,.\,|_\lambda\right), \lambda \in [a,b]$ *có các tính chất sau*

1) Nếu $u, v \in E_\lambda$ *thì* $u.v \in E_\lambda$ *và ta có* $|u.v| \le |u|.|v|$,

2) Tồn tại một hằng số $M > 0$ *chỉ phụ thuộc vào* a, b *sao cho với* $a \le \lambda < \beta \le b$ *, ta có*

$$\left|\Delta u\right|_\lambda \le \frac{M}{(\beta-\lambda)^2}.|u|_\beta,\ u \in E_\beta,$$

trong đó Δ *là toán tử Laplace.*

Chứng minh.

1) Ta có

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\delta \le \alpha} c_\alpha^\delta . D^\delta u . D^{\alpha-\delta} v,$$

trong đó định nghĩa $\delta = \left(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\right) \le \alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right)$ nếu $\delta_i \le \alpha_i$, với mọi $i = \overline{1,n}$ và khi đó $\alpha - \delta = \left(\alpha_1 - \delta_1, \alpha_2 - \delta_2, ..., \alpha_n - \delta_n\right)$.

Do đó,

$$\sum_\alpha \left\|D^\alpha uv\right\| \frac{\lambda^{|\alpha|}}{\alpha!} \le \sum_\alpha \sum_{\delta \le \alpha} \left\|D^\delta u\right\| \frac{\lambda^{|\delta|}}{\delta!} . \left\|D^{\alpha-\delta} v\right\| \frac{\lambda^{|\alpha-\delta|}}{(\alpha-\delta)!} \tag{5.2}$$

Bằng quy tắc nhân hai chuỗi, vế phải của (5.2) chính là $|u|.|v|$ và do đó $|u.v| \le |u|.|v|$.

2) Với một đa chỉ số $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right)$, ta đặt $\alpha + 2 = \left(\alpha_1 + 2, \alpha_2, ..., \alpha_n\right)$, khi đó ta có

$$\left\| D^{\alpha}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\right\| \frac{\lambda^{|\alpha|}}{\alpha!} \le \left\| D^{\alpha+2}u \right\| \frac{\beta^{|\alpha+2|}}{(\alpha+2)!}.\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{|\alpha|+2}.\frac{\left(\alpha_1+1\right)\left(\alpha_1+2\right)}{\lambda^2} \tag{5.3}$$

Xét sự biến thiên của $f(t)=t^2a^t$ với a<1 thì được

$$\sup\left\{ t^2\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^t : t\ge 0\right\} = \frac{4}{e^2\left(\ln(\lambda/\beta)\right)^2}$$

Áp dụng tính đồng biến của hàm số $g(t)=\ln t - t + 1$ trên $(0,1)$ thì có

$$\frac{4}{e^2\left(\ln(\lambda/\beta)\right)^2} \le \frac{4\beta^2}{e^2(\beta-\lambda)^2}$$

Do đó,

$$\sup\left\{ t^2\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^t : t\ge 0\right\} \le \frac{4\beta^2}{e^2(\beta-\lambda)^2}$$

Suy ra

$$\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{|\alpha|+2}\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}{\lambda^2} \le \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{|\alpha|+2}\frac{\left(|\alpha|+2\right)^2}{\lambda^2} \le \frac{4\beta^2}{e^2\lambda^2(\beta-\lambda)^2}$$

Do đó, từ (5.3) ta suy ra

$$\left|\Delta u\right|_{\lambda} \le 4n\left(\frac{b}{ea}\right)^2 \frac{|u|_{\beta}}{(\beta-\lambda)^2}$$

Bổ đề được chứng minh.

5.2. Bài toán Cauchy cho các phương trình Kirchhoff mở rộng.

Ta xét bài toán Cauchy:

$$D_t^2 u(t,x) = f\left(t, x, \int_P \left|\nabla_x u\right|^2 dx\right).\Delta_x u(t,x),\ (t,x)\in[0,T]\times\Omega \equiv \Omega_T, \tag{5.4}$$

$$u(0,x)=u_0(x),\ D_t u(0,x),\ \forall x\in\Omega. \tag{5.5}$$

trong đó P,Ω là tập con mở của $\mathbb{R}^n$ và $P \subset \Omega$ là tập bị chặn. Với hàm $f:\Omega_T \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, ta giả sử các giả thiết sau đây được thoả mãn

(H_1) $f(.,u) \in C^\infty(\Omega)$ với mọi $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^+$ và mọi $\alpha \in \mathbb{N}^n$ hàm tử $u \mapsto D_x^\alpha f(.,.,u)$ thuộc vào $C\left(\mathbb{R}^+, C(\Omega_T)\right)$.

(H_2) Tồn tại $c>0,\ K>0$ sao cho $\left|D_x^\alpha f(t,x,u)\right| \le K\dfrac{\alpha!}{c^{|\alpha|}}$ với mọi $(t,x,u) \in \Omega_T \times \mathbb{R}^+$ và mọi $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

5.2.1. Bổ đề.

Giả sử các giả thiết $(H_1),(H_2)$ *thoả mãn. Khi đó, toán tử* $Bu(t) = f\left(t,x,\int_P |\nabla_X u|^2\,dx\right)$ *là hoàn toàn liên tục từ* $C^1\left([0,T],E_a\right)$ *vào* $C\left([0,T],E_b\right)$ *với* $0<a<b<c$.

Hơn nữa, $\sup\left\{|Bu(t)|_b : u \in C^1\left([0,T],E_a\right), t \in [0,T]\right\} < \infty$. *Trong đó, trong* $C^1\left([0,T],E_a\right)$ *và* $C\left([0,T],E_b\right)$ *ta xét chuẩn thông thường*

$$\|u\|_a = \sup\left\{|u(t)|_a + |u'(t)|_a : t \in [0,T]\right\},\ \|u\|_a = \sup\left\{|u(t)|_b : t \in [0,T]\right\}.$$

Chứng minh.

Đặt $I=[0,T]$, trước hết ta chứng minh rằng toán tử

$$F: C^1(I,E_a) \to C(I,\mathbb{R}),\ Fu(t) = \int_P |\nabla_x u(t,x)|^2\,dx$$

là hoàn toàn liên tục.

Giả sử $V \subset C_1(I,E_a)$ là tập con bị chặn và $\|u\|_a \le r$ với mọi $u \in V$.

Do $\left|\dfrac{\partial}{\partial x_i}u(t,x)\right| \le \dfrac{1}{a}|u(t,.)|_a$, nên ta có

$$\left|\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}\right)^2\right| \le \frac{2r}{a^2}\left|u(t,.) - v(t,.)\right|_a \text{ với mọi } u,v \in V.$$

Và do đó,

$$\left|Fu(t) - Fv(t)\right| \le \frac{2nr.mesP}{a^2}\left\|u - v\right\|_a \text{ với mọi } t \in I \text{ và mọi } u,v \in V.$$

Điều đó chứng tỏ toán tử F liên tục. Tương tự, theo định lý giá trị trung bình, ta có

$$\left|\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial u(s,x)}{\partial x_i}\right)^2\right| \le \frac{2r^2}{a^2}\left|t - s\right| \text{ với mọi } u \in V \text{ và mọi } t,s \in I.$$

Vì thế,

$$\left|Fu(t) - Fu(s)\right| \le \frac{2nr^2.mesP}{a^2}\left|t - s\right| \text{ với mọi } u \in V \text{ và mọi } t,s \in I.$$

Từ đó, áp dụng định lý Ascoli-Arzèla, ta có tập F(V) là compact tương đối trong $C\left(I,\mathbb{R}\right)$.

Cuối cùng ta chứng minh tính liên tục và bị chặn của toán tử

$G : C\left(I,\mathbb{R}\right) \to C\left(I,E_b\right),\ Gu(t) = f\left(t,x,u(t)\right).$

Suy ra từ giả thiết (H_2) rằng

$\left|Gu(t)\right|_b = \sum_\alpha D^\alpha f\left(t,x,u(t)\right).\frac{b^{|\alpha|}}{\alpha!} \le K\sum_\alpha\left(\frac{b}{c}\right)^{|\alpha|}$ với mọi $t \in I$ và mọi $u \in C(I,\mathbb{R})$, và do đó $\sup\left\{\left\|Gu\right\|_b : u \in C(I,\mathbb{R})\right\} < \infty$.

Giả sử dãy hội tụ trong $C\left(I,\mathbb{R}\right)$ về một hàm u và $\left|u_m(t)\right| \le r$, $\left|u(t)\right| \le r$ với mọi $t \in I$ và mọi $m \in \mathbb{N}$. Với $\varepsilon > 0$ cho trước, trước hết ta chọn n_0 đủ lớn thoả

$$\sum_{|\alpha|\geq n_0+1}\left\|D^{\alpha} f\left(t,x,u_m(t)\right)-D^{\alpha} f\left(t,x,u(t)\right)\right\|\frac{b^{|\alpha|}}{\alpha!}\leq 2K\sum_{|\alpha|\geq n_0+1}\left(\frac{b}{c}\right)^{|\alpha|}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Theo giả thiết (H_1) hàm tử $u\mapsto D^{\alpha} f(.,.,u)$, $|\alpha|\leq n_0$ từ $\mathbb{R}^+$ vào $C(\Omega_T)$ liên tục đều trên $[0,r]$. Do đó, với m đủ lớn ta có

$$\sum_{|\alpha|\leq n_0}\left\|D^{\alpha} f\left(t,x,u_m(t)\right)-D^{\alpha} f\left(t,x,u(t)\right)\right\|\frac{b^{|\alpha|}}{\alpha!}<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ với mọi } t\in I.$$

Vì vậy, $\lim_{m\to\infty}\sup\left|Gu_m(t)-Gu(t)\right|_b=0$ Điều này chứng tỏ G liên tục, do đó $B=G_0F$ hoàn toàn liên tục. Bổ đề được chứng minh.

5.2.2. Định nghĩa.

Ta viết $u\in C^2(I,\mathcal{A}(\Omega))$ nếu $u\in C^2\left(I,E_\lambda\right)$ với $\lambda>0$ tuỳ ý.

5.2.3. Định lý.

Giả sử các giả thiết $(H_1),(H_2)$ thoả mãn và $u_0,u_1\in\mathcal{A}(\Omega)$. Khi đó, tồn tại $T'\leq T$ sao cho bài toán Cauchy cho phương trình Kirchhoff mở rộng (5.4)-(5.5) có một nghiệm $u\in C^2([0,T'],\mathcal{A}(\Omega))$

Chứng minh.

Xét thang $\left(E_\lambda,|.|_\lambda\right)$, $\lambda\in(a,b)$, trong đó E_λ được định nghĩa trong mục 3.1 và $b<c$ được chọn sao cho $u_0,u_1\in E_b$. Bài toán Cauchy (5.4)-(5.5) có dạng (3.11)-(3.12) với toán tử B được định nghĩa ở bổ đề 2 và $A(u,v)=u.\Delta v$. Do bổ đề 1,2 thoả các giả thiết của định lý 3.2 nên bài toán (5.4)-(5.5) có một nghiệm.

5.2.4. Nhận xét.

Từ đánh giá $T_\lambda = \min\left\{T, \dfrac{b-\lambda}{4\sqrt{MLe}}\right\}$ cho sự tồn tại nghiệm trong định lý 2, ta có các kết luận sau

1) Nếu hàm f đủ nhỏ (tức là nếu số K trong giả thiết $(H_2$ nhỏ) thì $T_\lambda = T$ bởi vì hằng số L nhỏ. Do đó, phương trình Kirchhoff (5.4)-(5.5) có một nghiệm tổng quát.

2) Nếu $f(t,x,u) = \varepsilon g(t,x,u)$ và g thoả (H_2) với $(t,x,u) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^+$ thì $L = o(\varepsilon)$. Do đó, với sự tồn tại T' trong định lý 3, ta thu được đánh giá $T' \geq m\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$.

KẾT LUẬN

Nhu cầu của khoa học ngày càng cao, đòi hỏi người nghiên cứu Toán học nói chung và Phương trình Vi phân nói riêng, không ngừng tìm tòi những kết quả mới để kịp thời đưa vào ứng dụng nhằm đáp ứng nhu cầu ấy. Qua đó, người ta khai thác được cái hay, cái đa dạng của Phương trình Vi phân.

Chúng tôi thiết nghĩ, quyển luận văn nhỏ này chưa phải là bảng tóm tắt hoàn hảo để độc giả thấy hết được cái hay cái đa dạng nói trên. Song, nó cũng phần nào chỉ ra được sự đa dạng riêng cho bài toán Cauchy cấp hai trong thang các không gian Banach. Nó giúp bản thân tôi cảm nhận được hiệu quả của mỗi phương pháp nghiên cứu dùng cho mỗi lớp Phương trình Vi phân, mỗi điều kiện khác nhau của bài toán khi khảo sát sự tồn tại và đánh giá nghiệm của nó.

Chắc rằng sự đa dạng của bài toán Cauchy cấp hai không dừng lại tại đây. Mệnh đề ở chương 4, có khả năng thay đổi một ít ở giả thiết và được cách chứng gọn hơn giá như định lý 3.1 vẫn còn đúng khi thay $c = \sup\left\{\left|\overline{u}(t)\right|_b : t \in \left[0,T\right]\right\}$ bởi $c = \int_0^t \left|\overline{u}(\tau)\right|_b d\tau$.

Hy vọng rằng bản thân có đủ điều kiện cả khách quan lẫn chủ quan, những ý nghỉ này được triển khai và tìm đến một vài kết quả khác cho bài toán Cauchy cấp hai.

Bước đầu làm quen công việc nghiên cứu trong thời gian có hạn, kiến thức bản thân cón nhiều bất cập, chắc nội dung luận văn không tránh khỏi sai sót. Rất mong được quý thầy cô, đồng nghiệp chỉ bảo và lượng thứ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] E.A. Barkova, P.P. Zabreiko

Bài toán Cauchy cho phương trình vi phân cấp cao với toán tử bị yếu (tiếng Nga) Diff. uravnhenhia T.27 (1991), N^0 3, 472-478.

[2] L. Nirenberg

Bài giảng về Giải tích hàm phi tuyến. Bản dịch Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1986.

Tiếng Anh

[3] E.A. Barkova, P.P. Zabreiko

Cauchy problem for high order differential equations with aggravating operators, Diff. Eq. 27 (1991), 472-478 (in Russian).

[4] K. Deimling

Ordinary Differential Equations in Banach Spaces. Lecture notes in Math., 596, Springer-Verlag, 1977.

[5] K. Deimling

Nonlinear Functional Analysis. Springer-Verlag, 1985.

[6] D. Gourdin, M. Mechab

Problème de Cauchy global pour des équations de Kirchhoff, C.R. Acad. Sci. Paris, t.326, Série 1 (1998), 941-944.

[7] D. Gourdin, M. Mechab

Problème de Goursat de non linéaire dans les espaces de Gevrey pour les équations de Kirchhoff généralisées. J. Math. Pures Appl. 75 (1996), 596-593.

[8] L. Nirenberg

An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalevski theorem. J. Diff. Geom., 6(1992), 561-576.

[9] T. Nishida

A note on Nirenberg's theorem as an abstract form of nonlinear Cauchy-Kowalevski theorem in Scale of Banach Spaces. Journ. Diff. Geo. 1997, Vol 12, 629-633.

[10] L.V. Ovsjannikov

A singular operator in Scale of Banach Spaces, Soviet Math. Dolk. (1965). 1025-1028.

[11] L.V. Ovsjannikov

Cauchy problem in Scale of Banach Spaces and it's application to the shallow water theorem justification, Lect. Notes in Math., 503. Springer (1976), 416-437.