

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH
-----o0o-----

Đinh Phước Vinh

**BÀI TOÁN BIÊN KHÔNG CHÍNH QUI CHO HỆ
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM BẬC CAO**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thành phố Hồ Chí Minh - 2011

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

-----o0o-----

Đinh Phước Vinh

BÀI TOÁN BIÊN KHÔNG CHÍNH QUI CHO HỆ PHƯƠNG
TRÌNH VI PHÂN HÀM BẬC CAO

Chuyên ngành : **Toán Giải Tích**

Mã số : **60 46 01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. NGUYỄN ANH TUẤN

Thành phố Hồ Chí Minh - 2011

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tôi xin kính gửi đến Thầy, **PGS.TS. Nguyễn Anh Tuấn** lời cảm ơn sâu sắc về sự tận tình giúp đỡ của **Thầy** đối với tôi trong suốt quá trình hoàn thành luận văn cũng như trong học tập.

Xin trân trọng cảm ơn **Quý Thầy Cô** thuộc khoa Toán của trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh đã tận tình truyền đạt kiến thức và kinh nghiệm quý báu cho tôi trong suốt những năm học tập.

Xin trân trọng cảm ơn Phòng Sau Đại Học trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn tất chương trình học tập và thực hiện luận văn này.

Xin cảm ơn tất cả bạn bè đồng nghiệp đã động viên giúp đỡ tôi trong những lúc khó khăn nhất.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn đến gia đình tôi, là chỗ dựa cho tôi về mọi mặt và đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tôi học tập và hoàn thành luận văn này.

Đinh Phước Vinh

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN	3
MỤC LỤC	4
DANH MỤC CÁC KÍ HIỆU	6
MỞ ĐẦU.....	9
Chương 1: BÀI TOÁN BIÊN CHÍNH QUI CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM PHI TUYẾN.....	11
1.1. Giới thiệu bài toán.....	11
1.2. Về sự tồn tại nghiệm của bài toán (1.1), (1.2)	11
1.2.1. Định lí về tính chất Fredholm của bài toán biên tuyến tính	11
Định lí.....	12
1.2.2. Định nghĩa	14
1.2.3. Định lí.....	15
1.2.4. Định nghĩa	19
1.2.5. Định nghĩa	20
1.2.6. Hệ quả.....	20
1.2.7. Định nghĩa	21
1.2.8. Hệ quả.....	21
Chương 2: BÀI TOÁN BIÊN KHÔNG CHÍNH QUI CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM BẬC CAO	23
2.1. Giới thiệu bài toán.....	23
2.2. Định lí về tính chất Fredholm của bài toán biên tuyến tính bậc cao	23
2.2.1. Định nghĩa	24
2.2.2. Bổ đề.....	24
2.2.3. Định lí.....	27
2.2.4. Hệ quả	29
2.3. Về sự tồn tại nghiệm của bài toán (2.1), (2.2)	30
2.3.1. Định nghĩa	31
2.3.2. Định nghĩa	32
2.3.3. Bổ đề.....	32
2.3.4. Định lí.....	33
2.3.5. Hệ quả.....	37

2.3.6.	Định nghĩa	38
2.3.7.	Định nghĩa	39
2.3.8.	Định lí.....	39
2.4.	Ứng dụng vào hệ phương trình vi phân hàm đối số lệch.....	44
2.4.1.	Bổ đề.....	45
2.4.2.	Định lí.....	47
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ.....		52
TÀI LIỆU THAM KHẢO		53

DANH MỤC CÁC KÍ HIỆU

$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$	Tập hợp các số thực
$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$	Tập hợp các số thực không âm
$\mathbb{R}^m$	Không gian các véc tơ cột m chiều $x = (x_i)_{i=1}^m$ với các thành phần $x_i \in \mathbb{R} (i = 1, \dots, m)$ và với chuẩn $\ x\ = \sum_{i=1}^m x_i $
$x \cdot y$	$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ với $x = (x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n$
$\text{sgn}(x)$	$\text{sgn}(x) = (\text{sgn}(x_i))_{i=1}^n$
$\mathbb{R}_+^m$	$\mathbb{R}_+^m = \left\{ (x_i)_{i=1}^m : x_i \in \mathbb{R}_+ (i = 1, \dots, m) \right\}$
$\mathbb{R}^{m \times m}$	không gian các ma trận $X = (x_{ik})_{i,k=1}^m$ với các thành phần $x_{ik} \in \mathbb{R}$ và với chuẩn $\ x\ = \sum_{i,k=1}^m x_{ik} $.
$ x $	$ x = (x_i)_{i=1}^m$ với $x = (x_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$
$ X $	$ X = (x_{ik})_{i,k=1}^m$ với $X = (x_{ik})_{i,k=1}^m \in \mathbb{R}^{m \times m}$
$\mathbb{R}_+^{m \times m}$	$\mathbb{R}_+^{m \times m} = \left\{ (x_{ik})_{i,k=1}^m : x_{ik} \in \mathbb{R}_+ (i, k = 1, \dots, m) \right\}$
$r(X)$	Bán kính phổ của ma trận $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$
$x \leq y$	$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i (i = 1, \dots, m)$ với $x = (x_i)_{i=1}^m, y = (y_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$

$$X \leq Y \quad X \leq Y \Leftrightarrow x_{ik} \leq y_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, m) \quad \text{với} \quad X = (x_{ik})_{i,k=1}^m,$$

$$Y = (y_{ik})_{i,k=1}^m \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$(k - \varepsilon)! \quad (k - \varepsilon)! = \prod_{i=1}^k (i - \varepsilon) \quad \text{với} \quad k \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon \in (0, 1)$$

$$C([a, b]; \mathbb{R}^m) \quad \text{Không gian Banach các hàm véc tơ } x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ liên tục với chuẩn} \\ \|x\|_C = \max \{ \|x(t)\| : t \in [a, b] \}$$

$$L([a, b]; \mathbb{R}^m) \quad \text{Không gian Banach các hàm véc tơ } x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ khả tích với chuẩn} \\ \|x\|_L = \int_a^b \|x(t)\| dt$$

$$C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \quad \text{Không gian Banach các hàm véc tơ } x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ khả vi liên tục tới} \\ \text{cấp } (n-1) \text{ và có các giới hạn } \lim_{t \rightarrow a} (t-a)^{\alpha_i} x^{(i-1)}(t), \\ \lim_{t \rightarrow b} (b-t)^{\beta_i} x^{(i-1)}(t) \quad (i=1, \dots, n), \quad \text{với} \quad -\infty < a < b < +\infty, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha_i = \frac{\alpha + i - n + |\alpha + i - n|}{2}, \quad \beta_i = \frac{\beta + i - n + |\beta + i - n|}{2} \quad (i=1, \dots, n)$$

$$\text{với chuẩn } \|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n (t-a)^{\alpha_i} (b-t)^{\beta_i} \|x^{(i-1)}(t)\| : a < t < b \right\}.$$

$$\tilde{C}_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \quad \text{Tập tất cả các phần tử } x \in C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \text{ sao cho } x^{(n-1)} \text{ là liên} \\ \text{tục tuyệt đối trên } (a, b), \text{ nghĩa là, liên tục tuyệt đối trên} \\ [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \text{ với mọi số dương } \varepsilon \text{ bé tùy ý}$$

$$L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}^m) \quad \text{Không gian Banach các hàm vectơ } y: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ có các thành phần} \\ \text{khả tích với trọng số } (t-a)^\alpha (b-t)^\beta \text{ với chuẩn} \\ \|y\|_{L_{\alpha, \beta}} = \int_a^b (t-a)^\alpha (b-t)^\beta \|y(t)\| dt$$

$L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}^{m\times m})$ Không gian Banach các ma trận hàm $Y:(a,b)\rightarrow\mathbb{R}^{m\times m}$ có các thành phần khả tích với trọng số $(t-a)^\alpha(b-t)^\beta$ với chuẩn

$$\|Y\|_{L_{\alpha,\beta}}=\int_a^b(t-a)^\alpha(b-t)^\beta\|Y(t)\|dt$$

$$L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}_+^m)\quad L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}_+^m)=\{y\in L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}^m):y(t)\in\mathbb{R}_+^m,t\in(a,b)\}$$

$$L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}_+^{m\times m})\quad L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}_+^{m\times m})=\{Y\in L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}^{m\times m}):Y(t)\in\mathbb{R}_+^{m\times m},t\in(a,b)\}$$

MỞ ĐẦU

Phương trình vi phân hàm mặc dù ra đời đã lâu nhưng bắt đầu được quan tâm từ những năm 20 của thế kỉ trước nhờ những ứng dụng của nó trong các lĩnh vực vật lý, cơ học, kinh tế, nông nghiệp,... Trong sự phát triển đó, các bài toán biên đóng một vai trò nổi bật ở cả lý thuyết và thực tiễn ứng dụng.

Cho tới nay, có một lớp đủ rộng những bài toán chính quy $x^{(n)}(t) = f(x)(t)$ với điều kiện biên $h_i(x) = 0 (i = 1, \dots, n)$ đã được nghiên cứu và trình bày trong các tài liệu chuyên khảo [1], [2]. Những điều kiện đủ cho tính giải được của những bài toán loại này cũng đã được giải quyết như trong [4], [5], [7], [10], [11], [16],... Tuy nhiên đối với bài toán biên không chính quy, các kết quả thu được còn khá khiêm tốn và chưa đủ tổng quát. Như ở [14], [15], trường hợp toán tử f có dạng $f(x)(t) = g(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ đã được nghiên cứu đầy đủ; trong khi với phương trình vi phân hàm $x^{(n)}(t) = f(x)(t)$, bài toán có trọng số đã được giải quyết trong [13], cũng như bài toán hai điểm trong [6], [7], và bài toán nhiều điểm Vallée-Poussin trong [8].

Với mong muốn phần nào lấp đầy lỗ hổng trên, luận văn này trình bày một số kết quả thu được từ việc khảo sát sự tồn tại nghiệm của bài toán trong trường hợp tổng quát

Nội dung của luận văn gồm hai chương.

Chương 1 trình bày định lí về sự tồn tại nghiệm của bài toán biên chính qui $\frac{dx(t)}{dt} = f(x)(t)$, $h(x) = 0$ trong trường hợp các toán tử $f : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$ và $h : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ liên tục.

Chương 2, cũng là nội dung chính của luận văn, tổng hợp một số kết quả tổng quát hơn được thiết lập trong [12], bởi các tác giả I. Kiguradze, B. Puza và I.P. Stavroulakis trong việc xây dựng tính giải được của bài toán biên không chính qui $x^{(n)}(t) = f(x)(t)$ với điều kiện biên $h_i(x) = 0 (i = 1, \dots, n)$ trong trường hợp các toán tử

$f : C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}^m)$ và $h_i : C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m (i = 1, \dots, n)$ liên tục và thỏa các điều kiện

$$\sup \left\{ \|f(x)(\cdot)\| : \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \leq \rho \right\} \in L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}_+),$$

$$\sup \left\{ \|h_i(x)\| : \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \leq \rho \right\} < +\infty (i = 1, \dots, n).$$

Một số kết quả thu được sau đó chính là sự tổng quát hoá các kết quả đã biết trước đó.

Chương 1: BÀI TOÁN BIÊN CHÍNH QUI CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM PHI TUYẾN

1.1. Giới thiệu bài toán

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình vi phân hàm phi tuyến

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x)(t) \quad (1.1)$$

với điều kiện biên

$$h(x) = 0 \quad (1.2)$$

trong đó $f : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$ và $h : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ là các toán tử liên tục.

Nghiệm của phương trình (1.1) được hiểu là một hàm $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ liên tục tuyệt đối thoả phương trình (1.1) hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Một nghiệm của (1.1) thoả (1.2) được gọi là một nghiệm của bài toán (1.1), (1.2).

1.2. Về sự tồn tại nghiệm của bài toán (1.1), (1.2)

1.2.1. Định lý về tính chất Fredholm của bài toán biên tuyến tính

Xét bài toán biên

$$\frac{dx(t)}{dt} = p(x)(t) + q(t) \quad (1.3)$$

$$\ell(x) = c_0 \quad (1.4)$$

trong đó,

$p: C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $\ell: C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $q \in L([a, b]; \mathbb{R}^n)$ và $c_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ngoài ra ta còn giả sử:

- (i) p tuyến tính và tồn tại hàm khả tích $\eta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho với mọi $t \in [a, b]$, $x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, ta có $\|p(x)(t)\| \leq \eta(t)\|x\|_C$
- (ii) ℓ là toán tử tuyến tính bị chặn.

Cùng với bài toán (1.3), (1.4) ta có bài toán thuần nhất tương ứng

$$\frac{dx(t)}{dt} = p(x)(t) \quad (1.3_0)$$

$$\ell(x) = 0 \quad (1.4_0)$$

Định lí

Bài toán (1.3), (1.4) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi bài toán thuần nhất tương ứng (1.3₀), (1.4₀) chỉ có nghiệm tầm thường. Hơn nữa, nếu bài toán (1.3₀), (1.4₀) chỉ có nghiệm tầm thường thì tồn tại số dương β sao cho nghiệm của bài toán (1.3), (1.4) thoả đánh giá

$$\|x\|_C \leq \beta(\|c_0\| + \|q\|_L).$$

Chứng minh

- Đặt $B = C([a, b]; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ là không gian Banach chứa các phần tử $u = (x, c)$, trong đó $x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $c \in \mathbb{R}^n$ với chuẩn $\|u\|_B = \|x\|_C + \|c\|$

Với tuỳ ý $u = (x, c) \in B$, cố định $t_0 \in [a, b]$, ta đặt

$$f(u)(t) = \left(c + x(t_0) + \int_{t_0}^t p(x)(s) ds, c - \ell(x) \right)$$

và

$$h(t) = \left(\int_{t_0}^t q(s) ds, c_0 \right) \text{ với mọi } t \in [a, b].$$

Khi đó bài toán (1.3), (1.4) trở thành phương trình các toán tử trong B

$$u = f(u) + h$$

do $u = (x, c)$ là nghiệm của phương trình trên khi và chỉ khi $c = 0$ và x là nghiệm của bài toán (1.3), (1.4).

- f là toán tử compact

Ta chứng minh $f(M)$ là tập compact tương đối nếu M là một tập bị chặn trong B .

Đặt $M = \{u \in B : \|u\| \leq K\}$ với K dương.

Do các giả thiết (i), (ii) của bài toán (1.3), (1.4), có K_1 dương sao cho $\|\ell(x)\| \leq K_1 \|x\|_C$, $\forall x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ và với mọi $u \in M$ ta có

$$\begin{aligned} \|f(u)(t)\| &\leq 2\|c\| + \|x(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^t p(x)(s) ds \right\| + \|\ell(x)\| \\ &\leq 2K + \left\| \int_{t_0}^t p(x)(s) ds \right\| + K_1 \|x\|_C \leq 2K + \left| \int_{t_0}^t \|p(x)(s)\| ds \right| + K_1 K \\ &\leq 2K + K_1 K + \|x\|_C \int_{t_0}^t \eta(s) ds \leq 2K + K_1 K + K \int_a^b \eta(s) ds. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $f(M)$ bị chặn đều.

Mặt khác, với $t, s \in [a, b]$ ta có

$$\begin{aligned} \|f(u)(t) - f(u)(s)\| &= \left\| \left(\int_t^s p(x)(\xi) d\xi, 0 \right) \right\| \\ &\leq \left| \int_t^s \|p(x)(\xi)\| d\xi \right| \leq \left| \int_t^s \|x\|_C \eta(\xi) d\xi \right| \leq K \left| \int_t^s \eta(\xi) d\xi \right| \end{aligned}$$

Suy ra $f(M)$ đồng liên tục đều.

Theo định lý Ascoli-Arzelà, f là toán tử compact.

• Áp dụng luận phiên Fredholm cho phương trình các toán tử, phương trình $u = f(u) + h$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $u = f(u)$ chỉ có nghiệm tầm thường, tương đương với bài toán (1.3₀), (1.4₀) chỉ có nghiệm tầm thường. Hơn nữa, nếu phương trình $u = f(u)$ chỉ có nghiệm tầm thường thì toán tử $I - f$ khả nghịch trong đó $I : B \rightarrow B$ là toán tử đồng nhất. Khi đó, $(I - f)^{-1}$ là tuyến tính bị chặn. Suy ra nghiệm u của phương trình $u = f(u) + h$ thỏa đánh giá $\|u\|_B = \|(I - f)^{-1} h\|_B \leq \beta \|h\|_B = \beta (\|c_0\| + \|q\|_L)$. Tuy nhiên khi đó $c = 0$ và ta có

$$\|x\|_C \leq \beta (\|c_0\| + \|q\|_L).$$

Định lí được chứng minh. $\square$

1.2.2. Định nghĩa

Cặp (p, ℓ) các toán tử $p : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \times C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$ và được gọi là hoà hợp nếu

(i) Với bất kì $x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, các toán tử $p(x, \cdot) : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$

và $\ell(x, \cdot) : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tuyến tính;

(ii) Với bất kì $x, y \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ và hầu khắp trên $[a, b]$, ta có các bất đẳng thức

$$\|p(x, y)(t)\| \leq \alpha(t, \|x\|_C) \|y\|_C;$$

$$\|\ell(x, y)\| \leq \alpha_0(\|x\|_C) \|y\|_C$$

trong đó $\alpha_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ là hàm không giảm, $\alpha : [a, b] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ khả tích trên $[a, b]$ theo biến thứ nhất và không giảm theo biến thứ hai;

(iii) Tồn tại số dương β sao cho với mỗi

$x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $q \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $c_0 \in \mathbb{R}^n$ mọi nghiệm y của bài toán

$$\frac{dy(t)}{dt} = p(x, y)(t) + q(x, y)(t), \quad \ell(x, y) = c_0 \quad (1.5)$$

đều thỏa bất đẳng thức

$$\|y\|_C \leq \beta(\|c_0\| + \|q\|_L). \quad (1.6)$$

1.2.3. Định lí

Giả sử tồn tại số dương ρ và cặp hoà hợp (p, ℓ) , trong đó $p: C([a, b]; \mathbb{R}^n) \times C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$ liên tục và

$\ell: C([a, b]; \mathbb{R}^n) \times C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sao cho với bất kì $\lambda \in (0, 1)$ mọi x là nghiệm của bài toán

$$\frac{dx(t)}{dt} = p(x, x)(t) + \lambda [f(x)(t) - p(x, x)(t)], \quad (1.7)$$

$$\ell(x, x) = \lambda [\ell(x, x) - h(x)] \quad (1.8)$$

đều thoả bất đẳng thức

$$\|x\|_C \leq \rho. \quad (1.9)$$

Khi đó bài toán (1.1), (1.2) có nghiệm.

Chứng minh

- Gọi α, α_0, β tương ứng là các hàm và số trong định nghĩa 1.2.2. Đặt

$$\gamma(t) = 2\rho\alpha(t, 2\rho) + \sup\{\|f(x)(t)\| : x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n), \|x\|_C \leq 2\rho\},$$

$$\gamma_0 = 2\rho\alpha_0(2\rho) + \sup\{\|h(x)\| : x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n), \|x\|_C \leq 2\rho\},$$

$$\sigma(s) = \begin{cases} 1 & \text{khi } 0 \leq s \leq \rho \\ 2 - s / \rho & \text{khi } \rho < s < 2\rho \\ 0 & \text{khi } s \geq 2\rho \end{cases} \quad (1.10)$$

$$q(x)(t) = \sigma(\|x\|_C) [f(x)(t) - p(x, x)(t)], \quad c_0(x) = \sigma(\|x\|_C) [\ell(x, x) - h(x)] \quad (1.11)$$

Khi đó, $\gamma \in L([a, b]; \mathbb{R})$, $\gamma_0 < +\infty$ và hầu khắp nơi trên $[a, b]$ ta có

$$\begin{aligned} \|q(x)(t)\| &\leq \sigma(\|x\|_C) [\|f(x)(t)\| + \|p(x, x)(t)\|] \\ &\leq 2\rho\alpha(t, 2\rho) + \sup\{\|f(x)(t)\| : x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n), \|x\|_C \leq 2\rho\} = \gamma(t). \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có: $\|c_0(x)\| \leq \gamma_0$.

Như vậy,

$$\|q(x)(t)\| \leq \gamma(t), \quad \|c_0(x)\| \leq \gamma_0. \quad (1.12)$$

- Với mỗi $x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, xét bài toán biên

$$\frac{dy(t)}{dt} = p(x, y)(t) + q(x)(t), \quad \ell(x, y) = c_0(x). \quad (1.13)$$

Ta chứng minh bài toán có nghiệm duy nhất bằng cách chỉ ra rằng bài toán thuần nhất tương ứng

$$\frac{dy(t)}{dt} = p(x, y)(t), \quad \ell(x, y) = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường.

Thật vậy, giả sử $y(t)$ là nghiệm của bài toán thuần nhất, do (p, ℓ) là hoà hợp và theo điều kiện (iii) của định nghĩa 1.2.2, với $q(x)(t) = 0$, $c_0(x) = 0$, ta có

$$\|y\|_C \leq \beta(\|c_0(x)\| + \|q(x)\|_L) = 0,$$

nên bài toán thuần nhất chỉ có nghiệm tầm thường. Khi đó, từ các điều kiện (i), (ii) của định nghĩa 1.2.2, các giả thiết của định lý 1.2.1 đều thoả mãn, nên bài toán (1.13) có nghiệm duy nhất. Giả sử y là nghiệm của bài toán (1.13). Theo định nghĩa 1.2.2 và (1.12) ta có

$$\|y\|_C \leq \beta(\|c_0(x)\| + \|q(x)\|_L) \leq \beta(\gamma_0 + \|\gamma\|_L).$$

và

$$\|y'(t)\| = \|p(x, y)(t) + q(x)(t)\|$$

$$\|p(x, y)(t)\| + \|q(x)(t)\| \leq \alpha(t, \|x\|_c) \|y\|_c + \gamma(t) \leq \alpha(t, \|x\|_c) r + \gamma(t).$$

với

$$r := \beta(\gamma_0 + \|\gamma\|_L),$$

$$\gamma^*(t) = \alpha(t, \|x\|_c) r + \gamma(t).$$

Xét toán tử

$$F : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b]; \mathbb{R}^n);$$

$$x \mapsto F(x) = y,$$

đặt tương ứng mỗi x với nghiệm duy nhất y của (1.13).

Ta chứng minh F là toán tử compact. Thật vậy:

- F là toán tử liên tục

Với $x_1, x_2 \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, đặt $y_1(t) = F(x_1)(t)$, $y_2(t) = F(x_2)(t)$, và

$$y(t) = y_2(t) - y_1(t)$$

Khi đó, ta có

$$y'(t) = p(x_2, y)(t) + q_0(x_1, x_2)(t),$$

$$\ell(x_2, y) = c(x_1, x_2)$$

với

$$q_0(x_1, x_2)(t) = p(x_2, y_1)(t) - p(x_1, y_1)(t) + q(x_2)(t) - q(x_1)(t),$$

$$c(x_1, x_2) = \ell(x_1, y_1) - \ell(x_2, y_1) + c_0(x_2) - c_0(x_1).$$

Theo điều kiện (iii) của định nghĩa 1.2.2, y là nghiệm của bài toán nên thỏa bất đẳng thức

$$\|y\|_C \leq \beta \left[\|c(x_1, x_2)\|_C + \|q(x_1, x_2)\|_L \right].$$

Hay

$$\|F(x_2) - F(x_1)\|_C \leq \beta \left[\|\ell(x_1, y_1) - \ell(x_2, y_1)\|_C + \|c_0(x_2) - c_0(x_1)\|_C + \|p(x_2, y_1) - p(x_1, y_1)\|_L + \|q(x_2) - q(x_1)\|_L \right]. \text{ Do}$$

các toán tử p, q, ℓ và c_0 liên tục nên suy ra F liên tục trên $C([a, b]; \mathbb{R}^n)$.

- F là toán tử compact

Xét

$$C_r = \{x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n) : \|x\|_C \leq r\}.$$

Ta đã có

$$\|y\|_C = \|F(x)\|_C \leq r,$$

và

$$\|F(x)(t) - F(x)(s)\| = \|y(t) - y(s)\| = \left\| \int_s^t y'(\xi) d\xi \right\| \leq \int_s^t \|y'(\xi)\| d\xi \leq \left| \int_s^t \gamma^*(\xi) d\xi \right|$$

với mọi $s, t \in [a, b]$. Theo định lý Ascoli-Arzelà, $F(C_r)$ là tập compact tương đối. Do đó, $F : C_r \rightarrow C_r$ là ánh xạ compact. Áp dụng nguyên lý điểm bất động Schauder cho ánh xạ compact liên tục F , tồn tại x trong C_r sao cho $F(x)(t) = x(t)$ với mọi $t \in [a, b]$. Khi đó, x là nghiệm của bài toán (1.7), (1.8) với $\lambda = \sigma(\|x\|_C)$. Ta chứng minh $\|x\|_C \leq \rho$, tức x thỏa (1.9).

Giả sử ngược lại,

$$\rho < \|x\|_C < 2\rho \tag{1.14}$$

hoặc

$$\|x\|_C \geq 2\rho \tag{1.15}$$

Giả sử có (1.14), thì $\lambda = \sigma(\|x\|_C) \in (0,1)$. Theo điều kiện của định lí thì nghiệm phải thoả (1.9), mâu thuẫn với (1.14).

Giả sử có (1.15), khi đó $\lambda = \sigma(\|x\|_C) = 0$, và x là nghiệm của bài toán thuần nhất

$$\frac{dy(t)}{dt} = p(x, y)(t), \quad \ell(x, y) = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với việc phương trình này chỉ có nghiệm tầm thường. Vậy x phải thoả (1.9). Và do đó, x là nghiệm của (1.1), (1.2). Thật vậy, do (1.9) đúng nên $\lambda = \sigma(\|x\|_C) = 1$ và x là nghiệm của bài toán (1.1), (1.2).

Định lí được chứng minh. $\square$

1.2.4. Định nghĩa

Cho các toán tử

$$p : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \times C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n),$$

$$\ell : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \times C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$$

đồng thời

$$p_0 : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n), \quad \ell_0 : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$$

là các toán tử tuyến tính.

Ta nói cặp (p_0, ℓ_0) thuộc tập $\Omega_{p, \ell}^n$ nếu tồn tại dãy $x_k \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ ($k=1, 2, \dots$) sao cho với

mỗi $y \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ ta có $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t p(x_k, y)(s) ds = \int_0^t p_0(y)(s) ds$ đều trên $[a, b]$, và

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ell(x_k, y) = \ell_0(y).$$

Từ định nghĩa ta thấy với mỗi x cố định, nếu đặt $p_0(y) = p(x, y)$ và $\ell_0(y) = \ell(x, y)$ thì (p_0, ℓ_0) thuộc tập $\Omega_{p, \ell}^n$.

1.2.5. Định nghĩa

Ta nói cặp (p, ℓ) các toán tử liên tục $p: C([a, b]; \mathbb{R}^n) \times C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $\ell: C([a, b]; \mathbb{R}^n) \times C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$ thuộc lớp O_0^n nếu các điều sau đây được thoả:

- (i) Với mỗi $x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ cố định, các toán tử $p(x, \cdot): C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $\ell(x, \cdot): C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$ là tuyến tính;
- (ii) Với bất kì $x, y \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, và hầu khắp nơi trên $[a, b]$ ta có các bất đẳng thức

$$\|p(x, y)(t)\| \leq \alpha(t) \|y\|_C, \quad \|\ell(x, y)\| \leq \alpha_0 \|y\|_C,$$

trong đó $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ khả tích, $\alpha_0 \in \mathbb{R}_+$;

- (iii) Với mọi cặp $(p_0, \ell_0) \in \Omega_{p, \ell}^n$ bài toán

$$\frac{dy(t)}{dt} = p_0(y)(t), \quad \ell_0(y) = 0 \tag{1.16}$$

chỉ có nghiệm tầm thường.

1.2.6. Hệ quả

Giả sử tồn tại số dương ρ và cặp $(p, \ell) \in O_0^n$ sao cho với bất kì $\lambda \in (0, 1)$, mọi nghiệm tùy ý của bài toán (1.7), (1.8) đều thoả bất đẳng thức (1.9). Khi đó bài toán (1.1), (1.2) có nghiệm.

Chứng minh

Từ (i), (ii) của định nghĩa 1.2.5 suy ra (p, ℓ) thoả các điều kiện (i), (ii) của định nghĩa 1.2.2.

Cố định $x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, đặt $p_0(y) = p(x, y)$ và $\ell_0(y) = \ell(x, y)$. Khi đó, theo định nghĩa 1.2.4, $(p_0, \ell_0) \in \Omega_{p, \ell}^n$. Từ điều kiện (iii) của định nghĩa 1.2.5, bài toán (1.16) chỉ có nghiệm tầm thường. Theo định lý 1.2.1, tồn tại số dương β và bài toán

$$\frac{dy(t)}{dt} = p_0(y)(t) + q(t), \quad \ell_0(y) = c_0$$

có nghiệm duy nhất thoả đánh giá

$$\|y\|_C \leq \beta(\|c_0\| + \|q\|_L).$$

Vậy điều kiện (iii) của định nghĩa 1.2.2 được thoả.

Và do đó, (p, ℓ) là cặp hoà hợp. Từ định lý 1.2.3 ta có điều phải chứng minh. $\square$

1.2.7. Định nghĩa

Toán tử $p_0 : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$ được gọi là bị chặn mạnh nếu tồn tại một hàm khả tích $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ sao cho với mọi $y \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ ta có $\|p_0(y)(t)\| \leq \alpha(t)\|y\|_C$ hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

1.2.8. Hệ quả

Giả sử tồn tại số dương ρ , toán tử tuyến tính bị chặn mạnh $p_0 : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$ và toán tử tuyến tính bị chặn $\ell_0 : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$ sao cho bài toán (1.16) chỉ có nghiệm tầm thường. Hơn nữa với mọi $\lambda \in (0, 1)$ bài toán

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= p_0(x)(t) + \lambda[f(x)(t) - p_0(x)(t)], \\ \ell_0(x) &= \lambda[\ell_0(x) - h(x)] \end{aligned}$$

có nghiệm thoả đánh giá (1.9).

Khi đó bài toán (1.1), (1.2) có nghiệm.

Chứng minh

Cố định $x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, đặt $p(x, y)(t) = p_0(y)(t)$ và $\ell(x, y) = \ell_0(y)$. Ta chứng minh $(p, \ell) \in O_0^n$. Thật vậy, do p_0 (tương ứng ℓ_0) tuyến tính và bị chặn mạnh (bị chặn) nên p_0 và ℓ_0 liên tục. Ngoài ra

- (i) Với mỗi $x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ cố định, do $p(x, y)(t) = p_0(y)(t)$ và $\ell(x, y) = \ell_0(y)$ nên các toán tử $p(x, \cdot): C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $\ell(x, \cdot): C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}^n)$ tuyến tính;
- (ii) Do p_0 bị chặn mạnh và ℓ_0 bị chặn nên có $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ khả tích và $\alpha_0 \in \mathbb{R}_+$ sao cho hầu khắp nơi trên $[a, b]$ ta có $\|p(x, y)(t)\| = \|p_0(y)(t)\| \leq \alpha(t)\|y\|_C$, $\|\ell(x, y)\| = \|\ell_0(y)\| \leq \alpha_0\|y\|_C$ với mọi $x, y \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$;
- (iii) Bài toán (1.16) chỉ có nghiệm tầm thường.

Vậy $(p, \ell) \in O_0^n$. Theo hệ quả 1.2.6 ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chương 2: BÀI TOÁN BIÊN KHÔNG CHÍNH QUI CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM BẬC CAO

2.1. Giới thiệu bài toán

Xét phương trình vi phân hàm cấp n

$$x^{(n)}(t) = f(x)(t) \quad (2.1)$$

với điều kiện biên

$$h_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.2)$$

Trong đó $f : C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}^m)$ và $h_i : C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($i = 1, \dots, n$) là các toán tử liên tục, (với $\rho \in (0, +\infty)$), thỏa các điều kiện

$$\sup \left\{ \|f(x)(\cdot)\| : \|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} \leq \rho \right\} \in L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}_+), \quad (2.3)$$

$$\sup \left\{ \|h_i(x)\| : \|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} \leq \rho \right\} < +\infty \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.4)$$

với

$$-\infty < a < b < +\infty,$$

và

$$\alpha \in [0, n-1], \quad \beta \in [0, n-1]. \quad (2.5)$$

Một nghiệm của phương trình vi phân hàm (2.1) được hiểu là một hàm véctor

$x \in \tilde{C}_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$ thỏa (2.1) hầu khắp nơi trên (a, b) .

Một nghiệm của (2.1) thỏa (2.2) được gọi là một nghiệm của bài toán (2.1), (2.2).

2.2. Định lí về tính chất Fredholm của bài toán biên tuyến tính bậc cao

2.2.1. Định nghĩa

Toán tử tuyến tính $p: C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ được gọi là bị chặn mạnh nếu tồn tại $\zeta \in L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}_+)$ sao cho

$$\|p(x)\| \leq \zeta(t) \|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} \text{ với } a < t < b, x \in C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m). \quad (2.6)$$

2.2.2. Bổ đề

Giả sử $\rho > 0$, $\eta \in L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}_+)$, $t_0 \in (a, b)$ và S là tập các hàm vectơ

$x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ khả vi liên tục tới cấp $(n-1)$ thỏa các điều kiện

$$\|x^{(i-1)}(t_0)\| \leq \rho \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.7)$$

$$\|x^{(n-1)}(t) - x^{(n-1)}(s)\| \leq \int_s^t \eta(\xi) d\xi \text{ với } a < s \leq t < b. \quad (2.8)$$

Khi đó, $S \subset \widetilde{C}_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$ và S là tập compact trong không gian $C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$.

Chứng minh

Lấy tùy ý $x \in S$. Khi đó từ (2.8) hàm $x^{(n-1)}$ là liên tục tuyệt đối địa phương trên (a, b)

và

$$\|x^{(n)}(t)\| \leq \eta(t) \text{ hầu khắp nơi trên } (a, b). \quad (2.9)$$

Do đó,

$$x^{(n)} \in L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}^m), \quad (2.10)$$

$$x^{(i-1)}(t) = \sum_{j=i}^n \frac{(t-t_0)^{j-i}}{(j-i)!} x^{(j-1)}(t_0) + \frac{1}{(n-i)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-i} x^{(n)}(s) ds \quad (2.11)$$

với $a < t < b$ ($i = 1, \dots, n$)

và

$$\|x^{(i-1)}(t)\| \leq \varepsilon_i(t) \text{ với } a < t < b \quad (i=1, \dots, n), \quad (2.12)$$

trong đó

$$\varepsilon_i(t) = \rho \sum_{j=i}^n \frac{(b-a)^{j-i}}{(j-i)!} + \frac{1}{(n-i)!} \left| \int_{t_0}^t (t-s)^{n-i} \eta(s) ds \right| \quad (i=1, \dots, n). \quad (2.13)$$

Đặt

$$i_1 = \max \{i : \alpha_i = 0\}, \quad i_2 = \max \{i : \beta_i = 0\}.$$

Khi đó,

$$n-i \geq \alpha, \quad \alpha_i = 0 \text{ với } i \leq i_1, \quad \alpha_i = \alpha + i - n > 0 \text{ với } i > i_1 \quad (2.14_1)$$

$$n-i \geq \beta, \quad \beta_i = 0 \text{ với } i \leq i_1, \quad \beta_i = \beta + i - n > 0 \text{ với } i > i_2. \quad (2.14_2)$$

Do đó,

$$\varepsilon_i(t) \leq \varepsilon_i(a+) < +\infty \text{ với } i \leq i_1, \quad a < t < t_0 \quad (2.15)$$

$$\int_a^{t_0} \varepsilon_{1+i_1}(s) ds < +\infty \text{ nếu } i_1 < n-1 \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_i(t) \leq \varepsilon_i(b-) < +\infty \text{ với } i \leq i_2, \quad t_0 < t < b \quad (2.17)$$

$$\int_{t_0}^b \varepsilon_{1+i_2}(s) ds < +\infty \text{ nếu } i_2 < n-1. \quad (2.18)$$

Nếu $i > i_1$ thì từ (2.13), (2.14₁), với bất kì $\delta \in (0, t_0 - a)$ ta có

$$\limsup_{t \rightarrow a} \left[(t-a)^{\alpha_i} \varepsilon_i(t) \right] = \limsup_{t \rightarrow a} \left[\frac{(t-a)^{\alpha+i-n}}{(n-i)!} \int_t^{a+\delta} (s-t)^{n-i} \eta(s) ds \right]$$

$$\leq \frac{1}{(n-i)!} \int_a^{a+\delta} (s-t)^{\alpha} \eta(s) ds.$$

Do δ tùy ý nên

$$\lim_{t \rightarrow a} \left[(t-a)^{\alpha_i} \varepsilon_i(t) \right] = 0 \text{ với } i > i_1. \quad (2.19)$$

Lập luận tương tự, ta cũng có

$$\lim_{t \rightarrow b} \left[(b-t)^{\beta_i} \varepsilon_i(t) \right] = 0 \text{ với } i > i_2. \quad (2.20)$$

Nếu $i \leq i_1$ (tương ứng $i \leq i_2$) thì do các điều kiện (2.9), (2.14₁) (tương ứng (2.9), (2.14₂)) ta có

$$\int_a^{t_0} (s-a)^{n-i} \|x^{(n)}(s)\| ds < +\infty \left(\int_{t_0}^b (b-s)^{n-i} \|x^{(n)}(s)\| ds < +\infty \right).$$

Do (2.11) ta suy ra tồn tại

$$\lim_{t \rightarrow a} x^{(i-1)}(t) \text{ (tương ứng } \lim_{t \rightarrow b} x^{(i-1)}(t)).$$

Tuy nhiên nếu $i > i_1$ ($i > i_2$), thì từ (2.12) và (2.19) (từ (2.12) và (2.20)) ta có

$$\lim_{t \rightarrow a} (t-a)^{\alpha_i} x^{(i-1)}(t) = 0 \quad \left(\lim_{t \rightarrow b} (b-t)^{\beta_i} x^{(i-1)}(t) \right).$$

Do vậy ta đã chứng minh được giới hạn (2.9) tồn tại. Vì vậy $S \subset \widetilde{C}_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$.

Do định lí Ascoli-Arzelà, từ các bất đẳng thức (2.9), (2.12) và các điều kiện (2.15)-(2.20) ta suy ra S là một tập compact trong không gian $\widetilde{C}_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$. $\square$

Xét bài toán biên

$$x^{(n)}(t) = p(x)(t) + q(t) \quad (2.21)$$

$$\ell_i(x) = c_{oi} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.22)$$

với $p: C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}^m)$ là toán tử tuyến tính bị chặn mạnh, $\ell_i: C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m (i=1,...,m)$ là các toán tử bị chặn $q \in L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}^m), c_{oi} \in \mathbb{R}^m (i=1,...,m)$.

Cùng với bài toán này ta có bài toán thuần nhất tương ứng

$$x^{(n)}(t) = p(x)(t) \quad (2.21_0)$$

$$\ell_i(x) = 0, (i=1,...,n). \quad (2.22_0)$$

2.2.3. Định lí

Điều kiện cần và đủ để bài toán (2.21), (2.22) có nghiệm duy nhất là bài toán thuần nhất tương ứng chỉ có nghiệm tầm thường. Hơn nữa, nếu bài toán (2.21₀), (2.22₀) chỉ có nghiệm tầm thường, thì tồn tại số dương γ sao cho với bất kì $q \in L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}^m)$, $c_{oi} \in \mathbb{R}^m (i=1,...,m)$, nghiệm của bài toán (2.21), (2.22) thỏa đánh giá

$$\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \leq \gamma \left(\sum_{i=1}^n \|c_{oi}\| + \|q\|_{L_{\alpha,\beta}} \right). \quad (2.23)$$

Chứng minh

Đặt $B = C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^{mn}$ là không gian Banach các phần tử $u = (x; c_1, ..., c_n)$ trong đó

$$x \in C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m), c_i \in \mathbb{R}^m (i=1,...,n) \text{ và với chuẩn } \|u\|_B = \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} + \sum_{i=1}^n \|c_i\|.$$

Cố định $t_0 \in (a,b)$ và với tùy ý $u = (x; c_1, ..., c_n)$, đặt

$$\tilde{p}(u)(t) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{(t-t_0)^{i-1}}{(i-1)!} (c_i + x^{(i-1)}(t_0)) + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-1} p(x)(s) ds; c_1 - \ell_1(x), ..., c_n - \ell_n(x) \right),$$

$$\tilde{q}(t) = \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-1} q(s) ds; c_{01}, ..., c_{0n} \right).$$

Bài toán (2.21), (2.22) tương đương với phương trình toán tử trong B

$$u = \tilde{p}(u) + \tilde{q} \quad (2.24)$$

trong không gian Banach B bởi vì $u = (x; c_1, \dots, c_n)$ là một nghiệm của phương trình (2.24) nếu và chỉ nếu $c_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) và x là một nghiệm của bài toán

(2.21), (2.22). Còn phương trình thuần nhất

$$u = \tilde{p}(u) \quad (2.24_0)$$

thì tương đương với bài toán thuần nhất (2.21₀), (2.22₀).

Từ điều kiện (2.6) và bổ đề 2.2.2 ta thấy ngay toán tử tuyến tính $\tilde{p}: B \rightarrow B$ là compact. Từ đây kết hợp với luận phiên Fredholm cho phương trình các toán tử, dẫn đến phương trình (2.24) là có nghiệm duy nhất nếu và chỉ nếu phương trình (2.24₀) chỉ có nghiệm tầm thường. Hơn nữa, nếu phương trình (2.24₀) chỉ có nghiệm tầm thường thì toán tử $I - \tilde{p}$ là khả nghịch và $(I - \tilde{p})^{-1}: B \rightarrow B$ là toán tử tuyến tính bị chặn trong đó $I: B \rightarrow B$ là toán tử đồng nhất. Do đó tồn tại $\gamma_0 > 0$ sao cho $\tilde{q} \in B$, nghiệm của phương trình (2.24) thỏa bất đẳng thức

$$\|u\|_B \leq \gamma_0 \|\tilde{q}\|_B.$$

Tuy nhiên,

$$\|\tilde{q}\|_B \leq \sum_{i=1}^n \|c_{oi}\| + \gamma_1 \|q\|_{L_{\alpha, \beta}},$$

với $\gamma_1 > 1$ là hằng số phụ thuộc vào α, β, a, b, t_0 và n .

Do đó,

$$\|u\|_B \leq \gamma \left(\sum_{i=1}^n \|c_{oi}\| + \|q\|_{L_{\alpha, \beta}} \right), \quad (2.25)$$

với $\gamma = \gamma_0 \gamma_1$.

Bởi vì bài toán (2.21), (2.22) tương đương với phương trình (2.24) cho nên dễ thấy

(2.21), (2.22) có nghiệm duy nhất nếu và chỉ nếu bài toán (2.21₀), (2.22₀) chỉ có nghiệm tầm thường. Hơn nữa, nếu (2.21₀), (2.22₀) chỉ có nghiệm tầm thường, thì từ (2.25) suy ra nghiệm x của bài toán (2.21), (2.22) thỏa (2.23). $\square$

Xét phương trình vi phân véc tơ đối số lệch

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) x^{(i-1)}(\tau_i(t)) + q(t) \quad (2.26)$$

với $\tau_i : [a, b] \rightarrow [a, b] (i=1, \dots, n)$ là các hàm đo được, $P_i : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m} (i=1, \dots, n)$ là các ma trận hàm có các thành phần là các hàm đo được và $q \in L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}^m)$. Phương trình là một trường hợp đặc biệt của (2.21). Cùng với (2.26), ta có phương trình thuần nhất tương ứng

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) x^{(i-1)}(\tau_i(t)). \quad (2.26_0)$$

Từ định lí 2.2.3 ta có hệ quả sau.

2.2.4. Hệ quả

Giả sử hầu khắp nơi trên (a, b) ta có các bất đẳng thức

$$\begin{cases} \tau_i(t) > a, \text{ khi } i > n - \alpha \\ \tau_j(t) < b, \text{ khi } j > n - \beta \end{cases} \quad (2.27)$$

Hơn nữa, giả sử

$$\int_a^b (t-a)^\alpha (b-t)^\beta (\tau_i(t)-a)^{-\alpha_i} (b-\tau_i(t))^{-\beta_i} \|P_i(t)\| dt < +\infty \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.28)$$

Khi đó, để bài toán (2.26), (2.2) có nghiệm duy nhất, điều kiện cần và đủ là bài toán thuần nhất tương ứng (2.26₀), (2.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường. Hơn nữa, nếu bài toán (2.26₀), (2.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường, thì tồn tại số dương γ sao cho với bất kì $q \in L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}^m)$, $c_{oi} \in \mathbb{R}^m (i=1, \dots, m)$, nghiệm của bài toán (2.26), (2.2) thỏa mãn đánh giá (2.9).

Chứng minh

Ta đặt

$$p(x)(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) x^{(i-1)}(\tau_i(t)) \text{ với bất kì } x \in C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m).$$

Khi đó, phương trình (2.26), (2.26₀) có dạng tương tự như (2.21), (2.21₀).

Mặt khác, từ các giả thiết

Nếu $i \leq n - \alpha$, thì ta có $\alpha_i = \beta_i = 0 \Rightarrow (\tau_i(t) - a)^{-\alpha_i} = (b - \tau_i(t))^{-\beta_i} = 1$. Do (2.28) nên

$$\int_a^b (t-a)^\alpha (b-t)^\beta \|P_i(t)\| dt < +\infty. \text{ Suy ra } P_i \in L_{\alpha,\beta}((a,b); \mathbb{R}^{m \times m}).$$

Nếu $i > n - \alpha$, thì từ (2.27) ta có $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $\tau_i(t) > a$, $b > \tau_i(t)$ nên theo (2.28) suy ra $P_i \in L_{\alpha,\beta}((a,b); \mathbb{R}^{m \times m})$.

Từ đó $p(x) \in L_{\alpha,\beta}((a,b); \mathbb{R}^m)$.

Dễ thấy p tuyến tính và

$$\|p(x)(t)\| = \left\| \sum_{i=1}^n P_i(t) x^{(i-1)}(\tau_i(t)) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|P_i(t) x^{(i-1)}(\tau_i(t))\| \leq \sum_{i=1}^n \|P_i(t)\| \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}}$$

Suy ra

$$\|p(x)\| \leq \sum_{i=1}^n \|P_i(t)\| \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} = \varsigma(t) \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}}$$

với $\varsigma(t) = \sum_{i=1}^n \|P_i(t)\| \in L_{\alpha,\beta}((a,b); \mathbb{R}_+)$ nên p bị chặn mạnh.

Vậy $p: C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha,\beta}((a,b); \mathbb{R}^m)$ là toán tử tuyến tính bị chặn mạnh và do đó, những điều kiện của định lí 2.2.3 đều được thỏa. $\square$

2.3. Về sự tồn tại nghiệm của bài toán (2.1), (2.2)

2.3.1. Định nghĩa

Cho γ là một số dương. Cặp $\left(p, (\ell_i)_{i=1}^n\right)$ các toán tử liên tục

$$p: C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \times C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}^m)$$

và

$$(\ell_i)_{i=1}^n: C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \times C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$$

được gọi là γ -hòa hợp nếu:

(i) Các toán tử $p(x, \cdot): C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}^m)$ và $\ell_i(x, \cdot): C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ là tuyến tính với bất kì $x \in C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$ cố định và $i \in \{1, \dots, n\}$;

(ii) Với bất kì $x, y \in C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$ và với hầu hết mọi $t \in (a, b)$ ta có các bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \|p(x, y)\| &\leq \delta(t, \|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}}) \|y\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}}, \\ \sum_{i=1}^n \|\ell_i(x, y)\| &\leq \delta_0(\|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}}) \|y\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}}, \end{aligned}$$

với $\delta_0: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ là hàm không giảm, $\delta(\cdot, \rho) \in L_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}_+)$ với mọi $\rho \in \mathbb{R}_+$, và $\delta(t, \cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ là hàm không giảm với mọi $t \in (a, b)$;

(iii) Với bất kì $x \in C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$, $q \in L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}^m)$, và $c_i \in \mathbb{R}^m$ ($i=1, \dots, n$), một nghiệm tùy ý của bài toán biên

$$y^{(n)}(t) = p(x, y)(t) + q(t), \quad \ell_i(x, y) = c_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.29)$$

thỏa mãn bất đẳng thức

$$\|y\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} \leq \gamma \left(\sum_{i=1}^n \|c_i\| + \|q\|_{L_{\alpha, \beta}} \right). \quad (2.30)$$

2.3.2. Định nghĩa

Cặp $\left(p, (\ell_i)_{i=1}^n\right)$ các toán tử liên tục

$$p : C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \times C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}^m)$$

và

$$(\ell_i)_{i=1}^n : C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \times C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$$

được gọi là hòa hợp nếu tồn tại $\gamma > 0$ sao cho $\left(p, (\ell_i)_{i=1}^n\right)$ là γ -hòa hợp.

Giả sử $\left(p, (\ell_i)_{i=1}^n\right)$ là cặp γ -hòa hợp các toán tử liên tục

$$p : C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \times C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}^m),$$

$$(\ell_i)_{i=1}^n : C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \times C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$$

$$\text{và } q : C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}^m), \quad c_{0i} : C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (i = 1, \dots, n)$$

là các toán tử liên tục.

Với tùy $x \in C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$, xét bài toán biên tuyến tính

$$y^{(n)}(t) = p(x, y)(t) + q(x)(t), \quad \ell_i(x, y) = c_{0i}(x) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.31)$$

Do (p, ℓ_i) hoà hợp nên từ điều kiện (iii) của định nghĩa 2.3.1, bài toán thuần nhất tương ứng

$$y^{(n)}(t) = p(x, y)(t), \quad \ell_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.31_0)$$

chỉ có nghiệm tầm thường. Theo định lí 2.2.3, bài toán (2.31) chỉ có duy nhất một nghiệm y . Ta đặt $F(x)(t) = y(t)$.

2.3.3. Bổ đề

Toán tử $F : C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$ liên tục.

Chứng minh

Giả sử

$$x_i \in C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m), \quad y_i(t) = F(x_i)(t) \quad (i=1,2)$$

và

$$y(t) = y_2(t) - y_1(t).$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= p_2(x_2, y)(t) + q_0(x_1, x_2)(t), \\ \ell_i(x_2, y) &= c_i(x_1, x_2) \quad (i=1, \dots, n), \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned} q_0(x_1, x_2)(t) &= p(x_1, y_1)(t) - p(x_2, y_1)(t) + q(x_2)(t) - q(x_1)(t), \\ c_i(x_1, x_2) &= \ell_i(x_1, x_2) - \ell_i(x_2, y_1) + c_{0i}(x_2) - c_{0i}(x_1) \quad (i=1, \dots, n). \end{aligned}$$

Do đó, từ điều kiện (iii) của định nghĩa 2.3.1 suy ra

$$\|F(x_2) - F(x_1)\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \leq \gamma \left(\sum_{i=1}^n \|c_i(x_1, x_2)\| + \|q_0(x_1, x_2)\|_{L_{\alpha,\beta}} \right).$$

Do các toán tử p , q , ℓ_i và c_{0i} ($i=1, \dots, n$) liên tục, nên bất đẳng thức cuối suy ra tính liên tục của toán tử u . $\square$

2.3.4. Định lí

Giả sử tồn tại số dương ρ_0 và cặp hòa hợp $(p, (\ell_i)_{i=1}^n)$ các toán tử liên tục

$$p: C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \times C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}^m)$$

và

$$(\ell_i)_{i=1}^n: C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \times C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$$

sao cho với tùy ý $\lambda \in (0,1)$, một nghiệm bất kì của bài toán

$$x^{(n)}(t) = (1 - \lambda) p(x, x)(t) + \lambda f(x)(t) \quad (2.32)$$

$$(\lambda - 1) \ell_i(x, x) = \lambda h_i(x) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.33)$$

thỏa mãn bất đẳng thức

$$\|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} \leq \rho_0. \quad (2.34)$$

Khi đó, bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm.

Chứng minh

Xét δ, δ_0 và γ là các hàm và số như trong các định nghĩa 2.3.1 và 2.3.2. Ta đặt

$$\begin{aligned} \eta(t) &= 2\rho_0 \delta(t, 2\rho_0) + \sup \left\{ \|f(x)(t)\| : \|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} \leq 2\rho_0 \right\}, \\ \eta_0(t) &= 2\rho_0 \delta_0(2\rho_0) + \sum_{i=1}^n \sup \left\{ \|h_i(x)\| : \|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} \leq 2\rho_0 \right\}, \\ \rho_1 &= \gamma(\eta_0 + \|\eta\|_{L_{\alpha, \beta}}), \quad \eta^*(t) = \delta(t, \rho_1) \rho_1 + \eta(t), \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$B_0 = \left\{ x \in C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) : \|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} \leq \rho_1 \right\}, \quad (2.36)$$

$$\chi(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq \rho \\ 2 - s / \rho_0, & \rho_0 \leq s \leq 2\rho_0 \\ 0, & s \geq 2\rho_0 \end{cases} \quad (2.37)$$

$$q(x)(t) = \chi(\|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}}) [f(x, t) - p(x, x)(t)], \quad (2.38)$$

$$c_{0i}(x) = \chi(\|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}}) [\ell_i(x, x) - h_i(x)] \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.39)$$

Từ (2.3) và (2.4) thì

$$\eta_0 < +\infty, \quad \eta \in L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}_+), \quad \eta^* \in L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}_+)$$

với bất kì $x \in C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$ và với hầu hết $t \in (a, b)$, ta có các bất đẳng thức

$$\|q(x)(t)\| \leq \eta(t), \quad \sum_{i=1}^n \|c_{oi}(x)\| \leq \eta_0. \quad (2.40)$$

Gọi $F : C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m)$ là toán tử đặt tương ứng mỗi $x \in C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m)$ với nghiệm y của bài toán (2.29).

Theo bổ đề 2.3.3, F là toán tử liên tục.

Do điều kiện (iii) trong định nghĩa 2.3.1 và do cách đặt ở (2.35) ta có

$$\|y\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \leq \gamma \left(\sum_{i=1}^n \|c_{oi}\| + \|q\|_{L_{\alpha,\beta}} \right) \leq \gamma \left(\eta_0 + \|\eta\|_{L_{\alpha,\beta}} \right) = \rho_1.$$

Ta có

$$\begin{aligned} y^{(n-1)}(t) - y^{(n-1)}(s) &= \int_s^t y^{(n)}(\xi) d\xi \\ &= \int_s^t [p(x, y)(\xi) + q(x)(\xi)] d\xi \end{aligned}$$

Do điều kiện (ii) của định nghĩa 2.3.1

$$\|p(x, y)(\xi)\| \leq \delta \left(\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}}, \xi \right) \|y\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}}$$

Hơn nữa, do định nghĩa (2.37) ta lại có

$$\begin{aligned} &\left\| \chi \left(\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \right) [f(x)(\xi) - p(x, x)(\xi)] \right\| \\ &\leq \sup \left\{ \|f(x)(\xi)\| : \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \leq 2\rho_0 \right\} + \delta \left(\xi, \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \right) \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \\ &\leq \sup \left\{ \|f(x)(\xi)\| : \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \leq 2\rho_0 \right\} + \delta \left(\xi, \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \right) 2\rho_0. \end{aligned}$$

Mặt khác, hàm δ không giảm nên khi

$$\|y\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \leq \rho_1, \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \leq 2\rho_0$$

ta có

$$\|q(x)(t)\| \leq \eta(t)$$

và

$$\|p(x, y)(\xi)\| \leq \delta\left(\|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}}, \xi\right)\|y\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} \leq \delta(2\rho_0, \xi)\rho_1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|y^{(n-1)}(t) - y^{(n-1)}(s)\| &\leq \left[\int_s^t \|p(x, y)(\xi)\| + \|q(x)(\xi)\| d\xi \right] \\ &\leq \int_s^t [\delta(\xi, \rho_1)\rho_1 + \eta(\xi)] d\xi = \int_s^t \eta^*(\xi) d\xi \end{aligned}$$

với $a < s \leq t < b$.

Vậy

$$\|y\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} \leq \rho_1,$$

$$\|y^{(n-1)}(t) - y^{(n-1)}(s)\| \leq \int_s^t \eta^*(\xi) d\xi$$

với $a < s \leq t < b$.

Do đó, theo bổ đề 2.2.2, toán tử F ánh xạ quả cầu B_0 vào tập con compact của chính B_0 .

Theo nguyên lý điểm bất động Schauder, tồn tại $x \in B_0$ sao cho

$$x(t) = F(x)(t) \text{ với } t \in (a, b).$$

Với kí hiệu như trong (2.38), (2.39), thì x là nghiệm của bài toán (2.32), (2.33) trong đó

$$\lambda = \chi\left(\|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}}\right). \quad (2.41)$$

Tiếp theo ta chứng minh x thỏa (2.34). Giả sử ngược lại. Khi đó, hoặc là

$$\rho_0 < \|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} < 2\rho_0 \quad (2.42)$$

hoặc là

$$\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \geq 2\rho_0. \quad (2.43)$$

Nếu (2.42) đúng, thì từ (2.37) và (2.41), $\lambda \in (0,1)$, từ giả thiết của định lí ta suy ra (2.34) đúng. Mâu thuẫn với (2.42).

Nếu (2.43) đúng, thì từ (2.37) và (2.41), $\lambda = 0$ và do đó x là nghiệm của bài toán (2.15₀). Khi đó, $x(t) \equiv 0$ bởi vì (2.15₀) chỉ có nghiệm tầm thường. Nhưng điều này mâu thuẫn với đẳng thức (2.43). Vậy phải có (2.34).

Do (2.34) đúng nên $\lambda = \chi\left(\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}}\right)$, và khi đó x là nghiệm của bài toán (2.1), (2.2). $\square$

Để ý khi $n=1$, $\alpha = \beta = 0$, thì định lí suy ra định lí 1.2.3.

2.3.5. Hệ quả

Giả sử tồn tại số dương γ , cặp γ -hòa hợp $\left(p, (\ell_i)_{i=1}^n\right)$ các toán tử liên tục

$$p: C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m) \times C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha,\beta}((a,b); \mathbb{R}^m),$$

$$(\ell_i)_{i=1}^n: C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m) \times C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^{mn}, \quad \text{hàm } \eta: (a,b) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{và hàm}$$

$\eta_0: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ thỏa hầu khắp nơi trên (a,b) các bất đẳng thức

$$\|f(x)(t) - p(x, x)(t)\| \leq \eta(t, \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}}), \quad (2.44)$$

$$\sum_{i=1}^n \|h_i(x) - \ell_i(x, x)\| \leq \eta_0\left(\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}}\right) \quad (2.45)$$

với mọi $x \in C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m)$.

Hơn nữa,

$$\eta(\cdot, \rho) \in L_{\alpha,\beta}((a,b); \mathbb{R}_+) \quad \text{với } \rho \in \mathbb{R}_+$$

và

$$\limsup_{\rho \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta_0(\rho)}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int_a^b (s-a)^\alpha (b-s)^\beta \eta(s, \rho) ds \right) < \frac{1}{\gamma}. \quad (2.46)$$

Khi đó, bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm.

Chứng minh

Ta chứng minh mọi x nghiệm bài toán (2.32), (2.33) đều thỏa đánh giá (2.34).

Thật vậy, từ (2.46) suy ra tồn tại $\rho_0 > 0$ sao cho

$$\gamma \left(\eta_0(\rho) + \int_a^b (s-a)^\alpha (b-s)^\beta \eta(s, \rho) ds \right) < \rho \text{ với } \rho > \rho_0. \quad (2.47)$$

Gọi x là nghiệm của bài toán (2.32), (2.33) với $\lambda \in (0,1)$ tùy ý cố định. Khi đó, $y = x$ cũng là nghiệm của bài toán (2.29) với

$$\begin{aligned} q(t) &= \lambda (f(x)(t) - p(x, x)(t)), \\ c_i(x) &= \lambda (\ell_i(x, x) - h_i(x)) \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Giả sử $\rho = \|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}}$, do $(p, (\ell_i)_{i=1}^n)$ là cặp γ -hòa hợp, từ các bất đẳng thức (2.30), (2.44), (2.45) ta có

$$\rho \leq \gamma \left(\sum_{i=1}^n \|c_i(x)\| + \|q\|_{L_{\alpha, \beta}} \right) \leq \gamma \left(\eta_0(\rho) + \int_a^b (s-a)^\alpha (b-s)^\beta \eta(s, \rho) ds \right).$$

Do đó từ (2.47) suy ra $\rho \leq \rho_0$. Từ đó có (2.34), nên bài toán (2.1), (2.2) là có nghiệm theo định lí 2.3.4. $\square$

2.3.6. Định nghĩa

Toán tử $p : C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}^m)$ (toán tử $\ell : C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$) được gọi là thuần dương nếu với mọi $x \in C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ và hầu khắp nơi trên (a, b) ta có

$$p(\lambda x)(t) = \lambda p(x)(t) \quad (\ell(\lambda x) = \lambda \ell(x)).$$

2.3.7. Định nghĩa

Toán tử thuần dương $p : C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}^m)$ (tương ứng toán tử thuần

đương $\ell : C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$) được gọi là bị chặn mạnh (tương ứng bị chặn) nếu tồn tại một hàm $\zeta \in L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}_+^m)$ (tương ứng số dương ζ_0) sao cho với mọi $x \in C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m)$ và với hầu khắp nơi trên (a,b) ta có

$$\|p(x)(t)\| \leq \zeta(t)\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \quad (\text{tương ứng } \|\ell(x)\| \leq \zeta_0\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}}).$$

2.3.8. Định lí

Giả sử tồn tại toán tử tuyến tính bị chặn mạnh $p : C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}^m)$, toán tử thuần dương, liên tục, bị chặn mạnh $\bar{p} : C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}^m)$, các toán tử tuyến tính, bị chặn $\ell_i : C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($i=1, \dots, n$), các toán tử bị chặn, liên tục, thuần dương $\bar{\ell}_i : C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($i=1, \dots, n$), và các hàm $\eta : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}_+, \eta_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sao cho với bất kì $x \in C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m)$ và hầu khắp nơi trên (a,b) thoả các bất đẳng thức

$$\|f(x)(t) - p(x)(t) - \bar{p}(x)(t)\| \leq \eta(t)\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}}, \quad (2.48)$$

$$\sum_{i=1}^n \|h_i(x) - \ell_i(x) - \bar{\ell}_i(x)\| \leq \eta_0(\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}}) \quad (2.49)$$

Hơn nữa, giả sử $\eta(\cdot, \rho) \in L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}_+)$ với mỗi $\rho \in \mathbb{R}_+$, và

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta_0(\rho)}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int_a^b (s-a)^\alpha (b-s)^\beta \eta(s, \rho) ds \right) = 0 \quad (2.50)$$

đồng thời với bất kì $\lambda \in [0, 1]$ bài toán

$$x^{(n)}(t) = p(x)(t) + \lambda \bar{p}(x)(t), \quad \ell_i(x) + \lambda \bar{\ell}_i(x) = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.51)$$

chỉ có nghiệm tầm thường.

Khi đó, bài toán (2.1), (2.2) có nghiệm.

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh cặp $\left(p, (\ell_i)_{i=1}^n\right)$ hoà hợp.

Thật vậy, các toán tử p, ℓ_i tuyến tính và do các toán tử $p, \bar{p}$ bị chặn mạnh ; các toán tử $(\ell_i)_{i=1}^n, (\bar{\ell}_i)_{i=1}^n$ bị chặn nên tồn tại $\zeta \in L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}_+)$, $\zeta_0 \in \mathbb{R}_+$ sao cho hầu khắp nơi trên (a, b) ta có

$$\begin{aligned} \|p(x)(t)\| + \|\bar{p}(x)(t)\| &\leq \zeta(t) \|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}}, \\ \sum_{i=1}^n (\|\ell_i(x)\| + \|\bar{\ell}_i(x)\|) &\leq \zeta_0 \|x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

với mọi $x \in C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$.

Ngoài ra, mọi do bài toán (2.51) chỉ có nghiệm tầm thường nên với $\lambda = 0$ thì bài toán $x^{(n)}(t) = p(x)(t), \ell_i(x) = 0 \quad (i=1, \dots, n)$ chỉ có nghiệm tầm thường. Theo định lí 2.2.3 bài toán (2.29) có nghiệm duy nhất thoả mãn (2.30). Vậy cặp $\left(p, (\ell_i)_{i=1}^n\right)$ hoà hợp theo định nghĩa 2.3.2.

Với $\lambda \in [0, 1]$, $q \in L_{\alpha, \beta}((a, b); \mathbb{R}^m)$ và $c_{0i} \in \mathbb{R}^m \quad (i=1, \dots, n)$, xét bài toán biên

$$x^{(n)}(t) = p(x)(t) + \lambda \bar{p}(x)(t) + q(t), \quad (2.53)$$

$$\ell_i(x) + \lambda \bar{\ell}_i(x) = c_{0i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (2.54)$$

Ta sẽ chỉ ra mọi x là nghiệm của bài toán này thỏa bất đẳng thức

$$\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \leq \gamma \left(\sum_{i=1}^n \|c_{0i}\| + \|q\|_{L_{\alpha,\beta}} \right), \quad (2.55)$$

trong đó γ là hằng số dương không phụ thuộc vào λ , q , c_{0i} , ($i=1,...,n$) và x .

Giả sử ngược lại (2.55) không đúng. Khi đó, với mỗi số tự nhiên k , tồn tại $\lambda_k \in [0,1]$, $q_k \in L_{\alpha,\beta}((a,b);\mathbb{R}^m)$, $c_{ki} \in \mathbb{R}^m$, ($i=1,...,n$) sao cho bài toán

$$x^{(n)}(t) = p(x)(t) + \lambda_k \bar{p}(x)(t) + q_k(t),$$

$$\ell_i(x) + \lambda_k \bar{\ell}_i(x) = c_{ki} \quad (i=1,...,n)$$

có nghiệm x_k thỏa bất đẳng thức

$$\rho_k \stackrel{def}{=} \|x_k\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} > k \left(\sum_{i=1}^n \|c_{ki}\| + \|q_k\|_{L_{\alpha,\beta}} \right).$$

Đặt

$$\bar{x}_k(t) = \rho_k^{-1} x_k(t),$$

$$\bar{q}_k(t) = \rho_k^{-1} q_k(t),$$

$$\bar{c}_{ki} = \rho_k^{-1} c_{ki} \quad (i=1,...,n),$$

thì

$$\|\bar{x}_k\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} = 1, \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \|\bar{q}_k\|_{L_{\alpha,\beta}} &= \frac{1}{\rho_k} \|q_k\|_{L_{\alpha,\beta}} < \frac{\|q_k\|_{L_{\alpha,\beta}}}{k \left(\sum_{i=1}^n \|c_{ki}\| + \|q_k\|_{L_{\alpha,\beta}} \right)} \leq \frac{1}{k}; \\ \sum_{i=1}^n \|\bar{c}_{ki}\| &= \frac{1}{\rho_k} \sum_{i=1}^n \|c_{ki}\| < \frac{\sum_{i=1}^n \|c_{ki}\|}{k \left(\sum_{i=1}^n \|c_{ki}\| + \|q_k\|_{L_{\alpha,\beta}} \right)} \leq \frac{1}{k}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\bar{x}_k^{(n)}(t) = p(\bar{x}_k)(t) + \lambda_k \bar{p}(\bar{x}_k)(t) + \bar{q}_k(t), \quad (2.58)$$

$$\ell_i(\bar{x}_k) + \lambda_k \bar{\ell}_i(\bar{x}_k) = \bar{c}_{ki} \quad (i=1, \dots, n). \quad (2.59)$$

Đặt $t_0 = \frac{a+b}{2}$. Khi đó, từ (2.58) khai triển Taylor với phần dư dạng tích phân hàm $\bar{x}_k$ tại t_0

cho ta

$$\bar{x}_k(t) = y_k(t) + z_k(t), \quad (2.60)$$

với

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^n \frac{(t-t_0)^{i-1}}{(i-1)!} \bar{x}_k^{(i-1)}(t_0) + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-1} (p(\bar{x}_k)(s) + \lambda_k \bar{p}(\bar{x}_k)(s)) ds, \quad (2.61)$$

$$z_k(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-1} \bar{q}_k(s) ds.$$

Từ (2.57) ta có

$$\|\bar{q}_k\|_{L_{\alpha,\beta}} = \int_a^b (t-a)^\alpha (b-t)^\beta \|\bar{q}_k(t)\| dt < \frac{1}{k} \Rightarrow \int_a^b \|\bar{q}_k(t)\| dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Mặt khác,

$$z_k^{(i-1)}(t) = \frac{1}{(n-i)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-i} \bar{q}_k(s) ds \Rightarrow \|z_k^{(i-1)}(t)\| \leq M \int_{t_0}^t \|\bar{q}_k(s)\| ds$$

trong đó M là số dương đủ lớn.

Suy ra

$$\|z_k\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n (t-a)^{\alpha_i} (b-t)^{\beta_i} \|z_k^{(i-1)}(t)\| : a < t < b \right\} \rightarrow 0$$

Ngoài ra dễ thấy

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{c}_{ki} = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (2.62)$$

Từ (2.61) ta có

$$y_k^{(i-1)}(t) = \sum_{j=i}^n \frac{(t-t_0)^{j-i}}{(j-i)!} \bar{x}_k^{(j-1)}(t_0) + \frac{1}{(n-i)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-i} [p(\bar{x}_k)(s) + \lambda_k \bar{p}(\bar{x}_k)(s)] ds$$

và

$$y_k^{(n-1)}(t) = \bar{x}_k^{(n-1)}(t_0) + \int_{t_0}^t [p(\bar{x}_k)(s) + \lambda_k \bar{p}(\bar{x}_k)(s)] ds$$

Từ các đánh giá (2.52) và (2.56), suy ra

$$\|y_k^{(i-1)}(t_0)\| \leq \rho^* \quad (i=1, \dots, n),$$

$$\|y_k^{(n-1)}(t) - y_k^{(n-1)}(s)\| \leq \int_s^t \|p(\bar{x}_k)(\xi) + \lambda_k \bar{p}(\bar{x}_k)(\xi)\| d\xi \leq \int_s^t \zeta(\xi) d\xi$$

với $a < s < t < b$, và ρ^* là hằng số dương không phụ thuộc vào k . Áp dụng bổ đề 2.2.2,

không mất tính tổng quát ta có thể giả sử dãy $(y_k)_{k=1}^{+\infty}$ hội tụ theo chuẩn trong không

gian Banach $C_{\alpha, \beta}^{n-1}((a, b); \mathbb{R}^m)$, cũng như có thể giả sử dãy $(\lambda_k)_{k=1}^{+\infty}$ hội tụ.

Đặt

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k, \quad x(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k(t).$$

Khi đó, từ (2.59) - (2.62) ta có

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\bar{x}_k - x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \|y_k + z_k - x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \|y_k - x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} + \lim_{k \rightarrow +\infty} \|z_k\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|y_k - x\|_{C_{\alpha, \beta}^{n-1}} = 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

và

$$\ell_i(x) = \lambda \bar{\ell}_i(x) \quad (i=1, \dots, n),$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{(t-t_0)^{i-1}}{(i-1)!} x^{(i-1)}(t_0) + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-1} (p(x)(s) + \lambda \bar{p}(x)(s)) ds.$$

Do đó x là nghiệm của bài toán (2.51). Mặt khác, do $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\bar{x}_k - x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} = 0$ và $\|\bar{x}_k\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} = 1$ suy ra $\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} = 1$.

Nhưng điều này mâu thuẫn với giả thiết bài toán (2.51) chỉ có nghiệm tầm thường. Mâu thuẫn này khẳng định sự tồn tại của γ thỏa (2.55).

Từ định lí 2.3.4, để chứng minh định lí 2.3.8 thì điều kiện đủ là phải chỉ ra rằng với mỗi $\lambda \in (0,1)$, mọi nghiệm của bài toán

$$x^{(n)}(t) = p(x)(t) + \lambda(f(x)(t) - p(x)(t)), \quad (2.64)$$

$$\ell_i(x) = \lambda(\ell_i(x) - h_i(x)), \quad i = (1, \dots, n). \quad (2.65)$$

đều thỏa bất đẳng thức (2.34).

Ta có mỗi x nghiệm bài toán (2.64), (2.65) cũng là nghiệm của bài toán (2.53), (2.54), trong đó

$$\begin{aligned} q(t) &= \lambda(f(x)(t) - p(x)(t) - \bar{p}(x)(t)), \\ c_{0i} &= \lambda(\ell_i(x) + \bar{\ell}_i(x) - h_i(x)), \quad i = (1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Theo chứng minh trên, x thỏa (2.55), kết hợp với các điều kiện (2.48), (2.49)

và (2.66) ta suy ra

$$\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \leq \gamma \left(\eta_0 \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} + \int_a^b (s-a)^\alpha (b-s)^\beta \eta(s, \|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}}) ds \right).$$

Mặt khác từ điều kiện (2.50) suy ra tồn tại $\rho_0 > 0$ sao cho bất đẳng thức (2.47) đúng.

Từ đó ta có được đánh giá (2.34). $\square$

2.4. Ứng dụng vào hệ phương trình vi phân hàm đối số lệch

Trong không gian $C_{\alpha,0}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m)$ xét bài toán biên

$$x^{(n)}(t) = g\left(t, x(\tau_1(t)), \dots, x^{(n-1)}(\tau_n(t))\right) \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} x^{(i-1)}(t) &= c_i(x) \quad (i = 1, \dots, k) \\ \lim_{t \rightarrow b} x^{(i-1)}(t) &= c_i(x) \quad (i = k+1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Trong đó $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\alpha \in [0, n-k]$, $\tau_i : [a, b] \rightarrow [a, b]$ ($i = 1, \dots, n$) là các hàm đo được, $c_i : \tilde{C}_{\alpha,0}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ là các toán tử liên tục, và $g : (a,b) \times \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}^m$ là hàm véc tơ sao cho $g(\cdot, x_1, \dots, x_n) : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ là đo được với bất kì $x_i \in \mathbb{R}^m$ ($i = 1, \dots, n$) và $g(t, \cdot, \dots, \cdot) : \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}^m$ là liên tục với mọi $t \in (a,b)$. Hơn nữa, giả sử với $i > n - \alpha$ ta có $\tau_i(t) > a$ hầu khắp nơi trên (a,b) .

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau.

2.4.1. Bổ đề

Giả sử $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\alpha \in [0, n-k]$, và $x \in C_{\alpha,\beta}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m)$ là hàm véc tơ thỏa các điều kiện (2.68). Khi đó, trên (a,b) ta có các bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} |x^{(i-1)}(t)| &\leq \sum_{j=i}^n (b-a)^{j-i} |c_j(x)| \\ &+ \frac{1}{(n-i)!} (b-a)^{n-i-\alpha+\alpha_i} (t-a)^{-\alpha_i} y(x) \quad (i = k+1, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} |x^{(i-1)}(t)| &\leq \sum_{j=i}^n (b-a)^{j-i} |c_j(x)| \\ &+ \frac{(b-a)^{n-k-1-\alpha+\alpha_{k+1}}}{(n-k-1)!(k+1-i-\alpha_{k+1})!} (t-a)^{k+1-i-\alpha_{k+1}} y(x) \quad (i = 1, \dots, k) \end{aligned} \quad (2.70)$$

với

$$y(x) = \int_a^b (s-a)^\alpha |x^{(n)}(s)| ds. \quad (2.71)$$

Chứng minh

Lấy $x_0(t)$ là một đa thức bậc không lớn hơn $n-1$ thỏa

$$x_0^{(i-1)}(a) = c_i(x) \quad (i = 1, \dots, k),$$

$$x_0^{(i-1)}(b) = c_i(x) \quad (i = k+1, \dots, n).$$

Khi đó,

$$\left| x_0^{(i-1)}(t) \right| \leq \sum_{j=i}^n (b-a)^{j-i} \left| c_j(x) \right| \quad \text{với } a \leq t \leq b \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.72)$$

Mặt khác,

$$x^{(i-1)}(t) = x_0^{(i-1)}(t) - \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!} \int_t^b (s-t)^{n-i} x^{(n)}(s) ds \quad (2.73)$$

$$(i = k+1, \dots, n),$$

$$x^{(i-1)}(t) = c_i(x) + \int_a^t x^{(i)}(s) ds \quad (i = 1, \dots, k). \quad (2.74)$$

Do (2.3) ta có

$$n-i-\alpha-\alpha_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Do đó

$$(s-t)^{(n-i)} \leq (s-a)^{n-i-\alpha-\alpha_i} (s-a)^{-\alpha_i} (s-a)^\alpha \leq (b-a)^{n-i-\alpha-\alpha_i} (t-a)^{-\alpha_i} (s-a)^\alpha$$

với $a \leq t \leq b \quad (i = 1, \dots, n)$.

Kết hợp với (2.72), (2.73) ta thu được (2.69).

Rõ ràng là $\alpha_{k+1} \leq 1$, do $\alpha \leq n-k$. Nếu $\alpha_{k+1} < 1$ thì từ (2.69), (2.72) và (2.74) suy ra (2.70).

Để kết thúc chứng minh bổ đề ta còn phải xét trường hợp khi $\alpha_{k+1} = 1$. Khi đó, $\alpha = n-k$ và từ (2.72)- (2.74) ta có

$$\begin{aligned}
\left| x^{(k-1)}(t) \right| &\leq \sum_{j=k}^n (b-a)^{j-k} |c_j(x)| + \frac{1}{(n-k-1)!} \int_a^t \left(\int_{\tau}^b (s-\tau)^{n-k-1} |x^{(n)}(s)| ds \right) d\tau = \\
&\sum_{j=k}^n (b-a)^{j-k} |c_j(x)| + \frac{1}{(n-k-1)!} \left[(t-a) \int_t^b (s-a)^{n-k-1} |x^{(n)}(s)| ds + \int_a^t (s-a)^{n-k} |x^{(n)}(s)| ds \right] \\
&\leq \sum_{j=k}^n (b-a)^{j-k} |c_j(x)| + \frac{1}{(n-k-1)!} y(x).
\end{aligned}$$

Và

$$\left| x^{(i-1)}(t) \right| \leq \sum_{j=i}^n (b-a)^{j-i} |c_j(x)| + \frac{1}{(n-k-1)!(k-i)!} (t-a)^{k-i} y(x), \quad (i=1, \dots, k).$$

Do đó ta có (2.70). $\square$

2.4.2. Định lí

Giả sử tồn tại, $\eta_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $P_i \in L_{\alpha,0}((a,b); \mathbb{R}_+^{mm})$, $(i=1, \dots, n)$ và $q : (a,b) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ sao cho

$$\sum_{i=1}^n \|c_i(x)\| \leq \eta_0(\|x\|_{C_{\alpha,0}^{n-1}}) \text{ với } x \in C_{\alpha,0}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m) \quad (2.75)$$

và trên $(a,b) \times \mathbb{R}^{mn}$ ta có bất đẳng thức

$$|g(t, x_1, \dots, x_n)| \leq \sum_{i=1}^n (\tau_i(t) - \alpha)^{\alpha_i} P_i(t) |x_i| + q\left(t, \sum_{i=1}^n (\tau_i(t) - a)^{\alpha_i} \|x_i\|\right). \quad (2.76)$$

Hơn nữa, giả sử $q(\cdot, \rho) \in L_{\alpha,0}((a,b); \mathbb{R}_+^m)$ với mỗi $\rho \in \mathbb{R}_+$, các thành phần của $q(t, \rho)$ là không giảm theo ρ ,

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta_0(\rho)}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int_a^b (s-a)^{\alpha} \|q(s, \rho)\| ds \right) = 0 \quad (2.77)$$

và

$$r(P) < 1 \quad (2.78)$$

ở đây

$$P = \sum_{i=1}^k \frac{(b-a)^{n-k-1-\alpha+\alpha_{k+1}}}{(n-k-1)!(k+1-i-\alpha_{k+1})!} \int_a^b (s-a)^\alpha (\tau_i(s)-a)^{k+1-i-\alpha_{k+1}} P_i(s) ds \\ + \sum_{i=k+1}^n \frac{(b-a)^{n-i-\alpha+\alpha_i}}{(n-i)!} \int_a^b (s-a)^\alpha P_i(s) ds.$$

Khi đó, bài toán (2.67), (2.68) có nghiệm.

Chứng minh

Bài toán (2.67), (2.68) thu được từ bài toán (2.1), (2.2) khi

$$f(x)(t) \equiv g(t, x(\tau_1(t)), \dots, x^{(n-1)}(\tau_n(t))), \quad (2.79)$$

$$h_i(x) = \lim_{t \rightarrow a} x^{(i-1)}(t) - c_i(x) \quad (i=1, \dots, k), \\ h_i(x) = \lim_{t \rightarrow b} x^{(i-1)}(t) - c_i(x) \quad (i=k+1, \dots, n). \quad (2.80)$$

Từ giả thiết ta có $f : C_{\alpha,0}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha,0}((a,b); \mathbb{R}^m)$ và

$h_i : C_{\alpha,0}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (i=1, \dots, n)$ là các toán tử liên tục thỏa các điều kiện (2.3), (2.4)

với $\beta = 0$.

Với $x, y \in C_{\alpha,0}^{n-1}((a,b); \mathbb{R}^m)$ và $t \in (a,b)$ đặt

$$p(x, y)(t) = 0, \ell_i(x, y) = \lim_{t \rightarrow a} y^{(i-1)}(t) \quad (i=1, \dots, k), \\ \ell_i(x, y) = \lim_{t \rightarrow b} y^{(i-1)}(t) \quad (i=k+1, \dots, n). \quad (2.81)$$

Theo định nghĩa 2.3.2 và định lý 2.3.4, cặp $(p, (\ell_i)_{i=1}^n)$ các toán tử liên tục

$$p : C_{\alpha,0}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \times C_{\alpha,0}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow L_{\alpha,0}((a,b);\mathbb{R}^m),$$

$$(\ell_i)_{i=1}^n : C_{\alpha,0}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \times C_{\alpha,0}^{n-1}((a,b);\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^{mn},$$

là hòa hợp.

Để chứng minh định lí, từ 2.3.4 ta chỉ ra rằng với mỗi $\lambda \in (0,1)$, mọi x là nghiệm của bài toán (2.32), (2.33) thỏa bất đẳng thức

$$\|x\|_{C_{\alpha,\beta}^{n-1}} \leq \rho_0. \quad (2.82)$$

trong đó ρ_0 là hằng số không âm không phụ thuộc vào λ và x .

Do (2.79)- (2.81) bài toán (2.32), (2.33) có dạng sau:

$$x^{(n)}(t) = \lambda g(t, x(\tau_1(t)), \dots, x^{(n-1)}(\tau_n(t))), \quad (2.83)$$

$$\lim_{t \rightarrow a} x^{(i-1)}(t) = \lambda c_i(x) \quad (i = 1, \dots, k),$$

$$\lim_{t \rightarrow b} x^{(i-1)}(t) = \lambda c_i(x) \quad (i = k+1, \dots, n). \quad (2.84)$$

Gọi x là nghiệm của bài toán (2.83), (2.84) với $\lambda \in (0,1)$ tùy ý cố định. Khi đó, do bổ đề 2.4.1 ta có các bất đẳng thức (2.69), (2.70) với $y(x)$ là vectơ xác định như (2.71). Mặt khác, từ (2.76) ta có

$$y(x) = \int_a^b (s-a)^\alpha |x^{(n)}(s)| ds = \int_a^b (s-a)^\alpha \left| \lambda g(t, x(\tau_1(t)), \dots, x^{(n-1)}(\tau_n(t))) \right| ds$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_a^b (s-a)^\alpha (\tau_i(s)-a)^{\alpha_i} P_i(s) |x^{(i-1)}(s)| ds + \int_a^b (s-a)^\alpha q(s, \|x\|_{C_{\alpha,0}^{n-1}}) ds.$$

Nếu trong (2.69), (2.70) ta áp dụng với $\alpha_i = 0 \quad (i = 1, \dots, k)$, thì (2.70) dẫn đến

$$y(x) \leq Py(x) + y_0(x)$$

hay

$$(E - P)y(x) \leq y_0(x), \quad (2.85)$$

với E là ma trận đơn vị cấp $m \times m$ và

$$y_0(x) = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b (\tau_i(s) - a)^{\alpha_i} P_i(s) ds \right) \sum_{j=i}^n (b-a)^{j-i} |c_j(x)| + \int_a^b (s-a)^\alpha q(s, \|x\|_{C_{\alpha,0}^{n-1}}) ds. \quad (2.86)$$

Vì ma trận P không âm và $r(P) < 1$, nên từ (2.85) suy ra

$$y(x) \leq (E - P)^{-1} y_0(x).$$

Do giả thiết (2.75), đánh giá (2.86), và bổ đề 2.4.1, ta có

$$\|x\|_{C_{\alpha,0}^{n-1}} \leq \eta_1 \left(\|x\|_{C_{\alpha,0}^{n-1}} \right), \quad (2.87)$$

trong đó

$$\eta_1(\rho) = \mu \left(\eta_0(\rho) + \int_a^b (s-a)^\alpha \|q(s, \rho)\| ds \right),$$

và μ là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào α_i, P_i, τ_i ($i=1, \dots, n$), a và b . Mặt khác, do điều kiện (2.77) ta có

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\eta_1(\rho)}{\rho} = 0$$

và do đó

$$\eta_1(\rho) < \rho$$

với

$$\rho > \rho_0, \rho_0 = \inf \left\{ \rho > 0 : \frac{\eta_1(s)}{s} < 1, \quad s \in [\rho, +\infty) \right\}.$$

Do đó từ (2.87), $\eta_1 \left(\|x\|_{C_{\alpha,0}^{n-1}} \right) \geq \|x\|_{C_{\alpha,0}^{n-1}}$ ta suy $\|x\|_{C_{\alpha,0}^{n-1}} \leq \rho_0$, nghĩa là (2.82) đúng, trong đó hằng số ρ_0 không phụ thuộc vào λ và x .

Định lí được chứng minh.□

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Mục đích của luận văn là nghiên cứu tính giải được của bài toán biên không chính qui cho phương trình vi phân hàm bậc cao (2.1), (2.2). Đây là trường hợp mở rộng của bài toán (1.1), (1.2) chỉ xét bài toán biên chính qui cho phương trình vi phân hàm phi tuyến bậc nhất. Nội dung chính của luận văn được trình bày trong 2 chương.

Chương 1. Khảo sát tính giải được của bài toán (1.1), (1.2). Các kết quả chính của chương này là định lý 1.2.1, định lý 1.2.3 và các hệ quả 1.2.6, 1.2.8.

Chương 2. Nghiên cứu tính giải được của bài toán (2.1), (2.2). Các kết quả chính là các định lý 2.2.3, 2.3.4, 2.3.8, 2.4.2 và các hệ quả 2.2.4, 2.3.5.

Từ những kết quả được đưa ra trong luận văn, một câu hỏi được đặt ra là các kết quả trên có còn đúng không cho bài toán biên nhiều điểm, bài toán biên dạng tuần hoàn.

Do vậy tác giả mong muốn được tiếp tục nghiên cứu tìm hiểu thêm vấn đề này trong thời gian sắp tới. Với sự hiểu biết còn hạn chế, tác giả mong nhận được nhiều nhận xét, chỉ bảo của các Thầy, Cô trong và ngoài Hội đồng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] N. V. Azbelev, V. P. Maximov, and L. F. Rakhmatullina (1991), *Introduction to the theory of functional differential equations*, Nauka, Moscow.
- [2] N. V. Azbelev, V. P. Maximov, and L. F. Rakhmatullina, Methods of the modern theory of linear functional differential equations.
- [3] O. Dosly, A. Lomtatidze (1999), Disconjugacy and disfocality criteria for second order singular half-linear differential equations, *Ann. Polon. Math.* 72(3), pp. 273–284.
- [4] R. Hakl, I. Kiguradze, B. Puza (2000), Upper and lower solutions of boundary value problems for functional differential equations and theorems of functional differential inequalities, *Georgian Math. J.*, 7(3), pp. 489–512.
- [5] I. Kiguradze, N. Partsvania (1999), On nonnegative solutions of nonlinear two-point boundary value problems for two-dimensional differential systems with advanced arguments, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, No. 5, pp. 1–22.
- [6] I. Kiguradze, B. Puza (1997), On a certain singular boundary value problem for linear differential equations with deviating arguments. *Czechoslovak Math. J.* 47(2), pp. 233–244.
- [7] I. Kiguradze, B. Puza (1997), On boundary value problems for systems of linear functional differential equations, *Czechoslovak Math. J.* 47(2), pp. 341–373.
- [8] I. Kiguradze, B. Puza (1997), On the Vallee–Poussin problem for singular differential equations with deviating arguments, *Arch. Math.*, 33(1–2), pp. 127–138.
- [9] I. Kiguradze, B. Puza (1997), Conti–Opial type theorems for system of functional differential equations, *Differentsial'nye Uravneniya*, 33(2), pp. 185–194.
- [10] I. Kiguradze, B. Puza (1997), On boundary value problems for functional differential equations (1997), *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 12, pp. 106–113.

- [11] I. Kiguradze, B. Puza (1998), On the solvability of nonlinear boundary value problems for functional differential equations, *Georgian Math. J.* 5(3), pp. 251–262.
- [12] I. Kiguradze, B. Puza, I.P. Stavroulakis (2001), “On the singular boundary value problems for functional differential equations of higher order”, *Georgian Mathematical Journal*, 8(4), pp. 791–814.
- [13] I. Kiguradze, Z. Sokhadze (1998), On the structure of the set of solutions of the weighted Cauchy problem for evolution singular functional differential equations, *Fasc. Math.*, 28, pp. 71–92.
- [14] I. Kiguradze, G. Tskhovrebadze (1994), On the two-point boundary value problems for systems of higher order ordinary differential equations with singularities. *Georgian Math. J.*, 1(1), pp. 31–45.
- [15] A. Lomtadze, L. Malaguti (2000), On a nonlocal boundary value problem for second order nonlinear singular equations, *Georgian Math. J.*, 7(1), pp. 133–154.
- [16] N. Partsvania (2000), On a boundary value problem for the two-dimensional system of evolution functional differential equations, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 20, pp. 154–158.