

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

PHẠM XUÂN THÀNH

**BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC
DẠNG KHÔNG ĐỐI XỨNG
TRONG TAM GIÁC**

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

ĐÀ NẴNG - NĂM 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

Phản biện 1: TS. Lê Hoàng Trí

Phản biện 2: PGS.TS. Nguyễn Gia Định

Luận văn sẽ được bảo vệ tại hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học
học tại Đà Nẵng vào ngày 18 tháng 8 năm 2011

** Có thể tìm thấy thông tin luận văn tại:*

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Bất đẳng thức là một trong những vấn đề cổ điển nhất của toán học, đây cũng là một trong những phần toán sơ cấp đẹp và thú vị nhất. Nội dung xuyên suốt của luận văn là hệ thống các bất đẳng thức lượng giác.

Điểm đặc biệt, ấn tượng nhất của các bất đẳng thức lượng giác trong toán sơ cấp là khó và rất khó, nhưng có thể giải chúng hoàn toàn bằng phương pháp sơ cấp, không vượt qua giới hạn của chương trình toán học phổ thông. Việc đi tìm lời giải cho bài toán bất đẳng thức là niềm say mê của không ít người, đặc biệt là những người đang trực tiếp giảng dạy toán. Các bài toán về bất đẳng thức rất đa dạng về đề tài, phong phú về chủng loại và phù hợp với nhiều đối tượng thuộc các cấp học khác nhau.

Đề tài "*Bất đẳng thức lượng giác dạng không đối xứng trong tam giác*" nhằm đáp ứng mong muốn của bản thân về một đề tài phù hợp mà sau này có thể phục vụ thiết thực cho việc nâng cao chất lượng giảng dạy của mình trong nhà trường phổ thông.

Đề tài này liên quan đến nhiều chuyên đề, trong đó có các vấn đề về đặc trưng, tính chất và biểu diễn của hàm số, sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc như: AM-GM, Jensen, Cauchy-Schwarz, Chebyshev, Karamata,....

2. Mục đích nghiên cứu

Nhằm hệ thống tổng quan các bài toán về bất đẳng thức lượng giác cơ bản, bất đẳng thức lượng giác dạng không đối xứng trong tam giác.

Nắm được một số kỹ thuật về chứng minh một số lớp bất đẳng thức lượng giác tổng quát dạng không đối xứng trong tam giác.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu các bài toán về bất đẳng thức lượng giác dạng không đối xứng trong tam giác và hệ thống các kiến thức liên quan.

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu, các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi, tủ sách chuyên toán, tạp chí toán học và tuổi trẻ, ...

4. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu trực tiếp từ các tài liệu của thầy hướng dẫn, của các đồng nghiệp cũng như các bạn học viên trong lớp.

5. Ý nghĩa khoa học

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng giáo viên và học sinh trung học phổ thông.

Đề tài đóng góp thiết thực cho việc nâng cao chất lượng dạy học các chuyên đề toán trong trường THPT, đem lại niềm đam mê sáng tạo từ những bài toán cơ bản nhất.

6. Cấu trúc luận văn

Luận văn bao gồm phần mở đầu, 3 chương, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1. Một số hệ thức lượng giác cơ bản trong tam giác: Trong chương này, tác giả trình bày một số bất đẳng thức cơ bản, bất đẳng thức lượng giác dạng đối xứng trong tam giác. Độ gần đều và thứ tự sắp được của các biểu thức dạng đối xứng trong tam giác. Một số ví dụ minh họa.

Chương 2. Một số lớp bất đẳng thức lượng giác dạng không đối xứng trong tam giác: Trình bày một số lớp bất đẳng thức lượng giác dạng không đối xứng trong tam giác.

Chương 3. Áp dụng: Xét một số áp dụng của bất đẳng thức vào tìm cực trị của biểu thức lượng giác dạng không đối xứng trong tam giác, giải phương trình lượng giác.

Chương 1

MỘT SỐ HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN TRONG TAM GIÁC

1.1 Một số bất đẳng thức cơ bản

Định lí 1.1 ([2] Bất đẳng thức AM - GM). *Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số không âm. Khi đó*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \quad (1.1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Định lí 1.2 ([2] Jensen). *Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $I(a, b)$ (trong đó $I(a, b)$ được ngầm hiểu là một trong các tập $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$). Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ là*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in I(a, b). \quad (1.2)$$

Định lí 1.3 ([2] Bất đẳng thức Chebyshev). *Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm đơn điệu tăng và (x_k) là một dãy đơn điệu tăng:*

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

Khi đó mọi bộ trọng (p_j) :

$$p_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$

ta đều có

$$\left(\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)\right) \left(\sum_{k=1}^n p_k g(x_k)\right) \leq \left(\sum_{k=1}^n p_k f(x_k) g(x_k)\right). \quad (1.3)$$

Định lí 1.4 ([2] Bất đẳng thức Karamata). Cho hai dãy số $x_k, y_k \in I(a; b)$, $k = 1, 2, \dots, n$, thỏa mãn điều kiện

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \end{cases}$$

Khi đó, ứng với mọi hàm lồi khả vi $f(x)$, ($f''(x) \geq 0$) trên $I(a; b)$, ta đều có

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n). \quad (1.4)$$

1.2 Bất đẳng thức cơ bản dạng đối xứng trong tam giác

Giả sử $f(A, B, C)$ là biểu thức chứa các hàm số lượng giác của các góc trong tam giác ABC .

Giả sử các góc A, B, C thỏa mãn điều kiện:

$$1. f(A) + f(B) \geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right) \text{ hoặc } f(A)f(B) \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right), \quad (1.5)$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B$.

$$2. f(C) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right) \text{ hoặc } f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq f^2\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right), \quad (1.6)$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $C = \frac{\pi}{3}$.

Khi cộng (hoặc nhân) (1.5) và (1.6) ta sẽ có bất đẳng thức

$$f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ hoặc } f(A)f(B)f(C) \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$.

Các bất đẳng thức cơ bản dạng đối xứng trong tam giác dạng

$$f(g(A, B, C)) + f(g(B, C, A)) + f(g(C, A, B)) \leq 0,$$

hoặc

$$f(g(A, B, C)) + f(g(B, C, A)) + f(g(C, A, B)) \geq 0,$$

trong đó $f(t)$ là một trong các hàm lượng giác dạng $\sin t, \cos t, \tan t, \cot t$ và $g(x, y, z)$ là hàm tuyến tính dạng $g(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$, đã được đề cập nhiều trong các sách chuyên đề và sách tham khảo.

Trong mục này, ta chỉ xét một số ví dụ của các dạng đối xứng phụ thuộc vào tổng và tích các hàm số lượng giác cơ bản. Bất đẳng thức của các dạng không đối xứng

$$mf(g(A, B, C)) + nf(g(B, C, A)) + qf(g(C, A, B)) \leq 0,$$

hoặc

$$mf(g(A, B, C)) + nf(g(B, C, A)) + qf(g(C, A, B)) \geq 0,$$

sẽ được xét ở mục tiếp theo.

1.2.1 Bất đẳng thức lượng giác đối xứng sinh bởi hàm $\cos x$

Ta nhắc lại một số bất đẳng thức cơ bản trong tam giác.

Bài toán 1.1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}. \quad (1.7)$$

Bài toán 1.2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (1.8)$$

Bài toán 1.3. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}. \quad (1.9)$$

Bài toán 1.4. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}. \quad (1.10)$$

1.2.2 Bất đẳng thức lượng giác đối xứng sinh bởi $\sin x$

Bài toán 1.5. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (1.11)$$

Bài toán 1.6. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}. \quad (1.12)$$

Bài toán 1.7. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}. \quad (1.13)$$

Bài toán 1.8. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}. \quad (1.14)$$

Bài toán 1.9. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}. \quad (1.15)$$

1.2.3 Bất đẳng thức lượng giác đối xứng sinh bởi hàm $\tan x$

Bài toán 1.10. Chứng minh rằng tam giác nhọn ABC , ta đều có

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}. \quad (1.16)$$

Bài toán 1.11. Chứng minh rằng mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}. \quad (1.17)$$

Bài toán 1.12. Chứng minh rằng mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}. \quad (1.18)$$

Bài toán 1.13. Chứng minh rằng trong tam giác nhọn ABC , ta luôn có

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}. \quad (1.19)$$

Bài toán 1.14. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng với n là số nguyên dương ta luôn có

$$\tan^{2n} \frac{A}{2} + \tan^{2n} \frac{B}{2} + \tan^{2n} \frac{C}{2} \geq \frac{1}{3^{n-1}}. \quad (1.20)$$

1.2.4 Bất đẳng thức đối xứng sinh bởi hàm số cot x

Bài toán 1.15. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}. \quad (1.21)$$

Bài toán 1.16. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}. \quad (1.22)$$

Bài toán 1.17. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta luôn có

$$\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}. \quad (1.23)$$

Bài toán 1.18. Chứng minh rằng trong tam giác nhọn ABC , ta luôn có

$$\cot A \cot B \cot C \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}. \quad (1.24)$$

1.3 Độ gần đều và thứ tự sắp được của các biểu thức dạng đối xứng trong tam giác

Định nghĩa 1.1 ([1]). Với mỗi tam giác ABC cho trước, ta kí hiệu

$$\delta_{\Delta ABC} = \max \{A, B, C\} - \min \{A, B, C\} \quad (1.25)$$

và gọi $\delta_{\Delta ABC}$ là độ gần đều của tam giác ABC .

Rõ ràng $\delta_{\Delta ABC} \geq 0$ và $\delta_{\Delta ABC} = 0$ khi và chỉ khi tam giác ABC là một tam giác đều.

Định nghĩa 1.2 ([1]). Với mỗi cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ thoả mãn đồng thời các điều kiện

$$\begin{cases} \max \{A_1, B_1, C_1\} \leq \max \{A_2, B_2, C_2\} \\ \min \{A_1, B_1, C_1\} \geq \min \{A_2, B_2, C_2\} \end{cases}$$

thì ta nói cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ là cặp được sắp thứ tự và tam giác $A_1B_1C_1$ gần đều hơn tam giác $A_2B_2C_2$.

Vậy trong trường hợp có sắp thứ tự: Với mỗi cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ (với $A_1 \geq B_1 \geq C_1$ và $A_2 \geq B_2 \geq C_2$) thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$\begin{cases} A_1 \leq A_2 \\ C_1 \geq C_2 \end{cases}$$

thì ta có tam giác $A_1B_1C_1$ gần đều hơn tam giác $A_2B_2C_2$.

Nhận xét 1.1. Tam giác đều gần đều hơn mọi tam giác khác.

Nhận xét 1.2. Trong tập hợp các tam giác không nhọn thì tam giác vuông cân gần đều hơn mọi tam giác khác.

Định lí 1.5 ([1]). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ trong khoảng $(a; b)$.

i) Nếu $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x_0 \in (a; b).$$

ii) Nếu $f''(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x_0 \in (a; b).$$

Định lí 1.6 ([4]). Điều kiện cần và đủ để tam giác $A_2B_2C_2$ gần đều hơn tam giác $A_1B_1C_1$, tức là thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \max\{A_1, B_1, C_1\} \geq \max\{A_2, B_2, C_2\} \\ \min\{A_1, B_1, C_1\} \leq \min\{A_2, B_2, C_2\} \end{cases}$$

là giữa chúng có một phép biến đổi tuyến tính dạng

$$\begin{cases} \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 = A_2 \\ \alpha B_1 + \beta C_1 + \gamma A_1 = B_2 \\ \alpha C_1 + \beta A_1 + \gamma B_1 = C_2 \end{cases}$$

trong đó $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1$.

Hệ quả 1.1 ([4]). Cho tam giác ABC , các số dương α, β, γ thỏa mãn điều kiện $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Đặt

$$A_1 = \alpha A + \beta B + \gamma C, B_1 = \alpha B + \beta C + \gamma A, C_1 = \alpha C + \beta A + \gamma B.$$

Khi đó A_1, B_1, C_1 cũng là các góc của một tam giác $A_1B_1C_1$ nào đó và tam giác này gần đều hơn tam giác đã cho.

Nhận xét 1.3. Nhận xét rằng kết quả của Hệ quả 1.1 vẫn đúng khi α, β, γ là không âm và có ít nhất hai trong ba số là dương. Trường hợp có hai số bằng 0, chẳng hạn $\beta = 0, \gamma = 0$ thì $\alpha = 1$ và ta nhận được ba góc mới chính là một hoán vị của A, B, C nên kết luận của Hệ quả 1.1 vẫn đúng.

Nhận xét 1.4. Kết quả của Hệ quả 1.1 cho ta cách dựng một tam giác mới gần đều hơn tam giác đã cho. Tuy nhiên, để dựng một tam giác $A_1B_1C_1$ xa đều hơn tam giác ABC đã cho, ta cần phải tiến hành giải hệ phương trình tương ứng.

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 = A \\ \alpha B_1 + \beta C_1 + \gamma A_1 = B \\ \alpha C_1 + \beta A_1 + \gamma B_1 = C \end{cases}$$

trong đó α, β, γ không âm và không đồng thời bằng nhau $\left(= \frac{1}{3} \right)$ thỏa mãn điều kiện $\alpha + \beta + \gamma = 1$, A_1, B_1, C_1 là các góc cần xác định. Ta có

$$D = \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma \neq 0$$

và

$$D_{A_1} = \det \begin{pmatrix} A & \beta & \gamma \\ B & \alpha & \beta \\ C & \gamma & \alpha \end{pmatrix} = (\alpha^2 - \beta\gamma)A + (\gamma^2 - \beta\alpha)B + (\beta^2 - \gamma\alpha)C$$

nên

$$A_1 = \frac{D_{A_1}}{D} = \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma)A + (\gamma^2 - \beta\alpha)B + (\beta^2 - \gamma\alpha)C}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma}.$$

Tương tự, ta nhận được

$$B_1 = \frac{D_{B_1}}{D} = \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma)B + (\gamma^2 - \beta\alpha)C + (\beta^2 - \gamma\alpha)A}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma},$$

$$C_1 = \frac{D_{C_1}}{D} = \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma)C + (\gamma^2 - \beta\alpha)A + (\beta^2 - \gamma\alpha)B}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma}.$$

Vậy nên

$$\begin{cases} \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C = A_1 \\ \alpha_1 B + \beta_1 C + \gamma_1 A = B_1 \\ \alpha_1 C + \beta_1 A + \gamma_1 B = C_1 \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\alpha^2 - \gamma\beta}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma}, \\ \beta_1 &= \frac{\gamma^2 - \beta\alpha}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma}, \\ \gamma_1 &= \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma}.\end{aligned}$$

Nhận xét rằng

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma} = 1.$$

Từ kết quả này, ta thu được kết luận sau đây.

Hệ quả 1.2. Cho tam giác ABC , các số α, β, γ không âm và không đồng thời bằng nhau $\left(= \frac{1}{3} \right)$ thỏa mãn điều kiện $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Đặt

$$\begin{cases} \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C = A_1 \\ \alpha_1 B + \beta_1 C + \gamma_1 A = B_1 \\ \alpha_1 C + \beta_1 A + \gamma_1 B = C_1 \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\alpha^2 - \gamma\beta}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma}, \\ \beta_1 &= \frac{\gamma^2 - \beta\alpha}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma}, \\ \gamma_1 &= \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma}.\end{aligned}$$

Khi đó A_1, B_1, C_1 là các góc của một tam giác $A_1B_1C_1$ xa đều hơn tam giác ABC đã cho.

Mệnh đề 1.1 ([4]). ho các số dương α, β, γ thỏa mãn điều kiện $\alpha + \beta + \gamma = 1$ và $\max(\alpha, \beta, \gamma) \leq \frac{1}{2}$. Khi đó, với mọi tam giác ABC , ta đặt

$$\begin{cases} A_1 = \alpha A + \beta B + \gamma C \\ B_1 = \alpha B + \beta C + \gamma A \\ C_1 = \alpha C + \beta A + \gamma B \end{cases}$$

thì A_1, B_1, C_1 là các góc của một tam giác nhọn $A_1B_1C_1$ và tam giác này gần đều hơn tam giác đã cho.

Mệnh đề 1.2 ([4]). Cho tam giác ABC . Xét tam giác $A_1B_1C_1$ có các góc được tính theo công thức

$$\begin{cases} A_1 = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{6} \\ B_1 = \frac{B}{2} + \frac{C}{3} + \frac{A}{6} \\ C_1 = \frac{C}{2} + \frac{A}{3} + \frac{B}{6} \end{cases}$$

Khi đó các góc $A_1B_1C_1$ nằm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$.

1.4 Một số ví dụ minh họa

Bài toán 1.19 ([4]). Cho tam giác ABC và cho ba số không âm α, β, γ sao cho $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Đặt

$$\begin{cases} A_0 = \alpha A + \beta B + \gamma C \\ B_0 = \alpha B + \beta C + \gamma A \\ C_0 = \alpha C + \beta A + \gamma B \end{cases}$$

Chứng minh rằng khi đó tam giác $A_0B_0C_0$ gần đều hơn tam giác ABC .

Kết quả sau đây bao hàm hầu hết các bất đẳng thức đối xứng dạng cơ bản trong tam giác.

Bài toán 1.20 ([1]). Cho tam giác $A_2B_2C_2$ gần đều hơn tam giác $A_1B_1C_1$ và cho hàm số $f(x)$ có $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in (0; \pi)$. Khi đó

$$f(A_1) + f(B_1) + f(C_1) \geq f(A_2) + f(B_2) + f(C_2). \quad (1.26)$$

Bài toán 1.21 ([1]). Cho tam giác $A_2B_2C_2$ gần đều hơn tam giác $A_1B_1C_1$ và cho hàm số $f(x)$ có $f''(x) \leq 0$ với mọi $x \in (0; \pi)$. Khi đó

$$f(A_1) + f(B_1) + f(C_1) \leq f(A_2) + f(B_2) + f(C_2). \quad (1.30)$$

Bài toán 1.22 ([1]). Cho tam giác ABC và cho ba số dương α, β, γ sao cho $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Đặt

$$\begin{cases} A_0 = \alpha A + \beta B + \gamma C \\ B_0 = \alpha B + \beta C + \gamma A \\ C_0 = \alpha C + \beta A + \gamma B \end{cases}$$

Chúng minh rằng

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \sin A_0 + \sin B_0 + \sin C_0. \quad (1.34)$$

Bài toán 1.23 ([1]). Cho tam giác ABC và cho ba số dương α, β, γ sao cho $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Đặt

$$\begin{cases} A_0 = \alpha A + \beta B + \gamma C \\ B_0 = \alpha B + \beta C + \gamma A \\ C_0 = \alpha C + \beta A + \gamma B. \end{cases}$$

Chúng minh rằng

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \cos \frac{A_0}{2} + \cos \frac{B_0}{2} + \cos \frac{C_0}{2}. \quad (1.36)$$

Bài toán 1.24 ([4]). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M_1 = \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{6} \right) + \sin \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{3} + \frac{A}{6} \right) + \sin \left(\frac{C}{2} + \frac{A}{3} + \frac{B}{6} \right) \quad (1.37)$$

trong tập $M(\Delta)$, tức là các góc của tam giác suy rộng ABC .

Bài toán 1.25 ([4]). Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x \leq y \leq z$. Chúng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\begin{aligned} x \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{6} \right) + y \sin \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{3} + \frac{A}{6} \right) + z \sin \left(\frac{C}{2} + \frac{A}{3} + \frac{B}{6} \right) \\ \geq x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Bài toán 1.26 ([4]). Cho các số dương α, β, γ thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M_0 = \sin(\alpha A + \beta B + \gamma C) + \sin(\alpha B + \beta C + \gamma A) + \sin(\alpha C + \beta A + \gamma B) \quad (1.41)$$

trong $M(\Delta)$, tức là A, B, C là các góc trong tam giác suy rộng ABC .

Chương 2

MỘT SỐ LỚP BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC DẠNG KHÔNG ĐỐI XỨNG TRONG TAM GIÁC

Các bất đẳng thức cơ bản dạng không đối xứng trong tam giác dạng

$$mf(g(A, B, C)) + nf(g(B, C, A)) + qf(g(C, A, B)) \leq 0,$$

hoặc

$$mf(g(A, B, C)) + nf(g(B, C, A)) + qf(g(C, A, B)) \geq 0,$$

trong đó $f(t)$ là một trong các hàm lượng giác dạng $\sin t, \cos t, \tan t, \cot t$, $g(x, y, z)$ là hàm tuyến tính dạng $g(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ và $m, n, p \geq 0$.

Các bất đẳng thức cơ bản dạng đối xứng bộ phận trong tam giác dạng

$$f(g(A, B, C)) + f(g(B, C, A)) + qf(g(C, A, B)) \leq 0,$$

hoặc

$$f(g(A, B, C)) + f(g(B, C, A)) + qf(g(C, A, B)) \geq 0,$$

trong đó $f(t)$ là một trong các hàm lượng giác dạng $\sin t, \cos t, \tan t, \cot t$, $g(x, y, z)$ là hàm tuyến tính dạng $g(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ và $q \in \mathbb{R}$.

Trong mục này, ta xét các ví dụ của các dạng đối xứng bộ phận và không đối xứng phụ thuộc vào tổng của các hàm lượng giác cơ bản.

2.1 Bất đẳng thức dạng không đối xứng sinh bởi hàm $\cos x$

Ta xét một số bất lượng giác dạng đối xứng bộ phận

Bài toán 2.1 ([4]). Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$a) \cos 2A + \cos 2B + k \cos 2C \geq \frac{-2k^2 - 1}{2k}, \text{ khi } k > 0. \quad (2.1)$$

$$b) \cos 2A + \cos 2B + k \cos 2C \leq \frac{-2k^2 - 1}{2k}, \text{ khi } k < 0. \quad (2.2)$$

Bài toán 2.2 ([4]). Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C \leq \frac{3}{2}. \quad (2.3)$$

Bài toán 2.3 ([4]). Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\sqrt{3}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos 2C \geq -\frac{5}{2}. \quad (2.4)$$

Bài toán 2.4 ([4]). Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\sqrt{3}(\cos 2A - \cos 2C) + \cos 2B \leq \frac{5}{2}. \quad (2.5)$$

Bài toán 2.5 ([4]). Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$a) \cos 3A + \cos 3B + k \cos 3C \geq \frac{2k^2 + 1}{2k}, \text{ khi } k < 0. \quad (2.6)$$

$$b) \cos 3A + \cos 3B + k \cos 3C \leq \frac{2k^2 + 1}{2k}, \text{ khi } k > 0. \quad (2.7)$$

Tiếp theo, ta khảo sát bài toán cơ bản về bất đẳng thức không đối xứng trong tam giác sinh bởi hàm số $\cos t, t \in [0; \pi]$.

Bài toán tổng quát 1. Cho các số dương x, y, z . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T_c = x \cos A + y \cos B + z \cos C,$$

trong tập $M(\Delta)$, tức là A, B, C là các góc của tam giác suy rộng ABC .

Kí hiệu $M(\Delta)$ là tập hợp tất cả các tam giác ABC kể cả tam giác suy biến, tức là $A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0$ và $A + B + C = \pi$. Ta gọi các tam giác thuộc $M(\Delta)$ là các tam giác suy rộng.

Bài toán 2.6 ([4]). Cho các số dương x, y, z sao cho $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ lập thành độ dài các cạnh của một tam giác XYZ cho trước. Khi đó với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C \leq \frac{yz}{2x} + \frac{xz}{2y} + \frac{xy}{2z}. \quad (2.8)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đồng dạng với tam giác XYZ .

Nhận xét 2.1. Biểu thức $P = x \cos A + y \cos B + z \cos C$ đạt được giá trị lớn nhất bằng $\frac{yz}{2x} + \frac{xz}{2y} + \frac{xy}{2z}$ khi và chỉ khi $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác, hay $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < \frac{1}{z}$. Trong trường hợp tổng quát, khi các hệ số x, y, z là các số dương tùy ý không thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < \frac{1}{z}$ thì dấu đẳng thức trong (2.8) sẽ không xảy ra.

Tiếp theo, ta xét các trường hợp khi các số dương x, y, z không thỏa mãn điều kiện của Bài toán 2.6, bao gồm các trường hợp $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{z}$ hoặc $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| > \frac{1}{z}$.

Bài toán 2.7 ([4]). Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có

$$\cos A + \cos B + \frac{1}{2} \cos C < \frac{3}{2}. \quad (2.13)$$

Bài toán 2.8 ([4]). Cho số dương m thỏa mãn điều kiện $0 < m < \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có

$$\cos A + \cos B + m \cos C < 2 - m. \quad (2.14)$$

Bổ đề 2.1 ([4]). Cho các số dương x, y, z với $x \geq y \geq z > 0$. Khi đó với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C \leq x \cos A_0 + y \cos B_0 + z \cos C_0, \quad (2.15)$$

trong đó $A_0 = \min \{A, B, C\}$, $B_0 = \text{med} \{A, B, C\}$, $C_0 = \max \{A, B, C\}$

Bài toán 2.9 ([4]). Cho các số dương x, y, z sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Khi đó với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C < x + y - z. \quad (2.16)$$

Tổng quát hơn, ta có kết luận sau.

Bài toán 2.10 ([4]). Cho các số dương x, y, z sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z}$. Khi đó với mọi tam giác ABC ta đều có

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C \leq x + y - z. \quad (2.21)$$

Bài toán 2.11 ([4]). Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} > \frac{1}{z^2}$. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC , ta đều có

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C \leq \frac{yz}{2x} + \frac{xz}{2y} + \frac{xy}{2z}. \quad (2.22)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x \sin A = y \sin B = z \sin C$, tức là tam giác ABC đồng dạng với tam giác nhọn có độ dài các cạnh lần lượt là $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$.

Bổ đề 2.2 ([4]). Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x \geq y \geq z$. Khi đó với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C \geq x \cos A_0 + y \cos B_0 + z \cos C_0, \quad (2.28)$$

trong đó

$$A_0 = \max \{A, B, C\}, B_0 = \text{med} \{A, B, C\}, C_0 = \min \{A, B, C\}.$$

Định lý 2.1 ([4]). Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x \geq y \geq z$. Khi đó với mọi tam giác $ABC \in M(\Delta)$, ta đều có

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C \geq -x + y + z. \quad (2.29)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = \pi, B = C = 0$.

Bài toán tổng quát 2. Cho các số dương x, y, z . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T_{2C} = x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C,$$

trong tập $M(\Delta)$, tức là A, B, C là ba góc của tam giác suy rộng ABC .

Bổ đề 2.3 ([4]). Giả sử $x \geq y \geq z > 0$. Khi đó, với mọi tam giác $ABC \in M(\Delta)$, ta đều có

$$x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C \leq x \cos 2A_0 + y \cos 2B_0 + z \cos 2C_0, \quad (2.30)$$

trong đó $A_0 = \min \{A, B, C\}$, $B_0 = \text{med} \{A, B, C\}$, $C_0 = \max \{A, B, C\}$.

Định lí 2.2 ([4]). Giả sử $x \geq y \geq z > 0$. Khi đó, với mọi tam giác $ABC \in M(\Delta)$, ta đều có

$$x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C \leq x + y + z. \quad (2.31)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $A = B = 0, C = \pi$.

Bổ đề 2.4 ([4]). Cho các số dương x, y, z sao cho $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ lập thành ba cạnh của một tam giác XYZ cho trước. Khi đó mọi tam giác ABC , ta đều có

$$x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C \geq -\frac{1}{2} \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right). \quad (2.32)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đồng dạng với tam giác XYZ .

Nhận xét 2.2. Nhận xét rằng, biểu thức $T_{2C} = x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C$ đạt được giá trị nhỏ nhất là $-\frac{1}{2} \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right)$ khi và chỉ khi $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác, hay $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < \frac{1}{z} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Trong trường hợp tổng quát, khi các hệ số x, y, z là các số dương tùy ý không thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < \frac{1}{z}$ thì dấu đẳng thức trong (2.32) sẽ không xảy ra.

Bài toán 2.12 ([4]). Cho các số dương x, y, z sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Khi đó với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C > z - y - x. \quad (2.33)$$

Tiếp theo, để kết thúc dạng toán này ta chứng minh bài toán tổng quát sau.

Bài toán 2.13 ([4]). Cho các số dương x, y, z và $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(-1)^{n+1}(yz \cos nA + zx \cos nB + xy \cos nC). \quad (2.39)$$

2.2 Bất đẳng thức dạng không đối xứng sinh bởi hàm $\sin x$

Bài toán 2.14 ([4]). Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$a) \sin^2 A + \sin^2 B + k \sin^2 C \leq \frac{(2k+1)^2}{4k} \text{ khi } k > 0. \quad (2.44)$$

$$b) \sin^2 A + \sin^2 B + k \sin^2 C \geq \frac{(2k+1)^2}{4k} \text{ khi } k < 0. \quad (2.45)$$

Bài toán 2.15 ([1]). Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 C \leq 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}. \quad (2.46)$$

Bài toán 2.16. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có

$$\sin A + \sin B + \sqrt{3} \sin C \geq \frac{4}{3} \sqrt{6}. \quad (2.47)$$

Bổ đề 2.5 ([4]). Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x \geq y \geq z > 0$. Khi đó với mọi tam giác ABC ta đều có

$$x \sin A + y \sin B + z \sin C \geq x \sin A_0 + y \sin B_0 + z \sin C_0, \quad (2.49)$$

trong đó $A_0 = \min \{A, B, C\}$, $B_0 = \text{med} \{A, B, C\}$, $C_0 = \max \{A, B, C\}$

Định lí 2.3 ([4]). Cho các số dương x, y, z tùy ý. Khi đó với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$x \sin A + y \sin B + z \sin C \geq 0. \quad (2.50)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC có số đo ba góc là $0, 0, \pi$.

Định lí 2.4 ([4]). Giả sử α, β, γ là ba góc của tam giác nhọn XYZ cho trước. Khi đó với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\begin{aligned} \frac{\sin A}{\cos \alpha} + \frac{\sin B}{\cos \beta} + \frac{\sin C}{\cos \gamma} &\leq \left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\beta} + \frac{1}{\sin 2\gamma} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\cot 2\alpha + \cot 2\beta + \cot 2\gamma) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta \sin 2\gamma} + \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha \sin 2\gamma} + \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha \sin 2\beta} \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Bổ đề 2.6 ([4]). Giả sử các số dương x, y, z thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} > \frac{1}{z^2}.$$

Khi đó với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2} \leq \frac{yz}{2x} + \frac{xz}{2y} + \frac{xy}{2z}. \quad (2.56)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x \cos \frac{A}{2} = y \cos \frac{B}{2} = z \cos \frac{C}{2}$ tức là tam giác $A_1B_1C_1$ với ba góc

$$A_1 = \frac{B+C}{2}, B_1 = \frac{A+C}{2}, C_1 = \frac{A+B}{2} \quad (2.57)$$

đồng dạng tam giác nhọn có độ dài các cạnh lần lượt là $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$.

Tiếp theo, ta tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2}.$$

Bổ đề 2.7 ([4]). Cho các số dương x, y, z thoả mãn điều kiện $x \leq y \leq z$. Khi đó với mọi tam giác $ABC \in M(\Delta)$, ta đều có

$$x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2} > x \sin \frac{A_0}{2} + y \sin \frac{B_0}{2} + z \sin \frac{C_0}{2} \quad (2.58)$$

trong đó $A_0 = \min \{A, B, C\}$, $B_0 = \text{med} \{A, B, C\}$, $C_0 = \max \{A, B, C\}$

Bài toán 2.17 ([4]). Cho các số dương x, y, z thoả mãn điều kiện $x \leq y \leq z$. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có

$$x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2} > x. \quad (2.59)$$

Nhận xét 2.3. Nhận xét rằng x là đánh giá tốt nhất cho vế phải. Thật vậy, cho $B = C = \alpha$, $A = \pi - 2\alpha$ với α đủ nhỏ thì khi đó

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2} \right) = x$$

Bài toán 2.18 ([1]). Cho các số dương x, y, z sao cho $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ lập thành độ dài các cạnh của một tam giác XYZ cho trước. Khi đó với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} \right). \quad (2.60)$$

Hệ quả 2.1. Cho các số dương x, y, z sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z}$. Khi đó mọi tam giác ABC thuộc $M(\Delta)$, ta đều có

$$x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2} \leq x + y - z. \quad (2.65)$$

Hệ quả 2.2. Cho các số dương x, y, z thoả mãn điều kiện $x \geq y \geq z$. Khi đó mọi tam giác $ABC \in M(\Delta)$, ta đều có

$$x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2} \geq -x + y + z. \quad (2.66)$$

2.3 Bất đẳng thức dạng không đối xứng sinh bởi hàm $\tan x$

Bổ đề 2.8. Cho các số dương $x_i \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), i = 1, \dots, n$, ta có

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tan x_i \geq \tan \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right), \quad n = 2, 3, 4. \quad (2.67)$$

Bài toán 2.19 ([4]). Cho các số dương m, n, p . Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\frac{n+p}{m} \tan^2 \frac{A}{2} + \frac{p+m}{n} \tan^2 \frac{B}{2} + \frac{m+n}{p} \tan^2 \frac{C}{2} \geq 2. \quad (2.68)$$

Nhận xét 2.4. Ta biết trong tam giác ABC luôn có

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}. \quad (2.72)$$

Ta có thể mở rộng bất đẳng thức đối xứng (2.85) thành bất đẳng thức dạng không đối xứng sau đây.

Bài toán 2.20 ([1]). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và x, y, z là các số dương thoả mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M_1 = ax + by + cz. \quad (2.73)$$

Bài toán 2.21. Cho các số dương m, n, p là độ dài các cạnh một tam giác. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$m \tan \frac{A}{2} + n \tan \frac{B}{2} + p \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{2(mn + np + pm) - m^2 - n^2 - p^2}. \quad (2.77)$$

Bài toán 2.22 ([3]). Cho m, n, p là các số nguyên dương lớn hơn 2. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta đều có:

$$m \left(\tan \frac{A}{m} \right)^\alpha + n \left(\tan \frac{B}{n} \right)^\alpha + p \left(\tan \frac{C}{p} \right)^\alpha \geq (m+n+p) \left(\tan \frac{\pi}{m+n+p} \right)^\alpha \quad (2.78)$$

với $\alpha > 1$.

2.4 Bất đẳng thức dạng không đối xứng sinh bởi hàm $\cot x$

Bài toán 2.23. Cho các số dương m, n, p . Chứng minh rằng trong tam giác nhọn ABC ta luôn có

$$\frac{n+p}{m} \cot^2 A + \frac{p+m}{n} \cot^2 B + \frac{m+n}{p} \cot^2 C \geq 2. \quad (2.81)$$

Nhận xét 2.5. Ta biết trong tam giác ABC luôn có

$$\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}. \quad (2.85)$$

Ta có thể thay bất đẳng thức đối xứng bằng bất đẳng thức dạng không đối xứng sau đây.

Bài toán 2.24. Cho các số dương m, n, p là độ dài các cạnh một tam giác. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$m \cot A + n \cot B + p \cot C \geq \sqrt{2(mn + np + pm) - m^2 - n^2 - p^2}. \quad (2.86)$$

Chương 3

ÁP DỤNG

3.1 Tìm cực trị của biểu thức lượng giác trong tam giác

Bài toán 3.1. Cho tam giác ABC . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{\sqrt{1+2\cos^2 A}}{\sin B} + \frac{\sqrt{1+2\cos^2 B}}{\sin C} + \frac{\sqrt{1+2\cos^2 C}}{\sin A}. \quad (3.1)$$

Bài toán 3.2. Cho tam giác ABC . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\cot A + \cot B + \cot C + \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}. \quad (3.3)$$

Bài toán 3.3 (HSG 1992 bảng B). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$(1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B)(1 + \cos^2 C). \quad (3.6)$$

Bài toán 3.4. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\sqrt{2}(\cos 3A + \cos 3B) + \cos 3C. \quad (3.7)$$

Bài toán 3.5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\cos 3A + \cos 3B - \cos 3C. \quad (3.8)$$

Bài toán 3.6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$2(\cos 2A + \cos 2B) + \sqrt{3} \cos 2C. \quad (3.11)$$

Bài toán 3.7. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \quad (3.12)$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x \sin A + y \sin B - z \cos C. \quad (3.13)$$

3.2 Giải phương trình

Bài toán 3.8. Giải phương trình

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = \frac{9}{4}. \quad (3.14)$$

Bài toán 3.9. Giải phương trình

$$\cos x + \cos y + \cos z = \frac{3}{2}. \quad (3.15)$$

Bài toán 3.10. Giải phương trình

$$\cos 2x - \cos 2y + \cos 2z = \frac{3}{2}. \quad (3.16)$$

Bài toán 3.11. Giải phương trình

$$3 \cos x + 7 \cos y + 2 \cos z = 8. \quad (3.17)$$

KẾT LUẬN

Luận văn nhằm trình bày theo hướng hệ thống các lớp bất đẳng thức lượng giác dạng không đối xứng sinh bởi các hàm số lượng giác.

Trình bày dạng tổng quát các lớp bất đẳng thức lượng giác với các hệ số không đối xứng. Đó là các bất đẳng thức cơ bản dạng đối xứng trong tam giác dạng

$$mf(g(A, B, C)) + nf(g(B, C, A)) + qf(g(C, A, B)) \leq 0,$$

hoặc

$$mf(g(A, B, C)) + nf(g(B, C, A)) + qf(g(C, A, B)) \geq 0,$$

trong đó $f(t)$ là một trong các hàm lượng giác dạng $\sin t, \cos t, \tan t, \cot t$ và $g(x, y, z)$ là hàm tuyến tính dạng $g(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$, $m, n, p, \alpha, \beta, \gamma$ là các số không âm.

Trình bày một số áp dụng của lý thuyết đã nhận được.

Tác giả mong muốn luận văn sẽ phục vụ thiết thực cho việc giảng dạy bất đẳng thức lượng giác trong nhà trường, ở hiện tại cũng như trong tương lai.