

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

ĐOÀN TRƯỞNG

BIỂU DIỄN NHÓM HỮU HẠN
DƯỚI DẠNG ĐỒ THỊ

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Nguyễn Gia Định

Phản biện 1:.....

Phản biện 2:.....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm

Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học hợp tại Đại học Đà Nẵng
vào ngày.....tháng năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Việc nghiên cứu về nhóm xuất hiện vào đầu thế kỷ XIX liên quan đến việc giải quyết bài toán tìm nghiệm của các phương trình đại số. Khởi đầu, một nhóm là một tập hợp các hoán vị với tính chất tích của hai hoán vị bất kỳ cũng thuộc tập hợp này. Về sau, định nghĩa này được tổng quát hoá thành khái niệm của một nhóm trừu tượng, đó là một tập hợp cùng với một phương pháp kết nối các phần tử của nó theo một số quy tắc nào đó. Hiện nay lý thuyết nhóm đóng một vai trò quan trọng trong toán học và khoa học. Nhóm xuất hiện trong cơ học lượng tử, trong hình học và tôpô, trong giải tích và đại số, trong vật lý, hoá học và thậm chí trong sinh học. Một trong các tư tưởng trực quan quan trọng nhất trong toán học và khoa học là tính đối xứng. Nhóm có thể mô tả tính đối xứng; quả thực nhiều nhóm xuất hiện trong toán học và khoa học liên quan đến việc nghiên cứu tính đối xứng.

Trong toán học và đại số trừu tượng, một nhóm hữu hạn là một nhóm mà tập nền của nó có hữu hạn phần tử. Trong suốt thế kỷ XX, các nhà toán học nghiên cứu rất sâu một số hướng của lý thuyết nhóm hữu hạn, đặc biệt là phân tích địa phương nhóm hữu hạn và lý thuyết nhóm giải được, nhóm lũy linh. Việc xác

định đầy đủ cấu trúc của tất cả các nhóm hữu hạn là quá nhiều để biết được, số các cấu trúc có thể có sớm trở nên tràn ngập. Vì vậy tìm các tính chất mở rộng cũng như phân loại nhóm hữu hạn trở nên vô cùng khó khăn. Người ta hy vọng bằng cách mô tả trực quan nhóm hữu hạn bằng một công cụ nào đó có thể giúp việc nghiên cứu lý thuyết nhóm hữu hạn hữu hiệu hơn. Công cụ đó là lý thuyết đồ thị, nó được sử dụng đầu tiên bởi W.B. Vasantha Kandasamy qua cuốn sách *Groups as Graph* năm 2009. Đây là ý tưởng rất mới, hy vọng sẽ có được những kết quả thú vị trong tương lai nhờ vào hướng tiếp cận này.

Việc nghiên cứu nhóm hữu hạn qua việc biểu diễn dưới dạng đồ thị là một công việc hoàn toàn mới và mang tính đột phá. Từ cấu trúc của đồ thị, chúng ta có thể tìm hiểu các tính chất của nhóm. Để mô tả nhóm theo một đồ thị, chúng ta khai thác khái niệm đơn vị trong nhóm, nên chúng ta gọi đồ thị liên kết với nhóm là đồ thị đơn vị. Ta nói hai phần tử x, y trong nhóm là kề nhau hoặc nối nhau bởi một cạnh nếu $x.y = e$ (e là đơn vị của nhóm G). Vì trong nhóm ta có $x.y = y.x = e$ nên không cần sử dụng tính chất giao hoán. Quy ước là mọi phần tử đều nối với phần tử đơn vị của nhóm G . Nhìn vào đồ thị có thể thấy được số các phần tử của nhóm G là tự nghịch đảo, các tính chất khác nhau như nhóm con, nhóm con chuẩn tắc, nhóm con p -Sylow và các phần tử liên hợp của một nhóm.

Xuất phát từ nhu cầu phát triển của hướng tiếp cận này và những ứng dụng của nó, chúng tôi quyết định chọn đề tài với tên: "Biểu diễn nhóm hữu hạn dưới dạng đồ thị" để tiến hành nghiên cứu. Chúng tôi hy vọng tạo được một tài liệu tham khảo tốt cho những người bắt đầu tìm hiểu về biểu diễn nhóm bằng đồ thị và

hy vọng tìm ra được một số ví dụ minh họa đặc sắc và tính chất mới nhằm góp phần làm phong phú thêm các kết quả trong lĩnh vực này.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của đề tài nhằm nghiên cứu biểu diễn nhóm hữu hạn dưới dạng đồ thị.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đồ thị đơn vị và tô màu đồ thị đơn vị của nhóm hữu hạn.

4. Phương pháp nghiên cứu

1. Thu thập các bài báo khoa học của các tác giả nghiên cứu liên quan đến biểu diễn nhóm bằng đồ thị.

2. Tham gia các buổi seminar hàng tuần để trao đổi các kết quả đang nghiên cứu.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

1. Tổng quan các kết quả của các tác giả đã nghiên cứu liên quan đến Biểu diễn nhóm hữu hạn dưới dạng đồ thị nhằm xây dựng một tài liệu tham khảo cho những ai muốn nghiên cứu lý thuyết nhóm hữu hạn và các ứng dụng.

2. Chứng minh chi tiết và làm rõ một số mệnh đề, cũng như đưa ra một số ví dụ minh họa đặc sắc nhằm làm cho người đọc dễ dàng tiếp cận vấn đề được đề cập.

3. Tìm ra một vài tính chất mới trong lĩnh vực này.

6. Cấu trúc luận văn

Trong Chương 1, chúng tôi sẽ trình bày một số kiến thức cơ sở về lý thuyết đồ thị và lý thuyết nhóm cần cho hai chương sau.

Trong Chương 2, chúng tôi sẽ trình bày các ví dụ quan trọng về biểu diễn nhóm hữu hạn bằng đồ thị đơn vị, biểu diễn nhóm cyclic, nhóm con, nhóm con chuẩn tắc bằng đồ thị đơn vị. Ngoài

ra, chúng tôi cũng đưa ra ma trận liên kề của đồ thị đơn vị biểu diễn nhóm và đồ thị của một nhóm theo các phần tử liên hợp.

Khái niệm tô màu đồ thị con đơn vị đặc biệt, tô màu đồ thị đơn vị biểu diễn nhóm theo lớp các nhóm con và nhóm con chuẩn tắc được trình bày trong Chương 3.

CHƯƠNG 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1 Sơ lược về đồ thị

Định nghĩa 1.1.1. Một đơn đồ thị $G = (V, E)$ gồm một tập hữu hạn khác rỗng V mà các phần tử của nó được gọi là các đỉnh và một tập E của nó được gọi là các cạnh đó là các cặp không có thứ tự của các đỉnh phân biệt.

Định nghĩa 1.1.2. Một đa đồ thị $G = (V, E)$ gồm một tập hữu hạn khác rỗng V mà các phần tử của nó được gọi là các đỉnh và một họ E mà các phần tử của nó gọi là các cạnh, đó là các cặp không có thứ tự của các đỉnh phân biệt. Hai cạnh được gọi là cạnh bội hay song song nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh.

Rõ ràng mỗi đơn đồ thị là một đa đồ thị, nhưng không phải đa đồ thị nào cũng là đơn đồ thị.

Định nghĩa 1.1.3. Một giả đồ thị $G = (V, E)$ gồm một tập hữu hạn khác rỗng V mà các phần tử của nó gọi là các đỉnh và một họ E các phần tử của nó gọi là các cạnh, đó là các cặp không có thứ tự của các đỉnh (không nhất thiết phải phân biệt).

Với $v \in V$, nếu cạnh $(v, v) \in E$ thì ta nói có một khuyên tại đỉnh v .

Tóm lại, giả đồ thị là loại đồ thị vô hướng tổng quát nhất vì nó có thể chứa khuyên và các cạnh bội. Đa đồ thị là đồ thị vô hướng có thể chứa cạnh bội nhưng không thể có khuyên, còn đơn đồ thị là loại đồ thị vô hướng không chứa khuyên và không chứa cạnh bội.

Định nghĩa 1.1.4. Hai đỉnh u và v trong đồ thị $G=(V,E)$ được gọi là liên kề nếu $(u,v) \in E$. Nếu $e=(u,v)$ thì e gọi là liên thuộc với các đỉnh u và v . Cạnh e cũng được gọi là cạnh nối các đỉnh u và v . Các đỉnh u và v gọi là các điểm mút của cạnh e .

Định nghĩa 1.1.5. Bậc của đỉnh V trong đồ thị $G=(V,E)$, ký hiệu $\deg(v)$, là số cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó.

Đỉnh v gọi là đỉnh treo nếu $\deg(v)=1$ và gọi đỉnh cô lập nếu $\deg(v)=0$.

Một đơn đồ thị n đỉnh sao cho mọi đỉnh đều có bậc $n-1$ gọi là đồ thị đầy đủ n đỉnh, kí hiệu K_n .

Định nghĩa 1.1.6. Cho đồ thị $G=(V,E)$, với $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Ma trận liên kề của G ứng với thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ là ma trận $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n, \mathbb{Z})$ trong đó a_{ij} là số cạnh nối từ v_i tới v_j .

Như vậy ma trận liên kề của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng, nghĩa là $a_{ij} = a_{ji}$.

Định nghĩa 1.1.7. Cho đồ thị vô hướng $G = (V,E)$, với các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ và $e_1, e_2, \dots, e_m$ là các cạnh của G . Ma trận liên

thuộc của G theo thứ tự liệt kê trên của V và E là ma trận $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M(n \times n, \mathbb{Z})$, trong đó m_{ij} bằng 1 nếu cạnh e_j nối với đỉnh v_i và bằng 0 nếu cạnh e_j không nối với đỉnh v_i .

Định nghĩa 1.1.8. Cho hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$. Ta nói G_2 là đồ thị con của G_1 nếu $V_2 \subset V_1$ và $E_2 \subset E_1$.

Trong trường hợp $V_1 = V_2$ thì G_2 được gọi là con bao trùm của G_1 .

1.2 Sơ lược nhóm hữu hạn

Định nghĩa 1.2.1. Cho tập hợp S không rỗng trên tập đó đã xác định được phép toán $*$ có tính kết hợp được gọi là nửa nhóm nếu với mọi $a, b \in S, a * b \in S$.

Định nghĩa 1.2.2. Một tập hợp khác rỗng G được gọi là một nhóm nếu trên G xác định được phép toán hai ngôi $*$ có tính kết hợp thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Với mọi $a, b \in G$ thì $a * b \in G$
2. Tồn tại $e \in G$ sao cho $a * e = e * a = a$ với mọi $a \in G$
3. Với mọi $a \in G$ có một phần tử $a^{-1} \in G$ sao cho $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (tồn tại nghịch đảo trong G)

Nhóm G được gọi là nhóm aben (giao hoán) nếu $a * b = b * a$ với mọi $a, b \in G$.

Định nghĩa 1.2.3. Cho $(G, *)$ là một nhóm và H là tập con của G . Nếu $(H, *)$ là một nhóm thì ta gọi H là một nhóm con của G . Nhóm G luôn có ít nhất hai nhóm con tầm thường là $\{1\}$ và G .

Ta nói nhóm con H của G là cực đại nếu $H \neq G$ và $H \subseteq K \subseteq G$, trong đó K là một nhóm con của G thì $K = H$ hoặc $K = G$.

Định nghĩa 1.2.4. Cho $(S_i, \circ)$ là một nửa nhóm. Cho H là một tập con thực sự của S_i . Nếu $(H, \circ)$ là một nhóm thì chúng ta gọi $(S_i, \circ)$ là một nửa nhóm Smaradache, hay S - nửa nhóm.

Định nghĩa 1.2.5. Cho G là một nhóm không giao hoán. Với $h, g \in G$ tồn tại $x \in G$ sao cho $g = xhx^{-1}$ thì ta gọi g và h là liên hợp với nhau. Quan hệ liên hợp là một quan hệ tương đương và lớp tương đương $[g] = \{xgx^{-1} | x \in G\}$.

Định nghĩa 1.2.6. Cho G là một tập hợp khác rỗng. Nếu $*$ là phép toán hai ngôi trên G sao cho với mọi $a, b \in G$, $a * b \in G$ và nếu $a * (b * c) \neq (a * b) * c$, với $a, b, c \in G$ thì ta gọi $(G, *)$ là một phỏng nhóm. Ta gọi $(G, *)$ giao hoán nếu $a * b = b * a$ với mọi $a, b \in G$.

Chú ý 1.2.1. Ta gọi phỏng nhóm G có ước của 0 nếu $a * b = 0$ với $a, b \in G \setminus \{0\}$, $0 \in G$.

Nếu G là một nửa nhóm và tồn tại $e \in G$ sao cho $a * e = e * a = a$ với $a \in G$ thì ta gọi G là một vị nhóm. Nếu $a \in G$ tồn tại $b \in G$ sao cho $a * b = b * a = e$ thì ta nói a là khả nghịch trong G .

Định nghĩa 1.2.7. Nhóm G được gọi là nhóm cyclic nếu nó chứa một phần tử a sao cho mọi phần tử của G đều bằng một lũy thừa nguyên nào đó của a . Phần tử a có tính chất như thế được gọi là phần tử sinh của nhóm cyclic G .

Định nghĩa 1.2.8. Giả sử G là một nhóm với đơn vị e và $a \in G$. Nếu $a^m = e$ với mọi $m > 0$, thì ta nói a có cấp vô hạn. Nếu trái lại, thì số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho $a^m = e$ được gọi là cấp của a .

Định nghĩa 1.2.9. Cấp của nhóm G , kí hiệu $|G|$, là số phần tử của G .

Hệ quả 1.2.1. *Cấp của mọi nhóm cyclic bằng cấp của mọi phần tử sinh của nó.*

Định nghĩa 1.2.10. *Một nhóm con N của G được gọi là chuẩn tắc, kí hiệu $N \triangleleft G$ nếu $gNg^{-1} = N$ với mọi $g \in G$. Ở đây, $gNg^{-1} = \{gxg^{-1} | x \in N\}$.*

Rõ ràng $\{1\}$ và G là hai nhóm con chuẩn tắc của G , gọi là các nhóm con chuẩn tắc tầm thường của G . Nếu G chỉ có hai nhóm con chuẩn tắc tầm thường thì ta nói G là một nhóm đơn.

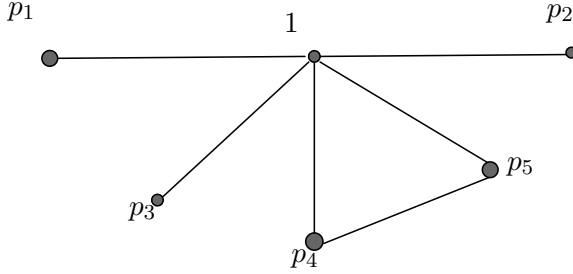
CHƯƠNG 2

BIỂU DIỄN NHÓM HỮU HẠN BẰNG ĐỒ THỊ ĐƠN VỊ

2.1 Định nghĩa và các ví dụ

Định nghĩa 2.1.1. Cho $(G, *)$ là một nhóm. Đồ thị đơn vị của nhóm G là một đơn đồ thị vô hướng, trong đó các đỉnh là các phần tử của G và cạnh liên thuộc hai đỉnh $x, y \in G$ nếu thỏa mãn : $x * y = y * x = e$, với e là phần tử đơn vị của nhóm G . Quy ước mọi phần tử khác đơn vị trong G đều được nối bởi một cạnh với phần tử đơn vị của G .

Ví dụ 2.1.1. Cho $S_3 = \{e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\}$ là nhóm đối xứng bậc 3. Đồ thị đơn vị của S_3 là Hình 2.1.



Hình 2.1: Đồ thị đơn vị của S_3

2.2 Biểu diễn nhóm cyclic bằng đồ thị đơn vị

Định lí 2.2.1. Nếu $G = \langle g | g^p = 1 \rangle$ là nhóm cyclic có cấp p , p là số nguyên tố và $p > 2$. Khi đó đồ thị đơn vị của G có $\frac{p-1}{2}$ tam giác.

Hệ quả 2.2.1. Nếu G là nhóm cyclic có cấp n , với n là số nguyên dương lẻ, $n \geq 3$ thì đồ thị đơn vị của nhóm G chỉ gồm các tam giác mà không có cạnh.

Định lí 2.2.2. Nếu $G = \langle g | g^n = 1 \rangle$ là nhóm cyclic cấp n , với n là số nguyên dương lẻ, $n \geq 3$ thì đồ thị đơn vị của nhóm G được hình thành từ $\frac{n-1}{2}$ tam giác.

Định lí 2.2.3. Nếu $G = \langle g | g^m = 1 \rangle$ là nhóm cyclic cấp m , m là số nguyên dương chẵn, thì đồ thị đơn vị của nhóm G có $\frac{m-2}{2}$ tam giác và có 1 cạnh.

2.3 Biểu diễn nhóm con, nhóm con chuẩn tắc bằng đồ thị đơn vị

Định nghĩa 2.3.1. Cho G là một nhóm. Nếu H là một nhóm con của nhóm G thì đồ thị đơn vị của nhóm H được gọi là được gọi đồ thị con đơn vị đặc biệt của nhóm G .

Định lí 2.3.1. Cho G là một nhóm, ký hiệu G_i là đồ thị đơn vị của nhóm G . Mỗi nhóm con của G có một đồ thị đơn vị, đồ thị này là đồ thị con đơn vị đặc biệt của G_i và mọi đồ thị con đơn vị của G_i nói chung không nhất thiết tương ứng với một nhóm con của G .

Định lí 2.3.2. Cho G là một nhóm hữu hạn, G_i là đồ thị đơn vị biểu diễn nhóm G . Với mỗi d là ước cấp của G , nói chung có thể không có những nhóm con của G có cấp d . Ta có thể nói tương ứng là mỗi đồ thị con đơn vị H_i của G_i nói chung có thể không có một nhóm con của G liên kết với H_i .

Hệ quả 2.3.1. Cho $G = \langle g | g^p = 1 \rangle$ là nhóm cyclic cấp p với p là số nguyên tố, G_i là đồ thị đơn vị biểu diễn G . G có các đồ thị con đơn vị nhưng G không có nhóm con liên kết tương ứng với mỗi đồ thị con đơn vị đó.

Hệ quả 2.3.2. Cho G là nhóm hữu hạn cấp n . G_i là đồ thị đơn vị của G và H là một nhóm con của G có cấp m ($m < n$). Giả sử H_i là đồ thị con đơn vị biểu diễn nhóm H . Khi đó đồ thị con đơn vị của G_i có m đỉnh không nhất thiết là đồ thị con đơn vị liên kết với nhóm con H .

Định lí 2.3.3. Cho $D_{2p} = \{1, a, b | a^2 = b^p = 1; bab = a\} = \{1, a, b, b^2, \dots, b^{p-1}, ab, ab^2, \dots, ab^{p-1}\}$ là nhóm dihedral cấp $2p$, p là

một số nguyên tố lẻ. Gọi G_i là đồ thị đơn vị biểu diễn nhóm D_{2p} với $2p$ đỉnh. Nếu H_i là một đồ thị con đơn vị đặc biệt của G_i với p đỉnh thì H_i được tạo thành từ $(p - 1)/2$ tam giác, trong đó có p đỉnh. G_i có duy nhất H_i là đồ thị đơn vị con đơn vị đặc biệt có p đỉnh.

Định nghĩa 2.3.2. Cho G là một nhóm, G_i là đồ thị đơn vị biểu diễn nhóm G và H là nhóm con chuẩn tắc của G có đồ thị đơn vị H_i thì H_i là đồ thị con đơn vị đặc biệt của G , đồ thị này được gọi là đồ thị con chuẩn tắc đơn vị đặc biệt của G_i .

Nếu G không có nhóm con chuẩn tắc không tầm thường thì ta định nghĩa đồ thị đơn vị G_i là đồ thị đơn vị đơn vị.

2.4 Ma trận liên kề của đồ thị đơn vị biểu diễn nhóm

Định nghĩa 2.4.1. Cho G là một nhóm với các phần tử $e, g_1, g_2, \dots, g_n$. Rõ ràng cấp của G là $n+1$. Cho G_i là đồ thị đơn vị của G . Ma trận liên kề của G_i là ma trận vuông $X = (x_{ij})$ cấp $n+1$, Với các phần tử trên đường chéo là 0, nghĩa là $x_{ii} = 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n+1$, dòng đầu và cột đầu là 1; ngoài ra $x_{ij} = 1$ nếu g_i là phần tử nghịch đảo của g_j , trong trường hợp này $x_{ij} = x_{ji} = 1$ với $i \neq j$. Ta còn gọi ma trận $X = (x_{ij})$ cấp $n+1$ là ma trận đồ thị đơn vị của nhóm G .

Nhận xét:

Ta thấy X là ma trận đối xứng với các phần tử trên đường chéo bằng 0.

Nếu dòng g_i chỉ có một số 1 ở cột đầu tiên thì g_i thỏa mãn $g_i^2 = 1$.

Nếu dòng g_i có hai số 1 và còn lại là 0 thì tồn tại dòng g_k có hai số 1 và $g_j \cdot g_k = g_k \cdot g_j = 1$.

Nhận xét này cũng đúng đối với cột.

2.5 Đồ thị của một nhóm theo các phần tử liên hợp

Định nghĩa 2.5.1. Cho G là một nhóm không giao hoán với các phần tử: $e, g_1, g_2, \dots, g_n$. Các lớp tương đương theo quan hệ liên hợp của G ký hiệu là: $[e], [g_1], [g_2], \dots, [g_n]$, thì với mỗi phần tử h_i thuộc lớp tương đương $[g_i]$ được nối với g_i , với $i = 1, 2, \dots, n$. Đồ thị này được gọi là đồ thị liên hợp của các lớp liên hợp trong một nhóm không giao hoán.

Định lí 2.5.1. Cho $D_{2p} = \{a, b | a^2 = b^p = 1, bab = a\}$ là một nhóm dihedral cấp $2p$, p là số nguyên tố lẻ. Các lớp liên hợp của D_{2p} tạo thành một họ các đồ thị đầy đủ với $(p-1)/2$ đồ thị đầy đủ với 2 đỉnh và một đồ thị đầy đủ với p đỉnh.

Định lí 2.5.2. Cho $D_{2n} = \{a, b | a^2 = b^n = 1, bab = a\}$, với n là số nguyên dương chẵn ($n = 2r$). Khi đó đồ thị liên hợp của D_{2n} có hai đồ thị 1 đỉnh, $(n-2)/2$ đồ thị đầy đủ có 2 đỉnh và hai đồ thị đầy đủ với r đỉnh.

Định lí 2.5.3. Cho G là một nhóm hữu hạn không giao hoán. Khi đó đồ thị liên hợp của G luôn là một họ các đồ thị đầy đủ.

Chứng minh: Nếu x liên hợp với p phần tử $g_1, g_2, \dots, g_p$ thì mỗi g_i liên hợp với p phần tử $x, g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_p$. Do đó lớp liên hợp $[x]$ ứng với đồ thị đầy đủ $p+1$ đỉnh.

CHƯƠNG 3

TÔ MÀU ĐỒ THỊ ĐƠN VỊ BIỂU DIỄN NHÓM

3.1 Tô màu đồ thị đơn vị biểu diễn nhóm theo lớp các nhóm con

Định nghĩa 3.1.1. Cho G là một nhóm, $S = \{H_1, H_2, \dots, H_n \mid H_i \text{ là các nhóm con của } G \text{ thỏa mãn } H_i \not\subseteq H_j, H_j \not\subseteq H_i \text{ và } H_i \cap H_j = \{e\} \text{ với } G = \bigcup_{i=1}^n H_i, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ nghĩa là nhóm con H_i không là nhóm con của H_j với mọi $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$.

Ta gọi S là một lớp của nhóm G , nếu G chứa một lớp có n phần tử và mọi lớp của G có nhiều nhất n phần tử. Nếu G có một lớp có n phần tử thì ta gọi lớp của $G = n$, nếu $n = \infty$ thì ta gọi lớp của $G = \infty$. Ta qui ước rằng tất cả các đỉnh của mỗi nhóm con H_i là được cho cùng màu. Phần tử đơn vị mà tất cả các nhóm con đều chứa nó, có thể được cho một màu nào đó trong các màu của các nhóm con H_i .

Xét ánh xạ $C: S \longrightarrow T$ thỏa mãn $C(H_i) \neq C(H_j)$ với bất cứ nhóm con H_i và H_j liên kề trong đồ thị đơn vị biểu diễn nhóm G và tập T gọi là tập giá trị màu. Gọi k là số nguyên dương nhỏ

nhất sao cho S được tô bởi k màu, ta có ánh xạ tô màu $C: S \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Số k này được gọi là sắc số đơn vị đặc biệt của nhóm G và kí hiệu là $\chi(S)$. Đồ thị đơn vị G_i với $\chi(S) = k$ được gọi là k - sắc số, nếu $\chi(S) \leq k$ thì nhóm G gọi là có thể tô k màu.

Định nghĩa 3.1.2. Cho G là một nhóm hữu hạn có cấp hữu hạn (hoặc vô hạn). $S = \{H_1, H_2, \dots, H_n \mid H_i \text{ là các nhóm con của } G \text{ thỏa mãn } H_i \not\subseteq H_j, H_j \not\subseteq H_i \text{ và } H_i \cap H_j = \{e\} \text{ với } i \neq j \text{ và } G = \bigcup_{i=1}^n H_i\}$, nghĩa là lớp của nhóm tồn tại và G được tô màu thì ta nói G là một nhóm tốt về mặt đồ thị. Nếu G không có lớp thì ta gọi G là một nhóm xấu về mặt đồ thị và các đồ thị con đơn vị của G_i tương ứng với các nhóm con đó được gọi là đồ thị con đơn vị xấu đặc biệt G_i của G .

3.2 Tô màu đồ thị con đơn vị đặc biệt

Định nghĩa 3.2.1. Cho G là một nhóm có cấp hữu hạn. Nếu G chỉ có một nhóm con không tầm thường H_i sao cho $H_i \not\subseteq H_j$ với duy nhất $j, j \neq i$; nghĩa là, G có một và chỉ một nhóm con cực đại. Khi đó trong trường hợp như thế ta chỉ phải cho một màu đối với đồ thị con đơn vị đặc biệt của nhóm con này.

Ta gọi tình huống này là một đồ thị con đơn vị đặc biệt có thể tô màu duy nhất và gọi G là nhóm xấu có thể tô màu duy nhất. Rõ ràng nhóm này là nhóm có thể tô màu xấu. Tuy nhiên, mọi đồ thị con đơn vị đặc biệt có thể tô màu xấu nói chung không là một đồ thị con đơn vị đặc biệt có thể tô màu đặc biệt duy nhất.

Định lí 3.2.1. Cho $G = \langle g \mid g^{p^2} = 1 \rangle$, trong đó p là một số nguyên tố, là một nhóm cyclic cấp p^2 . Khi đó G là một nhóm xấu có thể tô màu duy nhất.

Định lí 3.2.2. Cho $G = \langle g | g^{p^n} = 1 \rangle$, trong đó p là một số nguyên tố, n là số nguyên, $n \geq 2$, là nhóm cyclic cấp p^n . Khi đó G là một nhóm xấu về mặt đồ thị có thể tô một màu.

Định lí 3.2.3. Cho $G = \langle g | g^n = 1 \rangle$, trong đó $n = pq$ với p và q là hai số nguyên tố khác nhau, là một nhóm cyclic cấp n . Khi đó G là một nhóm xấu có thể tô hai màu.

3.3 Tô màu đồ thị con đơn vị biểu diễn nhóm theo lớp các nhóm con chuẩn tắc

Định nghĩa 3.3.1. Cho G là một nhóm. Giả sử $N = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ với $N_1, N_2, \dots, N_n$ là nhóm con chuẩn tắc của G sao cho $G = \bigcup_{i=1}^n N_i$, $N_i \cap N_j = \{1\}$, $N_i \not\subseteq N_j$ và $N_j \not\subseteq N_i$ với $i \neq j$. Ta gọi N là lớp các nhóm con chuẩn tắc của G và nếu có nhiều nhất n phần tử thì ta gọi lớp của G là n . Nếu kích thước của lớp là không bị chặn thì ta nói lớp chuẩn tắc của G là ∞ .

Sắc số của đồ thị đơn vị đặc biệt G_i của G ký hiệu là $\chi(G)$ là số k nhỏ nhất sao cho $N_1, N_2, \dots, N_n$ chấp nhận k màu trong đó một màu được cho các đỉnh của một nhóm con N_i của G với $i=1, 2, \dots, n$.

Ta gọi các nhóm như thế là các nhóm tốt chuẩn tắc có thể tô k màu.

Định nghĩa 3.3.2. Cho G là một nhóm, nếu G không có các nhóm con chuẩn tắc N_i sao cho $G = \bigcup_{i=1}^n N_i$ và $N_i \cap N_j = \{1\}$ với $i \neq j$ thì ta nói G là nhóm con xấu chuẩn tắc có thể tô k màu, $0 \leq k \leq n$. Nếu $k=1$ thì ta nói G là nhóm xấu chuẩn tắc có thể tô một màu. Nếu $k=2$ thì ta nói G là nhóm xấu chuẩn tắc có thể tô

hai màu. Nếu $k=t$ thì ta nói G là nhóm xâu có thể tô t màu. Nếu $k=0$ thì ta nói G là nhóm xâu có thể tô 0 màu.

Định lí 3.3.1. *Họ các nhóm xâu chuẩn tắc có thể tô 0 màu là khác rỗng.*

Định lí 3.3.2. *Cho $G = \langle g | g^{p^n} = 1 \rangle$, với p là số nguyên tố và $n \geq 2$, là nhóm cyclic cấp p^n . Khi đó G là nhóm xâu chuẩn tắc có thể tô một màu.*

Định lí 3.3.3. *Cho $G = \langle g | g^{pq} = 1 \rangle$, trong đó p và q là hai số nguyên tố khác nhau, là một nhóm cyclic cấp pq . Khi đó G là nhóm xâu chuẩn tắc có thể tô hai màu.*

KẾT LUẬN

Qua một thời gian tìm hiểu, tiếp cận và nghiên cứu về biểu diễn nhóm hữu hạn bằng đồ thị, luận văn đã hoàn thành và đạt được mục tiêu nghiên cứu của đề tài với những kết quả cụ thể như sau:

Biểu diễn nhóm hữu hạn bằng đồ thị đơn vị.

Biểu diễn nhóm con, nhóm con chuẩn tắc của một nhóm hữu hạn bằng đồ thị con đơn vị đặc biệt.

Biểu diễn các lớp liên hợp của một nhóm bằng đồ thị.

Biểu diễn nhóm hữu hạn bằng ma trận liên kề.

Tô màu đồ thị đơn vị của nhóm tốt và nhóm xấu.

Tô màu đồ thị đơn vị của nhóm tốt chuẩn tắc và nhóm xấu chuẩn tắc.

Minh họa các điều trên bằng các nhóm cyclic hữu hạn, nhóm đối xứng, nhóm thay phiên, nhóm dihedral.

Do hạn chế về mặt thời gian và khuôn khổ luận văn được ấn định nên có một số vấn đề thú vị và hấp dẫn không đưa vào được trong luận văn, đó là vấn đề đồ thị đơn vị của một số cấu trúc đại số như nửa nhóm, S - nửa nhóm, nửa vành, S - nửa vành. Chúng tôi hy vọng sẽ tiếp tục nghiên cứu phát triển đề tài theo hướng này.

Luận văn này là một tài liệu bổ ích cho chính bản thân tác giả và hy vọng cũng là sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích cho những ai quan tâm đến lĩnh vực lý thuyết nhóm hữu hạn và biểu diễn nhóm hữu hạn bằng đồ thị. Trong phần trình bày của chúng tôi chắc chắn không tránh khỏi các thiếu sót. Vì vậy, chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý, nhận xét của các thầy cô và đồng nghiệp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

- [1] Nguyễn Gia Định (2003), *Toán học rời rạc*, Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế.
- [2] Nguyễn Gia Định (2007), *Bài giảng lý thuyết nhóm*, Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế.
- [3] Nguyễn Hữu Việt Hưng (2004), *Đại số đại cương*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

Tiếng Anh

- [4] Aschbacher (2000), *Finite group theory*, Cambridge University Press.
- [5] B. Baumslag, B. Chandler (1968), *Theory and Problems of Group Theory*, McGraw Hill.
- [6] Charles F. Miller III (2004), *Combinatorial Group Theory*, University of Melbourne.
- [7] J.S. Milne (2003), *Group Theory*, www.jmilne.org/math/.

- [8] M. Hall (1959), *The theory of groups*, Macmillan, New York.
- [9] M. Suzuki (1982), *Group theory I, II*, Springer-Verlag.
- [10] Reinhard Diestel (2000), *Graph Theory*, Electronic Edition 2000, Springer-Verlag, New York.
- [11] W.B. Vasantha Kandasamy (2009), *Groups as Graph*, Editura CuArt, <http://mat.iitm.ac.in/~wbv>, www.vasantha.in.