

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

PHAN DƯƠNG CẨM VÂN

**BIỂU DIỄN TÍNH ỔN ĐỊNH MŨ CỦA HỌ TIẾN HÓA
DƯỚI DẠNG CHẤP NHẬN ĐƯỢC
CỦA KHÔNG GIAN ORLICZ**

Chuyên ngành : **Toán Giải Tích**
Mã số : **60 46 01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS LÊ HOÀN HÓA**

Thành phố Hồ Chí Minh - 2010

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên tôi xin bày tỏ lòng tri ân sâu sắc đối với Thầy **PGS.TS. Lê Hoàn Hóa** – Khoa Toán – Tin học, Trường Đại học Sư Phạm TP.HCM đã hướng dẫn, động viên và giúp đỡ tôi tận tình trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến quý Thầy, Cô trong Hội đồng chấm luận văn đã dành thời gian đọc, chỉnh sửa và đóng góp ý kiến giúp tôi hoàn thành luận văn này một cách hoàn chỉnh.

Tôi chân thành cảm ơn các Ban chủ nhiệm Khoa Toán – Tin học Trường Đại học Sư phạm TP.Hồ Chí Minh, các Thầy, Cô đã tận tình tham gia giảng dạy tôi trong lớp cao học Giải Tích khóa 18 và Phòng KHCN – SDH Trường Đại học Sư phạm TP.Hồ Chí Minh.

Tôi gửi lời cảm ơn đến Ban Giám Hiệu, các đồng nghiệp tổ bộ môn Toán trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong công tác để tôi có thể tham gia đầy đủ các khóa học cũng như hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng gửi lời cảm ơn đến tất cả các bạn trong lớp Cao học khóa 18.

Cuối cùng, trong quá trình viết luận văn này, khó tránh khỏi những thiếu sót, tôi mong nhận được những ý kiến đóng góp của bạn đọc. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về email: phanduongcam_van@yahoo.com

Xin chân thành cảm ơn.

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài :

Hiện nay , vấn đề nửa nhóm và họ tiến hóa trong không gian Banach là hướng nghiên cứu lớn của toán học hiện đại . Nhiều nhà toán học trên thế giới đã và đang tiếp tục nghiên cứu phát triển vấn đề này theo nhiều hướng khác nhau . Đặc biệt một số nhà toán học quan tâm nghiên cứu tính ổn định mũ của họ tiến hóa trong không gian Orlicz .

Vì vậy chúng tôi chọn đề tài này làm nội dung nghiên cứu của luận văn nhằm học tập và phát triển đề tài theo hướng nghiên cứu trên

2. Mục đích :

Luận văn nghiên cứu tính ổn định mũ của họ tiến hóa trong không gian Orlicz thông qua nghiệm của bài toán Cauchy

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận văn trình bày lại kết quả bài báo “ A Characterization of The Exponential Stability of Evolutionary Processes in Terms of The Admissibility of Orlicz Space ” của ba tác giả C.Chilarescu – A .Pogan –C.Preda nhưng chứng minh chi tiết hơn .

4. Ý nghĩa khoa học thực tiễn

Kết quả của luận văn này là cơ sở tiếp tục nghiên cứu các tính chất khác của nghiệm phương trình vi phân với tính ổn định mũ của họ tiến hóa.

NỘI DUNG ĐỀ TÀI

Chương 1: Trình bày những kiến thức cơ bản liên quan đến họ tiến hóa và một số phương trình vi phân

Chương 2 : Trình bày định nghĩa không gian Orlicz , các tính chất và kết quả có được trong không gian này .

Chương 3 : Biểu diễn tính ổn định mũ của họ tiến hóa dưới dạng chấp nhận được trong không gian Orlicz.

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1.1 NỬA NHÓM LIÊN TỤC ĐỀU CÁC TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH BỊ CHẶN

Định nghĩa 1.1.1:

Cho X là không gian Banach. Họ tham số $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ của các toán tử tuyến tính bị chặn từ X vào X được gọi là nửa nhóm các toán tử tuyến tính bị chặn trên X nếu

i) $T(0) = I$ (I là toán tử đồng nhất trên X)

ii) $T(t+s) = T(t) \cdot T(s)$ với mọi $t, s \geq 0$

Một nửa nhóm các toán tử tuyến tính bị chặn $T(t)$ gọi là liên tục đều nếu

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - I\| = 0 \quad (1.1)$$

Từ định nghĩa rõ ràng ta có :

Nếu $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, là một nửa nhóm liên tục đều các toán tử tuyến tính bị chặn thì

$$\lim_{s \rightarrow t} \|T(s) - T(t)\| = 0 \quad (1.2)$$

Định nghĩa 1.1.2 :

Cho $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ là một nửa nhóm liên tục đều các toán tử tuyến tính bị chặn xác định trên X . Với $h > 0$ ta định nghĩa toán tử tuyến tính A_h xác định như sau :

$$A_h x = \frac{T(h)x - x}{h}, x \in X \quad (1.3)$$

Kí hiệu $D(A)$ là tập tất cả các $x \in X$ sao cho giới hạn $\lim_{h \rightarrow 0} A_h x$ tồn tại, ta xác định toán tử A trên $D(A)$ như sau :

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0} A_h x, x \in D(A) \quad (1.4)$$

Ta gọi toán tử A xác định như trên là toán tử sinh cực vi của nửa nhóm $T(t)$ và $D(A)$ là tập xác định của A

Định lí 1.1.3:

Một toán tử tuyến tính A là toán tử sinh của nửa nhóm liên tục đều nếu và chỉ nếu A là toán tử tuyến tính bị chặn

Chứng minh :

Cho A là toán tử tuyến tính bị chặn trên X và đặt

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \quad (1.5)$$

Vế phải của (1.5) hội tụ theo chuẩn với mọi $t \geq 0$ và xác định với mỗi t một toán tử tuyến tính bị chặn $T(t)$

Rõ ràng là $T(0) = I$ với cách tính trực tiếp trên chuỗi lũy thừa trên ta thấy

$$T(s+t) = T(s).T(t)$$

Tiến hành đánh giá chuỗi lũy thừa trên ta có :

$$\|T(t) - I\| \leq t \|A\| e^{t\|A\|}$$

và
$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq \|A\| \cdot \|T(t) - I\|$$

Từ đó suy ra rằng $T(t)$ là nửa nhóm liên tục đều của toán tử tuyến tính bị chặn xác định trên X và A là toán tử sinh của $T(t)$

Mặt khác cho $T(t)$ là nửa nhóm liên tục đều của toán tử tuyến tính bị chặn xác định trên X . Cố định $\rho > 0$, đủ nhỏ sao cho:

$$\left\| I - \rho^{-1} \int_0^{\rho} T(s) ds \right\| < 1$$

Suy ra rằng $\rho^{-1} \int_0^{\rho} T(s) ds$ là khả nghịch và vì vậy $\int_0^{\rho} T(s) ds$ là khả nghịch

Bây giờ

$$\begin{aligned} h^{-1} (T(h) - I) \int_0^{\rho} T(s) ds &= h^{-1} \left[\int_0^{\rho} T(s+h) ds - \int_0^{\rho} T(s) ds \right] \\ &= h^{-1} \left[\int_0^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^{\rho} T(s) ds \right] \end{aligned}$$

$$\text{Vì vậy } h^{-1} (T(h) - I) = h^{-1} \left[\int_0^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^{\rho} T(s) ds \right] \left[\int_0^{\rho} T(s) ds \right]^{-1} \quad (1.6)$$

Cho $h \rightarrow 0$ trong (1.6) ta thấy $h^{-1}(T(h) - I)$ là hội tụ theo chuẩn và vì vậy đủ mạnh để

toán tử tuyến tính bị chặn $(T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}$ là toán tử sinh của $T(t)$

Vậy nửa nhóm $T(t)$ có một toán tử sinh A thì có duy nhất không? Trả lời câu hỏi này ta xem định lý sau:

Định lý 1.1.4:

Cho $T(t)$ và $S(t)$ là nửa nhóm liên tục đều các toán tử tuyến tính bị chặn.

$$\text{Nếu } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - I}{t} \quad (1.7)$$

thì $T(t) = S(t)$ với mỗi $t \geq 0$

Chứng minh :

Cho $T > 0$, $S(t) = T(t)$, với $0 \leq t \leq T$. Cố định $T > 0$, khi $t \rightarrow \|T(t)\|$ và $t \rightarrow \|S(t)\|$ là liên tục thì tồn tại hằng số C sao cho :

$$\|T(t)\| \cdot \|S(t)\| \leq C \quad \text{với } 0 \leq t, s \leq T$$

Từ (1.7) cho $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho :

$$h^{-1} \|T(h) - S(h)\| < \frac{\varepsilon}{TC} \quad \text{với } 0 \leq h \leq \delta \quad (1.8)$$

Cho $0 \leq t \leq T$ và chọn $n \geq 1$ sao cho $\frac{t}{n} < \delta$, từ tính chất của nửa nhóm và (1.8) ta có :

$$\begin{aligned} \|T(t) - S(t)\| &= \left\| T\left(n \frac{t}{n}\right) - S\left(n \frac{t}{n}\right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k) \frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1) \frac{t}{n}\right) S\left(\frac{k+1}{n} t\right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1) \frac{t}{n}\right) \right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S\left(\frac{kt}{n}\right) \right\| \\ &\leq Cn \frac{\varepsilon}{TC} \frac{t}{n} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Vậy $S(t) = T(t)$, với $0 \leq t \leq T$

Do hai định lý trên ta có kết quả sau:

- $T(t)$ là nửa nhóm liên tục đều của toán tử tuyến tính bị chặn. ta có
- Tồn tại hằng số $\omega \geq 0$ sao cho $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$

- Tồn tại toán tử tuyến tính bị chặn duy nhất A sao cho $T(t) = e^{tA}$
- Toán tử A trong phần b là toán tử sinh của $T(t)$
- $t \rightarrow T(t)$ là khả vi với chuẩn và $\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A$

1.2 NỬA NHÓM LIÊN TỤC MẠNH CÁC TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH BỊ CHẶN

Định nghĩa 1.2.1

Một nửa nhóm $T(t)$ $0 \leq t < \infty$ của các toán tử tuyến tính bị chặn từ X vào X được gọi là nửa nhóm liên tục mạnh nếu:

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x \text{ với mọi } x \in X \quad (1.9)$$

Một nửa nhóm liên tục mạnh các toán tử tuyến tính bị chặn trên X sẽ được gọi là một nửa nhóm của lớp C_0 hay gọi tắt là nửa nhóm C_0

Định lí 1.2.2 :

Cho $T(t)$ là nửa nhóm C_0 , khi đó tồn tại hằng số $\omega > 0$ và $M \geq 1$ sao cho

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \text{ với } 0 \leq t < \infty \quad (1.10)$$

Chứng minh :

Trước tiên ta thấy rằng có một số $\eta > 0$ sao cho $\|T(t)\|$ là bị chặn trong $0 \leq t \leq \eta$.

Thật vậy nếu điều này sai thì ta có dãy $\{t_n\}$ thỏa

$$t_n \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0 \text{ và } \|T(t_n)\| \geq n$$

Khi đó áp dụng định lí bị chặn đều ta thấy tồn tại $x \in X$ sao cho $\|T(t_n)x\|$ là không bị chặn, mâu thuẫn với (1.9).

Vậy $\|T(t)\| \leq M$ với $0 \leq t \leq \eta$

Ta có $\|T(0)\| = 1, M \geq 1$. Cho $\omega = \eta^{-1} \log M \geq 0$. Cho $t \geq 0$

Ta có $t = n\eta + \delta$, với $0 \leq \delta \leq \eta$.

Áp dụng tính chất nửa nhóm ta có :

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq M.M^{\frac{t}{\eta}} = Me^{\omega t} \quad (\text{đpcm})$$

Hệ quả 1.2.3:

Cho $T(t)$ là nửa nhóm C_0 thì với mọi $x \in X$, $t \rightarrow T(t)x$ là một hàm liên tục từ $(0; \infty)$ vào X

Chứng minh :

Cho $t, h \geq 0$ ta có :

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \leq Me^{\omega t} \|T(h)x - x\|$$

Và cho $t \geq h \geq 0$

$$\|T(t-h)x - T(t)x\| \leq \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\| \leq Me^{\omega t} \|x - T(h)x\|$$

Vậy $t \rightarrow T(t)x$ liên tục

Định lí 1.2.4:

Cho $T(t)$ là nửa nhóm C_0 và A là toán tử sinh của nó .

Ta có

$$a) \text{ Với } x \in X, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x \quad (1.11)$$

b) Với $x \in X$

$$\text{Ta có } T(t)x \in D(A) \text{ và } A \left(\int_0^t T(s)x \, ds \right) = T(t)x - x \quad (1.12)$$

c) Cho $x \in D(A)$. Ta có $T(t)x \in D(A)$

$$\text{và } \frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax \quad (1.13)$$

d) Cho $x \in D(A)$, ta có

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(r)Ax \, dr = \int_s^t AT(r)x \, dr \quad (1.14)$$

Chứng minh :

a) Phần này được suy ra trực tiếp từ tính liên tục của $t \rightarrow T(t)x$

b) Cho $x \in X$ và $h > 0$. ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) \int_0^t T(s)x \, ds &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(h+s)x - T(s)x) \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \, ds \end{aligned}$$

và khi $h \rightarrow 0$ về phải sẽ tiến đến $T(t)x - x$, ta có điều phải chứng minh

c) Cho $x \in D(A)$, và $h > 0$, ta có

$$\frac{T(h) - I}{h} T(t)x = T(t) \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) x \rightarrow T(t)Ax \text{ khi } h \rightarrow 0$$

Vì vậy $T(t)x \in D(A)$ và $AT(t)x = T(t)Ax$ nên suy ra rằng

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

Nghĩa là đạo hàm bên phải của $T(t)x$ là $T(t)Ax$. Chứng minh (1.13) ta phải thấy rằng cho $t > 0$, đạo hàm bên trái của $T(t)x$ tồn tại và bằng $T(t)Ax$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} T(t-h) \left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right] + \lim_{h \rightarrow 0} [T(t-h)Ax - T(t)Ax] = 0 \end{aligned}$$

Vi:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} T(t-h) \left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right] = 0 \text{ do } x \in D(A) \text{ và } \|T(t-h)\| \text{ bị chặn trên } 0 \leq h \leq t \\ & \text{và } \lim_{h \rightarrow 0} [T(t-h)Ax - T(t)Ax] = 0 \text{ do tính liên tục mạnh của } T(t) \end{aligned}$$

d) Ta chỉ cần lấy tích phân từ s đến t hai vế của (1.13) sẽ có điều phải chứng minh

1.3 NỬA NHÓM CÁC TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH VÀ BÀI TOÁN CAUCHY

Cho X là không gian Banach và cho A là toán tử tuyến tính từ $D(A) \subset X$ vào X . Cho $x \in X$, bài toán Cauchy của A với giá trị đầu x là :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \quad (1.15)$$

Nghiệm của bài toán trên là hàm $u(t)$ thỏa :

- có giá trị trong X
- $u(t)$ liên tục với mọi $t \geq 0$, khả vi liên tục
- $u(t) \in D(A)$ với mọi $t > 0$

- thỏa (1.15)

Rõ ràng, nếu A là toán tử sinh của nửa nhóm $_{C_0} T(t)$ thì bài toán Cauchy theo A có nghiệm $u(t) = T(t)x$ với mọi x thuộc $D(A)$.

Thật vậy định lý 1.2.4 thì $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$ và $T(0)x = x$

Bây giờ ta xét xem bài toán giá trị đầu không thuần nhất

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t) & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \quad (1.16)$$

Với $f: [0, T) \rightarrow X$, A là toán tử sinh của nửa nhóm $_{C_0} T(t)$ sao cho phương trình thuần nhất tương ứng có nghiệm duy nhất với mọi giá trị đầu $x \in D(A)$

Định nghĩa 1.3.1:

Một hàm $u: [0, T) \rightarrow X$ là nghiệm mạnh của 1.16 trên $[0, T)$ nếu :

- u liên tục trên $[0, T)$
- u khả vi liên tục trên $(0, T)$
- $u(t) \in D(A)$ với $0 < t < T$
- thỏa 1.16 trên $[0, T)$

Cho $T(t)$ là nửa nhóm $_{C_0}$ được sinh bởi A và cho u là một nghiệm của (1.16). Khi đó hàm có giá trị trong X là $g(s) = T(t-s)u(s)$ là khả vi với $0 < s < t$ và

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Nếu $f \in L^1((0, T): X)$ thì $T(t-s)f(s)$ khả tích và lấy tích phân (1.17) từ 0 đến t ta có :

$$\begin{aligned} T(t-s)u(s) \Big|_0^t &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ \Rightarrow u(s) - T(t)x &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ \Rightarrow u(s) &= T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \end{aligned} \quad (1.18)$$

Từ định nghĩa trên ta thấy nếu $f \in L^1((0, T); X)$ thì với mọi $x \in X$, bài toán giá trị đầu (1.16) có nhiều nhất một nghiệm, nếu nó có nghiệm thì nghiệm này được cho bởi (1.18)

Định nghĩa 1.3.2:

Cho A là toán tử sinh của nửa nhóm $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Cho $x \in X$ và $f \in L^1(0, T; X)$. Hàm $u \in C([0, T]; X)$ được cho bởi :

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad 0 \leq t \leq T$$

là một nghiệm yếu (mild solution) của bài toán giá trị đầu (1.16)

Tham khảo [1]

Định lý 1.3.3:

Cho A là toán tử sinh của nửa nhóm $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Cho $f \in L^1(0, T; X)$ liên tục trên $[0, T]$

và cho $v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad 0 \leq t \leq T$.

Bài toán (1.16) có nghiệm mạnh u trên $[0, T]$ với mọi $x \in D(A)$ nếu một trong hai điều kiện sau được thỏa :

- i) $v(t)$ là khả vi liên tục trên $(0, T)$
- ii) $v(t) \in D(A)$ với $0 < t < T$ và $Av(t)$ liên tục trên $(0, T)$

Nếu bài (1.16) có nghiệm u trên $[0, T]$ với mọi $x \in D(A)$ nào đó thì $v(t)$ sẽ thỏa cả hai điều kiện i) và ii)

Hệ quả 1.3.4:

Cho A là toán tử sinh của nửa nhóm $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Nếu $f(s)$ là khả vi liên tục trên $[0, T]$ thì bài toán (1.16) có nghiệm mạnh u trên $[0, T]$ với mọi $x \in D(A)$.

1.4. HỌ TIẾN HÓA TRÊN KHÔNG GIAN BANACH

Định nghĩa 1.4.1:

Cho X là không gian Banach

$L(X) = \{f : X \rightarrow X, f \text{ tuyến tính liên tục}\}$, trên $L(X)$ xác định chuẩn sau

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|f(x)\|_X. \text{ Khi đó ta có } (L(X), \|\cdot\|) \text{ là không gian Banach}$$

Họ $\mathcal{U} = \{U(t,s)\}_{t \geq s \geq 0} \subset L(X)$ các toán tử tuyến tính bị chặn trên X được gọi là họ

tiến hóa trên $\mathbb{R}_+$ nếu và chỉ nếu :

$$e_1) \quad U(t,t) = I \quad \forall t \geq 0$$

$$e_2) \quad U(.,s) \text{ liên tục trên } [s; \infty) \quad \forall s \geq 0 \quad \forall x \in X$$

$$U(t,.) \text{ liên tục trên } [0; t] \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in X$$

$$e_3) \quad U(t,s) = U(t,r)U(r,s) \quad \forall t \geq r \geq s \geq 0$$

$$e_4) \quad \exists \text{ số } M, \omega > 0 \text{ sao cho : } \|U(t,s)\| \leq M e^{\omega(t-s)} \quad \forall t \geq s \geq 0$$

Nếu e_4 đúng với $\omega < 0$ thì họ tiến hóa $\mathcal{U}$ gọi là ổn định mũ đều

(**uniformly exponentially stable** , gọi tắt là **u.e.s**)

Như vậy ta có thể phát biểu như sau : họ tiến hóa $\mathcal{U} = \{U(t,s)\}_{t \geq s \geq 0}$ được gọi là ổn

định mũ đều nếu tồn tại 2 hằng số dương N, v sao cho thỏa điều kiện sau :

$$\|U(t,s)\| \leq N.e^{-v(t-s)} \quad (1.19)$$

Nếu họ tiến hóa $\mathcal{U}$ thỏa thêm điều kiện sau :

$$e_5) \quad U(t,s) = U(t-s; 0) \quad \forall t \geq s \geq 0$$

thì họ $T = \{U(t,0) : t \geq 0\} \subset L(X)$ là một nửa nhóm liên tục mạnh trên X .

Trong trường hợp này e_4 là hiển nhiên đúng.

Cho bài toán non- autonomous

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) & t \geq 0 \\ u(0) = x & x \in X \end{cases}$$

Với $A(t)$ là toán tử tuyến tính (có thể không bị chặn)

Nghiệm yếu của hệ phương trình trên dẫn đến họ tiến hóa trên $\mathbb{R}_+$

$$U = \{U(t,s) : t \geq s \geq 0\} \subset L(X)$$

Chương 2

KHÔNG GIAN ORLICZ VÀ MỐI LIÊN HỆ VỚI KHÔNG GIAN L^p, L^∞

2.1 NHẮC LẠI MỘT SỐ KHÔNG GIAN HÀM .

Cho X là không gian Banach , f là hàm đo được Bochner

$$M(\mathbb{R}_+, X) = \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X, \text{đo được Bochner}\}$$

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, X) = \left\{ f \in M(\mathbb{R}_+, X) : \int_K \|f(t)\| dt < +\infty, K \subset \mathbb{R}_+, K \text{ compact} \right\}$$

$$L^p(\mathbb{R}_+, X) = \left\{ f \in M(\mathbb{R}_+, X) : \int_{\mathbb{R}_+} \|f(t)\|^p dt < +\infty, p \in [1; \infty) \right\}$$

$$L^\infty(\mathbb{R}_+, X) = \left\{ f \in M(\mathbb{R}_+, X) : \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}_+} \|f(t)\| < +\infty \right\}$$

Ta biết $L^p(\mathbb{R}_+, X), L^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ là không gian Banach với các chuẩn tương ứng sau :

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}_+} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{và} \quad \|f\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}_+} \|f(t)\|$$

Các kí hiệu đơn giản :

$$L^p = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \quad p \in [1; \infty)$$

$$L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

$$L^1_{\text{loc}} = L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

2.2 KHÔNG GIAN ORLICZ.

Định nghĩa 2.2.1

Cho $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, φ không giảm, liên tục trái và có tính chất $\varphi(t) > 0, \forall t > 0$

$$\phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds \quad \text{gọi là Young function}$$

Nhận xét về hàm ϕ :

$$\forall 0 < t_1, t_2 \text{ ta có } \phi(t_1) = \int_0^{t_1} \varphi(s) ds, \quad \phi(t_2) = \int_0^{t_2} \varphi(s) ds$$

* $\forall 0 < t_1 \leq t_2$ ta có $\phi(t_1) \leq \phi(t_2)$. Hàm ϕ không giảm

$$\text{Do } \phi(t_2) = \int_0^{t_2} \phi(s) ds = \int_0^{t_1} \phi(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} \phi(s) ds = \phi(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \phi(s) ds \geq \phi(t_1)$$

* $\phi(t) > 0, \forall t > 0 \Rightarrow \phi(t) = \int_0^t \phi(s) ds > 0, \forall t > 0$

* Đạo hàm $\phi'(t) = \phi(t)$ với hầu hết $t > 0$

Do ϕ là hàm không giảm, liên tục trái nên ϕ là hàm biến thiên bị chặn, theo một kết quả trong “Giải tích hiện đại” của Hoàng Tụy thì ϕ có đạo hàm hầu khắp nơi và $\phi'(t) \geq 0, \forall t > 0$

Vậy $\phi''(t) = \phi'(t)$ hầu khắp nơi, suy ra ϕ là hàm lồi, nghĩa là :

$$\phi[\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2] \leq \lambda \phi(t_1) + (1-\lambda)\phi(t_2) \quad \forall t_1, t_2 > 0$$

Do tính chất hàm lồi ta có :

$$\phi\left(\frac{|f|+|g|}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\phi(|f|) + \frac{1}{2}\phi(|g|) \quad (2.1)$$

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i |f_i|\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(|f_i|) \quad , 0 \leq \lambda_i \quad , \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,$$

Áp dụng vào trong định nghĩa tích phân ta có:

$$\phi\left(\frac{1}{kt} \int_0^t |f(s)| ds\right) = \phi\left(\frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{k} |f(s)| ds\right) \quad (2.2)$$

Định nghĩa 2.2.2:

Cho $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, đo được Bochner. Ta định nghĩa :

$$M^\phi(f) = \int_0^\infty \phi(|f(s)|) ds \quad (2.3)$$

Ta đặt $L^\phi = \{f \text{ sao cho } \exists k > 0 \text{ để } M^\phi(kf) < \infty\}$

Trên L^ϕ ta xác định chuẩn như sau: $\|f\|_\phi = \inf \left\{ k > 0 : M^\phi\left(\frac{1}{k}f\right) \leq 1 \right\}.$

Khi đó, ta có L^ϕ là không gian tuyến tính

i/ $\forall f, g \in L^\phi$ chứng minh $f + g \in L^\phi$

Ta có $f \in L^\phi \Rightarrow \exists k_1 > 0$ sao cho $M^\phi(k_1 f) < \infty \Rightarrow \int_0^\infty \phi(|k_1 f(s)|) ds < \infty$

$g \in L^\phi \Rightarrow \exists k_2 > 0$ sao cho $M^\phi(k_2 g) < \infty \Rightarrow \int_0^\infty \phi(|k_2 g(s)|) ds < \infty$

Đặt $k = \min \{k_1, k_2\}$ ta xét

$$\begin{aligned} M^\phi\left(\frac{k}{2}(g+f)\right) &= \int_0^\infty \phi\left(\frac{1}{2}|kf(s) + kg(s)|\right) ds \leq \int_0^\infty \phi\left(\frac{1}{2}|kf(s)| + \frac{1}{2}|kg(s)|\right) ds \\ &\leq \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\phi(|kf(s)|) + \frac{1}{2}\phi(|kg(s)|)\right) ds \\ &\leq \int_0^\infty \frac{1}{2}\phi(|kf(s)|) ds + \int_0^\infty \frac{1}{2}\phi(|kg(s)|) ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \phi(|k_1 f(s)|) ds + \frac{1}{2} \int_0^\infty \phi(|k_2 g(s)|) ds < \infty \end{aligned}$$

Suy ra $f + g \in L^\phi$

ii/ $\forall f \in L^\phi, \alpha \in \mathbb{R}$ chứng minh $\alpha f \in L^\phi$

Ta có $f \in L^\phi \Rightarrow \exists k_1 > 0$ sao cho $M^\phi(k_1 f) < \infty \Rightarrow \int_0^\infty \phi(|k_1 f(s)|) ds < \infty$

Chọn $k = \frac{1}{|\alpha|} k_1$

$$\text{Ta có } M^\phi(k\alpha f) = \int_0^\infty \phi\left(\left|\frac{1}{|\alpha|} k_1 \alpha f(s)\right|\right) ds = \int_0^\infty \phi(|k_1 f(s)|) ds < \infty$$

Suy ra $\alpha f \in L^\phi$

Kiểm tra định nghĩa trên là chuẩn

$$\text{i) } \|f\|_\phi = \inf \left\{ k > 0 : M^\phi\left(\frac{1}{k}f\right) \leq 1 \right\} \geq 0, \|f\|_\phi = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

$$\text{Ta có : } \|f\|_\phi = \inf \left\{ k > 0 : M^\phi\left(\frac{1}{k}f\right) \leq 1 \right\} = 0$$

$$\text{Nếu } f = 0, \text{ suy ra } M^\phi\left(\frac{1}{k}f\right) = \int_0^\infty \phi\left(\left|\frac{1}{k}f(s)\right|\right) ds = 0$$

$$\text{Ngược lại } \|f\|_\phi = \inf \left\{ k > 0 : M^\phi\left(\frac{1}{k}f\right) \leq 1 \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \{k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sao cho : } k_n \rightarrow 0$$

$$\text{và } M^\phi\left(\frac{1}{k_n}f\right) = \int_0^\infty \phi\left(\left|\frac{1}{k_n}f(s)\right|\right)ds = \int_0^\infty \int_0^{\left|\frac{1}{k_n}f(s)\right|} \phi(t)dt \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Suy ra $f = 0$

$$\text{ii) } \|\alpha f\|_\phi = |\alpha| \|f\|_\phi$$

$$\|\alpha f\|_\phi = \inf \left\{ k > 0 : M^\phi\left(\frac{1}{k}\alpha f\right) \leq 1 \right\}. \quad A = \left\{ k > 0 : M^\phi\left(\frac{1}{k}\alpha f\right) \leq 1 \right\}$$

$$\|f\|_\phi = \inf \left\{ k > 0 : M^\phi\left(\frac{1}{k}f\right) \leq 1 \right\}. \quad \text{Đặt } B = \left\{ k > 0 : M^\phi\left(\frac{1}{k}f\right) \leq 1 \right\}$$

$$\text{Ta có } \|\alpha f\|_\phi = \inf A, \quad \|f\|_\phi = \inf B$$

Trước hết ta có:

$$\begin{aligned} M^\phi(f) &= \int_0^\infty \phi(|f(s)|)ds \Rightarrow M^\phi(\alpha f) = \int_0^\infty \phi(|\alpha f(s)|)ds \\ &= \int_0^\infty \phi(|\alpha| |f(s)|)ds = M^\phi(|\alpha|f) \end{aligned}$$

$$\forall k \in B \Rightarrow M^\phi\left(\frac{1}{k}f\right) \leq 1 \Rightarrow M^\phi\left(\frac{1}{k|\alpha|}\alpha f\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow k|\alpha| \in A \Rightarrow \|\alpha f\|_\phi \leq k|\alpha| \leq k\|f\|_\phi$$

$$\Rightarrow \|\alpha f\|_\phi \leq k\|f\|_\phi \Rightarrow \|\alpha f\|_\phi \leq \|f\|_\phi |\alpha| \quad (2.5)$$

Ngược lại

$$\forall k \in A \Rightarrow M^\phi\left(\frac{1}{k}\alpha f\right) \leq 1 \Rightarrow M^\phi\left(\frac{\alpha}{k}f\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow M^\phi\left(\frac{|\alpha|}{k}f\right) \leq 1 \Rightarrow \frac{k}{|\alpha|} \in B$$

$$\Rightarrow \frac{k}{|\alpha|} \geq \|f\|_\phi \Rightarrow k \geq |\alpha| \|f\|_\phi, \forall k \in A$$

$$\Rightarrow \|\alpha f\|_\phi \geq |\alpha| \|f\|_\phi \quad (2.6)$$

$$\text{Từ (2.5) và (2.6) ta có : } \|\alpha f\|_\phi = |\alpha| \|f\|_\phi$$

$$\text{iii) } \forall f, g \in L^\phi : \|f + g\|_\phi \leq \|f\|_\phi + \|g\|_\phi$$

$$\|f\|_{\phi} = \inf \left\{ k > 0 : M^{\phi} \left(\frac{1}{k} f \right) \leq 1 \right\} \Rightarrow M^{\phi} \left(\frac{1}{\|f\|_{\phi}} f \right) \leq 1$$

$$\|g\|_{\phi} = \inf \left\{ k > 0 : M^{\phi} \left(\frac{1}{k} g \right) \leq 1 \right\} \Rightarrow M^{\phi} \left(\frac{1}{\|g\|_{\phi}} g \right) \leq 1$$

$$\|f + g\|_{\phi} = \inf \left\{ k > 0 : M^{\phi} \left(\frac{1}{k} (f + g) \right) \leq 1 \right\}$$

Áp dụng tính chất hàm lồi của ϕ ta có :

$$M^{\phi} \left(\frac{1}{\|f\|_{\phi} + \|g\|_{\phi}} (f + g) \right) \leq 1 \Rightarrow \|f + g\|_{\phi} \leq \|f\|_{\phi} + \|g\|_{\phi}$$

Khi đó ta có $(L^{\phi}, \|f\|_{\phi})$ là không gian Banach

Định nghĩa 2.2.3

Không gian Banach $(L^{\phi}, \|f\|_{\phi})$ gọi là không gian Orlicz (Orlicz space)

Ví dụ 2.3.4:

$$\text{Xét hàm số } \chi_{[0,t]}(s) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } s \in [0, t] \\ 0 & \text{nếu } s \notin [0, t] \end{cases}$$

$$\text{Chúng minh } \chi_{[0,t]} \in L^{\phi} \text{ và } \|\chi_{[0,t]}\|_{\phi} = \frac{1}{\phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}, \forall t > 0$$

Chúng minh:

i/ Chúng minh $\chi_{[0,t]} \in L^{\phi}$

$$\text{Với } \chi_{[0,t]}(s) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } s \in [0, t] \\ 0 & \text{nếu } s \notin [0, t] \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } M^{\phi}(k\chi_{[0,t]}) &= \int_0^{\infty} \phi\left(|k\chi_{[0,t]}(s)|\right) ds = \int_0^{\infty} \int_0^{|k\chi_{[0,t]}(s)|} \phi(a) da ds \\ &= \int_0^t \int_0^{|k\chi_{[0,t]}(s)|} \phi(a) da ds + \int_t^{\infty} \int_0^{|k\chi_{[0,t]}(s)|} \phi(a) da ds \\ &= \int_0^t \int_0^k \phi(a) da ds = \int_0^t \phi(k) ds = t\phi(k) < \infty \end{aligned}$$

Vậy $\chi_{[0;t]} \in L^\phi$

ii/ Chứng minh : $\|\chi_{[0;t]}\|_\phi = \frac{1}{\phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}, \forall t > 0$

Ta có $\|\chi_{[0;t]}\|_\phi = \inf \left\{ k > 0 : M^\phi \left(\frac{1}{k} \chi_{[0;t]} \right) \leq 1 \right\}.$

Đặt $A = \left\{ k > 0 : M^\phi \left(\frac{1}{k} \chi_{[0;t]} \right) \leq 1 \right\}$

Ta có $M^\phi \left(\frac{1}{k} \chi_{[0;t]} \right) \leq 1 \Rightarrow \int_0^\infty \int_0^{\left| \frac{1}{k} \chi_{[0;t]}(s) \right|} \varphi(a) da ds \leq 1$

$$\Rightarrow \int_0^t \int_0^{\left| \frac{1}{k} \chi_{[0;t]}(s) \right|} \varphi(a) da ds \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^t \int_0^{\frac{1}{k}} \varphi(a) da ds \leq 1 \Rightarrow \int_0^t \phi \left(\frac{1}{k} \right) ds \leq 1 \Rightarrow t \phi \left(\frac{1}{k} \right) \leq 1$$

$$\Rightarrow \phi \left(\frac{1}{k} \right) \leq \frac{1}{t} \Rightarrow \phi^{-1} \left[\phi \left(\frac{1}{k} \right) \right] \leq \phi^{-1} \left(\frac{1}{t} \right) \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \phi^{-1} \left(\frac{1}{t} \right)$$

$$\Rightarrow k \geq \frac{1}{\phi^{-1} \left(\frac{1}{t} \right)}, \forall k \in A$$

$$\Rightarrow \inf A = \frac{1}{\phi^{-1} \left(\frac{1}{t} \right)}$$

Vậy $\|\chi_{[0;t]}\|_\phi = \frac{1}{\phi^{-1} \left(\frac{1}{t} \right)}, \forall t > 0$

2.3 MỐI LIÊN HỆ GIỮA KHÔNG GIAN ORLICZ VỚI KHÔNG GIAN L^p, L^∞

Định lý 2.3.1 : $L^p = L^\phi$ nếu $\phi(t) = t^p, \forall t > 0$

Chứng minh :

Ta có $\phi(t) = t^p \Rightarrow \phi(\|kf(s)\|) = \|kf(s)\|^p$

Khi đó ta có :

Lấy $f \in L^\phi \Rightarrow \exists k > 0$ sao cho $M^\phi(kf) \leq 1$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \|kf(s)\|^p ds = k^p \int_0^\infty \|f(s)\|^p ds \leq 1 < \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \|f(s)\|^p ds < \infty \Rightarrow f \in L^p. \text{ Suy ra } L^\phi \subset L^p \quad (2.7)$$

Ngược lại :

Lấy $f \in L^p \Rightarrow \int_0^\infty \|f(s)\|^p ds < \infty$

$$\Rightarrow \exists k > 0 \text{ sao cho } M^\phi(kf) = k^p \int_0^\infty \|f(s)\|^p ds < \infty$$

$$\Rightarrow f \in L^\phi. \text{ Suy ra } L^p \subset L^\phi \quad (2.8)$$

Vậy từ (2.7) và (2.8) ta có $L^p = L^\phi$ (đpcm)

Định lí : 2.3.2:

Nếu $L^p = L^\phi$, $\|\chi_{[0;t]}\|_\phi = \|\chi_{[0;t]}\|_p$ và $\phi^{-1}(s) = s^{\frac{1}{p}}$, $\forall s > 0$

thì $\phi(t) = t^p$, $\forall t > 0$

Chứng minh :

Ta có : $\|\chi_{[0;t]}\|_\phi = \frac{1}{\phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{p}}}$, $\forall t > 0$

$$\|\chi_{[0;t]}\|_p = \int_0^t |\chi_{[0;t]}(s)|^p ds = \int_0^t |\chi_{[0;t]}(s)|^p ds = \int_0^t 1 ds = t, \forall t > 0$$

$$\|\chi_{[0;t]}\|_\phi = \|\chi_{[0;t]}\|_p \Leftrightarrow \frac{1}{\phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)} = t \Leftrightarrow \frac{1}{t} = \phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2.9)$$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}, \forall t > 0 \quad (2.10)$$

Mặt khác ta có :

$$\phi^{-1}(s) = s^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.11)$$

$$\text{Từ (2.9) và (2.11) ta có } \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{t} \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p = \left(\frac{1}{t}\right)^p \Rightarrow \frac{1}{t} = \left(\frac{1}{t}\right)^p$$

$$\text{Do (2.10) ta có } \phi\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t}\right)^p, \forall t > 0 \Rightarrow \phi(t) = t^p$$

Định lí 2.3.4 :

$$\text{Nếu } \phi(t) = e^t - 1 \text{ thì } L^\phi \subset L^p, \forall p \in [1; \infty)$$

Chứng minh :

$$\text{Trước hết ta có kết quả sau : } t^m \leq m! \phi(t), \forall t > 0, \forall m \in \mathbb{N}^*. \quad (2.12)$$

$$\text{Thật vậy } t^m \leq m! \phi(t) \Leftrightarrow m!(e^t - 1) - t^m \geq 0. \text{ Đặt } f(t) = m!(e^t - 1) - t^m.$$

Lấy đạo hàm cấp m hàm số f(t) ta có :

$$f'(t) = m!e^t - mt^{m-1}$$

$$f''(t) = m!e^t - m(m-1)t^{m-2}$$

.....

$$f^{(m-1)}(t) = m!e^t - m.(m-1)...3.2.t$$

$$f^{(m)}(t) = m!e^t - m! = m!(e^t - 1) > 0 \quad \forall t > 0$$

$$\text{Ta có } f^{(m)}(t) > 0, \forall t > 0$$

$$\text{suy ra } f^{(m-1)}(t) \text{ là hàm tăng trên } (0; +\infty), \text{ mà } f^{(m-1)}(0) = m! > 0$$

$$\text{Nên : } f^{(m-1)}(t) > 0, \quad \forall t > 0$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$f'(t) > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ là hàm tăng trên } (0; \infty)$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \text{ nên } f(t) > 0, \forall t \in (0; \infty),$$

$$\text{Vậy } t^m \leq m! \phi(t), \forall t > 0, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Tiếp theo chứng minh : } L^\phi \subset L^p, \forall p \in [1; \infty)$$

Ta có : $L^\phi = \left\{ f \text{ sao cho } \exists k > 0 \text{ thì } M^\phi(kf) < \infty \right\}$

$$L^m = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sao cho } \int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^m dt < \infty, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$\forall f \in L^\phi \Rightarrow \exists k > 0 \text{ thì } M^\phi(kf) < \infty \Rightarrow \int_0^\infty \phi(|kf(s)|) ds < \infty$$

Áp dụng (2.12) ta có $|f(s)|^m \leq m! \phi(|f(s)|), \forall m \in \mathbb{N}^*$

Suy ra

$$\int_0^\infty |kf(s)|^m ds \leq \int_0^\infty m! \phi(|kf(s)|) ds = \int_0^\infty m! \phi(|kf(s)|) ds < \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty |f(s)|^m ds \leq \infty \Rightarrow f \in L^m$$

Vậy $f \in L^m \Rightarrow L^\phi \subset L^m, \forall m \in \mathbb{N}^*$

Ta lại có $L^m \cap L^{m+1} \subset L^p, \forall p \in [m; m+1], \forall m \in \mathbb{N}^*$

Như vậy ta có $\forall p \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* \text{ sao cho } p \in [m; m+1]$

$$\text{Mặt khác : } L^\phi \subset L^m, \forall m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases} L^\phi \subset L^m \\ L^\phi \subset L^{m+1} \end{cases} \Rightarrow L^\phi \subset L^m \cap L^{m+1}$$

Vậy $L^\phi \subset L^p, \forall p \in [1; \infty)$ (đpcm)

Định nghĩa 2.3.5 :

Nếu E là không gian Orlicz ta định nghĩa

$$E(X) = \left\{ \begin{array}{l} f \in M(\mathbb{R}_+; X) \text{ sao cho hàm số sau: } \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t \mapsto \|f(t)\|_X \\ \text{là hàm thuộc E} \end{array} \right\}$$

Khi đó $E(X)$ là không gian Banach với chuẩn $\|f\|_{E(X)} = \left\| \|f(\cdot)\|_X \right\|_E$.

Định lí 2.3.6:

Nếu $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E(X), f \in E(X), f_n \rightarrow f$ trong $E(X)$

Khi đó tồn tại dãy con $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sao cho $f_{n_k} \rightarrow f$ trong $E(X)$

Tham khảo [7]

Chương 3

BIỂU DIỄN TÍNH ỔN ĐỊNH MŨ CỦA HỌ TIẾN HÓA DƯỚI DẠNG CHẤP NHẬN ĐƯỢC CỦA KHÔNG GIAN ORLICZ

3.1 GIỚI THIỆU

Trong chương này chúng tôi chứng minh một chuỗi tiến hóa trên không gian Banach X là ổn định mũ nếu (và chỉ nếu) mỗi hàm f đo được thuộc không gian Banach $E(X)$ xác định hàm

$$x_f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$$

$$t \mapsto x_f(t) = \int_0^t U(t,s)f(s)ds$$

thuộc $E(X)$, với E là không gian Orlicz

Xét bài toán Cauchy sau trên không gian Banach:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(s) = x_s \end{cases} \quad x_s \in D(A(t)), t \geq s \geq 0 \quad (3.1)$$

Khi đó nghiệm của (3.1) có dạng $x(t) = U(t,s)x(s)$, $t \geq s \geq 0$ thỏa điều kiện đầu $x(s) = x_s \in D(A(s))$

Xét bài toán Cauchy không thuần nhất:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + f(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

Hàm $u_f(t) = \int_0^t U(t,s)f(s)ds$ là nghiệm yếu của (3.2), trong một số trường hợp đặc biệt

u_f là nghiệm duy nhất của (3.2) (tham khảo [4])

Trong [2] đã trình bày sự biểu thị đặc điểm của tính ổn định mũ đối với nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính :

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad t \in [0, +\infty), x \in \mathbb{R}^n$$

Với $A(t)$ là ma trận các hàm bị chặn

và $x'(t) = A(t)x(t) + f(t) \quad t \in [0, +\infty), x \in \mathbb{R}^n$, với $f(t)$ là hàm bị chặn trên $\mathbb{R}_+$

Những kết quả tìm được ở chương này thể hiện sự liên kết giữa tính ổn định mũ của họ tiến hóa với tính chấp nhận được của không gian hàm, đặc biệt là không gian Orlicz L^ϕ

3.2 NHỮNG KẾT QUẢ CHÍNH.

Định lý 3.2.1

ϕ là hàm Young của không gian Orlicz L^ϕ thì

1/ Ánh xạ $a_\phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$

$$t \mapsto a_\phi(t) = t \cdot \phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \text{ là không giảm}$$

$$2/ \int_0^t \|f(s)\|_X ds \leq a_\phi(t) \|f\|_\phi, \forall t > 0, \forall f \in L^\phi$$

Chứng minh 1

Đầu tiên ta chứng minh hàm số sau là không giảm

$$b : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$u \mapsto b(u) = \frac{\phi(u)}{u}$$

Thật vậy $\forall 0 < u_1 \leq u_2$ ta có :

$$b(u_1) = \frac{\phi(u_1)}{u_1} = \frac{1}{u_1} \int_0^{u_1} \phi(s) ds, \quad b(u_2) = \frac{\phi(u_2)}{u_2} = \frac{1}{u_2} \int_0^{u_2} \phi(s) ds$$

$$\text{Đặt } s = \frac{u_1}{u_2} v \Rightarrow \begin{cases} ds = \frac{u_1}{u_2} dv \\ v = \frac{u_2}{u_1} s \end{cases} \text{ . Khi đó } \begin{cases} s = 0 \Rightarrow v = 0 \\ s = u_1 \Rightarrow v = u_2 \end{cases} .$$

Áp dụng công thức đổi biến số trong tích phân ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_1} \int_0^{u_1} \phi(s) ds &= \frac{1}{u_1} \int_0^{u_2} \phi\left(\frac{u_1}{u_2} v\right) \frac{u_1}{u_2} dv = \frac{1}{u_2} \int_0^{u_2} \phi\left(\frac{u_1}{u_2} v\right) dv \\ &\leq \frac{1}{u_2} \int_0^{u_2} \phi(v) dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\text{do } 0 < u_1 \leq u_2 \Rightarrow \frac{u_1}{u_2} \leq 1 \Rightarrow \frac{u_1}{u_2} v \leq v \right. \\ & \left. \Rightarrow \varphi\left(\frac{u_1}{u_2} v\right) \leq \varphi(v) \text{ do } \varphi \text{ không giảm} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } b(u_2) = \frac{\phi(u_2)}{u_2} = \frac{1}{u_2} \int_0^{u_2} \varphi(s) ds = \frac{1}{u_2} \int_0^{u_2} \varphi(v) dv$$

$$\text{Vậy } b(u_1) \leq b(u_2). \text{ Suy ra } b \text{ không giảm} \quad (3.3)$$

Tiếp theo ta chứng minh a_ϕ là hàm không giảm

Nghĩa là : $\forall 0 < t_1 \leq t_2$ cần chứng minh $a_\phi(t_1) \leq a_\phi(t_2)$

Ta có :

$$\forall 0 < t_1 \leq t_2 \Rightarrow \frac{1}{t_2} \leq \frac{1}{t_1} \Rightarrow \underbrace{\phi^{-1}\left(\frac{1}{t_2}\right)}_{\text{đặt là } \omega_2} \leq \underbrace{\phi^{-1}\left(\frac{1}{t_1}\right)}_{\text{đặt là } \omega_1}. \text{ (theo định nghĩa của hàm } \phi \text{ ta có } \phi \text{ là hàm}$$

không giảm)

Ta có do b không giảm nên:

$$\begin{aligned} b(\omega_2) \leq b(\omega_1) & \Rightarrow \frac{\phi(\omega_2)}{\omega_2} \leq \frac{\phi(\omega_1)}{\omega_1} \\ & \Rightarrow \frac{\frac{1}{t_2}}{\phi^{-1}\left(\frac{1}{t_2}\right)} \leq \frac{\frac{1}{t_1}}{\phi^{-1}\left(\frac{1}{t_1}\right)} \Rightarrow \frac{1}{t_2 \phi^{-1}\left(\frac{1}{t_2}\right)} \leq \frac{1}{t_1 \phi^{-1}\left(\frac{1}{t_1}\right)} \\ & \Rightarrow t_1 \phi^{-1}\left(\frac{1}{t_1}\right) \leq t_2 \phi^{-1}\left(\frac{1}{t_2}\right) \Rightarrow a_\phi(t_1) \leq a_\phi(t_2) \end{aligned}$$

Suy ra a_ϕ không giảm (đpcm)

Chứng minh 2

Xét $f \in L^\phi$, theo định nghĩa $\|f\|_\phi = \inf \left\{ k > 0 : M^\phi\left(\frac{1}{k}f\right) \leq 1 \right\} \geq 0$.

$$\text{Đặt } A = \left\{ k > 0 : M^\phi\left(\frac{1}{k}f\right) \leq 1 \right\}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\forall k \in A \Rightarrow M^\phi\left(\frac{1}{k}f\right) \leq 1 &\Rightarrow \int_0^t \phi\left(\frac{1}{k}|f(s)|\right) ds \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{t} \int_0^t \phi\left(\frac{1}{k}|f(s)|\right) ds \leq \frac{1}{t}\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \phi\left(\frac{1}{kt} \int_0^t (|f(s)|) ds\right) \leq \frac{1}{t} \int_0^t \phi\left(\frac{1}{k}|f(s)|\right) ds \quad (\text{do 2.2})$$

Nên

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{1}{kt} \int_0^t (|f(s)|) ds\right) \leq \frac{1}{t} &\Rightarrow \frac{1}{kt} \int_0^t (|f(s)|) ds \leq \phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \\ &\Rightarrow \int_0^t (|f(s)|) ds \leq \underbrace{kt \phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}_{a_\phi(t)} \\ &\Rightarrow \int_0^t (|f(s)|) ds \leq k a_\phi(t) \quad \forall k \in A \\ &\Rightarrow \frac{\int_0^t (|f(s)|) ds}{a_\phi(t)} \leq k, \forall k \in A \\ &\Rightarrow \frac{\int_0^t (|f(s)|) ds}{a_\phi(t)} \leq \|f\|_\phi \quad \text{do } \|f\|_\phi = \inf A \\ &\Rightarrow \int_0^t (|f(s)|) ds \leq \|f\|_\phi \cdot a_\phi(t) \quad , \forall t > 0\end{aligned}$$

Hệ quả 3.2.2 :

Chúng minh tương tự định lí trên ta có kết quả sau :

$$\int_{t_0}^{t_0+t} |f(s)| ds \leq a_\phi(t) \|f\|_\phi, \quad \forall t_0 > 0, t > 0, \forall f \in L^\phi \quad (3.4)$$

Định nghĩa 3.2.3:

Cặp không gian Orlicz (E, F) gọi là chấp nhận được cho họ tiên hóa

$\mathcal{U} = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$ nếu $\forall f \in E(X)$ thì hàm x_f xác định như sau thuộc $F(X)$

$$x_f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$$

$$t \mapsto x_f(t) = \int_0^t U(t,s)f(s)ds \quad (3.5)$$

Bổ đề 3.2.4:

Nếu cặp không gian Orlicz (E, F) chấp nhận họ tiến hóa $\mathcal{U} = \{U(t,s)\}_{t \geq s \geq 0}$ thì tồn tại số $k > 0$ sao cho $\|x_f\|_{F(X)} \leq k \cdot \|f\|_{E(X)}$

Chứng minh :

Ta xét hàm T được định nghĩa như sau :

$$T : E(X) \rightarrow F(X)$$

$$f \mapsto T(f) = Tf$$

Với hàm Tf xác định như sau :

$$Tf : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$$

$$t \mapsto Tf(t) = \int_0^t U(t,s)f(s)ds$$

Khi đó ta có :

i) $\forall f, g \in E(X), \forall t > 0$, ta có

$$\begin{aligned} T(f+g)(t) &= \int_0^t U(t,s)(f+g)(s)ds \\ &= \int_0^t U(t,s)f(s)ds + \int_0^t U(t,s)g(s)ds \\ &= Tf(t) + Tg(t) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } T(f+g) = Tf + Tg \quad (3.6)$$

ii) $\forall f \in E(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall t > 0$

$$T(\alpha f)(t) = \int_0^t U(t,s)(\alpha f)(s)ds = \alpha \int_0^t U(t,s)f(s)ds = \alpha Tf(t)$$

$$\text{Suy ra } T(\alpha f) = \alpha Tf \quad (3.7)$$

Từ (3.6), (3.7) ta có T là tuyến tính

Lấy $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E(X)$, $g \in E(X)$ và $h \in F(X)$ sao cho

$$g_n \rightarrow g \text{ trong } E(X)$$

$$Tg_n \rightarrow h \text{ trong } F(X)$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \|Tg_n(t) - Tg(t)\|_X &= \left\| \int_0^t U(t,s)g_n(s)ds - \int_0^t U(t,s)g(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|U(t,s)\| \|g_n(s) - g(s)\| ds \\
&\leq \int_0^t M e^{\omega(t-s)} \|g_n(s) - g(s)\| ds \\
&\leq M e^{\omega t} \int_0^t \|g_n(s) - g(s)\| ds \\
&\leq M e^{\omega t} a_\phi(t) \|g_n - g\|_{E(X)} \quad \forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Khi đó $h = Tg$, áp dụng định lý đồ thị đóng ta có T liên tục, mà T tuyến tính nên nó cũng bị chặn. Vì thế ta có :

$$\|X_f\|_{F(X)} = \|Tf\|_{F(X)} \leq \|T\| \|f\|_{F(X)} \quad \forall f \in E(X) \quad \boxed{\text{(đpcm)}} \quad (3.8)$$

Bổ đề 3.2.5

Nếu L^ϕ là không gian Orlicz, $h \in L^\phi$, $h \geq 0$ và tồn tại 2 hằng số a, b sao cho

$$h(r) \leq ah(t) + b \quad \forall r \geq t \geq 0, r - t \leq 1. \text{ Khi đó } h \in L^\infty$$

Chứng minh :

Với giả thiết $h(r) \leq ah(t) + b \quad \forall r \geq t \geq 0, r - t \leq 1$, ta có

$$h(n+1) \leq ah(s) + b \quad \forall n \in \mathbb{N}, s \in [n; n+1] \quad (3.9)$$

Và từ đây lấy tích phân 2 vế của (3.9) ta có :

$$\int_n^{n+1} h(n+1)ds \leq \int_n^{n+1} ah(s)ds + \int_n^{n+1} b ds \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow h(n+1) \leq a \int_n^{n+1} h(s)ds + b, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow h(n+1) \leq a \cdot a_\phi(1) \cdot \|h\|_{L^\phi} + b < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Suy ra } h(n+1) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow c = \sup_{n \in \mathbb{N}} h(n) < \infty$$

Tiếp tục sử dụng giả thiết một lần nữa ta có

$$h(t) < ah(n) + b \quad \forall t \in [n; n+1], \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow h(t) < a.c + b < \infty \quad \forall t \in [n; n+1], \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \text{esssup}_{t \in \mathbb{R}^+} |h(t)| < \infty \Rightarrow h \in L^\infty$$

Bồ đề 3.2.6 :

Nếu cặp không gian Orlicz (L^ϕ, L^ϕ) chấp nhận được cho họ tiến hóa

$\mathcal{U} = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$, với ϕ là hàm Young. Khi đó có những điều sau đây xảy ra :

i) Với tất cả $f \in L^\phi$ tồn tại $a, b > 0$ sao cho :

$$\|x_f(r)\| \leq a \|x_f(t)\| + b \quad \forall r \geq t \geq 0, r - t \geq 1 \quad (3.10)$$

ii) Cặp không gian (L^ϕ, L^∞) là chấp nhận được cho họ tiến hóa

$$\mathcal{U} = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$$

Chứng minh :

$$\begin{aligned} \text{i) } x_f(r) &= \int_0^r U(r, s) f(s) ds \\ &= \int_0^t U(r, s) f(s) ds + \int_t^r U(r, s) f(s) ds \\ &= \int_0^t U(r, t) U(t, s) f(s) ds + \int_t^r U(r, s) f(s) ds \\ &= U(r, t) \int_0^t U(t, s) f(s) ds + \int_t^r U(r, s) f(s) ds \\ &= U(r, t) \cdot x_f(t) + \int_t^r U(r, s) f(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \|x_f(r)\| &\leq \|U(r, t)\| \cdot \|x_f(t)\| + \int_t^r \|U(r, s)\| |f(s)| ds \\ &\leq M e^{\omega(r-t)} \|x_f(t)\| + \int_t^r M e^{\omega(r-s)} |f(s)| ds \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\text{Ta có } r - t \leq 1 \Rightarrow e^{\omega(r-t)} \leq e^{\omega \cdot 1} \Rightarrow M \cdot e^{\omega(r-t)} \leq M \cdot e^{\omega}$$

$$\text{Tương tự: } M \cdot e^{\omega(r-s)} \leq M \cdot e^{\omega}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_t^r M \cdot e^{\omega(r-s)} |f(s)| ds &\leq \int_t^r M \cdot e^{\omega} |f(s)| ds \\ &\leq \int_t^{t+1} M \cdot e^{\omega} |f(s)| ds \quad \text{do } t \geq r \geq 0, t - r \leq 1 \end{aligned}$$

$$\leq M.e^{\omega} \int_t^{t+1} |f(s)| ds \leq M.e^{\omega} .a_{\phi}(1) . \|f\|_{L^{\phi}(X)} \quad (3.12)$$

Vậy từ (3.11) & (3.12) ta có :

$$\|x_f(r)\| \leq \underbrace{M.e^{\omega(r-t)}}_{\text{đặt là } a} \|x_f(t)\| + \underbrace{M.e^{\omega} .a_{\phi}(1) . \|f\|_{L^{\phi}(X)}}_{\text{đặt là } b} \quad \forall r \geq t \geq 0, \quad t-r \leq 1$$

Như vậy ta có

$$\|x_f(r)\| \leq a \|x_f(t)\| + b \quad \forall r \geq t \geq 0, r-t \geq 1 \text{ (đpcm)}$$

ii) Theo kết quả trên ta có:

$$\|x_f(r)\| \leq a \|x_f(t)\| + b \quad \forall r \geq t \geq 0, r-t \geq 1$$

Áp dụng bổ đề 3.2.5 ta có hàm : $t \rightarrow \|x_f(t)\|$ thuộc L^{∞}

Theo định nghĩa 3.2.3 ta có cặp không gian (L^{ϕ}, L^{∞}) chấp nhận được cho họ tiên hóa $\mathcal{U}$

$$= \{U(t,s)\}_{t \geq s \geq 0}$$

Bổ đề 3.2.7 :

Cho $g : \{(t, t_0) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq t_0 \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ là hàm số sao cho thỏa những điều kiện sau:

$$1/g(t, t_0) \leq g(t, s)g(s, t_0) \quad \forall t \geq s \geq t_0 \geq 0 \quad (3.13)$$

2/Tồn tại $M, a > 0$ và $b \in (0;1)$ sao cho

$$g(t, t_0) \leq M \quad \forall t_0 \geq 0, \forall t \in [t_0, t_0 + a] \quad (3.14)$$

$$g(t_0 + a, t_0) \leq b \quad \forall t_0 \geq 0 \quad (3.15)$$

Khi đó tồn tại 2 hằng số $N, v > 0$ sao cho : $g(t, t_0) \leq N.e^{-v(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$

Chứng minh :

Cho $t \geq t_0 \geq 0$, đặt $n = \left\lfloor \frac{t-t_0}{a} \right\rfloor$ ta có n là số nguyên thỏa

$$n \leq \frac{t-t_0}{a} < n+1 \Rightarrow \begin{cases} na + t_0 \leq t < (n+1) + t_0 \\ t_0 \leq na + t_0 \leq t \end{cases}$$

Áp dụng giả thiết (3.13) với $s = t_0 + na$ ta có :

$$g(t, t_0) \leq g(t, t_0 + na)g(t_0 + na, t_0) \quad \forall t \geq s \geq t_0 \geq 0$$

Áp dụng (3.14), (3.15) ta có :

$$g(t_0 + na, t_0) \leq b^n$$

$$g(t, t_0 + na) \leq M$$

Như vậy ta có :

$$g(t, t_0) \leq g(t, t_0 + na)g(t_0 + na, t_0) \leq M.b^n \quad \forall t \geq s \geq t_0 \geq 0$$

$$\text{Đặt } v = -\frac{1}{a} \ln b \Rightarrow -av = \ln b \Rightarrow e^{-av} = b \Rightarrow e^{-nav} = b^n$$

$$\text{Suy ra } g(t, t_0) \leq M.e^{-nav} \quad \forall t \geq s \geq t_0 \geq 0.$$

$$\text{Khi đó nếu xem } N = M.e^{av} \Rightarrow M = N.e^{-av}$$

$$\text{Suy ra } g(t, t_0) \leq N.e^{-av}.e^{-nav} \leq N.e^{-av(n+1)} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (3.16)$$

$$\text{Mà } \frac{t-t_0}{a} < n+1 \Rightarrow t-t_0 < a(n+1)$$

$$\Rightarrow -v(t-t_0) > -va(n+1) \Rightarrow e^{-v(t-t_0)} > e^{-va(n+1)} \quad (3.17)$$

$$\text{Nên từ (3.16), (3.17) ta có : } g(t, t_0) \leq N.e^{-v(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad \boxed{(\text{đpcm})}$$

Định lí 3.2.8 :

Họ tiến hóa $\mathcal{U} = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0} \subset L(X)$ là ổn định mũ đều (is uniformly

exponentially stable : u.e.s) nếu và chỉ nếu tồn tại không gian Orlicz L^ϕ sao cho cặp (L^ϕ, L^ϕ) chấp nhận được cho họ $\mathcal{U}$

Chứng minh :

Chiều thuận :

Họ tiến hóa $\mathcal{U} = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0} \subset L(X)$ là ổn định mũ đều (is uniformly

exponentially stable : u.e.s) $\Rightarrow$ tồn tại không gian Orlicz L^ϕ sao cho cặp (L^ϕ, L^ϕ) chấp nhận được cho họ $\mathcal{U}$

Ta có : $\mathcal{U} = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0} \subset L(X)$ là họ u.e.s thì tồn tại 2 hằng số dương N, v

sao cho thỏa điều kiện sau : $\|U(t, s)\| \leq N.e^{-v(t-s)}.$

Ta cần chứng minh cặp (L^∞, L^∞) chấp nhận được cho họ $\mathcal{U}$.

Thật vậy lấy f tùy ý thuộc L^∞ .

Xét hàm $x_f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto x_f(t) = \int_0^t U(t,s)f(s)ds$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } |x_f(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\| |f(s)| ds \leq \int_0^t N e^{-v(t-s)} |f(s)| ds \\ &\leq \int_0^t N e^{-v(t-s)} \|f\|_\infty ds \leq N e^{-vt} \|f\|_\infty \cdot \int_0^t e^{vs} ds \\ &\leq N e^{-vt} \|f\|_\infty \left. \frac{e^{vs}}{v} \right|_0^t = N e^{-vt} \|f\|_\infty \frac{1}{v} (e^{vt} - 1) \\ &\leq N \|f\|_\infty \frac{1}{v} (1 - e^{-vt}) = N \|f\|_\infty \frac{1}{v} \left(1 - \frac{1}{e^{vt}} \right) \\ &\leq N \|f\|_\infty \frac{1}{v} < \infty \quad (\text{do } vt \geq 0 \Rightarrow e^{vt} > 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{vt}} < 1) \end{aligned}$$

Suy ra $x_f \in L^\infty$.

Theo định nghĩa 3.2.3 ta có cặp (L^∞, L^∞) chấp nhận được cho họ $\mathcal{U}$

Chiều đảo :

Nếu tồn tại không gian Orlicz L^ϕ sao cho cặp (L^ϕ, L^ϕ) chấp nhận được cho họ tiến hóa

$\mathcal{U} = \{U(t,s)\}_{t \geq s \geq 0} \subset L(X)$ thì họ $\mathcal{U}$ được là ổn định mũ đều

Ta có cặp không gian (L^ϕ, L^ϕ) chấp nhận được cho họ $\mathcal{U}$ thì theo bổ đề 3.2.6, cặp không gian (L^ϕ, L^∞) chấp nhận được cho họ $\mathcal{U}$

Với $x \in X$, $t_0 \geq 0$, ta xét hàm số sau :

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$$

$$t \mapsto f(t) = \begin{cases} U(t, t_0)x & t \in [t_0, t_0 + 1] \\ 0 & t \in \mathbb{R}_+ \setminus [t_0, t_0 + 1] \end{cases} \quad (3.18)$$

Ta dễ dàng kiểm tra được $f \in L^\phi(X)$ và $\|f\|_{L^\phi(X)} \leq M \cdot e^\omega \frac{1}{\phi^{-1}(1)} \|x\|$

i) Chứng minh $f \in L^\phi(X)$:

Ta có $L^\phi = \{f: \mathbb{R}_+ \rightarrow X \text{ sao cho } \exists k > 0 \text{ thì } M^\phi(kf) < \infty\}$

Với $k > 0$, xét

$$M(kf) = \int_0^\infty \phi(|kf(s)|) ds = \int_0^\infty \int_0^{|kf(s)|} \phi(a) da ds = \int_{t_0}^{t_0+1} \int_0^{k|U(s;t_0)x|} \phi(a) da ds$$

Mà $\mathcal{U} = \{U(t,s)\}_{t \geq s \geq 0}$ là họ tiến hóa nên $\exists$ số $M, \omega > 0$ sao cho

$$\|U(t,s)\| \leq M e^{\omega(t-s)} \quad \forall t \geq s \geq 0$$

Mặt khác $U(t,s) \in L(X) \Rightarrow \|U(t,s)(x)\| \leq \|U(t,s)\|_{L(X)} \cdot \|x\|_X$

Do đó

$$\begin{aligned} M(kf) &= \int_{t_0}^{t_0+1} \int_0^{k|U(s;t_0)x|} \phi(a) da ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+1} \int_0^{kMe^{\omega(s-t_0)}\|x\|_X} \phi(a) da ds, \forall s \in [t_0; t_0+1] \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+1} \int_0^{kMe^{\omega}\|x\|_X} \phi(a) da ds = \phi(kMe^{\omega}\|x\|_X) < \infty \end{aligned}$$

Suy ra $f \in L^\phi(X)$ (đpcm)

ii) Chứng minh $\|f\|_{L^\phi(X)} \leq M \cdot e^{\omega} \frac{1}{\phi^{-1}(1)} \|x\|$.

Đặt $K = M \cdot e^{\omega} \frac{1}{\phi^{-1}(1)} \|x\|$. Ta có $\|f\|_\phi = \inf \underbrace{\left\{ k > 0 : M^\phi\left(\frac{1}{k}f\right) \leq 1 \right\}}_A = \inf A$.

Chứng minh $K \in A$, nghĩa là $M^\phi\left(\frac{1}{K}f\right) \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M\left(\frac{1}{K}f\right) &= \int_{t_0}^{t_0+1} \int_0^{\frac{1}{K}|U(s;t_0)x|} \phi(a) da ds \leq \int_{t_0}^{t_0+1} \int_0^{\frac{1}{M \cdot e^{\omega} \frac{1}{\phi^{-1}(1)} \|x\|}} M e^{\omega} \|x\|_X \phi(a) da ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+1} \int_0^{\phi^{-1}(1)} \phi(a) da ds = \phi(\phi^{-1}(1)) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } M^{\phi}\left(\frac{1}{K}f\right) \leq 1 \Rightarrow \|f\|_{L^{\phi}(X)} \leq M.e^{\omega} \frac{1}{\phi^{-1}(1)} \|x\| \quad (\text{đpcm}) \quad (3.19)$$

Theo định nghĩa 3.2.3 ta lại có

$$x_f(t) = \int_0^t U(t,s)f(s)ds = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leq t \leq t_0 \\ \int_{t_0}^{t_0+1} U(t,s)U(s,t_0)x ds & \text{nếu } t \geq t_0 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } \int_{t_0}^{t_0+1} U(t,s)U(s,t_0)x ds &= \int_{t_0}^{t_0+1} U(t,t_0)x ds \\ &= U(t,t_0)x \int_{t_0}^{t_0+1} ds = U(t,t_0)x \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } x_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leq t \leq t_0 \\ U(t,t_0)x & \text{nếu } t \geq t_0 + 1 \end{cases}$$

Như vậy ta có :

$$\begin{aligned} \|U(t,t_0)x\| &= \|x_f(t)\| \leq \|x_f\|_{\infty} \\ &\leq k \cdot \|f\|_{L^{\phi}(X)} \leq k \cdot \underbrace{M.e^{\omega} \frac{1}{\phi^{-1}(1)}}_L \|x\| \\ &\forall t \geq t_0 + 1, t_0 \geq 0, \forall x \in X \end{aligned}$$

$$\text{Do đó tồn tại } L > 0 \text{ sao cho } \|U(t,t_0)\| \leq L \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (3.20)$$

Cho $t_0 \geq 0, \delta > 0 \quad x \in X$

và $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$

$$t \mapsto g(t) = \begin{cases} U(t,t_0)x & t \in [t_0, t_0 + \delta] \\ 0 & t \in \mathbb{R}_+ \setminus [t_0, t_0 + \delta] \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } g \in L^{\phi}(X) \text{ và } \|g\|_{L^{\phi}(X)} \leq L \frac{1}{\phi^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right)} \|x\| \quad (3.21)$$

Điều đó kéo theo

$$x_g(t) = \int_0^t U(t,s)g(s)ds$$

$$= \begin{cases} \int_0^t U(t,s).0 \, ds & \text{nếu } t \in [0, t_0) \\ \int_{t_0}^t U(t,s).U(s, t_0)x \, ds & \text{nếu } t \in [t_0, t_0 + \delta) \\ \int_{t_0}^{t_0+\delta} U(t,s).U(s, t_0)x \, ds & \text{nếu } t \in [t_0 + \delta, \infty) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t \in [0, t_0) \\ (t - t_0)U(t, t_0)x & t \in [t_0, t_0 + \delta) \\ \delta.U(t, t_0)x & t \in [t_0 + \delta, \infty) \end{cases}$$

Ta có
$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} (s - t_0) \|U(t_0 + \delta, t_0)\| \, ds = \|U(t_0 + \delta, t_0)\| \int_{t_0}^{t_0+\delta} (s - t_0) \, ds$$

$$= \|U(t_0 + \delta, t_0)\| \left. \frac{(s - t_0)^2}{2} \right|_{t_0}^{t_0+\delta}$$

$$= \|U(t_0 + \delta, t_0)\| \frac{\delta^2}{2}$$

Như vậy

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{2} \|U(t_0 + \delta, t_0)x\| &= \int_{t_0}^{t_0+\delta} (s - t_0) \|U(t_0 + \delta, t_0)\| \, ds \\ &= \int_{t_0}^{t_0+\delta} (s - t_0) \|U(t_0 + \delta, s).U(s, t_0)\| \, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+\delta} (s - t_0) \|U(t_0 + \delta, s)\| \|U(s, t_0)\| \, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+\delta} (s - t_0).L.\|U(s, t_0)\| \, ds & (\text{do 3.19}) \\ &\leq L \int_{t_0}^{t_0+\delta} (s - t_0) \|U(s, t_0)\| \, ds = L \int_{t_0}^{t_0+\delta} \|x_g(s)\| \, ds \\ &\leq L.a_\phi(\delta) \|x_g\|_{L^\phi(X)} & (\text{do hệ quả 3.2.2}) \\ &\leq L.a_\phi(\delta) \|k'.g\|_{L^\phi(X)} & (\text{do bổ đề 3.2.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq L.a_{\phi}(\delta) \cdot k' \cdot L \frac{1}{\phi^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right)} \|x\| \quad (\text{do (3.21)}) \\
&\leq L.\delta\phi^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right) \cdot k' \cdot L \frac{1}{\phi^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right)} \|x\| \quad \text{do } a_{\phi}(\delta) = \delta\phi^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right) \\
&\leq k' L^2 \delta \|x\| \quad \forall t_0 \geq 0, \delta > 0, x \in X
\end{aligned}$$

Ta có
$$\frac{\delta^2}{2} \|U(t_0 + \delta, t_0)x\| \leq k' L^2 \delta \|x\| \quad \forall t_0 \geq 0, \delta > 0, x \in X$$

$$\Rightarrow \|U(t_0 + \delta, t_0)x\| \leq \frac{2k' L^2}{\delta} \|x\| \quad \forall t_0 \geq 0, \delta > 0, x \in X$$

$$\Rightarrow \|U(t_0 + \delta, t_0)\| \leq \frac{2k' L^2}{\delta} \quad \forall t_0 \geq 0, \delta > 0$$

Áp dụng bổ đề 3.2.7 đối với hàm $g(t, t_0) = \|U(t, t_0)\|$ khi đó tồn tại 2 hằng số $N, v >$

0 sao cho : $\|U(t_0 + \delta, t_0)\| \leq N.e^{-v\delta} \quad \forall t_0 \geq 0, \delta > 0$

Như vậy họ tiến hóa $\mathcal{U} = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0} \subset L(X)$ là ổn định mũ đều

KẾT LUẬN

Trong chương 1 , chúng tôi giới thiệu những kiến thức cơ bản để xây dựng chương 2 và chương 3

Trong chương 2 , chúng tôi xây dựng và giới thiệu một không gian hàm đặc biệt , đó là không gian Orlicz và một số kết quả có được trong không gian này .

Trong chương 3 , chúng tôi trình bày những kết quả chính có được về việc biểu diễn tính ổn định mũ của họ tiến hóa dưới dạng chấp nhận được của không gian Orlicz .

Quá trình thực hiện luận văn đã giúp tôi bước đầu làm quen với nghiên cứu khoa học cơ bản và tiếp cận với những hướng phát triển của toán học hiện đại , đồng thời là dịp để tôi vận dụng những kiến thức đã được các Thầy Cô truyền dạy vào các bài toán nghiên cứu cụ thể .Tôi cũng hy vọng sẽ có cơ hội tiếp tục nghiên cứu và phát triển tiếp những kết quả từ luận văn này trong tương lai .

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A.PAZY (1983) *Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations* Springer – Verlag, NewYord
- [2] PERRON O ,*Die Stabilitätsfrage Bei Differentialgeihungen* , *Math.Z.*32(1930), 703-728
- [3] C. CHILARESCU-A.POGAN-C.PREDA , *Rend.Sem.Mat. Univer . Pol.Torino* – Vol 63,2 (2005)
- [4] MASSERA J.L. AND SCHÄFFER J.J.,*Linear Differential Equations and Function Spaces* , *Academic Press* , New York 1966.
- [5] N. VAN MINH N,RÄBİGER F.AND SCHNAUBELT R. *Exponential Sability ,Exponential Expansiveness and Exponential Dichotomy of Evolution Equations on The half-line* , *Int. Eq. Op. Theory* 32 (1998) , 332 – 353.
- [6] N. VAN MINH,*On The Proof of Charaterizations of The Exponential Dichotomy*,*Proc. Amer. Math.Soc.* 127 (1999), 779-782.
- [7] VAN NEERVEN J.,*The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators,Operator Theory Ad-vances and Applications* 88,*Birkhausser Verlag*, 1996.
- [8] ZAAANEN A.C., *Integration* , *North-Holland* , *Amsterdam* 1967.