

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Lê Thanh Long

CÁC CÔNG THỨC TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG TRONG LÝ THUYẾT HÀM NGUYÊN

**Chuyên ngành : Toán giải tích
Mã số : 60 46 01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS.ĐẬU THẾ CẤP**

Thành phố Hồ Chí Minh - 2010

LỜI CẢM ƠN

***PGS.TS. Đặng Thế Cấp** đã tận tình giúp đỡ em trong suốt quá trình thực hiện luận văn này .*

***Quý thầy, cô của trường** đã nhiệt tình giảng dạy trong quá trình em học tập tại trường và đã tạo điều kiện cho em hoàn thành luận văn này .*

Tp. HCM, tháng 8 năm 2010

Học viên

Lê Thanh Long

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là luận văn của tôi, do chính tôi làm.

Tác giả luận văn

Lê Thanh Long

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết giải tích phức được phát triển mạnh vào thế kỉ 19, gắn liền với tên tuổi các nhà toán học Euler, Gauss, Riemann, Cauchy, Weierstrass...

Ngày nay giải tích phức vẫn tiếp tục phát triển và hoàn thiện. Giải tích phức không những sâu sắc về lý thuyết mà còn có nhiều ứng dụng không những trong toán học mà còn trong nhiều ngành khoa học tự nhiên cũng như trong kỹ thuật.

Trong giải tích phức các công thức tích phân có một vai trò quan trọng. Các công thức này được sử dụng để nghiên cứu hàm nguyên, hàm phân hình, chỉ ra mối liên hệ của hàm nguyên và hàm phân hình với các không điểm và cực điểm của chúng.

Vì vậy chúng tôi chọn đề tài này nhằm hệ thống lại các công thức tích phân thông dụng và một số ứng dụng của chúng.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận văn này là trình bày các công thức tích phân và ứng dụng vào lý thuyết hàm nguyên.

3. Đối tượng, phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu là các công thức tích phân và hàm nguyên.

Phạm vi nghiên cứu: chứng minh các công thức tích phân và vận dụng vào lý thuyết hàm nguyên.

4. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài nghiên cứu

Lý thuyết hàm nguyên có nhiều ứng dụng trong toán học cũng như trong kỹ thuật.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm chỉnh hình và các tính chất của hàm chỉnh hình

Định nghĩa 1.1.1

Cho hàm số f xác định trên miền $D \subset \mathbb{C}$. Xét giới hạn

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad \text{với } z \in D, z + \Delta z \in D.$$

Nếu tại điểm z giới hạn này tồn tại thì nó được gọi là đạo hàm phức của f tại z , kí hiệu là $f'(z)$ hay $\frac{df}{dz}(z)$. Như vậy $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.

Hàm f có đạo hàm phức tại z cũng được gọi là khả vi phức hay $\mathbb{C}$ -khả vi tại z .

Định nghĩa 1.1.2

Cho hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ với $z = x + yi \in D$ với D là miền trong $\mathbb{C}$.

Hàm f được gọi là $\mathbb{R}^2$ -khả vi tại $z_0 = x_0 + y_0 i$ nếu các hàm hai biến thực $u(x,y)$, $v(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0) .

Hàm f gọi là thỏa phương trình Cauchy – Riemann (hoặc điều kiện Cauchy – Riemann) tại $z_0 = x_0 + y_0 i$ nếu các đẳng thức sau đúng tại (x_0, y_0)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Định lý 1.1.1

Để hàm f là khả vi ($\mathbb{C}$ -khả vi) tại $z_0 = x_0 + y_0 i$ điều kiện cần và đủ f là $\mathbb{R}^2$ -khả vi và thỏa mãn điều kiện Cauchy – Riemann tại (x_0, y_0) .

Định nghĩa 1.1.3

Hàm f xác định trong miền $D \subset \mathbb{C}$, nhận giá trị trong $\mathbb{C}$ gọi là chỉnh hình tại $z_0 \in D$ nếu tồn tại $r > 0$ để f là $\mathbb{C}$ -khả vi tại mọi $z \in B(z_0, r) \subset D$.

Nếu f chỉnh hình tại mọi $z \in D$ ta nói f chỉnh hình trên D . Tập các hàm chỉnh hình trên D kí hiệu $A(D)$.

Nhận xét. Ta có thể mở rộng định nghĩa trên tới trường hợp D là miền tùy ý trong $\overline{\mathbb{C}}$ còn f là ánh xạ từ D vào $\overline{\mathbb{C}}$ như sau: khi z_0 hữu hạn và $f(z_0) = \infty$ ta nói f chỉnh hình tại z_0 nếu $\frac{1}{f(z)}$ chỉnh hình

tại z_0 , còn khi $z_0 = \infty$ ta nói f chỉnh hình tại z_0 nếu $f(\frac{1}{z})$ chỉnh hình tại 0.

Hàm chỉnh hình còn được gọi là hàm giải tích .

Hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ được gọi là hàm nguyên.

Định lý 1.1.2 (Định lý Cauchy)

Cho D là miền bị chặn, có biên là hữu hạn các đường cong trơn từng khúc. Nếu f chỉnh hình trên D và liên tục trên $\overline{D}$ thì

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Định lý 1.1.3

Giả sử f là hàm chỉnh hình trên miền D và $z_0 \in D$. Khi đó với mọi chu tuyến γ sao cho $D_\gamma \subseteq D$ ta có công thức tích phân Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{\eta - z_0} d\eta.$$

Nếu f liên tục trên $\overline{D}$, chỉnh hình trên D và ∂D là một chu tuyến thì với mọi $z \in D$ ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta.$$

Giả sử γ là chu tuyến và f là hàm liên tục trên γ . Với mọi $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ ta có $\varphi(\eta) = \frac{f(\eta)}{\eta - z}$ là hàm liên tục trên γ . Đặt

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta$$

ta được hàm số xác định trên $\mathbb{C} \setminus \gamma$, $F(z)$ được gọi là tích phân loại Cauchy.

Định lý 1.1.4

Hàm $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta$ là hàm chỉnh hình trên miền $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Hơn nữa trên miền $\mathbb{C} \setminus \gamma$, F có

đạo hàm mọi cấp và chúng được tính theo công thức

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}} d\eta \quad \text{với } n \text{ nguyên dương và } F^{(0)} = F.$$

Định lý 1.1.5

Giả sử f là hàm chỉnh hình trên D . Khi đó f có đạo hàm mọi cấp và các đạo hàm của nó cũng chỉnh hình trong miền D . Các đạo hàm của f tại điểm z được biểu diễn bởi công thức

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}} d\eta, \quad n=1,2,3,\dots$$

trong đó γ là chu tuyến sao cho $z \in D_\gamma \subseteq D$.

Định lý 1.1.6 (Định lý Morera)

Cho f là hàm liên tục trong miền đơn liên D và tích phân của f theo mọi chu tuyến nằm trong D đều bằng 0. Khi đó f là một hàm chỉnh hình trên miền D .

Định lý 1.1.7 (Bất đẳng thức Cauchy)

Giả sử f chỉnh hình trên miền D , $a \in D$, $0 < r < d(a, \partial D)$ và $M_f(r) = \max_{z \in \partial B(a, r)} |f(z)|$

Khi đó ta có bất đẳng thức

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M_f(a, r)}{r^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Định lý 1.1.8 (Định lý Liouville)

Nếu f là hàm nguyên và bị chặn trên $\mathbb{C}$ thì f là hàm hằng.

Định lý 1.1.9 (Định lý giá trị trung bình)

Nếu f là hàm chỉnh hình trên miền D và $\overline{B}(z_0, r) \subset D, r > 0$ thì

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Định lý 1.1.10 (Bổ đề Schwarz)

Giả sử f là hàm chỉnh và hình biến hình tròn đơn vị vào chính nó, hơn nữa giả sử $f(0) = 0$.

Khi đó

i) $|f(z)| \leq |z|$ với mọi $z \in B(0, 1)$.

ii) Nếu $|f(z_0)| = z_0$ với z_0 nào đó trong $B(0, 1)$ khác 0 thì $f(z) = \alpha z$, trong đó $|\alpha| = 1$.

Cho tập con A của $\mathbb{C}$ và $z_0 \in \mathbb{C}$. Ta gọi khoảng cách từ z_0 đến A là $d(z_0, A) = \inf_{z \in A} |z - z_0|$.

Nếu $A = \emptyset$ thì ta định nghĩa $d(z_0, A) = \infty$.

Định lý 1.1.11 (Định lý Taylor)

Cho f là một hàm chỉnh hình trên miền D và $z_0 \in D$. Khi đó trong hình tròn

$B(z_0, R), R = d(z_0, \partial D)$. Ta có khai triển

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Các hệ số a_k là duy nhất, được tính theo công thức $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Định lý 1.1.12

Hàm $f(z)$ xác định trên miền D là chỉnh hình khi và chỉ khi với mọi $z_0 \in D$ hàm f có thể khai triển được thành chuỗi lũy thừa theo $z - z_0$ mà nó hội tụ tới $f(z)$ trong hình tròn tâm z_0 bán kính hội tụ $R \geq d(z_0, \partial D)$.

Từ định lí 1.1.12 ta có định nghĩa khác cho hàm nguyên: Hàm $f(z)$ xác định trên $\mathbb{C}$, được biểu diễn dạng

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$$

gọi là hàm nguyên.

Định lí 1.1.13

Cho $k > 0$ thỏa mãn $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{M_f(r)}{r^k} = 0$. Khi đó $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ là đa thức bậc

không vượt quá k (trong đó $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$).

Định lí 1.1.14 (Định lí Laurent)

Cho hàm f chỉnh hình trên hình vành khăn V :

$$r < |z - z_0| < R, \quad 0 \leq r < R \leq \infty.$$

Khi đó trên V ta có $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, trong đó các hệ số a_k duy nhất và được tính theo công thức

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{k+1}} d\eta$$

với $C_\rho = \{z : |z| = \rho\}, r < \rho < R$.

Định nghĩa 1.1.4

Điểm z_0 gọi là điểm bất thường cô lập của hàm f nếu f không xác định tại z_0 nhưng xác định và chỉnh hình trong một hình tròn thủng $0 < |z - z_0| < R, R > 0$.

Cho z_0 là điểm bất thường cô lập của f . Khi đó

z_0 gọi là điểm bất thường cốt yếu nếu không tồn tại $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$,

∞ - điểm nếu $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;

c - điểm nếu $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c \in \mathbb{C}$.

Nếu z_0 là c - điểm thì bằng cách đặt $f(z_0) = c$ ta được hàm f chỉnh hình trên $|z - z_0| < R$. Một c – điểm với $c \neq 0$ gọi là điểm đều

Giả sử $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ là khai triển Laurent của hàm f trong $0 < |z - z_0| < R$. Đặt

$$\alpha(f, z_0) = \inf \{k : a_k \neq 0\}.$$

Định lí 1.1.15

Cho z_0 là điểm bất thường cô lập của hàm f . Khi đó

a) z_0 là điểm bất thường cốt yếu $\Leftrightarrow \alpha(f, z_0) = -\infty$.

b) z_0 là ∞ -điểm $\Leftrightarrow 0 > \alpha(f, z_0) > -\infty$.

c) z_0 là điểm đều $\Leftrightarrow \alpha(f, z_0) = 0$.

d) z_0 là 0-điểm $\Leftrightarrow \alpha(f, z_0) > 0$.

Nếu z_0 là ∞ -điểm thì số $m = |\alpha(f, z_0)|$ gọi là cấp của ∞ -điểm z_0 ; nếu z_0 là 0-điểm thì số $m = \alpha(f, z_0)$ là bội của 0-điểm z_0 .

Định nghĩa 1.1.5

Giả sử z_0 là điểm bất thường cô lập của hàm f . Khi đó tồn tại $R > 0$ sao cho f chỉnh hình trên hình tròn thủng $0 < |z - z_0| < R$. Kí hiệu c_ρ là đường tròn tâm z_0 bán kính ρ . Ta gọi thặng dư

của f tại z_0 là

$$\text{res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\rho} f(z) dz, \quad 0 < \rho < R.$$

Theo định lý Cauchy tích phân trên không phụ thuộc vào ρ . Ta có thể thay c_ρ bởi một chu tuyến γ bất kì vây quanh z_0 .

Định lý 1.1.16 (Định lý cơ bản về thặng dư)

Cho hàm f chỉnh hình trong miền D trừ ra một số điểm bất thường cô lập $z_1, \dots, z_n$. Khi đó với mọi chu tuyến γ sao cho $\{z_1, \dots, z_n\} \subset D_\gamma \Subset D$ đều có

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res}[f(z), z_j].$$

Định lý 1.1.17

Cho hàm $f \neq 0$, chỉnh hình trên miền D trừ ra các điểm bất thường cô lập và γ là chu tuyến sao cho $D_\gamma \Subset D$. Khi đó số ∞ -điểm và số 0-điểm của f trong D_γ là hữu hạn.

1.2. Hàm điều hoà. Hàm logarit. Hàm phân hình

Định nghĩa 1.2.1

Cho U là tập mở của $\mathbb{C}$. Hàm $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm điều hoà nếu $u \in C^2(U)$ và

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ trên } U. \text{ Tập hợp các hàm điều hoà trên } U \text{ kí hiệu}$$

$H(U)$.

Định lý 1.2.1

Cho D là miền trong $\mathbb{C}$.

a) Nếu $f \in A(D)$ và $u = \text{Ref}$ thì $u \in H(D)$.

b) Nếu $u \in H(D)$ và D là miền đơn liên thì tồn tại $f \in A(D)$ sao cho $u = \text{Ref}$. Hơn nữa các hàm f như vậy chỉ sai khác nhau một hằng số.

Định lý 1.2.2

Cho f là hàm chỉnh hình và $f \neq 0$ trên miền đơn liên D . Khi đó tồn tại hàm $g \in A(D)$ sao cho $f = e^g$.

Định nghĩa 1.2.2

Hàm g trong định lý 1.2.1 gọi là logarit của hàm f , kí hiệu $g = \log f$. Chú ý rằng logarit của một hàm là không duy nhất.

Số phức w gọi là logarit của số phức z nếu $e^w = z$. Kí hiệu tập tất cả các logarit của z là $\text{Log } z$. Ta có

$$\text{Log } z = \{ \ln|z| + i(\arg z + k2\pi), k \in \mathbb{Z} \}.$$

Đặt $\log z = \ln|z| + i \arg z$.

Định lý 1.2.3

Cho f là hàm chỉnh hình và $f \neq 0$ trên miền đơn liên D . Khi đó $\log|f(z)| \in H(D)$.

Định lý 1.2.4

Nếu $f: U_1 \rightarrow U_2$ là toàn ánh chỉnh hình, U_1, U_2 là tập mở trong $\mathbb{C}$ và h điều hoà trên U_2 thì $h \circ f$ điều hoà trên U_1 .

Định lý 1.2.5 (Định lý giá trị trung bình)

Cho f là hàm điều hoà trên một lân cận của hình tròn đóng $\overline{B(w, \rho)}$. Khi đó

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + \rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Định nghĩa 1.2.1

Hàm chỉnh hình trên miền $D \subset \mathbb{C}$ trừ ra một số điểm bất thường là cực điểm gọi là hàm phân hình trên D .

1.3. Không gian đếm được chuẩn và phiếm hàm tuyến tính

Định nghĩa 1.3.1

Cho không gian lồi địa phương X . Họ nửa chuẩn Γ gọi là xác định tôpô của X nếu họ $\{x: p(x) < 1\}_{p \in \Gamma}$ là cơ sở lân cận (của 0) trong X .

Không gian lồi địa phương X gọi là không gian đếm được chuẩn nếu có tôpô xác định bởi một họ Γ đếm được chuẩn và thỏa mãn điều kiện tách: mọi $x \neq 0$, tồn tại $p \in \Gamma$ sao cho $p(x) > 0$.

Định lý 1.3.1

Cho không gian lồi địa phương X xác định bởi một họ nửa chuẩn Γ . Khi đó phiếm hàm tuyến tính f trên X liên tục khi và chỉ khi tồn tại $p \in \Gamma$ sao cho

$$|f(x)| \leq p(x) \text{ với mọi } x \in X.$$

Định lý 1.3.2

Mọi phiếm hàm tuyến tính f liên tục xác định trên một không gian con M của không gian lồi địa phương X , có thể mở rộng thành một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X .

Định lý 1.3.3

Cho X là không gian lồi địa phương, Hausdorff, $x_0 \in X, x_0 \neq 0$. Khi đó tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên X sao cho $f(x_0) \neq 0$.

Định lý 1.3.4

Cho X là không gian đếm được chuẩn với hệ nửa chuẩn $\{\|\cdot\|_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ thỏa $\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \dots \leq \|x\|_k \leq \dots$ với mọi $x \in X$. Nếu f là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X thì tồn tại một số nguyên dương k và một hằng số $C > 0$ sao cho $|f(x)| \leq C\|x\|_k$ với mọi $x \in X$.

Chương 2

CÁC CÔNG THỨC TÍCH PHÂN

2.1 Các công thức tích phân

Định lý 2.1.1 (Công thức Schwarz)

Giả sử $f = u + iv$ là hàm liên tục trên $\overline{B}(0, r)$ và chỉnh hình trên $B(0, r)$. Khi đó

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}) \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} d\varphi + iv(0) \text{ với mọi } z \in B(0, r). \quad (2.1)$$

Chứng minh. Với mọi $|z| < r$, theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - z} d\varphi. \quad (2.2)$$

Đặc biệt là

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (2.3)$$

Vì $|z| = |\bar{z}| < r$ nên $\left| \frac{r^2}{z} \right| > r$, từ đó áp dụng định lý Cauchy với hàm chỉnh hình $\frac{f(\eta)}{\eta - \frac{r^2}{z}}$ ta có

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\eta)}{\eta - \frac{r^2}{z}} d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \frac{re^{i\varphi} \bar{z}}{re^{i\varphi} \bar{z} - r^2} d\varphi = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \frac{\bar{z}}{re^{-i\varphi} - z} d\varphi \quad (2.4)$$

Từ (2.2) và (2.3) ta thu được

$$f(z) - \frac{1}{2} f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \frac{1}{2} \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} d\varphi. \quad (2.5)$$

Nhân hai vế của (2.3) với $\frac{1}{2}$ sau đó trừ đi (2.4) ta được

$$\frac{1}{2} f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \frac{1}{2} \frac{re^{-i\varphi} + \bar{z}}{re^{-i\varphi} - z} d\varphi.$$

Do đó

$$\frac{1}{2} \overline{f(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(re^{i\varphi})} \frac{1}{2} \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} d\varphi \quad (2.6)$$

Cộng (2.5) và (2.6) ta được : $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}) \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} d\varphi + iv(0)$. $\square$

Định lý 2.2.2 (Công thức Poisson)

Giả sử u là hàm điều hoà trên $\overline{B}(0, r)$. Khi đó

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi \quad \text{với } z \in B(0, r) \quad (2.7)$$

và

$$u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta) + \rho^2} d\varphi \quad \text{với } \rho < r. \quad (2.8)$$

Chứng minh. Theo định lí 1.2.7 tồn tại một hàm f chỉnh hình trên $\overline{B}(0, r)$ sao cho $u = \operatorname{Re} f$.

$$\text{Vì } \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} = \frac{(re^{i\varphi} + z)(re^{-i\varphi} - \bar{z})}{|re^{i\varphi} + z|^2} = \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2},$$

nên từ công thức Schwarz (2.1) ta có

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi.$$

Vậy ta có (2.7).

Với $z = \rho e^{i\theta}$ và

$$\begin{aligned} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2} &= \frac{r^2 - \rho^2}{|r(\cos \varphi + i \sin \varphi) - \rho(\cos \theta + i \sin \theta)|^2} \\ &= \frac{r^2 - \rho^2}{(r \cos \varphi - \rho \cos \theta)^2 + (r \sin \varphi - \rho \sin \theta)^2} \\ &= \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta) + \rho^2}. \end{aligned}$$

Thay vào (2.7) ta có

$$u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta) + \rho^2} d\varphi \quad \text{với } \rho < r \quad \square$$

Định lí 2.1.3 (Bổ đề thặng dư logarit)

Cho hàm f chỉnh hình trên miền D trừ ra các điểm bất thường cô lập là các ∞ -điểm của f và γ là chu tuyến không đi qua các không điểm và ∞ -điểm của f sao cho $D_\gamma \Subset D$. Khi đó

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \text{ trong đó } N \text{ là số không điểm của } f \text{ trong } D_\gamma \text{ (bội } k \text{ được tính } k \text{ lần)} \text{ và } P \text{ là}$$

số ∞ -điểm của f trong D_γ (cấp k được tính k lần).

Chứng minh. Hàm $\frac{f'}{f}$ có các điểm bất thường cô lập là các 0-điểm và ∞ -điểm của f . Nếu

$z = a$ là không điểm bội m thì $f(z) = (z - a)^m g(z)$, $g(z) \neq 0$, suy ra $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$. Vì $g(z) \neq 0$

nên ta có

$$\operatorname{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}, a \right] = \int_{c_p} \frac{m}{z-a} dz + \int_{c_p} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = m + 0 = m.$$

Tương tự, nếu $z = a$ là cực điểm cấp m thì $\operatorname{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}, a \right] = -m$.

Kết hợp với các định lý 1.1.16 và 1.1.17 ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k \operatorname{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_j \right] + \sum_{j=1}^l \operatorname{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}, w_j \right] = N - P,$$

trong đó $z_1, \dots, z_k$ là không điểm và $w_1, \dots, w_l$ là cực điểm của f . $\square$

Chú ý rằng khi f là hàm nguyên thì $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N$.

Định lý 2.1.4

Cho $\phi(z)$ là hàm chỉnh hình trên D_{γ} $z_1, \dots, z_k$ là không điểm và $w_1, \dots, w_l$ là cực điểm của f .

Khi đó

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \phi(z) dz = \sum_{j=1}^k \phi(z_j) - \sum_{j=1}^l \phi(w_j).$$

Chứng minh. Nếu $z = a$ là không điểm bội m thì $f(z) = (z-a)^m g(z)$, $g(z) \neq 0$,

suy ra $\frac{f'(z)}{f(z)} \phi(z) = \frac{m\phi(z)}{z-a} + \frac{g'(z)\phi(z)}{g(z)}$. Vì $g(z) \neq 0$ nên ta có

$$\operatorname{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \phi(z), a \right] = \int_{c_p} \frac{m\phi(z)}{z-a} dz + \int_{c_p} \frac{g'(z)}{g(z)} \phi(z) dz = m\phi(a) + 0 = m\phi(a).$$

Tương tự nếu $z = a$ là cực điểm bội m thì $\operatorname{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \phi(z), a \right] = -m\phi(a)$. Vì vậy tương tự định lý 2.1.3

ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \phi(z) dz = \sum_{j=1}^k \phi(z_j) - \sum_{j=1}^l \phi(w_j). \quad \square$$

Định lý 2.1.5

Cho hàm $f(z)$ chỉnh hình và khác 0 tại mọi z thuộc đĩa $\{z : |z| \leq R\}$. Khi đó ta có

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + iC; \quad (2.9)$$

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$

Chứng minh. Nếu $f(z) \neq 0$ trên đĩa $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ thì $\log f(z)$ là hàm chỉnh hình trên đĩa .

Áp dụng định lí 2.1.1 ta có

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + iC .$$

Theo định lí 1.2.3 thì $\log |f(z)|$ là hàm điều hoà . Áp dụng định lí 2.1.2 ta có

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta. \quad \square$$

Định lí 2.1.6 (Công thức Poisson - Jensen)

Giả sử f là hàm phân hình f không đồng nhất bằng 0 trên $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ và giả sử $a_j (1 \leq j \leq M), b_k (1 \leq k \leq N)$ là các không điểm và cực điểm của f trong miền $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Khi đó nếu $z = re^{i\varphi}$ ($0 < r < R$) và $f(0) \neq 0, \infty$ thì

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + \sum_j^M \log \frac{R(z - a_j)}{R^2 - \overline{a_j}z} + \sum_k^N \log \frac{R(z - b_k)}{R^2 - \overline{b_k}z} + iC_1. ;$$

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta + \sum_j^M \log \left| \frac{R(z - a_j)}{R^2 - \overline{a_j}z} \right| + \sum_k^N \log \left| \frac{R(z - b_k)}{R^2 - \overline{b_k}z} \right|.$$

(2.10) *Chứng minh.* Xét trường hợp f không có không điểm và cực điểm trên đường tròn $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$, trường hợp tổng quát ta xét hàm $f(\varepsilon z)$ và cho $\varepsilon \rightarrow 0$.

Giả sử f không có không điểm và cực điểm trong miền $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ thì áp dụng định lí 2.1.5 ta có

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + iC ,$$

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$

Trong trường hợp tổng quát xét hàm

$$\psi(\xi) = f(\xi) \frac{\prod_{k=1}^N \left\{ \frac{R(\xi - b_k)}{R^2 - \overline{b_k}\xi} \right\}}{\prod_{j=1}^M \left\{ \frac{R(\xi - a_j)}{R^2 - \overline{a_j}\xi} \right\}} .$$

Khi đó $\psi \neq 0, \infty$ trong $|\xi| < R$ và $|\psi(\xi)| = |f(\xi)|$ trên $|\xi| = R$. Bởi vì

$$\left| \frac{R(\xi - a)}{R^2 - \overline{a}\xi} \right| = \left| \frac{Re^{i\varphi} - a}{R - \overline{a}e^{i\varphi}} \right| = \left| \frac{R - ae^{-i\varphi}}{R - \overline{a}e^{i\varphi}} \right| = 1, \text{ với mọi } |a| < R$$

nên áp dụng định lí 2.1.5 với $\psi(\xi)$ thay cho $f(\xi)$ ta được

$$\log \psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\psi(Re^{i\theta})| \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + iC ;$$

$$\log |\psi(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\psi(Re^{i\theta})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta .$$

Vậy

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + \sum_j^M \log \frac{R(z - a_j)}{R^2 - \overline{a_j}z} + \sum_k^N \log \frac{R(z - b_k)}{R^2 - \overline{b_k}z} + iC. ;$$

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta + \sum_j^M \log \left| \frac{R(z - a_j)}{R^2 - \overline{a_j}z} \right| + \sum_k^N \log \left| \frac{R(z - b_k)}{R^2 - \overline{b_k}z} \right|. \text{ Với } \quad \text{giả}$$

thiết trong định lí 2.16 ta có công thức Jensen

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_j^M \log \left| \frac{a_j}{R} \right| + \sum_k^N \log \left| \frac{b_k}{R} \right|. \quad (2.11)$$

Nếu f chỉnh hình thì (2.11) trở thành

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_j^M \log \left| \frac{a_j}{R} \right|. \quad (2.12)$$

Nếu $f(z)$ chỉnh hình và có 0 là không điểm bội $k \geq 0$ thì ta có công thức

$$k \log R + \log \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \sum_{j=1}^M \log \left| \frac{a_j}{R} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{it})| dt .$$

Thật vậy viết $f(z) = cz^k + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots, c \neq 0$, áp dụng công thức (2.12) cho hàm $\frac{f(z)}{z^k}$ ta được

$$\log |c| = \sum_{j=1}^M \log \left| \frac{a_j}{R} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|f(Re^{it})|}{R^k} dt .$$

Mặt khác ta lại có $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = c$. Vậy

$$k \log R + \log \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \sum_{j=1}^M \log \left| \frac{a_j}{R} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{it})| dt . \quad \square \quad (2.13)$$

Định lí 2.1.7 (Định lí Cauchy)

Cho $f(z)$ là hàm chỉnh hình trên miền $|z| \geq l, -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ và $r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}, \dots, r_n e^{i\theta_n}$ là các

không điểm của hàm f ở trong chu tuyến gồm các đường $|z| = l, |z| = R, -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ và trục ảo,

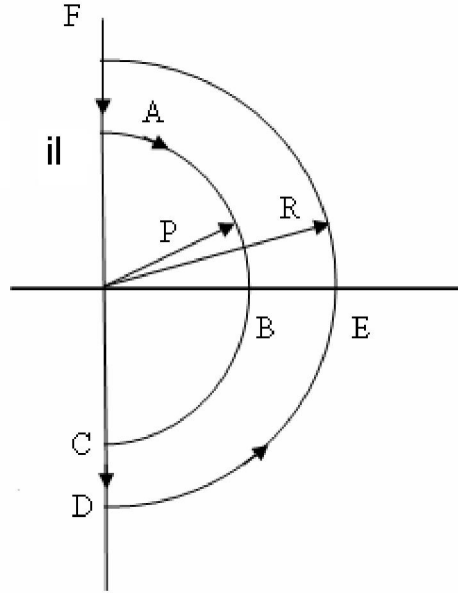
$f(z)$ không có không điểm trên chu tuyến thì

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{R^2} \right) \cos \theta_k = \frac{1}{\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log |f(re^{i\theta})| \cos \theta d\theta$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^R \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2} \right) \log \{ |f(iy)| |f(-iy)| \} dy + O(1)$$
(2.14)

$O(1)$ là đại lượng bị chặn khi $R \rightarrow \infty$.

Chứng minh. Xét hàm $I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \log f(z) \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{R^2} \right) dz$.



γ là chu tuyến ABCDEF bắt đầu tại $z = il$.

Trên nửa đường tròn $|z| = l$ thì

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_l} \log f(z) \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{R^2} \right) dz$$

là bị chặn.

Trên nửa trục ảo âm $z = -iy$ thì

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_l^R \log f(-iy) \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2} \right) dy.$$

Trên nửa đường tròn lớn $z = Re^{i\theta}$ thì

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log |f(Re^{i\theta})| \left\{ \frac{e^{-2i\theta}}{R^2} + \frac{1}{R^2} \right\} iRe^{i\theta} d\theta = \frac{1}{\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log |f(Re^{i\theta})| \cos \theta d\theta$$

vì $e^{-i\theta} + e^{i\theta} = 2 \cos \theta$.

Trên trục ảo dương $z = iy$ thì $I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_l^R \log f(iy) \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2} \right) dy$.

Lấy phần thực của I ta được

$$\operatorname{Re} I = \frac{1}{\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log |f(re^{i\theta})| \cos \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^R \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2} \right) \log \{ |f(iy)| |f(-iy)| \} dy + O(1).$$

Tính I bằng phương pháp tích phân từng phần ta được

$$I = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \log f(z) \left(\frac{z}{R^2} - \frac{1}{z} \right) \right\}_{\gamma} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \left(\frac{1}{z} - \frac{z}{R^2} \right) dz.$$

Chọn điểm đầu $z = il$ và điểm kết thúc $z = il$, giá trị của logarit tăng thêm $2n\pi i$. Suy ra

$$\left\{ \log f(z) \left(\frac{z}{R^2} - \frac{1}{z} \right) \right\}_{\gamma} = \{ \log(il) + 2n\pi i \} \left(\frac{il}{R^2} - \frac{1}{il} \right) - \log(il) \left(\frac{il}{R^2} - \frac{1}{il} \right) = 2n\pi i \left(\frac{il}{R^2} - \frac{1}{il} \right) \quad n \text{ là số không}$$

điểm của f trong chu tuyến. Vậy

$$I = n \left(\frac{il}{R^2} - \frac{1}{il} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \left(\frac{1}{z} - \frac{z}{R^2} \right) dz.$$

Theo định lý 2.1.4 ta có

$$\operatorname{Re} I = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \left(\frac{1}{z} - \frac{z}{R^2} \right) dz \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{r_k e^{i\theta_k}} - \frac{r_k e^{i\theta_k}}{R^2} \right) \right\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{R^2} \right) \cos \theta_k \quad \text{Vậy}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{R^2} \right) \cos \theta_k &= \frac{1}{\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log |f(re^{i\theta})| \cos \theta d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^R \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2} \right) \log \{ |f(iy)| |f(-iy)| \} dy + O(1) \end{aligned}$$

□

2.2. Đặc trưng Nevanlinna

Trước khi phát biểu và chứng minh định lý cơ bản thứ nhất của Nevanlinna, ta đưa ra một số kí hiệu để viết công thức Jensen dưới dạng khác.

Đặt $\log^+ x = \begin{cases} \log x & x \geq 1 \\ 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$. Hiển nhiên ta có $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$ với mọi $x > 0$ do đó

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(Re^{i\varphi})| d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(Re^{i\varphi})|} d\varphi.$$

Đặt

$$m(R, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(Re^{i\varphi})| d\varphi. \quad (2.15)$$

Giả sử $r_1, \dots, r_N$ là môđun các cực điểm $b_1, \dots, b_N$ của $f(z)$ trong $|z| < R$. Khi đó theo định nghĩa tích phân Stieljes ta có

$$\sum_{k=1}^N \log \left| \frac{R}{b_k} \right| = \sum_{k=1}^N \log \frac{R}{r_k} = \int_0^R \log \frac{R}{t} dn(t, f)$$

trong đó $n(t, f)$ kí hiệu số cực điểm của f trong $|z| < t$ (cực điểm cấp m được tính m lần). Tích phân từng phần ta thu được

$$\sum_{k=1}^N \log \left| \frac{R}{b_k} \right| = \left\{ n(t, f) \log \frac{R}{t} \right\} \Big|_0^R - \int_0^R n(t, f) d \log \frac{R}{t} \quad (\text{ở đây ta quy ước } 0 \cdot \infty = 0).$$

Đặt

$$N(R, f) = \sum_{k=1}^N \log \left| \frac{R}{b_k} \right| = \int_0^R n(t, f) \frac{dt}{t} . \quad (2.16)$$

$$N(R, \frac{1}{f}) = \sum_{j=1}^N \log \left| \frac{R}{a_j} \right| = \int_0^R n(t, \frac{1}{f}) \frac{dt}{t} . \quad (2.17)$$

Bây giờ ta đặt

$$T(R, f) = m(R, f) + N(R, f) .$$

Công thức Jensen trở thành

$$T(R, f) = T(R, \frac{1}{f}) + \log |f(0)| . \quad (2.18)$$

Lưu ý rằng số $m(R, f)$ là trung bình của $\log |f|$ trên đường tròn $|z| = R$ còn số $N(R, f)$ liên quan mật thiết tới các cực điểm của f .

Hàm $T(R, f)$ được gọi là hàm đặc trưng Nevanlinna của f .

Ta xét các tính chất đơn giản của hàm đặc trưng

Cho $a_1, \dots, a_p$ là các số phức tùy ý thì $\log^+ \left| \prod_{k=1}^p a_k \right| \leq \sum_{k=1}^p \log^+ |a_k|$ và

$$\log^+ \left| \prod_{k=1}^p a_k \right| \leq \log^+ p \max_{1 \leq k \leq p} |a_k| \leq \sum_{k=1}^p \log^+ |a_k| + \log p .$$

Áp dụng các bất đẳng thức này vào p hàm phân hình $f_1(z), f_2(z), \dots, f_p(z)$ ta có

$$m \left(r, \sum_{k=1}^p f_k(z) \right) \leq \sum_{k=1}^p m(r, f_k(z)) + \log p .$$

$$m \left(r, \prod_{k=1}^p f_k(z) \right) \leq \sum_{k=1}^p m(r, f_k(z)) .$$

Hiển nhiên rằng nếu $f(z)$ là tổng hay tích của các hàm $f_k(z)$ thì bậc của cực điểm của $f(z)$ tại z_0 không lớn hơn tổng bậc của cực điểm các hàm $f_k(z)$ tại z_0 . Từ đó ta có

$$N\left(r, \sum_{k=1}^p f_k(z)\right) \leq \sum_{k=1}^N N(r, f_k(z)).$$

$$N\left(r, \prod_{k=1}^p f_k(z)\right) \leq \sum_{k=1}^N N(r, f_k(z)).$$

Do $T(R, f) = m(R, f) + N(R, f)$ nên ta có

$$T\left(r, \sum_{k=1}^p f_k(z)\right) \leq \sum_{k=1}^N T(r, f_k(z)) + \log p.$$

$$T\left(r, \prod_{k=1}^p f_k(z)\right) \leq \sum_{k=1}^N T(r, f_k(z)).$$

Đặc biệt nếu $p = 2$, $f_1(z) = f(z)$, $f_2(z) = a = \text{const}$ thì

$$T(r, f + a) \leq T(r, f) + \log^+ |a| + \log 2.$$

Bởi vì có thể thay $f + a$ bởi f , f bởi $f - a$ và a bởi $-a$ nên

$$|T(r, f) - T(r, f - a)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$$

Định lý 2.2.1 (Định lý Nevanlinna)

Nếu a là số thực tùy ý thì

$$m\left(R, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = T(R, f) - \log |f(0) - a| + \varepsilon(a, R),$$

trong đó $|\varepsilon(a, R)| \leq \log^+ |a| + \log 2$.

Chứng minh. Theo định nghĩa hàm $T(r, f)$ ta có

$$m\left(R, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = T\left(R, \frac{1}{f-a}\right).$$

Theo công thức Jensen ta có

$$T\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = T(R, f - a) - \log |f(0) - a|.$$

Theo nhận xét trên ta có

$$|T(R, f) - T(R, f - a)| \leq \log^+ |a| + \log 2$$

từ đó suy ra

$$T(R, f - a) \leq T(R, f) + \log^+ |a| + \log 2.$$

Vì vậy

$$m\left(R, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = T(R, f) - \log |f(0) - a| + \varepsilon(a, R). \quad \square$$

Nếu cố định f , thay cho $m\left(R, \frac{1}{f-a}\right), N\left(R, \frac{1}{f-a}\right), n\left(R, \frac{1}{f-a}\right), T(R, f)$ lần lượt bởi $m(R, a), N(R, a), n(R, a), T(R)$ khi a hữu hạn và $m(R, \infty), N(R, \infty), n(R, \infty)$ lần lượt thay cho $m(R, a), N(R, a), n(R, a)$ khi a vô hạn thì đẳng thức trong định lý cơ bản thứ nhất trở thành $m(R, a) + N(R, a) = T(R) + O(1)$ với mọi a (chú ý $O(1)$ phụ thuộc vào a).

Trong mục này ta tiếp tục xem xét một số tính chất thông dụng của hàm đặc trưng Nevanlinna $T(R, f)$.

Định lý 2.2.2

Nếu f là hàm chỉnh hình trên một lân cận của $\overline{B}(0, R)$ thì

$$T(r, f) \leq \log^+ M_f(r) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, f), \forall r: 0 \leq r < R. \text{ Trong đó } M_f(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

Chứng minh. Do f là hàm chỉnh hình nên ta có bất đẳng thức thứ nhất

$$T(r, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \log^+ M_f(r).$$

Mặt khác theo công thức Poisson- Jensen ta có

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta + \sum_j^M \log \left| \frac{R(z - a_j)}{R^2 - \overline{a_j}z} \right|.$$

Thêm nữa, $|R^2 - \overline{a_j}z| \geq |R(z - a_j)|$ vì $r < R$ và $R > |a_j|$, suy ra $\sum_j^M \log \left| \frac{R(z - a_j)}{R^2 - \overline{a_j}z} \right| \leq 0$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \log |f(re^{i\theta})| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta = \frac{R+r}{R-r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$\log |f(re^{i\theta})| \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, f).$$

Từ đó ta có bất đẳng thức thứ hai

$$\log^+ M_f(r) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, f) \text{ với mọi } 0 \leq r < R. \quad \square$$

Định lý 2.2.3

Hàm f chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ là đa thức bậc p khi và chỉ khi

$$T(r, f) = \log r + O(1).$$

Chứng minh. Thật vậy giả sử f là đa thức bậc p . Khi đó $|f(z)| \leq \alpha |z|^p$ với $\alpha > 0$ nào đó và r đủ lớn. Suy ra $T(r, f) = p \log r + O(1)$.

Ngược lại giả sử $T(r, f) = p \log r + O(1)$. Do định lý 2.2.2 ta có

$$\log^+ M_f(r) \leq \frac{R+r}{R-r} (p \log r + O(1)) \quad \text{với mọi } R > r \text{ và } r \text{ đủ lớn.}$$

Cho $R \rightarrow +\infty$ ta được

$$\log^+ M_f(r) \leq p \log r \quad \text{hay} \quad M_f(r) \leq r^p \quad \text{khi } r \text{ đủ lớn.}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy đối với đạo hàm

$$|a_k| \leq \frac{M_f(r)}{r^k} \leq \frac{r^p}{r^k} \quad \text{ở đây} \quad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k.$$

Cho $r \rightarrow \infty$ ta được $a_k = 0$ nếu $k > p$. Vậy f là đa thức bậc p . $\square$

Chương 3

ỨNG DỤNG CỦA CÁC CÔNG THỨC TÍCH PHÂN

3.1 Định lý về dạng của hàm nguyên

Hàm nguyên được chia làm ba loại :

-Hàm hằng $f(z) = a$ với mọi z .

-Hàm đa thức là hàm khác hằng số và chỉ có hữu hạn hệ số trong khai triển

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \text{ khác } 0$$

-Hàm siêu việt là các hàm còn lại.

Định lý 3.1.1

Cho f là hàm nguyên khi đó

a) f là hàm hằng $\Leftrightarrow \infty$ là c- điểm của f .

b) f là hàm đa thức $\Leftrightarrow \infty$ là ∞ - điểm của f .

c) f là hàm siêu việt $\Leftrightarrow \infty$ là điểm bất thường cốt yếu của f .

Chứng minh.

a) Nếu f là hàm hằng hiển nhiên ∞ là c- điểm của f .

Ngược lại nếu $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = c \in \mathbb{C}$. Thì tồn tại số dương R sao cho $|f(z)| \leq 1 + |c|$ khi $|z| > R$. Do

$\overline{B}(0, R)$ đóng và bị chặn nên tồn tại số dương M sao cho $|f(z)| \leq M$ với mọi z thuộc $\overline{B}(0, R)$.

Đặt $M^* = \max\{1 + |c|, M\}$. Ta có $|f(z)| \leq M^*, \forall z \in \mathbb{C}$. Theo định lý Liouville thì f là hàm hằng.

b) Giả sử f là hàm đa thức $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, a_n \neq 0, n \geq 1$.

$$\text{Đặt } r_0 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \sqrt[k]{(n+1) \left| \frac{a_k}{a_n} \right|}. \text{ Với mọi } M > 0 \text{ chọn } r = \max \left\{ r_0, \sqrt[n]{\frac{M(n+1)}{|a_n|}} \right\}.$$

Khi đó với mọi z sao cho $|z| > r$ ta có

$$|f(z)| = \left| a_n z^n \left(\frac{a_0}{a_n z^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + 1 \right) \right| \geq |a_n z^n| \left(1 - \left(\left| \frac{a_0}{a_n z^n} \right| + \dots + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n z} \right| \right) \right) \geq |a_n z^n| \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) > M.$$

Vậy $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.

Ngược lại giả sử ∞ là ∞ - điểm của hàm f . Đặt $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$, $z = 0$ là ∞ - điểm của φ do đó

theo định lý 1.1.15 ta có

$$\varphi(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k, m > 0, a_{-m} \neq 0,$$

từ đó

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=-\infty}^m a_{-k} (z)^k.$$

Mặt khác $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, mà khai triển Laurent của f là duy nhất nên so sánh hai biểu thức trên ta

có $f(z) = \sum_{k=0}^m a_{-k} z^k$ là một đa thức.

c) suy ra từ a) và b). $\square$

3.2 Cấp và kiểu của hàm nguyên

Chúng ta giới thiệu một số kí hiệu.

Nếu $h(r) < g(r)$ đúng với r đủ lớn thì chúng ta gọi là một bất đẳng thức tiệm cận và kí hiệu $h(r) <^{\text{as}} g(r)$.

Nếu $h(r) < g(r)$ đúng với mọi dãy $r_n \rightarrow \infty$ thì chúng ta kí hiệu $h(r) <^n g(r)$.

Định nghĩa 3.2.1

Cho $f(z)$ là hàm nguyên. Đặt $\rho = \inf \left\{ k > 0 : M_f(r) <^{\text{as}} e^{r^k} \right\}$. Ta gọi ρ là cấp tăng (hay cấp) của f (với quy ước $\inf \emptyset = \infty$).

Nếu $\rho < \infty$ thì f gọi là có cấp tăng hữu hạn, nếu $\rho = \infty$ thì f gọi là có cấp tăng vô hạn.

Từ định nghĩa suy ra

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} <^n M_f(r) <^{\text{as}} e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \varepsilon > 0.$$

Lấy logarit ta được

$$\rho - \varepsilon < \frac{\log \log M_f(r)}{\log r} < \rho + \varepsilon.$$

Vậy

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}.$$

Định nghĩa 3.2.2

Cho f là hàm nguyên có cấp tăng $\rho < \infty$. Đặt

$$\sigma = \inf \left\{ A > 0 : M_f(r) <^{\text{as}} e^{Ar^\rho} \right\}.$$

Ta gọi σ là kiểu của hàm nguyên f . Nếu $0 < \sigma < \infty$ thì f gọi là có kiểu trung bình, nếu $\sigma = \infty$ thì f gọi là có kiểu tối đa, nếu $\sigma = 0$ thì f gọi là có kiểu tối thiểu.

Từ định nghĩa suy ra

$$e^{(\sigma-\varepsilon)r^\rho} < M_f(r) < e^{(\sigma+\varepsilon)r^\rho}, \forall \varepsilon > 0.$$

Lấy logarit ta được

$$\sigma - \varepsilon < \frac{n \log M_f(r)}{r^\rho} < \sigma + \varepsilon.$$

$$\text{Vậy } \sigma = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M_f(r)}{r^\rho}.$$

Bây giờ ta đưa ra công thức tính cấp và kiểu của hàm nguyên theo hệ số của nó trong khai triển Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Định lý 3.2.1

Nếu đối với hàm nguyên $f(z)$ bất đẳng thức sau $M_f(r) < e^{Ar^\mu}$ xảy ra với r đủ lớn thì

$$|c_n| < \left(\frac{e\mu A}{n} \right)^{1/\mu} \text{ với } n \text{ đủ lớn.}$$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức Cauchy và giả thiết $M_f(r) < e^{Ar^\mu}$. Ta có

$$|c_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n} < \frac{e^{Ar^\mu}}{r^n} = e^{Ar^\mu - n \log r}, \text{ với } r \text{ đủ lớn.}$$

Xét hàm số $g(r) = e^{Ar^\mu - n \log r}$. Ta có $g'(r) = 0$ khi $r = \left(\frac{n}{A\mu} \right)^{1/\mu}$ và tại đó g đạt cực tiểu. Thay giá trị

$$r = \left(\frac{n}{A\mu} \right)^{1/\mu} \text{ vào ta có } |c_n| < \left(\frac{e\mu A}{n} \right)^{1/\mu}. \quad \square$$

Định lý 3.2.2

Nếu đối với hàm nguyên $f(z)$ hệ số Taylor của nó trong khai triển thỏa mãn đánh giá

$$|c_n| < \left(\frac{e\mu A}{n} \right)^{1/\mu} \text{ với } n \text{ đủ lớn thì } M_f(r) < e^{(A+\varepsilon)r^\mu} \text{ với mọi } \varepsilon > 0.$$

Chứng minh. Có thể coi giả thiết đúng với mọi $n \geq 0$. Nếu $|z| = r$ thì

$$|c_n z^n| < \left(\frac{e\mu A}{n} \right)^{1/\mu} r^n = \left(\frac{e\mu A r^\mu}{n} \right)^{1/\mu}.$$

Vế phải $< \frac{1}{2^\mu}$ nếu $\frac{e\mu A r^\mu}{n} < \frac{1}{2^\mu} \Leftrightarrow n > 2^\mu e\mu A r^\mu$. Đặt $N = [2^\mu e\mu A r^\mu]$ (trong đó $[x]$ là phần nguyên của x). Ta có

$$|f(z)| < \sum_{n=0}^N |c_n| r^n + \left(\frac{1}{2^{N+1}} + \dots \right) = \sum_{n=0}^N |c_n| r^n + \frac{1}{2^N} \text{ khi } r \text{ đủ lớn.}$$

Đặt $m(r) = \max_n |c_n| r^n < \infty$. Từ các bất đẳng thức trên ta có

$$M_f(r) < (2^\mu e \mu A r^\mu + 1) m(r) + 2^{-N}$$

và

$$m(r) < \left(\frac{e \mu A r^\mu}{n} \right)^{n/\mu}.$$

Đặt $\varphi(n) = \frac{n}{\mu} \log \frac{e \mu A r^\mu}{n}$. Bởi vì $\varphi'(n) = 0 \Leftrightarrow n = \mu A r^\mu$ nên $m(r) < e^{A r^\mu}$.

Vậy ta có

$$M_f(r) < (2^\mu e \mu A r^\mu + 2) e^{A r^\mu} < e^{(A+\varepsilon) r^\mu}. \quad \square$$

Định lí 3.2.3

Đối với mọi hàm nguyên $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ta có $\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}}$.

Chứng minh. Kí hiệu

$$\bar{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}}.$$

Theo định nghĩa cấp với mọi $\mu > \rho$, bất đẳng thức $M_f(r) < e^{A r^\mu}$ thực hiện với $A=1$ ta có $M_f(r) < e^{r^\mu}$.

Áp dụng định lí 3.2.1 ta được $|c_n| < \left(\frac{e \mu}{n} \right)^{n/\mu}$. Lấy logarit hai vế bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} \log |c_n| &< \frac{n}{\mu} \log \left(\frac{e \mu}{n} \right) \\ \Leftrightarrow \mu \log \sqrt[n]{|c_n|} &< \log e \mu - \log n \\ \Leftrightarrow \mu \log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} &> \log \frac{1}{e \mu} + \log n \\ \Leftrightarrow \mu &> \frac{\log n}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}} + \frac{\log \frac{1}{e \mu}}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}}. \end{aligned}$$

Vì với mọi hàm nguyên ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ nên $\bar{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}} < \mu$. Do μ là số nguyên tùy

ý, $\mu > \rho$ nên ta có $\rho \geq \bar{\rho}$.

Giả sử $\bar{\rho} < \infty$ khi đó với mọi $\mu > \bar{\rho}$ ta có

$$\mu > \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}} \text{ với } n \text{ đủ lớn.}$$

Từ đó $|c_n| < \left(\frac{1}{n}\right)^{n/\mu}$ theo định lí 3.2.2 với $e\mu A = 1$ ta có

$$M_f(r) < e^{\left(\frac{1}{e\mu} + \varepsilon\right)r^\mu} \text{ với } r \text{ đủ lớn và } \varepsilon > 0 \text{ bất kì.}$$

Từ đó suy ra $\rho \leq \mu$. Bởi vì μ là số nguyên tùy ý, $\mu > \bar{\rho}$ nên ta có $\rho \leq \bar{\rho}$.

$$\text{Vậy } \rho = \bar{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}}. \quad \square$$

Định lí 3.2.4

Với mọi hàm nguyên $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ta có $\sigma = \frac{1}{\rho e} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(n \sqrt[n]{|c_n|^\rho} \right)$

Chứng minh. Đặt $\bar{\sigma} = \frac{1}{\rho e} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(n \sqrt[n]{|c_n|^\rho} \right)$. Với mọi $A > \sigma$ ta có

$$M_f(r) < e^{A r^\rho}.$$

Theo định lí 3.2.1 ta có

$$|c_n| < \left(\frac{e\rho A}{n} \right)^{n/\rho} \Leftrightarrow \log |c_n| < \frac{n}{\rho} \log \frac{e\rho A}{n} \Leftrightarrow \log \sqrt[n]{|c_n|^\rho} < \log \frac{e\rho A}{n} \Leftrightarrow A > \frac{1}{e\rho} n \sqrt[n]{|c_n|^\rho}.$$

Suy ra $\sigma \geq \bar{\sigma} = \frac{1}{\rho e} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(n \sqrt[n]{|c_n|^\rho} \right)$. Giả sử với mọi $\bar{\sigma} < \infty$, với mọi $\bar{\sigma} < A$ ta có $A > \frac{1}{\rho e} \left(n \sqrt[n]{|c_n|^\rho} \right)$.

Suy ra $|c_n| < \left(\frac{e\rho A}{n} \right)^{n/\rho}$ theo định lí 3.2.2 thì $M_f(r) < e^{(A+\varepsilon)r^\rho}$.

Từ đó $\sigma < A + \varepsilon$. Vì $\varepsilon > 0$ bất kì và $\bar{\sigma} < A$ nên $\bar{\sigma} \geq \sigma$.

Vậy

$$\sigma = \bar{\sigma} = \frac{1}{\rho e} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(n \sqrt[n]{|c_n|^\rho} \right).$$

Hay $\sigma = \frac{1}{\rho e} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(n \sqrt[n]{|c_n|^\rho} \right) \quad \square$

3.3 Tích vô hạn và định lí Hadamard

Cho $\{a_n\}$ là dãy số phức, $a_n \neq 0, n = 1, 2, 3, \dots$ và số p không âm sao cho chuỗi $\sum_n |a_n|^{-p-1} < \infty$.

Xét tích vô hạn $\prod_n G\left(\frac{z}{a_n}, p\right)$, trong đó

$$G(u, p) = \begin{cases} 1-u & p=0 \\ (1-u) \exp\left[u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}\right] & p>0 \end{cases}.$$

Định lí 3.3.1 (Định lí Hadamard)

Mọi hàm nguyên f có cấp ρ đều được biểu diễn dưới dạng

$$f(z) = z^m e^{P_q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right),$$

trong đó $a_1, a_2, \dots$ là tất cả các nghiệm khác 0 của $f(z)$, $p \leq \rho$, $P_q(z)$ là đa thức của biến z bậc $q \leq \rho$ và m là số lần bội nghiệm 0 của $f(z)$.

Chứng minh. Từ công thức Poisson- Jensen ta có

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\psi})| \frac{Re^{i\psi} + z}{Re^{i\psi} - z} d\psi + \sum_{|a_n| < R} \log \frac{R(z - a_n)}{R^2 - \overline{z}a_n} + iC.$$

Xét trường hợp $m = 0$ khi đó $f(0) \neq 0$. Lấy đạo hàm đến cấp $p+1$ với $p = [\rho]$ ta được

$$(\log f(z))^{(p+1)} = \frac{(p+1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\psi})| \frac{2Re^{i\psi}}{(Re^{i\psi} - z)^{p+2}} d\psi + \sum_{|a_n| < R} \frac{p! \overline{a_n}^{-p+1}}{(R^2 - \overline{z}a_n)^{p+1}} - \sum_{|a_n| < R} \frac{p!}{(a_n - z)^{p+1}}. \text{ Suy ra}$$

$$\left| (\log f(z))^{(p+1)} + \sum_{|a_n| < R} \frac{p!}{(a_n - z)^{p+1}} \right| \leq \frac{(p+1)!}{2\pi} \log M_f(R) \frac{4\pi R}{(R-r)^{p+2}} \frac{p! n(R)}{(R-r)^{p+1}}, r = |z|. \quad (3.1)$$

Đặt $n(t)$ là số điểm a_m sao cho $|a_m| \leq t$, $n(t)$ gọi là hàm đếm của dãy $\{a_n\}$.

Do f chỉnh hình, công thức Jensen trở thành

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_j \log \left| \frac{a_j}{R} \right|,$$

với a_j là không điểm của f trong $B(0, R)$. Suy ra

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi - \log |f(0)| = \sum_j \log \left| \frac{R}{a_j} \right| = \int_0^R \log \frac{R}{t} dn(t) = n(t) \log \frac{R}{t} \Big|_0^R + \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt = \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt \text{ Từ đó ta có}$$

$$\log M_f(er) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(ere^{i\varphi})| d\varphi = \int_0^{er} \frac{n(t)}{t} dt \geq \int_r^{er} \frac{n(t)}{t} dt \geq n(r).$$

Vậy $n(r) \leq \log M_f(er) + O(1)$. Do đó khi R đủ lớn thì

$$\log M_f(R) < R^{\rho+\varepsilon},$$

$$n(R) \leq \log M_f(eR) < R^{\rho+\varepsilon}$$

nên khi $R \rightarrow \infty$ ta có vế phải của bất đẳng thức (3.1) tiến đến 0. Từ đó suy ra khi $R \rightarrow \infty$ thì

$$(\log f(z))^{(p+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p!}{(a_n - z)^{p+1}}.$$

Lấy tích phân đẳng thức trên từ 0 đến z theo đường cong không đi qua các điểm $a_1, a_2, \dots$ và cho $n \rightarrow \infty$, ta nhận được

$$\log f(z) - P_q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) + \frac{z}{a_n} + \dots + \frac{z^p}{p a_n^p} \right], q \leq p.$$

Từ đó suy ra

$$f(z) = e^{P_q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right).$$

Trong trường hợp tổng quát ta có

$$f(z) = z^m e^{P_q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right). \quad \square$$

Từ định lý trên suy ra hàm nguyên có cấp $\rho = 0$ có dạng

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\omega} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right), \omega \leq \infty \text{ và } \sum_{n=1}^{\omega} \frac{1}{|a_n|} < \infty$$

Ví dụ . Hàm $f(z) = \frac{\sin \pi \sqrt{z}}{\pi \sqrt{z}}$ là hàm nguyên và cấp $\rho = \frac{1}{2}$. Các không điểm của hàm f là

$$a_n = n^2, n = 1, 2, \dots$$

Theo định lý Hadamard thì

$$f(z) = C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2} \right).$$

Vì $f(0) = 1$ nên ta có $C = 1$, vậy $\frac{\sin \pi \sqrt{z}}{\pi \sqrt{z}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2} \right)$. Thay z bởi z^2 ta có

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

3.4 Số mũ hội tụ và mật độ trên của dãy không điểm

Định nghĩa 3.4.1

Cho dãy $\{a_n\}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$. Đặt $K = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda} < \infty \right\}$. Số K được gọi là số mũ hội tụ

của dãy $\{a_n\}$.

Kí hiệu $n(r)$ là hàm đếm của dãy $\{a_n\}$. Ta gọi

$$\rho_1 = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r}$$

là cấp của hàm đếm $n(r)$ và số

$$\bar{\Delta} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\rho_1}}$$

gọi là mật độ trên của dãy $\{a_n\}$.

Ta có

$$r^{\rho_1 - \varepsilon} < n(r) < r^{\rho_1 + \varepsilon}$$

và

$$(\bar{\Delta} - \varepsilon) r^{\rho_1} < n(r) < (\bar{\Delta} + \varepsilon) r^{\rho_1} \text{ với mọi } \varepsilon > 0.$$

Kí hiệu $\underline{\Delta} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\rho_1}}$ và gọi là mật độ dưới của dãy $\{a_n\}$.

Định lý 3.4.1.

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda}$ hội tụ với mọi $\lambda > 0$ thì tích phân $\int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt$ hội tụ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n(t)}{t^\lambda} = 0$.

Chứng minh. Vì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda} = \int_0^\infty \frac{dn(t)}{t^\lambda}$ nên lấy tích phân từng phần ta được

$$\int_0^r \frac{dn(t)}{t^\lambda} = \frac{n(r)}{r^\lambda} + \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt \quad (\text{do } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{n(r)}{r^\lambda} = 0 \text{ vì } a_n \neq 0).$$

Do chuỗi hội tụ suy ra vế phải bị chặn trên. Số hạng thứ hai của vế phải không giảm nên tiến đến giới hạn xác định.

Mặt khác

$$\lambda \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt \geq \lambda n(r) \int_r^\infty \frac{1}{t^{\lambda+1}} dt = \lambda n(r) \frac{t^{-\lambda}}{-\lambda} \Big|_r^\infty = \frac{n(r)}{r^\lambda}$$

hay $\frac{n(r)}{r^\lambda} \leq \lambda \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt$, suy ra $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r)}{r^\lambda} = 0$. $\square$

Định lý 3.4.2

Số mũ hội tụ của dãy $\{a_n\}$ bằng với cấp ρ_1 của hàm đếm của nó.

Chứng minh. Kí hiệu K là số mũ hội tụ và lấy $\lambda > K$. Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda}$ hội tụ nên theo định

lí 3.4.1 ta có $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r)}{r^\lambda} = 0$. Vậy $\rho_1 \leq \lambda$ và $\rho_1 \leq K$.

Mặt khác $n(t) < t^{\rho_1 + \frac{\varepsilon}{2}}, \forall \varepsilon > 0$. Chọn $\lambda = \rho_1 + \varepsilon$, tích phân $\int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt$ hội tụ và

$\frac{n(t)}{t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda}$ hội tụ và do đó $K \leq \rho_1$. Suy ra $K = \rho_1$. $\square$

Định lí 3.4.3 (Định lí Hadamard)

Số mũ hội tụ của dãy các không điểm của hàm nguyên không lớn hơn cấp tăng của nó.

Chứng minh. Do f chỉnh hình nên theo công thức Jensen

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_j^M \log \left| \frac{a_j}{R} \right|,$$

với a_j là không điểm của f trong $B(0, R)$. Suy ra

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi - \log |f(0)| = \sum_j^M \log \left| \frac{R}{a_j} \right| = \int_0^R \log \frac{R}{t} dn(t) = n(t) \log \frac{R}{t} \Big|_0^R + \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt = \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt. \text{ Từ đó ta có}$$

$$\log M_f(er) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(ere^{i\varphi})| d\varphi = \int_0^{er} \frac{n(t)}{t} dt \geq \int_r^{er} \frac{n(t)}{t} dt \geq n(r).$$

Vậy $n(r) \leq \log M_f(er) + O(1)$.

Suy ra

$$\rho_1 = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(er)}{\log r} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r} = \rho. \quad \square$$

Định lí 3.4.4

Cho $f(z)$ là hàm nguyên kiểu không lớn hơn σ với cấp ρ . Nếu $f(z)$ triệt tiêu trên tập Λ và ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau

$$\overline{\Delta}(\Lambda) > e\rho\sigma,$$

$$\underline{\Delta}(\Lambda) > \rho\sigma$$

xảy ra, trong đó $\overline{\Delta}(\Lambda)$, $\underline{\Delta}(\Lambda)$ là mật độ trên và mật độ dưới của dãy trong Λ với cấp ρ , thì $f(z) \equiv 0$.

Chứng minh. Giả sử $\overline{\Delta}(\Lambda) > e\rho\sigma$ xảy ra. Kí hiệu $n_\Lambda(r)$ là hàm đếm của dãy Λ và đặt $n(r) = n_f(r)$ là số không điểm của f trong $B(0, r)$. Với $\lambda > 1$, ta có

$$n_\Lambda(r) \leq n(r) \leq \frac{1}{\log \lambda} \int_r^{\lambda r} \frac{n(t)}{t} dt \leq \frac{1}{\log \lambda} N(r).$$

Nếu f không đồng nhất bằng 0 thì áp dụng công thức Jensen

$$N(\lambda r) \leq \log M_f(\lambda r) + O(1) \stackrel{as}{<} (\sigma + \varepsilon) \lambda^\rho r^\rho.$$

Suy ra

$$n_\Lambda(r) \leq \frac{1}{\log \lambda} (\sigma + \varepsilon) \lambda^\rho r^\rho.$$

Từ định nghĩa $\bar{\Delta}(\Lambda)$ ta suy ra

$$\bar{\Delta}(\Lambda) \leq \frac{\sigma \lambda^\rho}{\log \lambda}.$$

Xét hàm số $f(\lambda) = \frac{\sigma \lambda^\rho}{\log \lambda}$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là $e\rho\sigma$. Lấy giá trị nhỏ nhất

vế phải theo biến λ ta được $\bar{\Delta}(\Lambda) \leq e\rho\sigma$, ta gặp mâu thuẫn. Vậy $f \equiv 0$.

Bây giờ giả sử $\underline{\Delta}(\Lambda) > \rho\sigma$. Với $\lambda > 0$ ta có $n(r) \geq n_D(r) \stackrel{as}{>} (\rho\sigma + 2\varepsilon)r^\rho$.

Suy ra $N(r) > \frac{1}{\rho}(\rho\sigma + \varepsilon)r^\rho$.

Nếu $f \not\equiv 0$ thì theo công thức Jensen chúng ta được

$$\log M_f(r) \stackrel{as}{>} \frac{1}{\rho}(\rho\sigma + \varepsilon), \sigma > \frac{1}{\rho}(\rho\sigma + \varepsilon),$$

mâu thuẫn. $\square$

Định nghĩa 3.4.2

Cho $\{x_k\}$ là dãy phần tử trong không gian tôpô tuyến tính E được gọi là đầy đủ nếu bao đóng của bao tuyến tính của nó trùng với E .

Nếu hệ không đầy đủ thì bao đóng tuyến tính của nó khác E . Khi đó nếu E là không gian lồi địa phương thì theo định lý Hahn- Banach, tồn tại phiếm hàm tuyến tính khác không $f \in E'$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi phần tử $x \in \{x_k\}$. Vậy sự tồn tại của hàm f có tính chất trên là điều kiện cần và đủ để một hệ không đầy đủ.

Cho hệ hàm $\{e^{i\lambda_k t}\}$ với λ_k là số thực.

Định lý 3.4.5

Cho $n(t)$ là hàm đếm của dãy $\{x_k\} = \Lambda$. Nếu $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{n(t)}{t} > 2$, thì hệ là $\{e^{i\lambda_k t}\}$ đầy đủ trong không gian các hàm liên tục $C[-\pi, \pi]$.

Chứng minh. Nếu hệ không đầy đủ thì theo định lý F. Riesz về dạng của phiếm hàm tuyến tính trong không gian các hàm liên tục, tồn tại hàm $\sigma(t)$ không là hàm hằng và có biến phân bị chặn sao cho

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_k t} d\sigma(t) = 0, \lambda_k \in \Lambda.$$

Ta ta lại có hàm $\Phi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} d\sigma(t)$ là hàm nguyên, không đồng nhất bằng không và thỏa mãn bất đẳng thức

$$|\Phi(s + ir)| \leq (\text{Var} \sigma) e^{\pi|r|} \quad \text{và} \quad \Phi(\lambda_k) = 0.$$

Theo công thức Jensen chúng ta được

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r \frac{n(t)}{t} dt &= \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt - \int_0^{r_0} \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\Phi(r(\cos \theta - i \sin \theta))| d\theta - \log |\Phi(0)| - \int_0^{r_0} \frac{n(t)}{t} dt \\ &\leq \frac{\pi r}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin \theta| d\theta + \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log (\text{Var} \sigma) d\theta - \log |\Phi(0)| - \int_0^{r_0} \frac{n(t)}{t} dt \right\} \\ &= \frac{\pi r}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin \theta| d\theta + O(1) = 2r + O(1), r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Vì vậy với mọi $\varepsilon > 0$ chúng ta có $\frac{n(t)}{t} > 2 + \varepsilon$ (do $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{n(t)}{t} > 2$). Từ đó

suy ra $(2 + \varepsilon)r + O(1) \leq 2r + O(1), r \rightarrow \infty$, mâu thuẫn. $\square$

Sau đây ta xét đánh giá tích chính tắc

Cho $\{a_n\}$ là dãy số phức, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ và $n(r)$ là hàm đếm của dãy $\{a_n\}$. Giả sử số nguyên

$p \geq 0$ sao cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-p-1}$ hội tụ và định nghĩa

$$\Pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right).$$

Khi đó $\{a_n\}$ là dãy các không điểm của hàm $\Pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right)$. Áp dụng công thức Jensen

ta có $n(r) \leq \log M_{\Pi}(er)$. Để có đánh giá trên theo $n(r)$ ta chứng minh định lí sau đây.

Định lí 3.4.6

Nếu u là số phức thì

$$\log |G(u, p)| \leq A_p \frac{|u|^{p+1}}{1 + |u|}, p > 0, A_p = 3e(2 + \log p);$$

$$\log |G(u, p)| \leq \log(1 + |u|).$$

Chứng minh. Theo định nghĩa

$$G(u, p) = \begin{cases} 1-u & p=0 \\ (1-u) \exp[u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}] & p>0 \end{cases},$$

nên bất đẳng thức $\log|G(u, p)| \leq \log(1+|u|)$ là hiển nhiên .

Xét $p > 0$. Nếu $|u| \leq \frac{p}{p+1}$ thì $\log(1+u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \dots$ suy ra

$$\log|G(u, p)| \leq |\log(G(u, p))| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{|u|^n}{n} \leq \frac{|u|^{p+1}}{(p+1)(1-|u|)} \leq |u|^{p+1}.$$

Nếu $|u| > \frac{p}{p+1}$ thì $\log(1+|u|) < |u|$ suy ra

$$\begin{aligned} \log|G(u, p)| &\leq 2|u| + \frac{|u|^2}{2} + \dots + \frac{|u|^p}{p} \\ &= |u|^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} \frac{1}{|u|} + \dots + \frac{1}{2} \frac{1}{|u|^{p-2}} + 2 \frac{1}{|u|^{p-1}} \right) \\ &\leq |u|^p \left(\frac{p+1}{p} \right)^{p-1} \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} \right) \\ &< e(2 + \log p) |u|^p = e(2 + \log p) \left(1 + \frac{1}{|u|} \right) \frac{|u|^{p+1}}{1+|u|} < A_p \frac{|u|^{p+1}}{1+|u|}. \quad \square \end{aligned}$$

Định lí 3.4.7

Cho $\{a_n\}$ là dãy số phức. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-p-1}$ hội tụ thì tích

$\Pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right)$ hội tụ đều trên mọi tập compact và thỏa mãn bất đẳng thức

$$\log|\Pi(z)| \leq K_p r^p \left\{ \int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}} dt + r \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt \right\}, \text{ trong đó } K_p = (p+1)A_p, r = |z|. \quad (3.2)$$

Chứng minh. Nếu $p \geq 1$, từ định lí 3.4.6 ta có

$$\begin{aligned} \log|\Pi(z)| &\leq A_p \sum \frac{r^{p+1}}{|a_n|^p (r + |a_n|)} = A_p r^{p+1} \int_0^{\infty} \frac{dn(t)}{t^p (t+r)} \\ &= A_p r^{p+1} \left[\frac{n(t)}{t^p (t+r)} \right]_0^{\infty} + A_p r^{p+1} \int_0^{\infty} \left[\frac{p}{t^{p+1} (t+r)} + \frac{1}{t^p (t+r)^2} \right] n(t) dt. \end{aligned}$$

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-p-1}$ hội tụ, áp dụng định lí 3.4.1 ta được

$$\frac{n(t)}{t^{p+1}} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$$

và

$$\begin{aligned} \log |\Pi(z)| &\leq A_p r^{p+1} \left\{ \int_0^r \left[\frac{p}{t^{p+1}(t+r)} + \frac{1}{t^p(t+r)^2} \right] n(t) dt + \int_r^\infty \left[\frac{p}{t^{p+1}(t+r)} + \frac{1}{t^p(t+r)^2} \right] n(t) dt \right\} \\ &\leq K_p r^p \left\{ \int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}} dt + r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt \right\}. \end{aligned}$$

Nếu $p = 0$ thì

$$\begin{aligned} \log |\Pi(z)| &\leq \sum_{n=1}^\infty \log \left(1 + \frac{r}{|a_n|} \right) = \int_0^\infty \log \left(1 + \frac{r}{t} \right) dn(t) \\ &= r \int_0^\infty \frac{n(t)}{t(t+1)} dt \leq \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt + r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^2} dt. \quad \square \end{aligned}$$

Định lí 3.4.8

Cấp tăng ρ của tích chính tắc bằng với số mũ hội tụ của dãy các không điểm của nó.

Chứng minh. Giả sử p là số nguyên nhỏ nhất sao cho chuỗi $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ hội tụ, trong đó $\{a_n\}$ là

dãy các không điểm của tích chính tắc $\Pi(z) = \prod_{n=1}^\infty G\left(\frac{z}{a_n}, p\right)$ và ρ_1 là số mũ hội tụ của dãy $\{a_n\}$ thì

$$p \leq \rho_1 \leq p+1.$$

Nếu $\rho_1 < p+1$ ta chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $\rho_1 + \varepsilon < p+1$ thì $n(t) \stackrel{as}{<} t^{\rho_1 + \varepsilon}$. Áp dụng định lí 3.4.7 ta có

$$\begin{aligned} \log M_\Pi(r) &\leq K_p r^p \left\{ O(1) + \int_0^r t^{\rho_1 + \varepsilon - p - 1} dt + r \int_r^\infty t^{\rho_1 + \varepsilon - p - 2} dt \right\} \\ &\leq K_p r^p \left\{ O(1) + \frac{r^{\rho_1 + \varepsilon - p}}{\rho_1 + \varepsilon - p} \frac{r^{\rho_1 + \varepsilon - p}}{p + 1 - \rho_1 - \varepsilon} \right\} \stackrel{as}{<} r^{\rho_1 + 2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Nếu $\rho_1 = p+1$ theo định lí 3.4.1, ta có $\frac{n(r)}{r^{p+1}} \rightarrow 0, \int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt \rightarrow 0$ khi $r \rightarrow \infty$. Theo định lí 3.4.7, ta có

$$\log M_\Pi(r) \stackrel{as}{<} \varepsilon r^{p+1} = \varepsilon r^{\rho_1}. \text{ Cả hai trường hợp ta đều có } \rho \leq \rho_1.$$

Theo định lí 3.4.3 ta có $\rho_1 \leq \rho$. Vậy $\rho_1 = \rho$. $\square$

Định lí 3.4.9

Số mũ hội tụ của tập các không điểm của hàm nguyên f có cấp không là số nguyên thì bằng với cấp tăng của f .

Chứng minh. Cho f là hàm nguyên cấp ρ không là số nguyên và ρ_1 là số mũ hội tụ của các không điểm, $\Pi(z)$ là tích chính tắc. Theo định lí 3.3.1 (định lí Hadamard) ta có

$$f(z) = z^m e^{P_q(z)} \Pi(z), \deg P_q = q.$$

Dùng định lí 3.4.8 ta được

$$\log M_f(r) \stackrel{as}{<} c_1 r^q + r^{\rho_1 + \varepsilon}, \varepsilon > 0.$$

Suy ra $\log M_f(r) \stackrel{as}{<} r^{\lambda + 2\varepsilon}$, $\lambda = \max(\rho_1, q)$ và $\rho \leq \lambda$.

Mặt khác theo định lí 3.4.3 $\rho_1 \leq \rho$ và theo định lí Hadamard $q \leq \rho$ mà ρ không nguyên suy ra $q < \rho$, vậy $\rho = \rho_1$. $\square$

3.5. Sự đầy đủ của hệ hàm trong không gian đếm được chuẩn

Cho $A(D)$ là không gian các hàm phức chỉnh hình trên miền đơn liên $D \subset \mathbb{C}$. Chúng ta chọn

dãy vết cận các tập compact $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n, \dots$ trong D tức là với mọi $m, G_m \subseteq G_{m+1}$ và $\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = D$.

Ta có hệ nửa chuẩn sau đây $\|f\|_m = \sup_{z \in G_m} |f(z)|$. Không gian $A(D)$ cùng với hệ chuẩn trên là

không gian đếm được chuẩn.

Sau đây là mệnh đề mô tả dạng tổng quát của hàm tuyến tính trong không gian $A(D)$.

Định lí 3.5.1

Mọi phiếm hàm tuyến tính $F \in A^*(D)$, tồn tại duy nhất hàm phức $\varphi(\zeta)$ trên tập đóng đơn liên $\mathbb{C} \setminus D'$, $\overline{D} \subset D$, $\varphi(\infty) = 0$ và sao cho giá trị của F tại hàm $f \in A(D)$ được xác định bởi đẳng thức

$$F[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_l f(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta$$

trong đó l là đường cong đóng bên ngoài D sao cho φ là hàm chỉnh hình trên l và bên ngoài l .

Chứng minh. Theo tôpô sinh bởi chuẩn, phiếm hàm tuyến tính $F[f]$ là liên tục nếu và chỉ nếu tồn tại số $m \geq 1$ và một hằng số C sao cho

$$|F[f]| \leq C \|f\|_m. \quad (3.3)$$

Giả sử $F[f]$ là phiếm hàm tuyến tính trên không gian $A(D)$ và giả sử $G_m \subseteq D$ là miền tương ứng với chuẩn trong (3.3). Hàm F có thể mở rộng đến hàm tuyến tính trên không gian $C(G_m)$.

Bây giờ chúng ta lấy $\zeta \in \mathbb{C} \setminus D'$. Chú ý rằng $\frac{1}{\zeta - z} \in C(G_m)$. Ta định nghĩa hàm

$\varphi(\zeta) = F\left[\frac{1}{\zeta - z}\right]$. trong đó hàm F là hàm theo biến z . Hàm φ gọi là phép biến đổi Cauchy-Stieltjes

của F .

Do (3.3) hàm $\varphi(\zeta)$ tiến về hàm phức nào đó trên tập đóng $\mathbb{C} \setminus D'$. Nếu $\varphi \rightarrow \infty$ thì

$$\left\| \frac{1}{\zeta - z} \right\| \rightarrow 0, \text{ suy ra từ (3.3) rằng } \varphi(\infty) = 0.$$

Cuối cùng lấy đường cong đơn đóng l trong D' . Hàm φ là hàm chỉnh hình trên l và trên miền $\mathbb{C} \setminus l$ chứa điểm ∞ . Ta suy ra rằng

$$\frac{1}{2\pi i} \int_l \varphi(\zeta) f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_l F\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) f(\zeta) d\zeta = F\left[\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right] = F[f]$$

với mọi hàm $f \in A(D)$. Lấy φ_1, φ_2 là hai hàm được xác định thỏa

$$F[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_l f(\zeta) \varphi_1(\zeta) d\zeta, \quad F[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_l f(\zeta) \varphi_2(\zeta) d\zeta.$$

Nếu $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ thì

$$\int_l \psi(\zeta) \zeta^k d\zeta = 0, k = 1, 2, 3, \dots$$

Hàm ψ chỉnh hình trên l và $\psi(\infty) = 0$ suy ra $\psi = 0$. Vậy mọi hàm tuyến tính được biểu diễn bởi

$$\text{dạng } F[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_l f(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta. \text{ Mệnh đề ngược là hiển nhiên. } \square$$

Bây giờ chúng ta vận dụng định lý 3.5.1 để nghiên cứu sự đầy đủ của dãy hàm $\varphi_n(z) = F(\lambda_n z)$, trong đó $F(z)$ là hàm nguyên và λ_n là dãy số phức. Kết quả đầu tiên về tính đầy đủ của dãy hàm $\{F(\lambda_n z)\}$ đã được phát biểu bởi O. Gelfond năm 1937. A. I. Markushevich đưa ra kết quả đầy đủ hơn.

Định lý 3.5.2

Cho hàm nguyên $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ với tất cả các hệ số a_n khác 0, cấp tăng ρ , kiểu không lớn hơn σ và $\Lambda = \{\lambda_n\}$ là dãy số phức. Khi đó dãy $\varphi_n(z) = F(\lambda_n z)$ là đầy đủ trên đĩa $\{z: |z| < R\}$, trong đó

$$R^\rho = \frac{1}{\rho\sigma} \max\left(\frac{\overline{\Delta}(\Lambda)}{e}, \underline{\Delta}(\Lambda)\right)$$

và $\overline{\Delta}(\Lambda)$ và $\underline{\Delta}(\Lambda)$ là mật độ trên và mật độ dưới của dãy Λ với cấp ρ .

Chứng minh. Giả sử rằng dãy $F(\lambda_n z)$ không đầy đủ trong không gian

$A(D)$, $D = \{z: |z| < R\}$. Theo định lý 3.5.1 tồn tại hàm ψ chỉnh hình bên ngoài đĩa $\{z: |z| < r\}$, $r <$

R , $\psi(\infty) = 0$, không đồng nhất bằng 0 và thỏa

$$\int_{|z|=r} F(\lambda_n z) \psi(z) dz = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, r < R.$$

Ta xét hàm

$$\phi(\lambda) = \int_{|z|=r} F(\lambda_n z) \psi(z) dz = 0.$$

Hàm này là hàm nguyên triệt tiêu tại các điểm của Λ . Ta đánh giá cấp tăng của nó. Do

$$|F(\lambda z)| \leq \exp \left\{ (\sigma + \varepsilon) |\lambda|^\rho r^\rho \right\}, \quad \varepsilon > 0, r = |z|$$

ta nhận được

$$|\phi(\lambda)| \leq \int_{|z|=r} |F(\lambda z)| |\psi(z)| |dz| \leq 2\pi r M \exp \left\{ (\sigma + \varepsilon) |\lambda|^\rho r^\rho \right\}, \quad \varepsilon > 0, M = \max_{|z|=r} |\psi(z)|.$$

Suy ra kiểu của hàm ϕ không lớn hơn σr^ρ .

Nếu dãy Λ thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ thì do $r < R$ và đẳng thức $R^\rho = \frac{1}{\rho\sigma} \max \left(\frac{\bar{\Delta}(\Lambda)}{e}, \underline{\Delta}(\Lambda) \right)$, áp

dụng định lí 3.4.4 suy ra $\phi \equiv 0$. Nếu Λ có một điểm giới hạn hữu hạn thì áp dụng định lí duy nhất ta cũng có $\phi \equiv 0$.

Bây giờ nếu $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+1}}$ thì

$$\phi(\lambda) = \int_{|z|=r} F(\lambda z) \psi(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \lambda^n \equiv 0.$$

Do $a_n \neq 0$ với mọi n nên $b_n = 0$ với mọi n , vậy $\psi(z)$ trùng 0, mâu thuẫn. $\square$

3.6. Đánh giá môđun trên và môđun dưới của hàm chỉnh hình

Cho hàm $f(z) = u(z) + iv(z)$ là hàm chỉnh hình trên đĩa $\{z : |z| \leq R\}$.

Đặt

$$M(r) = M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad A(r) = A_f(r) = \max \{u(z) : |z| \leq r\}.$$

Hiển nhiên ta có $A_f(r) \leq M_f(r)$. Khi $R > r$ ta sẽ xét mối quan hệ giữa $M_f(r)$ và $A_f(r)$.

Định lí 3.6.1 (Định lí Caratheodory)

Giả sử f là hàm chỉnh hình trên miền $\{z : |z| \leq R\}$. Khi đó

$$M_f(r) \leq \frac{2r}{R-r} A_f(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|, \quad \text{với mọi } 0 < r < R. \quad (3.4)$$

Chứng minh. Giả sử $f(0) = 0$. Ta chứng minh

$$M_f(r) \leq \frac{2r}{R-r} A_f(R) \quad \text{với mọi } 0 < r < R.$$

Thật vậy, theo công thức Schwarz ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} d\varphi, \quad |z| < R.$$

Do điều kiện $f(0) = 0$ ta có $0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) d\varphi$. Suy ra

$$f(z) = f(z) - 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \frac{2z}{Re^{i\varphi} - z} d\varphi.$$

Theo định lý Cauchy thì
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\varphi} - z} d\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{A_f(R)}{Re^{i\varphi} - z} d\varphi = 0.$$

Vậy ta có $-f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A_f(R) - u(Re^{i\varphi})] \frac{2z}{Re^{i\varphi} - z} d\varphi$. Từ đó

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A_f(R) - u(Re^{i\varphi})] \frac{2r}{R-r} d\varphi = \frac{2r}{R-r} A_f(R). \quad (3.5)$$

Nếu $f(0) \neq 0$, áp dụng (3.5) cho hàm $f(z) - f(0)$ ta có

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \operatorname{Re}\{f(z) - f(0)\} \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \operatorname{Re}\{f(z)\} + \frac{2r}{R-r} |f(0)|, \quad \forall |z| \leq r.$$

Vậy ta có $M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{2r}{R-r} |f(0)| + |f(0)| = \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|$. $\square$

Nhận xét

a) Bằng cách xét hàm $-f(z)$, $if(z)$ và $-if(z)$ ta nhận được các đánh giá tương tự, trong đó $A(r)$ thay bởi

$$\min_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z), \max_{|z|=r} \operatorname{Im} f(z), \min_{|z|=r} \operatorname{Im} f(z).$$

b) Từ bất đẳng thức

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \operatorname{Re}\{f(z) - f(0)\}$$

ta có

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} [A(R) - \operatorname{Re} f(0)] + |f(0)|. \quad (3.6)$$

Định lý 3.6.2 (Định lý Schottky)

Nếu trên hình tròn $\{z: |z| \leq R_1\}$ hàm chỉnh hình $f(z)$ không nhận giá trị 0 hay giá trị 1 thì

$$|f(z)| \leq \exp \frac{KR_1^4}{(R_1 - R)} \quad (3.7)$$

với mọi $z \leq R < R_1$, ở đây hằng số K chỉ phụ thuộc vào $f(0)$.

Trước tiên ta chứng minh định lý sau:

Định lý 3.6.3

Giả sử $\varphi(r)$ là hàm thực trên $[0; R_1]$ và giả sử

$$0 \leq \varphi(r) \leq M, \text{ với } 0 < r < R_1 \quad (3.8)$$

$$\text{và} \quad \varphi(r) \leq \frac{C\sqrt{\varphi(r)}}{(R-r)^2} \quad \text{với } 0 < r < R_1 \quad (3.9)$$

$$\text{Khi đó } \varphi(r) \leq \frac{AC^2}{(R-r)^4} \quad (3.10)$$

$$\text{Chứng minh. Từ (3.8) và (3.9) ta có } \varphi(r) \leq \frac{C\sqrt{M}}{(R-r)^2} \text{ với } 0 < r \leq R_1. \quad (3.11)$$

Như vậy M trong (3.8) được thay bởi bội của $\sqrt{M}$. Lập lại đánh giá này xuất phát từ (3.11) với r_1, r_2 thay cho r, R đồng thời trong (3.9) thì r_1 thay R ta có

$$\varphi(r) < \frac{C}{(r_1 - r_2)^2} \left\{ \frac{C}{(r_2 - r_1)} \right\}^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{4}}, 0 < r_1 < r_2 \leq R_1.$$

Tiếp tục như vậy ta nhận được đánh giá

$$\varphi(r) < \frac{C}{(r_1 - r_2)^2} \left\{ \frac{C}{(r_2 - r_1)} \right\}^{\frac{1}{2}} \dots \left\{ \frac{C}{(r_n - r_{n-1})} \right\}^{\frac{1}{2^n}} M^{\frac{1}{2^n}}.$$

Khi $r_1 = \frac{1}{2}(R+r), r_2 = \frac{1}{2}(R_1 + r_1), \dots$, bất đẳng thức trên trở thành

$$\varphi(r) < 4^{1+1/4+\dots+n2^{-(n-1)}} \left\{ \frac{C}{(r_1 - r_2)^2} \right\}^{1+1/2+\dots+(1/2)^{n-1}} M^{2^{-n}}.$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta nhận được đánh giá cần thiết. $\square$

Bây giờ ta chứng minh định lí 3.6.3 (Định lí Schottky).

Giả sử $g_1(z) = \log f(z), g_2(z) = \log(1 - f(z))$.

Các hàm này chỉnh hình trên $\{z : |z| \leq R\}$. Giả sử $M_1(r), M_2(r)$ lần lượt là maximum của các hàm $|g_1(z)|$ và $|g_2(z)|$ trên miền $\{z : |z| = r\}$ và giả sử

$$M(r) = \max\{M_1(r), M_2(r)\}.$$

$$\text{Đặt } B_1(r) = -\min_{|z|=r} \operatorname{Re} g_1(z) = \max_{|z|=r} \log \frac{1}{|f(z)|}$$

Áp dụng định lí 3.6.1 (Định lí Caratheodory) với hàm $g_1(z)$ ta nhận được

$$M_1(\rho) \leq \frac{2r}{r-\rho} \{B_1(r) + g_1(0)\}, 0 < \rho < r. \quad (3.12)$$

Giả thiết rằng $B_1(r) > 1$ và giả sử z' là điểm sao cho

$$B_1(r) = \log \frac{1}{|f(z')|}, |z'| = r.$$

$$\text{Khi đó } |f(z')| = e^{-B_1(r)} < e^{-1} < \frac{1}{2}. \quad (3.13)$$

$$\text{Vì vậy tồn tại số nguyên } n \text{ để } g_2(z') - 2n\pi i = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[f(z')]^m}{m}.$$

$$\text{Ta có } |g_2(z') - 2n\pi i| < \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1. \quad (3.14)$$

$$\text{Như vậy } 2|n|\pi < 1 + |g_2(z')| \leq 1 + M_2(r).$$

$$\text{Đặt } h(z) = \log \{g_2(z) - 2n\pi i\}.$$

Hàm $h(z)$ chỉnh hình trên $\{z: |z| \leq R_1\}$ bởi vì $h(z) \neq 0$ với mọi z thuộc $\{z: |z| \leq R_1\}$ và do đó $g_2(z) \neq 2n\pi i$.

Định lí Caratheodory cho ta

$$\max_{|z|=r} |h(z)| \leq \frac{2R}{R-r} \left\{ \max_{|z|=R} \log |g_2(z) - 2n\pi i| + h(0) \right\}. \quad (3.15)$$

$$|h(z)| = \left| \log \{g_2(z) - 2n\pi i\} \right| = \left| \log \frac{1}{\log \{g_2(z) - 2n\pi i\}} \right| \geq \log \frac{1}{|g_2(z) - 2n\pi i|}.$$

$$\text{Suy ra } \max_{|z|=r} |h(z)| \geq \log \frac{1}{|g_2(z) - 2n\pi i|}.$$

Đặc biệt tại z'

$$\log \frac{1}{|g_2(z') - 2n\pi i|} \geq \log \frac{1}{|f(z')| + |f(z)|^2 + \dots} \geq \log \frac{1}{2|f(z')|} = B_1(r) - \log 2. \quad (3.16)$$

Từ bất đẳng thức (3.14) ta có

$$1 > |g_2(z') - 2n\pi i| \geq 2|n|\pi - |g_2(z')|.$$

$$\text{Suy ra } 2|n|\pi < 1 + |g_2(z')| \leq 1 + M_2(r).$$

Khi đó

$$\max_{|z|=R} \log |g_2(z) - 2n\pi i| \leq \log \{M_2(R) + 2|n|\pi\} \leq \log \{2M(R) + 1\}.$$

$$h(z) = \log |g_2(z) - 2n\pi i| + i \arg(g_2(z) - 2n\pi i).$$

Từ giả thiết $|\operatorname{Im} h(0)| \leq \pi$ ta có

$$\begin{aligned} |h(0)| &\leq \log |g_2(0) - 2n\pi i| + \pi \\ &\leq \log \{|g_2(0)| + 2|n|\pi\} + \pi \\ &\leq \log \{|g_2(0)| + 1 + M_2(r)\} + \pi \end{aligned} \quad (3.17)$$

Như vậy bất đẳng thức 3.15 cho ta

$$\begin{aligned}
B_1(r) &< \frac{2R}{R-r} \left[\log(2M_2(R)+1) + \log(M_2(R) + |g_2(0)| + 1) + \pi \right] + \log 2 \\
&\leq \frac{2R}{R-r} \left[\log(2M_2(R) + |g_2(0)| + 1) + \log(2M_2(R) + |g_2(0)| + 1) + \pi \right] + \log 2 \\
&< \frac{2R}{R-r} \left[\log(2M_2(R) + |g_2(0)| + 1) + \log(2M_2(R) + |g_2(0)| + 1) + \pi \right] + \pi \\
&< \frac{4R}{R-r} \left[\log(2M_2(R) + |g_2(0)| + 1) + \pi \right].
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Bất đẳng thức này được chứng minh với giả thiết $B_1(r) > 1$

Trường hợp $B_1(r) \leq 1$ bất đẳng thức là hiển nhiên, bởi vì vế phải của nó không nhỏ hơn 1.

Vậy thì trong mọi trường hợp bất đẳng thức (3.12) và (3.18) cho ta

$$M_1(\rho) < \frac{8Rr}{(R-r)(r-\rho)} \left[\log(2M_2(R) + |g_2(0)| + 1) + |g_1(0)| + \pi \right]. \tag{3.19}$$

Bởi vì tất cả các lập luận đối với hàm $g_1(z)$ và $g_2(z)$ có thể đổi vai trò của chúng, bất đẳng thức trên còn đúng nếu đổi chỗ các chỉ số 1 và 2. Ta có

$$M_2(\rho) < \frac{8Rr}{(R-r)(r-\rho)} \left[\log(2M_1(R) + |g_1(0)| + 1) + |g_2(0)| + \pi \right] \tag{3.20}$$

Do (3.19) và (3.20) ta có

$$M(\rho) < \frac{8Rr}{(R-r)(r-\rho)} \left\{ \log[2M(R) + |g_1(0)| + |g_2(0)| + 1] + |g_1(0)| + |g_2(0)| + \pi \right\}. \tag{3.21}$$

Khi $r = \frac{1}{2}(R + \rho)$ bất đẳng thức (3.21) trở thành

$$M(\rho) < \frac{32R_1^2}{(R-\rho)^2} \{ \log M(R) + K_1 \} < \frac{K_2 R_1^2 \sqrt{M(R)}}{(R-\rho)^2}.$$

Bởi vì $\log M(R) = O(\sqrt{M(R)})$.

Vậy thì dựa vào định lí 3.6.3 ta có

$$M(\rho) < \frac{KR_1^4}{(R-\rho)^4}$$

$$\text{và } |f(z)| \leq e^{M(r)} < \exp \left\{ \frac{KR_1^4}{(R-\rho)^4} \right\}.$$

Bởi vì K chỉ phụ thuộc vào $|g_1(0)|$ và $|g_2(0)|$ thì định lí được chứng minh. $\square$

Định lí Schottky dẫn đến định lí Picard sau về giá trị loại trừ của một hàm nguyên.

Định lí 3.6.4 (Định lí Picard)

Hàm nguyên khác hằng số nhận mọi giá trị, trừ ra có thể một giá trị.

Chứng minh. Thật vậy giả sử tồn tại hàm nguyên $f \neq \text{const}$ không nhận hai giá trị khác nhau a và b .

Đặt $g(z) = \frac{f(z)-a}{z-b}$ thì $g(z)$ không nhận giá trị 0 hay 1

Áp dụng định lí Schottky ta có

$$|g(z)| \leq \exp \left\{ \frac{KR_1^4}{(R_1 - R)^4} \right\} \quad |z| \leq R < R_1.$$

Chọn $R_1 = 2R$ ta có $|g(z)| < C$, suy ra $g(z)$ là hằng số

Vậy f là hằng số trái giả thiết. $\square$

Định lí 3.6.5

Nếu f là hàm chỉnh hình trên đường tròn $|z| \leq R$, không có không điểm trong hình tròn đó và

$$f(0) = 1 \text{ thì } \log|f(z)| \geq -\frac{2r}{R-r} \log M(R) \text{ với } |z| \leq r < R.$$

Chứng minh. Nếu $f(0) = 1$, theo bất đẳng thức

$$M_f(r) \leq \frac{2r}{R-r} [A(R) - \operatorname{Re} f(0)] + |f(0)|$$

$$\text{thay } f \text{ bằng } \log f \text{ ta có } |\log f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} \log M(R) \text{ với } |z| \leq r < R, \quad (3.22)$$

vì $\log f(z) = \log|f(z)| + i \arg z$ và $A_{\log f}(R) \leq \log M(R)$.

$$\text{Từ (3.22) ta có } \log \frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{2r}{R-r} \log M(R) \text{ hay } \log|f(z)| \geq -\frac{2r}{R-r} \log M(R). \square$$

KẾT LUẬN

Từ các công thức tích phân, ta có thể chứng minh được nhiều định lý trong lý thuyết hàm chỉnh hình, hàm phân hình, cũng từ các công thức tích phân có thể tìm ra các kết quả mới cho lý thuyết hàm biến phức.

Trong luận văn chúng tôi trình bày một số công thức tích phân và ứng dụng của chúng vào lý thuyết hàm nguyên và hàm chỉnh tổng quát. Cụ thể chúng tôi đã xét cấp và kiểu của hàm nguyên, mật độ của dãy các không điểm của hàm nguyên. Cuối cùng là đánh giá môđun trên và môđun dưới của hàm chỉnh hình, từ đó cho một chứng minh khác định lý Picard.

Qua quá trình làm luận văn tôi đã thấy các kiến thức học được trong các môn học như: Giải tích phức nâng cao, Giải tích hàm nâng cao, Không gian vectơ tôpô,... đã giúp ích rất nhiều cho tôi trong việc hoàn thành luận văn này. Bước đầu tôi đã học được phương pháp tự học và nghiên cứu.

Tôi hy vọng sẽ được học tập và nghiên cứu thêm về đề tài này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Đâu Thế Cấp (2006), *Hàm biến phức và phép tính toán tử*, Nxb Đại Học Quốc Gia TP.Hồ Chí Minh.

[2] Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải (2006), *Hàm biến phức*, Nxb Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

Tiếng Anh

[3] A.S. Holland (1973), *Introduction to the theory of entire functions*, Academic press New York and London.

[4] B.Ya. Levin (1996), *Lectures on entire functions*, American Mathematical Society.

[5] R. Nevanlinna, V. Paatero (1969), *Introduction to complex Analysis*, Addison – Wesley Publishing company.