

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Bùi Thị Doan

ĐIỂM BẮT ĐỘNG CỦA LỚP ÁNH XẠ TẮNG

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS.TS. NGUYỄN BÍCH HUY**

Thành Phố Hồ Chí Minh - 2010

LỜI CẢM ƠN

Xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến :

Quý Thầy Cô thuộc khoa toán trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh đã nhiệt tình dạy và giúp đỡ tôi trong quá trình nghiên cứu và học tập của khóa học.

Ban giám hiệu, các quý thầy cô phòng sau đại học trường ĐHSP đã tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt khóa học.

Ban giám hiệu, các thầy cô đồng nghiệp trường THPT Xuyên Mộc đã tạo điều kiện và giúp đỡ mọi mặt để tôi hoàn thành luận văn.

Đặc biệt là PGS.TS Nguyễn Bích Huy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và thực hiện luận văn này.

TP.Hồ Chí Minh, ngày 30 tháng 10 năm 2010

Học viên: **Bùi Thị Doan**

MỞ ĐẦU

Lý thuyết phương trình trong không gian có thứ tự được xây dựng từ những năm 1940 và được phát triển, hoàn thiện cho đến tận nay. Lý thuyết này tìm được những ứng dụng rất đa dạng và có ý nghĩa để nghiên cứu nhiều lớp phương trình cụ thể xuất phát từ Toán học, Khoa học Tự nhiên, Y học, Kinh tế học,...

Trong lý thuyết phương trình trong không gian có thứ tự thì lớp phương trình với ánh xạ tăng đóng vai trò rất quan trọng. Khi nghiên cứu các phương trình dạng này ta có thể nghiên cứu sâu hơn các tính chất nghiệm như sự duy nhất, tính ổn định của nghiệm, tính gần đúng của nghiệm nhờ các dãy lặp đơn điệu,... Các định lý đầu tiên của Tarskii và Krasnoselskii về điểm bất động của ánh xạ tăng đòi hỏi các điều kiện khá ngặt đặt lên nón (nón Minihedral) hoặc lên ánh xạ (điều kiện hoàn toàn liên tục). Với việc sử dụng các nguyên lý cơ bản về tập có thứ tự như bổ đề Zorn, Nguyên lý đệ quy tổng quát, Nguyên lý Entropy thì điều kiện liên tục của ánh xạ đã được bỏ qua và điều kiện Compact đã được giảm nhẹ rất nhiều trong các định lý điểm bất động của Krasnoselskii, Carl, Heikkila, ...được tìm ra gần đây.

Để nghiên cứu các lớp phương trình mới xuất phát từ khoa học thì gần đây các nhà nghiên cứu đã khảo sát các lớp ánh xạ có thể nghiên cứu bằng cách đưa về các ánh xạ tăng hoặc bằng các phương pháp tương tự khi xét ánh xạ tăng, đó là lớp ánh xạ T-đơn điệu và hỗn hợp đơn điệu. Gần đây các ánh xạ đa trị đơn điệu cũng đã được nghiên cứu và ứng dụng.

Các kết quả về phương trình với ánh xạ tăng thu được cho đến nay rất phong phú và đa dạng nhưng chỉ được trình bày trong các bài báo khoa học. Luận văn muốn giới thiệu một cách hệ thống với các chứng minh chi tiết cho các kết quả về một số lớp ánh xạ tăng quan trọng và thường gặp nhất. Luận văn có 5 chương.

Chương 1. Các khái niệm sử dụng.

Chương 2. Điểm bất động của toán tử đơn điệu liên quan đến tính compact.

Chương 3. Điểm bất động của toán tử T-đơn điệu.

Chương 4. Điểm bất động của toán tử hỗn hợp đơn điệu.

Chương 5. Ứng dụng.

Chương 1. Ở chương đầu này trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản trên không gian Banach có thứ tự như nón, nón sinh, nón chuẩn, nón chính quy, ánh xạ tăng (ánh xạ đơn điệu)...., đặc biệt là nguyên lý Entropi (Brezis, Browder) mà sẽ được dùng để chứng minh các định lý cơ bản của luận văn.

Chương 2. Chương này trình bày về điểm bất động của các toán tử compact đơn điệu, compact đơn điệu tới hạn và điểm bất động của toán tử đơn điệu trên không gian với nón Miniherdal- mạnh.

Chương 3. Trình bày về điểm bất động của toán tử T-đơn điệu, nguyên lý ánh xạ co trên các phần tử so sánh được và phương trình toán tử ngược dương.

Chương 4. Trình bày về toán tử hỗn hợp đơn điệu và điểm bất động, điểm bất động của toán tử hỗn hợp đơn điệu

Chương 5. Là chương kết thúc của nội dung luận văn, trình bày một vài ứng dụng điểm bất động của một số lớp ánh xạ tăng vào bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân.

Chương 1: CÁC KHÁI NIỆM SỬ DỤNG

1.1 Không gian Banach có thứ tự

1.1.1 Nón và thứ tự sinh bởi nón

Định nghĩa 1.1.1: Cho X là không gian Banach thực.

1. Tập K chứa trong X được gọi là **nón** nếu
 - i. K là tập đóng
 - ii. $K + K \subset K, \lambda K \subset K \quad \forall \lambda \geq 0$
 - iii. $K \cap (-K) = \{\theta\}$
2. Nếu K là nón thì thứ tự trong X sinh bởi nón K được định bởi

$$x \leq y \text{ hay } y \geq x \Leftrightarrow y - x \in K$$

Mỗi $x \in K \setminus \{\theta\}$ gọi là dương

Mệnh đề 1.1.1 Giả sử “ $\leq$ ” là thứ tự sinh bởi nón K . Khi đó:

- i. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \lambda x \leq \lambda y \quad \forall z \in X, \forall \lambda \geq 0$
- ii. $(x_n \leq y_n \quad (n \in \mathbb{N}^*), \lim x_n = x, \lim y_n = y) \Rightarrow x \leq y$
- iii. Nếu dãy $\{x_n\}$ tăng, hội tụ về x thì $x_n \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh

- i. Với mọi $z \in X$

ta có $y + z - (x + z) = y - x \in K$ (vì $x \leq y$) nên $x + z \leq y + z$

Với mọi $\lambda \geq 0$,

ta có $y - x \in K$ nên $\lambda(y - x) \in K$ suy ra $\lambda x \leq \lambda y$

- ii. Vì $x_n \leq y_n \Rightarrow y_n - x_n \in K$

Mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = y - x$ và K là tập đóng

Nên $(y - x) \in K \Rightarrow x \leq y$

- iii. Vì dãy $\{x_n\}$ tăng nên $x_n \leq x_{n+m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Cố định n , cho $m \rightarrow +\infty$ ta có $x_{n+m} \rightarrow x$

suy ra $x_n \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1.1.2 Nón chuẩn

Định nghĩa 1.1.2 Nón K được gọi là nón chuẩn nếu:

$$\exists N > 0 : 0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N \|y\|$$

Mệnh đề 1.1.2 Giả sử " $\leq$ " là thứ tự sinh bởi nón chuẩn K. Khi đó

i. $u \leq v$ thì đoạn $\langle u, v \rangle := \{x \in X : u \leq x \leq v\}$ bị chặn theo chuẩn

ii. Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$

Thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$

iii. Nếu dãy $\{x_n\}$ đơn điệu, có dãy con hội tụ về a

Thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$

Chứng minh

i. Với $\forall x \in \langle u, v \rangle \Rightarrow u \leq x \leq v \Rightarrow 0 \leq x - u \leq v - u$

Mà K nón chuẩn nên $\exists N > 0$ sao cho $\|x - u\| \leq N\|v - u\|$

$$\Rightarrow \|x\| - \|u\| \leq \|x - u\| \leq N\|v - u\|$$

$$\Rightarrow \|x\| \leq N\|v - u\| + \|u\|$$

$\Rightarrow \langle u, v \rangle$ bị chặn theo chuẩn

ii. Ta có $0 \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n$

Mà K nón chuẩn nên $\exists N > 0$ sao cho $\|y_n - x_n\| \leq N\|z_n - x_n\|$

$$\Rightarrow \|y_n - x_n\| \leq N\|z_n - a\| + N\|a - x_n\|$$

$$\Rightarrow \|y_n - a\| - \|x_n - a\| \leq N\|z_n - a\| + N\|a - x_n\|$$

$$\Rightarrow \|y_n - a\| \leq N\|z_n - a\| + (N + 1)\|a - x_n\|$$

Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$ suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - a\| = 0$ suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$

iii. Giả sử dãy $\{x_n\}$ tăng có dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về a

Với n cố định, k đủ lớn ta có $x_n \leq x_{n_k}$

Cho $k \rightarrow +\infty$ ta có $x_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Cho $\varepsilon > 0$, chọn k_0 để $\|x_{n_{k_0}} - a\| < \frac{\varepsilon}{N}$ thì ta có

$$\forall n \geq n_{k_0} \Rightarrow a - x_n \leq a - x_{n_{k_0}}$$

$$\Rightarrow \|a - x_n\| \leq \|a - x_{n_{k_0}}\| < \varepsilon$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \quad \square$

1.1.3 Nón chính quy (Regular cone)

Định nghĩa 1.1.3: Nón K được gọi là nón chính quy nếu mọi dãy tăng, bị chặn trên thì hội tụ

Mệnh đề 1.1.3: Nón chính quy là nón chuẩn.

Chứng minh

Giả sử K là nón chính quy nhưng K không là nón chuẩn

Khi đó $\forall n \in \mathbb{N}^* \exists x_n, y_n \in X$ sao cho: $0 \leq x_n \leq y_n$ mà $\|x_n\| \geq n^2 \|y_n\|$

Đặt $u_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ ta có $\|u_n\| = 1$

$$v_n = \frac{y_n}{\|x_n\|} \text{ ta có } \|v_n\| = \frac{\|y_n\|}{\|x_n\|} \leq \frac{1}{n^2}$$

Vì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|$ hội tụ suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ

Đặt $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

Ta có dãy (s_n) tăng và bị chặn trên (vì $s_n \leq v \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

K là nón chính quy nên dãy (s_n) hội tụ

Suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| = 0$ điều này là vô lý vì $\|u_n\| = 1 \quad \square$

1.1.4 Nón sinh (Repro ducing cone)

Định nghĩa 1.1.4: Nón K được gọi là nón sinh nếu $X = K - K$ hay $\forall x \in X, \exists u, v \in K$ sao cho $x = u - v$

Mệnh đề 1.1.4: Nếu K là nón sinh thì tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\forall x \in X, \exists u, v \in K : x = u - v, \quad \|u\| \leq M \|x\|, \quad \|v\| \leq M \|x\|$$

Chứng minh:

$$\text{Đặt } C = K \cap \overline{B}(\theta, 1) - K \cap \overline{B}(\theta, 1)$$

$$\text{Vì K là nón sinh nên } x = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nC$$

Thật vậy $\forall x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} nC$ suy ra $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : x \in n_0 C$

Suy ra $\exists u, v \in \overline{B}(\theta, 1) \cap K$ mà $x = n_0 u - n_0 v$, $x \in X$ (vì K nón sinh và $n_0 u, n_0 v \in K$)

Ngược lại $\forall x \in X$ suy ra $\exists u, v \in K$ mà $x = u - v$

$$\text{Ta có } u \in \overline{B}(\theta, \frac{1}{\|u\|}), \quad v \in \overline{B}(\theta, \frac{1}{\|v\|})$$

$$\begin{aligned}
\text{Suy ra } u &\in \|u\| \overline{B}(\theta, 1), \quad v \in \|v\| \overline{B}(\theta, 1) \\
&\Rightarrow u, v \in n_0 \overline{B}(\theta, 1), \quad n_0 \geq \max\{\|u\|, \|v\|\} \\
&\Rightarrow u, v \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} n \overline{B}(\theta, 1) \\
&\Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} nC
\end{aligned}$$

Ta chứng minh : $\exists r > 0$ sao cho $B(\theta, r) \subset \overline{C}$

Vì $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nC$ mà X là không gian Banach nên $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\exists G$ mở trong X sao cho $G \subset n_0 \overline{C}$

$$\text{Vì } \overline{C} \text{ lồi, đối xứng nên } \frac{1}{2}\overline{C} - \frac{1}{2}\overline{C} \subset \overline{C}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2n_0}G - \frac{1}{2n_0}G \subset \overline{C}$$

Ta có $\frac{1}{2n_0}G - \frac{1}{2n_0}G$ mở chứa θ nên $\exists r > 0$ sao cho

$$B(\theta, r) \subset \frac{1}{2n_0}G - \frac{1}{2n_0}G$$

II, Đặt $B = \overline{B}(\theta, 1)$

Ta chứng minh : $\frac{r}{2}B \subset C$

Lấy $a \in \frac{r}{2}B$ ta chứng minh $a \in C$

Ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn $x_n \in \frac{1}{2^n}C$, $\left\|a - \sum_{k=1}^n x_k\right\| < \frac{r}{2^{n+1}}$

Thật vậy: Vì $\frac{r}{2^n}B \subset \frac{1}{2^n}C$ nên $\forall y \in \frac{r}{2^n}B$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in \frac{1}{2^n}C$

Sao cho $\|y - x\| < \varepsilon$.

Ta có $a \in \frac{r}{2}B$ nên $\exists x_1 \in \frac{1}{2}C$ sao cho $\|a - x_1\| < \frac{r}{2^2}$

$a - x_1 \in \frac{r}{2^2}B$ nên $\exists x_2 \in \frac{1}{2^2}C$ sao cho $\|a - x_1 - x_2\| < \frac{r}{2^3}$

$a - x_1 - x_2 \in \frac{r}{2^3}B$ nên $\exists x_3 \in \frac{1}{2^3}C$ sao cho $\|a - x_1 - x_2 - x_3\| < \frac{r}{2^4}$

Cứ tiếp tục quá trình trên ta được dãy (x_n) thỏa $x_n \in \frac{1}{r^n} C$ hay $x_n \in \frac{1}{r^n} (K \cap \bar{B}(\theta, 1) - K \cap \bar{B}(\theta, 1))$

Vì $x_n \in \frac{1}{r^n} (K \cap \bar{B}(\theta, 1) - K \cap \bar{B}(\theta, 1))$ nên $\exists u_n, v_n \in K : \|u_n\| \leq \frac{1}{2^n}, \|v_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ mà Ta có $x_n = u_n - v_n$

Do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ

Đặt $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ta có $\|u\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| \leq 1, \|v\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| \leq 1$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n x_k) = u - v$ (1.1.1)

Mặt khác $\left\| a - \sum_{k=1}^n x_k \right\| < \frac{r}{2^n}$ Suy ra $a = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (1.1.2)

Từ (1.1.1) và (1.1.2) suy ra $a = u - v$

Mà $\begin{cases} u, v \in K \text{ (do } u_n, v_n \in K) \\ \|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1 \end{cases}$ nên $u, v \in K \cap \bar{B}(\theta, 1)$

III) $\forall x \in X, x \neq \theta$

Ta có $\frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \in \frac{r}{2} B \subset C$ nên $u', v' \in K : \|u'\| \leq 1, \|v'\| \leq 1$ và $\frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} = u' - v'$

Suy ra $x = \frac{2}{r} \|x\| u' - \frac{2}{r} \|x\| v'$

Đặt $\begin{cases} u = \frac{2}{r} \|x\| u' \\ v = \frac{2}{r} \|x\| v' \end{cases}$

Ta có $x = u - v$ và $\begin{cases} u, v \in K \\ \|u\| \leq \frac{2}{r} \|x\|, \|u'\| \leq \frac{2}{r} \|x\| \\ \|v\| \leq \frac{2}{r} \|x\|, \|v'\| \leq \frac{2}{r} \|x\| \end{cases}$

Đặt $M = \frac{2}{r}$ khi đó ta có điều phải chứng minh $\square$

1.1.5 Nón Miniherdal

Định nghĩa 1.1.5

- Nón K được gọi là nón Miniherdal nếu $\forall x_1, x_2 \in K$ thì tồn tại $a = \sup\{x_1, x_2\}$.

- Nón K được gọi là nón Minihedral mạnh nếu $\forall A \subset K$ thì tồn tại $a = \sup A$

1.1.6 Nón liên hợp

Định nghĩa 1.1.6: Nếu K là nón thì ta định nghĩa nón liên hợp của nón K là $K^* = \{f \in X^* / f(x) \geq 0 \quad \forall x \in K\}$

K^* có các tính chất sau:

- K^* đóng
- $K^* + K^* \subset K^*$, $\lambda K^* \subset K^* \quad \forall \lambda \geq 0$

Mệnh đề 1.1.6 $x_0 \in K \Leftrightarrow f(x_0) \geq 0 \quad \forall f \in K^*$

Chứng minh:

Chiều $\Rightarrow$) Hiển nhiên

Chiều $\Leftarrow$) Giả sử trái lại tức là $f(x_0) < 0 \quad \forall f \in K^*$, $x_0 \notin K$

Suy ra $x_0 \in X \setminus K$ nên theo định lý tách tập lồi $\exists g \in X^* : g(x_0) < g(y) \quad \forall y \in K$

$\forall x \in K$, cố định x ta có $g(x_0) < g(tx) \quad \forall t > 0$. Cho $t \rightarrow +\infty$ ta có $g(x) \geq 0$

$\Rightarrow g \in K^* \Rightarrow g(x_0) < 0$ điều này là vô lý. $\square$

1.2 Ánh xạ tăng

Định nghĩa 1.2.1 Giả sử X, Y là các không gian Banach thực; P và K là các nón tương ứng trong X và Y.

Ánh xạ $F : X \rightarrow Y$ gọi là ánh xạ tăng (hay ánh xạ đơn điệu) nếu $\forall x_1, x_2 \in X$ và $x_1 \geq x_2$ ta có $F(x_1) \geq F(x_2)$

Ánh xạ $F : X \rightarrow Y$ gọi là dương nếu $\forall x \in X, x \geq \theta$ ta có $F(x) \geq \theta$

Chú ý Nếu F là ánh xạ tuyến tính thì :

F là ánh xạ tăng $\Leftrightarrow$ F dương

Thật vậy : $\forall x \in X, x \geq \theta$ và F tăng nên $F(x) \geq F(\theta) = \theta$ suy ra F dương

$\forall x_1, x_2 \in X$ và $x_1 \geq x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \geq \theta$ mà F dương

$$\Rightarrow F(x_1 - x_2) \geq \theta$$

$$\Rightarrow F(x_1) \geq F(x_2) \quad . \text{ Vậy F tăng } \square$$

Định lý 1.2.1

Giả sử P là nón sinh trong X, K là nón chuẩn trong Y và $F : X \rightarrow Y$ là toán tử tuyến tính dương. Khi đó F liên tục.

Chứng minh : Vì F là toán tử tuyến tính nên ta chỉ cần chứng minh F bị chặn.

i. Trước tiên ta chứng minh rằng : $\exists m > 0$ sao cho $\forall x \in P, \|F(x)\| \leq m \|x\|$

Giả sử trái lại tức là $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in P : \|F(x_n)\| > n^3 \cdot \|x_n\|$

Đặt $z_n = \frac{1}{n^2 \cdot \|x_n\|} x_n$ ta có $\|z_n\| = \frac{1}{n^2}$, $\|F(z_n)\| > n$

Vì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$ hội tụ suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ hội tụ .

Đặt $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ và $s_n = \sum_{k=1}^n z_k$

Ta có $z_k \in P$, $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ và P đóng nên suy ra $z \in P$

Vì $s_{n+p} - z_n = \sum_{k=1}^{n+p} z_k - z_n = \sum_{k=1}^{n-1} z_k + \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k$ nên $s_{n+p} - z_n \in P$

Suy ra $z_n \leq s_{n+p}$. Cho $p \rightarrow +\infty$ ta được $z_n \leq z$

Mặt khác F là ánh xạ tăng, tuyến tính nên F là ánh xạ dương nên $\theta \leq F(z_n) \leq F(z)$ mà K là nón chuẩn nên $\exists N > 0 : \|F(z_n)\| \leq N \cdot \|F(z)\|$

Suy ra $n < \|F(z_n)\| \leq N \cdot \|F(z)\|$. Cho $n \rightarrow +\infty$ ta có $\|F(z)\| = +\infty$, vô lý.

Vậy $\exists m > 0$ để $\forall x \in P, \|F(x)\| \leq m \|x\|$

ii. $\forall x \in X$, vì P là nón sinh nên $\exists u, v \in P, \exists M > 0 : \begin{cases} x = u - v \\ \|u\| \leq M \cdot \|x\| \\ \|v\| \leq M \cdot \|x\| \end{cases}$

Ta có $\|F(x)\| = \|F(u) - F(v)\| \leq \|F(u)\| + \|F(v)\|$

Do $u, v \in P$ nên theo chứng minh trên $\exists m_1, m_2 > 0 : \begin{cases} \|F(u)\| \leq m_1 \|u\| \\ \|F(v)\| \leq m_2 \|v\| \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \|F(u)\| \leq M \cdot m_1 \|x\| \\ \|F(v)\| \leq M \cdot m_2 \|x\| \end{cases}$

Suy ra $\|F(x)\| \leq \|F(u)\| + \|F(v)\| \leq (m_1 + m_2) \cdot M \cdot \|x\|$

Vậy F bị chặn mà do F tuyến tính nên F liên tục. $\square$

1.3 Nguyên lý Entropi (Brezis, Browder)

Giả sử có :

1. X là một tập sắp thứ tự sao cho mỗi dãy tăng trong X có một cận trên, nghĩa là nếu

$u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $\exists v \in X : u_n \leq v \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2. Phiếm hàm $S: X \rightarrow [-\infty, +\infty)$ là tăng và bị chặn trên, nghĩa là nếu $u \leq v$ thì $s(u) \leq s(v)$ và tồn tại một số thực c sao cho $S(u) \leq c \quad \forall u \in X$

Thế thì $(\exists v \in X: \forall u \in X, v \leq u) \Rightarrow S(u) = S(v)$

Chứng minh:

Lấy tùy ý $u_1 \in X$, rồi xây dựng các phần tử $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots$ như sau:

Giả sử có u_n , ta đặt $M_n = \{u \in X: u \geq u_n\}$, $\beta_n = \sup_{u \in M_n} S(u)$

i. Nếu $\beta_n = S(u_n)$

Với $\forall u \in X, u_n \leq u \Rightarrow u \in M_n$

Suy ra $S(u) \leq S(u_n)$

Mặt khác $u_n \leq u \Rightarrow S(u_n) \leq S(u)$ (do S tăng)

Vậy $\forall u \in X, u_n \leq u \Rightarrow S(u_n) = S(u)$ nên u_n là phần tử cần tìm

ii. Nếu $\beta_n > S(u_n)$ ta tìm được u_{n+1} thỏa:

$$F(x_1) \leq F^2(x_2) \leq \dots \leq F^n(x_n), \dots, x_n \in M \begin{cases} u_{n+1} \in M_n \\ S(u_{n+1}) > \beta_n - \frac{1}{2}(\beta_n - S(u_n)) \end{cases} \quad (1.1.3)$$

$$\text{Ta thấy } (1.1.3) \Leftrightarrow S(u_{n+1}) > \frac{\beta_n + S(u_n)}{2}$$

* Quá trình trên là hữu hạn thì ta tìm được u_{n+p} nào đó mà $\beta_n = S(u_{n+p})$ và chứng minh như trên ta được u_{n+p} là phần tử cần tìm

* Quá trình trên là vô hạn thì ta có dãy tăng $\{u_n\}$ thỏa

$$2S(u_{n+1}) - S(u_n) > \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Do $\{u_n\}$ là dãy tăng nên theo giả thiết thì dãy $\{u_n\}$ có cận trên. Gọi u_0 là cận trên của dãy $\{u_n\}$. Ta chứng minh u_0 là giá trị cần tìm

$$\text{Với } u \geq u_0, \text{ Ta có } u \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow u \in M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow S(u) \leq \beta_n < 2S(u_{n+1}) - S(u_n)$$

Do dãy $\{u_n\}$ tăng trong X nên dãy $\{S(u_n)\}$ tăng trong $[-\infty, +\infty)$ và bị chặn trên nên tồn tại giới hạn.

$$\text{suy ra } S(u) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S(u_n)$$

$$\Rightarrow S(u) \leq S(u_0)$$

$$\Rightarrow S(u) = S(u_0) \quad (\text{vì } u \geq u_0 \Rightarrow S(u) \geq S(u_0)) \quad \square$$

Chương 2 : ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỀU LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH COMPACT

Trong chương này ta xét X là không gian Banach thực với quan hệ thứ tự sinh bởi nón K .

2.1 Điểm bất động của toán tử compact đơn điệu

Định nghĩa 2.1.1 Cho $M \subset X$

Toán tử $F : M \rightarrow X$ được gọi là Compact đơn điệu nếu nó biến mỗi dãy tăng trong M thành dãy hội tụ.

Định lý 2.1.1 Giả sử :

- 1) M là tập đóng trong X
- 2) $F : M \rightarrow X$ là toán tử tăng, compact đơn điệu và $F(M) \subset M$
- 3) Tồn tại $x_0 \in M$ sao cho $x_0 \leq F(x_0)$

Khi đó F có điểm bất động trên M .

Chứng minh:

Đặt $M_0 = \{x \in M : x \leq F(x)\}$ và

Với mỗi $x \in M_0$, $g(x) = \sup \{\|F(y) - F(z)\| / y, z \in M_0; y \geq z \geq x\}$

Từ giả thiết 2) và 3) ta có $M_0 \neq \emptyset$ và $F(M_0) \subset M_0$

Ta sẽ áp dụng nguyên lý Entropy vào tập M_0 và phiếm hàm $(-g)$

i. Trước tiên ta chứng minh: Mỗi dãy tăng $\{x_n\} \subset M_0$ đều có cận trên

Thật vậy dãy tăng $\{x_n\}$ tăng nên dãy $\{F(x_n)\}_n$ hội tụ (vì F là compact đơn điệu)

Đặt $x = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ ta có $x \in M$ (vì M đóng và $\{F(x_n)\} \subset M$)

$\Rightarrow x_n \leq x$ (vì $x_n \leq F(x_n) \leq x$)

ii. Phiếm hàm $(-g)$ là tăng và bị chặn trên

Ta có $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow -g(x) \leq 0 \quad \forall x \in X$ nên $(-g)$ bị chặn trên

$\forall x, x' \in X$, giả sử $x \leq x'$ ta chứng minh $-g(x) \leq -g(x')$

Xét $\{y \in M_0 / x' \leq y\}$ và $\{y \in M_0 / x \leq y\}$

Vì $x \leq x'$ nên $\{y \in M_0 / x' \leq y\} \subset \{y \in M_0 / x \leq y\}$

Suy ra

$\sup \{\|F(y) - F(z)\| / y, z \in M_0, y \geq z \geq x'\} \leq \sup \{\|F(y) - F(z)\| / y, z \in M_0, y \geq z \geq x\}$

$\Rightarrow g(x') \leq g(x) \Rightarrow -g(x') \geq -g(x)$ suy ra $(-g)$ là hàm tăng

Vậy theo nguyên lý Entropi tồn tại $u_0 \in M_0$ sao cho $\forall x \in M_0, x \geq u_0$ ta có

$$-g(x) = -g(u_0) \Leftrightarrow g(x) = g(u_0)$$

Ta chứng minh $g(u_0) = 0$

Giả sử $g(u_0) > c > 0$ ta có

$$\exists y_1 \in M_0, y_1 > u_0 : \|F(y_1) - F(u_0)\| > c$$

Do $g(y_1) = g(u_0) > c$ nên

$$\exists y_2 \in M_0, y_2 \geq y_1 \geq u_0 : \|F(y_2) - F(y_1)\| > c$$

Cứ tiếp tục như vậy ta có dãy $\{y_n\}$ là dãy tăng trong M

Mà $\|F(y_{2n}) - F(y_{2n-1})\| > c$ điều này là vô lý (vì F biến dãy tăng thành dãy hội tụ)

Vậy $g(u_0) = 0$

Đặt $b = F(u_0)$ ta có $b \geq u_0$ (vì $u_0 \in M_0 \Rightarrow F(u_0) \geq u_0$)

$$\text{Ta có } \|F(b) - F(u_0)\| \leq g(u_0) = 0$$

$$\Rightarrow F(b) = F(u_0) = b \text{ vậy } F \text{ có điểm bất động là } b = F(u_0) \square$$

Hệ quả 2.1.1 Giả sử

1. K là nón chuẩn, $u_0 \leq A(u_0), A(v_0) \leq v_0$

2. Toán tử $A : \langle u_0, v_0 \rangle \rightarrow \langle u_0, v_0 \rangle$ là toán tử đơn điệu và tập $A(\langle u_0, v_0 \rangle)$ là tập compact tương đối.

Khi đó A có điểm bất động trên $\langle u_0, v_0 \rangle$

Thật vậy:

1. Do K là nón chuẩn nên tập $\langle u_0, v_0 \rangle$ là tập đóng

2. Toán tử A là compact đơn điệu vì:

với mọi dãy tăng $(x_n)_n$ chứa trong $\langle u_0, v_0 \rangle$

Do A là ánh xạ tăng nên dãy $\{A(x_n)\}_n$ là dãy điệu tăng

Vì $A(\langle u_0, v_0 \rangle)$ là tập compact tương đối nên dãy $\{A(x_n)\}_n$ có dãy con $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ sao

cho $\lim_{k \rightarrow \infty} A(x_{n_k}) = a$

Vì $\langle u_0, v_0 \rangle$ đóng nên $a \in \langle u_0, v_0 \rangle$

K là nón chuẩn

Dãy $\{A(x_n)\}$ tăng có dãy con $\{A(x_{n_k})\}_k$ hội tụ vì $a \in \langle u_0, v_0 \rangle$

Nên dãy $\{A(x_n)\}$ hội tụ

$$3. A(<u_0, v_0>) \subset <u_0, v_0>$$

Vậy theo định lý 2.1.1 thì A có điểm bất động. $\square$

Hệ quả 2.1.2 Giả sử

1. K là nón chính quy, $u_0 \leq A(u_0)$, $A(v_0) \leq v_0$
2. $A: <u_0, v_0> \rightarrow <u_0, v_0>$ là toán tử đơn điệu.

Khi đó A có điểm bất động.

Thật vậy:

1. Vì K là nón chính quy nên K là nón chuẩn suy ra

Tập $<u_0, v_0>$ là tập đóng và bị chặn

2. A là toán tử compact đơn điệu vì:

Với mọi dãy $(x_n)_n$ tăng trong $<u_0, v_0>$ suy ra dãy $\{A(x_n)\}$ bị chặn trên và dãy tăng trong $<u_0, v_0>$

Do K là nón chính quy và $\{A(x_n)\}$ dãy tăng, bị chặn trên nên suy ra dãy $\{A(x_n)\}_n$ hội tụ

Vậy theo định lý 2.1.1 A có điểm bất động trên $<u_0, v_0>$. $\square$

Hệ quả 2.1.3: Giả sử

1. X là không gian phản xạ, K là nón chuẩn, $A(v_0) \leq v_0$, $u_0 \leq A(u_0)$
2. $A: <u_0, v_0> \rightarrow <u_0, v_0>$ là toán tử đơn điệu

Khi đó A có điểm bất động trên $<u_0, v_0>$.

Thật vậy:

- Do K nón chuẩn nên $<u_0, v_0>$ là tập đóng, bị chặn, lồi. Nên $<u_0, v_0>$ là compact yếu vì X là không gian phản xạ
- Với mọi dãy (x_n) đơn điệu tăng trong $<u_0, v_0>$

Ta có dãy $(A(x_n))_n$ là dãy đơn điệu tăng trong $<u_0, v_0>$

Suy ra dãy $\{A(x_n)\}$ có dãy con $\{A(x_{n_k})\}_k$ hội tụ yếu, về y trong $<u_0, v_0>$

Đặt $y_k = A(x_{n_k})$, ta có dãy $\{y_k\}_k$ là dãy tăng trong $<u_0, v_0>$ với mọi $f \in X^*$,

$$f(y_m) \geq f(y_k), \forall m \geq k$$

Cho $m \rightarrow +\infty$ ta có $f(y_k) \leq f(y) \Rightarrow y \geq y_k \forall k$

Ta chứng minh $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$

Do K nón chuẩn nên $\exists N > 0$ sao cho $\forall x, y \in K, 0 \leq x \leq y$

Ta có $\|x\| \leq N \cdot \|y\|$ vì $y_k \xrightarrow{yếu} y$ trong $\langle u_0, v_0 \rangle$ nên theo định lý Mazur tồn tại

$$z = t_1 y_{k_1} + t_2 y_{k_2} + \dots + t_m y_{k_m} \in C_0(\{y_k\}_k) \text{ sao cho } \|z - y\| < \frac{\varepsilon}{2N+1}$$

$$\text{Đặt } k_\varepsilon = \max\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_m\}$$

Khi đó $\forall k \geq k_\varepsilon$ Ta có $y - z \geq k_\varepsilon - z \geq 0$ nên $\|y_k - z\| \leq N \cdot \|y - z\|$

$$\text{Ta có } \|y_k - y\| \leq \|y_k - z\| + \|z - y\| \leq (N+1)\|y_k - z\| < \varepsilon$$

Suy ra $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$

Vậy dãy $\{A(x_n)\}$ là dãy tăng nên có dãy con hội tụ về y và K nón chuẩn nên dãy $\{A(x_n)\}$ hội tụ.

Vậy A là đơn điệu compact. $\square$

Kết luận: Theo định lý 2.1.1 thì A có điểm bất động.

2.2 Điểm bất động của toán tử đơn điệu tới hạn.

Định nghĩa 2.2.1

Toán tử $F : M \subset X \rightarrow X$ gọi là compact đơn điệu tới hạn nếu mỗi dãy $\{F^n(x_n)\}_n$ thỏa mãn điều kiện $F(x_1) \leq F^2(x_2) \leq F^3(x_3) \leq \dots, x_n \in M$ (2.2.1) đều hội tụ

Định lý 2.2.1 Giả sử

1. Tập M đóng, và bị chặn trong X .
2. Toán tử $F : M \rightarrow M$ đơn điệu, compact đơn điệu tới hạn.
3. Tồn tại $x_0 \in M$ sao cho $x_0 \leq F(x_0)$

Khi đó F có điểm bất động.

Chứng minh

$$* \text{ Đặt } M_0 = \{x \in M / x \leq F(x)\}$$

Ta có $M_0 \neq \emptyset$ (vì $x_0 \leq F(x_0)$) (Theo giả thiết 3) và $F(M_0) \subset M_0$

* Trên M_0 ta định nghĩa dãy các phiếm hàm S_n như sau:

$$S_n(x) = \sup \left\{ \|F^n(u) - F^n(v)\| / u, v \in M_0, x \leq F^n(u) \leq F^n(v) \right\}$$

$$\text{Ta đặt } M_n(x) = \left\{ (u, v) : u, v \in M_0 ; x \leq F^n(u) \leq F^n(v) \right\}$$

Ta có $M_n(x) \neq \emptyset$ vì $x \leq F^n(x) \leq F^n(u)$ và $M_n(x)$ là tập bị chặn trên $X \times X$

Vậy S_n được xác định.

Ngoài ra: Nếu $x \leq x'$ thì $M_n(x) \supset M_n(x')$ nên $S_n(x) \geq S_n(x')$

Suy ra S_n là hàm giảm trên M_0

Ta nhận xét thấy

$$\left\{ \|F^{n+1}(u) - F^{n+1}(v)\| : u, v \in M_0, x \leq F^{n+1}(u) \leq F^{n+1}(v) \right\} \subset \left\{ \|F^{n+1}(u) - F^{n+1}(v)\| : u, v \in M_0, x \leq F^n(u) \leq F^n(v) \right\}$$

$S_{n+1}(x) \leq S_n(x) \Rightarrow \{S_n(x)\}$ là dãy số giảm và bị chặn dưới nên hội tụ.

Đặt $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \Rightarrow S_n(x) \geq S(x) \quad \forall n$ và S cũng là hàm giảm trên M_0 (do S_n giảm trên M_0)

(Ta sẽ áp dụng nguyên Entropi cho tập M_0 và phiếm hàm $(-S)$)

1. Xét dãy tăng $(x_n)_n \subset M_0$ ta chứng minh dãy số $(x_n)_n$ có cận trên.

Ta lập bảng vô hạn 2 phía sau:

$$F(x_1) \leq F^2(x_1) \leq \dots \leq F^n(x_1) \leq \dots$$

$$F(x_2) \leq F^2(x_2) \leq \dots \leq F^n(x_2) \leq \dots$$

.....

.....

.....

$$F(x_n) \leq F^2(x_n) \leq \dots \leq F^n(x_n) \leq \dots$$

.....

Vì (x_n) là dãy tăng nên các phần tử trên một cột là dãy tăng (do F là toán tử tăng).

Do vậy dãy chéo $\{F^n(x_n)\}_n$ là dãy tăng, vì F là toán tử compact đơn điệu tới hạn nên

dãy này hội tụ về x và $x_n \leq F^n(x_n) \leq x$ nghĩa là x là cận trên của $\{x_n\}_n$, Ta kiểm tra $x \in M_0$

Thật vậy $F^n(x_n) \leq x, \forall n$

$$\Rightarrow F^{n+1}(x_n) \leq Fx$$

$$\Rightarrow F^n(x_n) \leq F^{n+1}(x_n) \leq F(x), \forall n$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $x \leq F(x) \Rightarrow x \in M_0$

2. Áp dụng nguyên lý Entropi ta tìm được $a \in M_0$ sao cho $\forall x \in M_0, x \geq a$

Ta có $S(a) = S(x)$

Ta chứng minh $S(a) = 0$

Giả sử $S(a) = 2\alpha > 0$

- Ta có $S_1(a) \geq S(a) = 2\alpha > 0$ nên tồn tại $u_1, v_1 \in M_0$ sao cho thỏa mãn $F^1(v_1) \geq F^1(u_1) \geq a$ ta có $\|F^1(v_1) - F^1(u_1)\| > \alpha$
- Do $F^1(v_1) \geq a$ nên $S(F^1(v_1)) = S(a) = 2\alpha > 0 \Rightarrow S_2(F^1(v_1)) \geq S(a) > \alpha$ nên tồn tại $u_2, v_2 \in M_0$ sao cho $F^2(v_2) \geq F^2(u_2) \geq F^1(v_1) \geq a$ và $\|F^2(v_2) - F^2(u_2)\| > \alpha$
- Do $F^2(v_2) \geq a$ nên $S_3(F^2(v_2)) = S(a) = 2\alpha > 0$ nên tồn tại $u_3, v_3 \in M_0$ sao cho $F^3(v_3) \geq F^3(u_3) \geq F^2(v_2)$ và $\|F^3(v_3) - F^3(u_3)\| > \alpha$
- Cứ tiếp tục như trên ta sẽ xây dựng được các dãy $\{u_n\}, \{v_n\} \subset M_0$

sao cho

$$F^1(u_1) \leq F^1(v_1) \leq F^2(u_2) \leq F^2(v_2) \leq \dots \leq F^n(u_n) \leq F^n(v_n) \leq \dots \quad (2.2.2)$$

$$\text{Thỏa mãn } \|F^n(v_n) - F^n(u_n)\| > \alpha \quad (2.2.3)$$

Rõ ràng dãy (2.2.2) là dãy hội tụ theo định nghĩa F là toán tử compact tới hạn mà điều này thì mâu thuẫn với (2.2.3).

Vậy $s(a) = 0$

3. Bây giờ ta chứng minh F có điểm bất động trên M_0

Ta có $a \leq F(a) \leq F^2(a) \leq F^3(a) \leq F^4(a) \leq \dots$ Do F là toán tử compact tới hạn nên dãy $\{F^n(a)\}$ hội tụ, đặt $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(a)$ mà do $\{F^n(a)\}$ là dãy tăng nên $F^{n-1}(a) \leq b$

$$\Rightarrow F^n(a) \leq F(b) \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ ta có $b \leq F(b) \Rightarrow b \in M_0$

$$a \leq F^n(a) \leq F^n(b) \quad \forall n \text{ nên } \|F^n(a) - F^n(b)\| \leq S_n(a)$$

$$\text{Do } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a) = S(a) = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|F^n(a) - F^n(b)\| = 0$$

$$\text{Từ } 0 \leq F(b) - b \leq F^n(b) - F^n(a)$$

Ta có $F(b) = b$ hay F có điểm bất động trong M_0 $\square$

* **Chú ý:** Trong định lý 2.2.1 ta giữ nguyên các giả thiết 1. và 2. còn giả thiết 3 ta thay bằng giả thiết 3' là $\exists x_0 \in M$ sao cho $F(x_0) \leq x_0$ thì ta vẫn có kết luận: “Khi đó F có điểm bất động trong M”

Định nghĩa 2.2.2

Cho $u_0 \geq \theta$ toán tử F được gọi là u_0 - lõm đều trên $\langle u, v \rangle$ nếu.

1. A đơn điệu trên $\langle u, v \rangle$

$$2. \forall x \in \langle u, v \rangle, \exists \alpha > 0, \beta > 0 \text{ sao cho } \alpha u_0 \leq F(x) \leq \beta u_0$$

$$3. \forall [a, b] \subset (0, 1), \exists \delta = \delta(a, b) > 0 \text{ sao cho } \forall x \in \langle u, v \rangle, \forall t \in (a, b) \text{ thì } F(tx) \geq (1 + \delta)tF(x)$$

Từ định nghĩa u_0 - lõm đều ta thấy $\alpha, \beta > 0$ và phụ thuộc vào x

$$\text{Nếu } F \text{ là } u_0 \text{ - lõm thì } F(tx) \geq tF(x) \quad \forall t \in (0, 1), \quad \forall x \in \langle u, v \rangle$$

Định lý 2.2.2

Giả sử

1. K là nón chuẩn
2. F là toán tử u_0 - lõm đều trên $\langle u, v \rangle$
3. $u \leq Fu, Fv \leq v$

Khi đó F có điểm bất động trên $\langle u, v \rangle$

Thật vậy:

- Do K là nón chuẩn nên $\langle u, v \rangle$ đóng, bị chặn
- Do giả thiết 3, mà ta có $F(\langle u, v \rangle) \subset \langle u, v \rangle$ ta chứng minh toán tử F compact đơn điệu tới hạn.

$$* \text{ Giả sử } \exists \alpha, \beta > 0 : \alpha u_0 \leq u, v \leq \beta u_0 \text{ và } \frac{\alpha}{\beta} < 1$$

Thật vậy nếu u, v không có tính chất trên thì từ điều kiện 2. trong định nghĩa F là u_0 -lõm đều suy ra $\exists \alpha > 0, \beta > 0$ sao cho $\alpha u_0 \leq F(u), F(v) \leq \beta u_0$

$$\text{Ta đặt } u_1 = F(u), v_1 = F(v) \text{ ta có } \alpha u_0 \leq u_1, v_1 \leq \beta u_0, 0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$$

$$\text{và } \begin{cases} F(v_1) \leq v_1 \\ F(u_1) \leq u_1 \end{cases} \quad (\text{do } F(v) \leq v \Rightarrow v_1 \leq v \Rightarrow F(v_1) \leq F(v) = v_1)$$

Khi đó ta xét F là u_0 - lõm đều trên $\langle u, v \rangle$

Do K là nón chuẩn nên $\langle u, v \rangle$ đóng, bị chặn $\Rightarrow \forall x \in \langle u, v \rangle, \exists M > 0 : \|x\| \leq M$

* F là toán tử compact đơn điệu tới hạn vì:

$$\text{Giả sử } (x_n)_n \subset \langle u, v \rangle \text{ thỏa điều kiện } F(x_1) \geq F^2(x_2) \geq \dots \geq F^n(x_n) \geq \dots \quad (*)$$

Ta sẽ chỉ ra $\{F^n(x_n)\}$ là dãy cauchy (khi đó sẽ hội tụ vì X là không gian Banach)

$$\text{Lấy } \varepsilon > 0 \text{ đủ bé để } \frac{\alpha}{\beta} < 1 - \frac{\varepsilon}{M.N} \text{ (N là hằng số chuẩn của nón K)}$$

$$\text{Do } F \text{ là } u_0 \text{ - lõm đều trên } \langle u, v \rangle \text{ nên } \exists \delta > 0 \text{ sao cho } \forall x \in \langle u, v \rangle, \forall t \in \left[\frac{\alpha}{\beta}, 1 - \frac{\varepsilon}{M.N} \right] \text{ ta có}$$

$$F(tx) \geq (1 + \delta)tF(x)$$

Chọn N_0 là số tự nhiên thỏa điều kiện
$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}(1+\delta)^{N_0-1} \leq 1 - \frac{\varepsilon}{M.N} \\ \frac{\alpha}{\beta}(1+\delta)^{N_0} > 1 - \frac{\varepsilon}{M.N} \end{cases}$$

Bằng cách giảm số δ , ta có thể coi $\frac{\alpha}{\beta}(1+\delta)^{N_0} < 1$

Ta chứng minh $\forall n \geq n_0, \forall k \in N$ thì $\|F^{n+k}(x_{n+k}) - F^n(x_n)\| < \varepsilon$

Do $F^k(x_{n+k}) \in \langle u, v \rangle$ và $x_n \in \langle u, v \rangle$ nên $\alpha u_0 \leq F^k(x_{n+k})$ và $x_n \leq \beta u_0$

$$\Rightarrow \frac{F^k(x_{n+k})}{\alpha} \geq u_0 \geq \frac{x_n}{\beta} \Rightarrow F^k(x_{n+k}) \geq \frac{\alpha}{\beta} x_n$$

Ta có $F^{k+1}(x_{n+k}) \geq F\left(\frac{\alpha}{\beta} x_n\right) \geq (1+\delta) \frac{\alpha}{\beta} F(x_n)$

$$F^{k+2}(x_{n+k}) \geq F\left[(1+\delta) \frac{\alpha}{\beta} F(x_n)\right] \geq (1+\delta)^2 \frac{\alpha}{\beta} F^2(x_n)$$

.....

$$F^{k+N_0}(x_{n+k}) \geq F\left[(1+\delta)^{N_0-1} \frac{\alpha}{\beta} F^{N_0-1}(x_n)\right] \geq (1+\delta)^{N_0} \frac{\alpha}{\beta} F^{N_0}(x_n)$$

$$\begin{aligned} F^{n+k}(x_{n+k}) &= F^{n-N_0} [F^{k+N_0}(x_{n+k})] \geq F^{n-N_0} \left[(1+\delta)^{N_0} \frac{\alpha}{\beta} F^{N_0}(x_n) \right] \\ &\geq (1+\delta)^{N_0+1} \frac{\alpha}{\beta} F^n(x_n) \geq (1+\delta)^{N_0} \frac{\alpha}{\beta} F^n(x_n) \\ &> \left(1 - \frac{\varepsilon}{M.N}\right) F^n(x_n) \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện: $F^{n+k}(x_{n+k}) \leq F^n(x_n)$ ta có $0 \leq F^n(x_n) - F^{n+k}(x_{n+k}) < \frac{\varepsilon}{M.N} F^n(x_n)$

Do đó $\|F^n(x_n) - F^{n+k}(x_{n+k})\| < \frac{\varepsilon}{M.N} . N . \|F^n(x_n)\| < \frac{\varepsilon}{M} . M = \varepsilon$ (do $F^n(x_n) \in \langle u, v \rangle$)

Vậy dãy $\{F^n(x_n)\}$ là dãy cauchy, mà do X là không gian Banach nên dãy $\{F^n(x_n)\}$ hội tụ.

Vậy theo định lý 2.2.1 ta có F có điểm bất động trên $\langle u, v \rangle$ $\square$

2.3 Điểm bất động của toán tử đơn điệu trên không gian với nón Minihedral - mạnh

Giả sử X là không gian Banach thực, sắp bởi nón Minihedral K. Ta có kết quả sau:

Định lý 2.3.1: Giả sử:

1. $F: \langle u, v \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$ là toán tử đơn điệu
2. K là nón Miniherdal - mạnh sao cho $F(\langle u, v \rangle) \subset \langle u, v \rangle$

Khi đó F có điểm bất động trên $\langle u, v \rangle$.

Chứng minh:

Đặt $M_0 = \{x \in \langle u, v \rangle : x \leq Fx\}$: khi đó $M_0 \neq \emptyset$ vì $u \leq Fu$ nên $u \in M_0$

Ánh xạ $F: M_0 \rightarrow M_0$ được thỏa mãn vì $\forall x \in M_0 \Rightarrow x \leq Fx \Rightarrow Fx \leq F(Fx) \Rightarrow Fx \in M_0$

Ta chứng minh mỗi tập con sắp tuyến tính trong M_0 đều có cận trên thuộc M_0

Thật vậy

Giả sử N là tập con sắp tuyến tính trong M_0 ta có N bị chặn trên bởi v . Vì K là nón Miniherdal mạnh nên N có cận trên đúng $c_0 = \sup N \Rightarrow u \leq c_0 \leq v$

$\forall x \in N$ ta có $x \leq c_0$ mà F đơn điệu nên $F(x) \leq F(c_0) \Rightarrow x \leq F(x) \leq F(c_0)$ do đó $F(c_0)$ là cận trên đúng của N nên $c_0 \leq F(c_0)$ (do định nghĩa supremum) $\Rightarrow c_0 \in M_0$

Theo bổ đề Zorn trong M_0 có phần tử tối đại là x^* ta chứng minh x^* là điểm bất động của toán tử F

Thật vậy $x^* \in M_0$ nên $x^* \leq F(x^*)$ mà F đơn điệu nên $x^* \leq F(x^*) \leq F(F(x^*))$

$\Rightarrow F(x^*) \in M_0 \Rightarrow F(x^*) \leq x^*$ (do x^* phần tử tối đại của M_0)

Vậy $F(x^*) = x^* \square$

Chương 3: ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA TOÁN TỬ

T-ĐƠN ĐIỀU

Trong chương này ta vẫn xét X là không gian Banach thực với quan hệ thứ tự sinh bởi nón K .

3.1 Toán tử T-đơn điệu và điểm bất động

Định nghĩa 3.1.1

- Số thực λ được gọi là điểm chính quy của toán tử tuyến tính $F: X \rightarrow X$ nếu $\lambda I - F$ là song ánh, ở đây I là toán tử đồng nhất trong X .
- Ký hiệu $\rho(F)$ là tập tất cả các điểm chính quy của F và $\sigma(F) = \mathbb{R} \setminus \rho(F)$ được gọi là phổ của toán tử F .
- Toán tử F được gọi là Compact yếu nếu F biến $\langle u_0, v_0 \rangle$ thành một tập Compact yếu
- Toán tử F được gọi là liên tục yếu nếu F biến mỗi dãy hội tụ yếu thành dãy hội tụ yếu trong X .
- Ký hiệu $L(X, X)$ là không gian các toán tử tuyến tính trong X . Toán tử $T \in L(X, X)$ gọi là dương nếu $T(K) \subset K$ với K là nón trong X .

Định nghĩa 3.1.2

Giả sử $D \subset X$ toán tử $F: D \subset X \rightarrow X$ được gọi là T-đơn điệu nếu

$$F(x) - F(y) \geq -T(x, y), \forall x \geq y \text{ ở đây } T \in L(X, X).$$

Như vậy nếu $T \equiv 0$ thì khái niệm T-đơn điệu trở thành khái niệm đơn điệu thông thường đã biết.

Bổ đề 3.1.1

Nếu $F \in L(X, X)$ và $-\lambda \notin \sigma(F)$ Thì $x = (\lambda I + F)^{-1}(\lambda A + F)(x) \Leftrightarrow x = Ax$

Chứng minh:

$$-\lambda \notin \sigma(F)$$

$$\Rightarrow -\lambda \in \rho(F)$$

$$\Rightarrow \lambda I + F \text{ là song ánh}$$

$$\begin{aligned} Ax = x &\Leftrightarrow (\lambda I + F)^{-1}(\lambda A + F)(x) = (\lambda I + F)^{-1}(\lambda Ax + Fx) \\ &= (\lambda I + F)^{-1}(\lambda x + Fx) \\ &= (\lambda I + F)^{-1}(\lambda I + F)(x) \\ &= x \end{aligned}$$

Vậy bổ đề được chứng minh $\square$

Bổ đề 3.1.2

Giả sử $u_0, v_0 \in K$ và $u_0 < v_0$, toán tử $F: \langle u_0, v_0 \rangle \rightarrow X$ là T-đơn điệu với $u_0 \leq Fu_0$, $Fv_0 \leq v_0$.

Hơn nữa, giả sử T thỏa điều kiện :

(H₁) T dương

(H₂) $\exists \lambda \in (0,1) : -\lambda \notin \delta(T)$, $Tx \geq -\lambda x \Rightarrow x \in K$

Khi đó $S = (\lambda I + T)^{-1}(\lambda F + T)$ là đơn điệu trên $\langle u_0, v_0 \rangle$ và $u_0 \leq Su_0$, $Sv_0 \leq v_0$

Chứng minh

Do giả thiết (H₁) ta có ánh xạ $(\lambda I + T)$ dương

Do $-\lambda \notin \delta(T) \Rightarrow \lambda I + T$ song ánh nên tồn tại ánh xạ $(\lambda I + T)^{-1}$ và $(\lambda I + T)^{-1}$ dương

Nếu $\forall x, y \in \langle u_0, v_0 \rangle$; $x \geq y$ ta có $F(x) - F(y) \geq -T(x - y)$ (do F là T- đơn điệu)

$$\Rightarrow \lambda(Fx - Fy) \geq -\lambda(Tx - Ty) \geq -T(x - y)$$

$$\Rightarrow (\lambda F + T)(x) \geq (\lambda F + T)(y) \quad (3.1.1)$$

Tác động $(\lambda I + T)^{-1}$ dương vào bất đẳng thức (3.1.1) ta được

$$(\lambda F + T)^{-1}(\lambda F + T)(x) \geq (\lambda F + T)^{-1}(\lambda F + T)(y)$$

$$\Rightarrow Sx \geq Sy$$

$$\Rightarrow S \text{ là toán tử đơn điệu trên } \langle u_0, v_0 \rangle$$

$$\text{Do } u_0 \leq Fu_0 \Rightarrow \lambda u_0 + Tu_0 \leq \lambda F(u_0) + T(u_0) \quad (3.1.2)$$

$$Fv_0 \leq v_0 \Rightarrow \lambda F(v_0) + T(v_0) \leq \lambda v_0 + T(v_0) \quad (3.1.3)$$

Tác động $(\lambda I + T)^{-1}$ dương vào bất đẳng thức (3.1.2) và (3.1.3)

$$\text{Ta được } \begin{cases} u_0 \leq S(u_0) \\ S(v_0) \leq v_0 \end{cases}$$

Vậy bổ đề được chứng minh $\square$

Định lý 3.1.1

Giả sử K là nón chính quy, $u_0, v_0 \in K$ và $u_0 < v_0$, toán tử $F: \langle u_0, v_0 \rangle \rightarrow X$ là T-đơn điệu với

$u_0 \leq Fu_0$, $Fv_0 \leq v_0$. Hơn nữa, giả sử T thỏa điều kiện :

(H₁) T dương

(H₂) $\exists \lambda \in (0,1) : -\lambda \notin \delta(T)$, $Tx \geq -\lambda x \Rightarrow x \in K$

Khi đó F có ít nhất một điểm bất động trên $\langle u_0, v_0 \rangle$

Chứng minh:

Đặt $S = (\lambda I + T)^{-1}(\lambda F + T)$ với $-\lambda \notin \delta(T)$. Do bổ đề 3.1.1 ta chỉ cần Chứng minh S có ít nhất một điểm bất động trên $\langle u_0, v_0 \rangle$

Theo bổ đề 3.1.2 toán tử $S: \langle u_0, v_0 \rangle \rightarrow \langle u_0, v_0 \rangle$ là đơn điệu

K nón chính quy, $u_0 \leq Su_0$, $Sv_0 \leq v_0$ nên theo hệ quả 2.1.2 suy ra S có điểm bất động trên $\langle u_0, v_0 \rangle$

Vậy F có ít nhất một điểm bất động trên $\langle u_0, v_0 \rangle$

Định lý 3.1.2

Giả sử K là nón chuẩn, $u_0, v_0 \in K$ và $u_0 < v_0$. Toán tử $F: \langle u_0, v_0 \rangle \rightarrow X$ là T-đơn điệu và $u_0 \leq Fu_0$, $Fv_0 \leq v_0$. Hơn nữa, giả sử T thỏa điều kiện:

(H₁) T dương

(H₂) $\exists \lambda \in (0,1) : -\lambda \notin \delta(T)$, $Tx \geq -\lambda x \Rightarrow x \in K$.

Khi đó

Nếu X là không gian phản xạ thì F có ít nhất một điểm bất động trên $\langle u_0, v_0 \rangle$.

Chứng minh :

Đặt $S = (\lambda I + T)^{-1}(\lambda F + T)$ với $-\lambda \notin \delta(T)$

Do toán tử $F: \langle u_0, v_0 \rangle \rightarrow X$ là T- đơn điệu, $u_0 \leq Fu_0$, $Fv_0 \leq v_0$ và T thỏa điều kiện (H₁), (H₂) nên theo bổ đề 3.1.2 thì toán tử $S: \langle u_0, v_0 \rangle \rightarrow \langle u_0, v_0 \rangle$ là đơn điệu

Mặt khác X là không gian phản xạ và K là nón chuẩn nên theo hệ quả 2.1.3 thì S có điểm bất động trên $\langle u_0, v_0 \rangle$

Vậy theo bổ đề 3.1.1 thì F có ít nhất một điểm bất động trên $\langle u_0, v_0 \rangle$. □

3.2 Nguyên lý ánh xạ co trên các phần tử so sánh được

Cho X là không gian Banach thực được sắp bởi nón K, F là toán tử trên X.

Xét phương trình : $F(x) = x$ (3.2.1)

Nghiệm của phương trình (3.2.1) thường được tìm dưới dạng giới hạn của một dãy lặp:

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.2.2)$$

Với giá trị x_0 ban đầu tùy ý. Kết quả đã biết trong giải tích hàm đó là nguyên lý ánh xạ co.

Dưới đây chứng minh một số kết quả tương tự nguyên lý ánh xạ co, song sự đánh giá chỉ dựa trên các phần tử so sánh được .

Định lý 3.2.1

Giả sử

1. K là nón sinh, nón chuẩn
2. F là toán tử trên X thỏa điều kiện :

$$\text{Nếu } x \geq y \text{ thì } -A(x-y) \leq F(x) - F(y) \leq A(x-y) \quad (3.2.3)$$

Ở đây A là toán tử tuyến tính dương với bán kính phổ là $r(A) < 1$

Khi đó F có trong X điểm bất động duy nhất , với khởi đầu x_0 tùy ý nào đó.

Chứng minh:

Ta đã biết với mỗi toán tử tuyến tính A trên X ta có thể xét một chuẩn tương đương với chuẩn ban đầu sao cho $\|A\|$ và $r(A)$ sai khác nhau đủ nhỏ.

Vậy từ $r(A) < 1$ ta có thể xem $\|A\| < 1$

K là nón sinh nên với mỗi $x \in X$ có thể biểu diễn dưới dạng $x = u(x) - v(x)$ với $u(x), v(x) \in K$

Nghĩa là với mỗi $x \in X$ tương ứng với $y \in K$ sao cho $-y \leq x \leq y$ (chẳng hạn ta có thể lấy $y = u(x) + v(x)$ với $u(x), v(x)$ từ khai triển của x ở trên).

$$\text{Trên } X \text{ ta định nghĩa chuẩn mới } \|x\|_0 = \inf \{ \|y\| : y \in K, -y \leq x \leq y \} \quad (3.2.4)$$

Để dàng ta kiểm tra được $\|\cdot\|_0$ là chuẩn dựa trên tính chất của chuẩn $\|\cdot\|$ và định nghĩa của infimum.

$$\text{Vì } K \text{ là nón sinh nên với mỗi } x \in X \text{ có thể chọn } u, v \in K \text{ sao cho } \begin{cases} \|u\|, \|v\| \leq a \cdot \|x\| \\ x = u - v \end{cases}$$

Ở đây a là hằng số không phụ thuộc vào x .

$$\text{Như vậy } \forall x \in X, \|x\|_0 = \|u - v\|_0 \leq \|u\|_0 + \|v\|_0 \leq \|u\| + \|v\| \leq 2a \cdot \|x\|$$

$$\text{Mặt khác } K \text{ là nón chuẩn nên có hằng số } N \text{ sao cho từ } 0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N \cdot \|y\|$$

$$\text{Với } -y \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq x + y \leq 2y$$

$$\Rightarrow \|x + y\| \leq 2N \cdot \|y\|$$

$$\text{Suy ra } \|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x + y\| + \|y\| \leq (2N + 1) \|y\| \quad \text{với } \forall y \in K, -y \leq x \leq y$$

$$\Rightarrow \|x\| \leq (2N + 1) \|x\|_0$$

$$\text{Vậy } \|\cdot\| \square \|\cdot\|_0$$

Ta xét x, y tùy ý thuộc X . Giả sử $-u \leq x - y \leq u, u \in K$

$$\text{Rõ ràng từ đây ta có } \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}(x + y - u) \\ y \geq \frac{1}{2}(x + y - u) \end{cases}$$

$$\text{Từ giả thiết (3.2.3): } \begin{cases} -A\left(\frac{x-y+u}{2}\right) \leq F(x) - F\left(\frac{x+y-u}{2}\right) \leq A\left(\frac{x-y+u}{2}\right) \\ -A\left(\frac{y-x+u}{2}\right) \leq F(y) - F\left(\frac{x+y-u}{2}\right) \leq A\left(\frac{y-x+u}{2}\right) \end{cases}$$

Suy ra $-A(u) \leq F(x) - F(y) \leq A(u)$

$$\Rightarrow \|F(x) - F(y)\|_0 \leq \|A(u)\| \leq q \cdot \|u\| \quad \forall u \in K \text{ với } q < 1 \text{ (do } A \text{ liên tục và } \|A\| < 1)$$

$$\Rightarrow \|F(x) - F(y)\|_0 \leq q \cdot \inf_{-u \leq x-y \leq u} \|u\|$$

$$\Rightarrow \|F(x) - F(y)\|_0 \leq q \cdot \|x - y\|_0, \quad q < 1$$

Vậy F là ánh xạ co theo chuẩn $\|\cdot\|_0$. X là không gian Banach nên F có điểm bất động duy nhất.

Chú ý: định lý 3.2.1 vẫn đúng nếu điều kiện (3) được thay bởi điều kiện sau :

$$-A_1(x-y) \leq F(x) - F(y) \leq A_2(x-y); \quad \forall x, y \in K, \quad x \geq y \quad (3')$$

Ở đây A_1, A_2 là các toán tử tuyến tính liên tục dương với $r(A_1 + A_2) < 1$

3.3 Phương trình toán tử ngược dương

3.3.1 Xét phương trình $F(x) = z$ (3.3.1)

Với F là toán tử từ không gian Banach X_1 được sắp bởi nón K_1 vào từ không gian Banach X_2 được sắp bởi nón K_2 . Phần tử z là phần tử cố định trong X_2

Giả sử F thỏa điều kiện

$$x \geq y, \quad B_1(x-y) \leq F(x) - F(y) \leq B_2(x-y) \quad (3.3.2)$$

Ở đây B_1, B_2 là các toán tử tuyến tính từ X_1 vào X_2 . Ta có định lý sau:

Định lý 3.3.1 Giả sử

1. K_1 là nón sinh, nón chuẩn
2. Toán tử $F: X_1 \rightarrow X_2$ thỏa điều kiện (3.3.2), ở đây B_1 và B_1+B_2 có các toán tử ngược dương.

Khi đó phương trình (3.3.1) có trong X_1 nghiệm dương duy nhất với mỗi $z \in X_2$

Chứng minh

Đặt $D = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ khi đó có thể đưa (3.3.1) về dạng $y = Ay$ trong X_2 với toán tử

$$Ay = y - FD^{-1}y + z \quad (3.3.3)$$

Nghiệm x^* của (3.3.1) được xác định qua nghiệm y^* của (3.3.3) bởi hệ thức $x^* = D^{-1}(y^*)$

Từ giả thiết của B_1, B_2 và B_1+B_2 suy ra D^{-1} là toán tử tuyến tính dương

Vì vậy với $u, v \in X_2$ và $u \geq v$ ta có $D^{-1}(u) \geq D^{-1}(v)$

Từ giả thiết (3.3.2) ta có đánh giá :

$$B_1 D^{-1}(u-v) \leq F D^{-1}(u) - F D^{-1}(v) \leq B_2 D^{-1}(u-v)$$

$$\text{Suy ra } (I - B_2 D^{-1})(u-v) \leq A(u) - A(v) \leq (I - B_1 D^{-1})(u-v)$$

Mà $B_2 = 2D - B_1$ nên

$$\begin{aligned} (I - B_2 D^{-1})(u-v) &= (I - (2D - B_1) D^{-1})(u-v) \\ &= (-I + B_1 D^{-1})(u-v) \\ &= -(I - B_1 D^{-1})(u-v) \end{aligned}$$

Suy ra , với $u, v \in X_2, u \geq v$

$$-(I - B_1 D^{-1})(u-v) \leq A(u) - A(v) \leq (I - B_1 D^{-1})(u-v) \quad (3.3.4)$$

Ở đây bất đẳng thức (3.3.4) có thể xem như bất đẳng thức (3.2.3) trong định lý 3.2.1. Vì vậy để hoàn thành chứng minh ta chỉ cần chỉ ra

$$r(I - B_1 D^{-1}) < 1 \quad (3.3.5)$$

- Ta có $I - B_1 D^{-1}$ là toán tử tuyến tính từ X_1 vào X_2
- $I - B_1 D^{-1}$ là toán tử dương (suy ra từ (3.3.4))

Nên suy ra $I - B_1 D^{-1}$ là liên tục (vì K_1 là nón sinh và K_2 là nón chuẩn mà $I - B_1 D^{-1}$ là toán tử tuyến tính dương từ K_1 vào K_2)

Khi đó $B_1 D^{-1}$ có toán tử ngược là DB_1^{-1} và DB_1^{-1} liên tục

Biểu thức (3.3.5) được chứng minh nếu ta có được đánh giá

$$r(P) < 1 \quad (3.3.6)$$

$$\text{Trong đó } P = I - B_1 D^{-1}, Q = DB_1^{-1} - I \quad (3.3.7)$$

Các toán tử P, Q trong (3.3.7) là dương và chúng liên hệ với nhau bởi hệ thức :

$$Q = P(I - P)^{-1} = (I - P)^{-1}P$$

Giả sử $\varepsilon > 0$ và $r(\varepsilon Q) < 1$ khi đó $(I - \varepsilon Q)$ có toán tử ngược liên tục .

$$(I - \varepsilon Q)^{-1} = I + \varepsilon Q + \varepsilon^2 Q^2 + \dots + \varepsilon^n Q^n + \dots$$

Hơn nữa từ tính dương của Q suy ra tính dương của $(I - \varepsilon Q)^{-1}$.

$$\text{Từ đồng nhất } I - (1 + \varepsilon)P = (I - P)(I - \varepsilon Q) \quad (3.3.8)$$

Suy ra toán tử $(I - (1 + \varepsilon)P)$ có toán tử ngược liên tục và với mỗi $n \geq 1$ có

$$\left[\sum_{j=0}^{n+1} (1 + \varepsilon)^j P^j \right] = (I - (1 + \varepsilon)P)^{-1}$$

$$\text{Suy ra } \left[\sum_{j=0}^n (1 + \varepsilon)^j P^j \right] P = (I - \varepsilon Q)^{-1} (I - P)^{-1} P - (1 + \varepsilon)^{n+1} P^{n+2}$$

$$= (I - \varepsilon Q)^{-1} Q - (1 + \varepsilon)^{n+1} P^{n+2}$$

Qua đó ta thấy toán tử dương P thỏa điều kiện

$$(1 + \varepsilon)^{n+1} P^{n+2}(u) \leq (I - \varepsilon Q)^{-1} Q(u), \quad (u \in K_2, n \geq 0) \quad (3.3.9)$$

Hay $(1 + \varepsilon)^n P^{n+1}(u) \leq (I - \varepsilon Q)^{-1} Q(u), \quad (u \in K_2, n \geq 1)$

Giả sử x tùy ý trong X_2 ,

Vì K_2 là nón chuẩn nên $\exists u, v \in K_2$ sao cho $x = u - v$

Suy ra $-v \leq x \leq u$ và từ (3.3.9)

$$\text{Suy ra } -(I - \varepsilon Q)^{-1} Q(v) \leq (1 + \varepsilon)^n P^{n+1}(x) \leq (I - \varepsilon Q)^{-1} Q(u)$$

Như vậy $(1 + \varepsilon)^n P^{n+1}(x)$ bị chặn trong nón K_2 mà K_2 là nón chuẩn nên $\|(1 + \varepsilon)^n P^{n+1}(x)\|$ bị chặn với $\forall x \in X_2$

Suy ra $(1 + \varepsilon)^n \|P^{n+1}\|$ bị chặn nên $\exists M > 0$ sao cho $(1 + \varepsilon)^n \|P^{n+1}\| \leq M$

$$\text{Suy ra } \|P^{n+1}\|^{\frac{1}{n+1}} \leq \left(\frac{M}{(1 + \varepsilon)^n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow r(P) < 1$$

Nhận xét: Trong các điều kiện của định lý 3.3.1 nghiệm $x(z)$ của phương trình (3.3.1) phụ thuộc đơn điệu vào z . Nếu $z_1 \leq z_2$ thì $x(z_1) \leq x(z_2)$.

3.3.2 Bây giờ ta xét phương trình

$$Tx = Gx \quad (3.3.10)$$

Ở đây T, G là các toán tử tác động từ X_1 vào X_2 , T là toán tử tuyến tính, G là toán tử phi tuyến thỏa điều kiện :

$$-B(x - y) \leq G(x) - G(y) \leq B(x - y) \quad \forall x, y \in X_1; \quad x \geq y \quad (3.3.11)$$

Ở đây B là toán tử tuyến tính. Tương tự định lý 3.3.1 ta chứng minh kết quả sau.

Định lý 3.3.2 Giả sử

1. K_2 nón sinh, nón chuẩn
2. Các toán tử T, G thỏa các điều kiện (3.3.11) thêm nữa các toán tử $T, T-B$ có toán tử ngược dương.

Khi đó phương trình (3.3.10) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh

Phương trình (3.3.10) tương đương với phương trình $Tx - Gx = 0$

Đặt $F(x) = Tx - Gx$, Do T, G thỏa điều kiện (3.3.11) nên ta có

$$-B(x - y) \leq T(x) - T(y) \leq B(x - y)$$

$$-B(x - y) \leq G(x) - G(y) \leq B(x - y)$$

Suy ra

$$T(x) - T(y) - B(x - y) \leq T(x) - T(y) - G(x) + G(y) \leq T(x) - T(y) + B(x - y) \text{ Hay}$$

$$(T - B)(x - y) \leq F(x) - F(y) \leq (T + B)(x - y)$$

Với $B_1 = T - B$; $B_2 = T + B$ là các toán tử tuyến tính và T , $T - B$ có toán tử ngược dương nên F thỏa điều kiện của định lý 3.3.1

Vậy phương trình $Tx - Gx = 0$ có nghiệm duy nhất

3.3.3 Trong phần này ta vẫn xét phương trình: $Tx = Gx$ (3.3.10)

Nếu toán tử T có toán tử ngược thì phương trình (3.3.10) tương đương với phương trình sau trong X_2 :

$$y = GT^{-1}y \quad (3.3.12)$$

Bổ đề 3.3.1

Giả sử

1. $0 \leq Gx \leq B_1x + z_0$, $z_0 \in K_2$ Với $B_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tuyến tính dương
2. T , $T - B_1$ có toán tử ngược dương

Khi đó phần tử $u_0 = T(T - B_1)^{-1}(z_0) \in K_2$ và toán tử GT^{-1} biến $\langle 0, u_0 \rangle$ vào chính nó

Chứng minh

$$\text{Từ đồng nhất thức } T(T - B_1)^{-1} = T + B_1(T - B_1)^{-1}$$

$$\text{Ta có } u_0 = T(T - B_1)^{-1}(z_0) = z_0 + B_1(T - B_1)^{-1}(z_0)$$

$$\text{Vì } z_0 \in K_2 \Rightarrow (T - B_1)^{-1}(z_0) \in K_1$$

$$\Rightarrow B_1(T - B_1)^{-1}(z_0) \in K_2$$

$$\text{Vậy } u_0 \in K_2$$

$$\forall y \in \langle 0, u_0 \rangle \Rightarrow 0 \leq T^{-1}y \leq T^{-1}u_0 \quad (\text{do } T^{-1} \text{ dương})$$

$$\Rightarrow 0 \leq GT^{-1}y \leq B_1T^{-1}y + z_0$$

$$\text{mà } B_1T^{-1}y + z_0 \leq B_1T^{-1}u_0 + z_0 \quad (\text{do } B_1 \text{ dương})$$

$$\text{Suy ra } 0 \leq GT^{-1}y \leq B_1T^{-1}y + z_0 \leq B_1T^{-1}u_0 + z_0$$

$$\text{Mặt khác } B_1T^{-1}u_0 + z_0 = B_1T^{-1}(T(T - B_1)^{-1})z_0 + z_0$$

$$= B_1(T - B_1)^{-1}z_0 + z_0 = u_0$$

$$\text{Vậy } GT^{-1}(y) \in \langle 0, u_0 \rangle$$

Định lý 3.3.3

Giả sử các toán tử T , G thỏa các điều kiện 1. và 2. của bổ đề 3.3.1 và thỏa một trong các điều kiện sau :

- i. K_2 là nón chuẩn và $GT^{-1}(\langle 0, u_0 \rangle)$ là tập compact tương đối

ii. K_2 là nón chính quy

iii. K_2 là nón chuẩn và X_2 là không gian phản xạ

Khi đó phương trình $Tx = Gx$ có nghiệm trên $\langle 0, (T - B_1)^{-1} z_0 \rangle$

Chứng minh

Vì G thỏa điều kiện 1. của bổ đề 3.3.1 nên với $x_1 \leq x_2$ ta có

$$0 \leq G(x_1) \leq B_1 x_1 + z_0$$

$$0 \leq G(x_2) \leq B_1 x_2 + z_0$$

Suy ra $G(x_2) - G(x_1) \geq G(x_2) - (B_1 x_1 + z_0) \geq B_1 x_2 + z_0 - (B_1 x_1 + z_0)$

$$\Rightarrow G(x_2) - G(x_1) \geq 0 \quad (\text{do } B_1 \text{ tuyến tính dương nên } x_1 \leq x_2 \Rightarrow B_1 x_1 \leq B_1 x_2)$$

$$\Rightarrow G(x_2) \geq G(x_1)$$

Mà T^{-1} tuyến tính dương nên GT^{-1} tăng và biến $\langle 0, u_0 \rangle$ thành chính nó

Vậy

i. Nếu

- K_2 là nón chuẩn, tập $GT^{-1}(\langle 0, u_0 \rangle)$ là tập compact tương đối
- $GT^{-1} : \langle 0, u_0 \rangle \rightarrow \langle 0, u_0 \rangle$ là toán tử tăng

Thì GT^{-1} có điểm bất động trên $\langle 0, u_0 \rangle$ tức $\exists y_0 \in \langle 0, u_0 \rangle$ sao cho

$$GT^{-1}(y_0) = y_0$$

$$\Leftrightarrow Gx_0 = Tx_0 \quad \text{với } x_0 = T^{-1}(y_0)$$

Hay phương trình (3.3.10) có nghiệm trên $\langle 0, T^{-1}(u_0) \rangle = \langle 0, (T - B_1)^{-1}(z_0) \rangle$

ii. Nếu

- K_2 là nón chính quy
- $GT^{-1} : \langle 0, u_0 \rangle \rightarrow \langle 0, u_0 \rangle$ là toán tử tăng

Thì GT^{-1} có điểm bất động trên $\langle 0, u_0 \rangle$

Hay phương trình (3.3.10) có nghiệm trên $\langle 0, T^{-1}(u_0) \rangle = \langle 0, (T - B_1)^{-1}(z_0) \rangle$

iii. Nếu

- K_2 là nón chuẩn, X_2 là không gian phản xạ
- $GT^{-1} : \langle 0, u_0 \rangle \rightarrow \langle 0, u_0 \rangle$ là toán tử tăng

Thì GT^{-1} có điểm bất động trên $\langle 0, u_0 \rangle$

Hay phương trình (3.3.10) có nghiệm trên $\langle 0, T^{-1}(u_0) \rangle = \langle 0, (T - B_1)^{-1}(z_0) \rangle$

Chương 4: ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA TOÁN TỬ HỖN HỢP ĐƠN ĐIỀU

Trong chương này ta vẫn xét X là không gian Banach thực với quan hệ thứ tự sinh bởi nón K .

4.1 Toán tử hỗn hợp đơn điệu và điểm bất động

- Giả sử $D \subset K$, toán tử $A: D \times D \rightarrow X$ được gọi là hỗn hợp đơn điệu nếu $A(x, y)$ là không giảm theo biến x và không tăng theo biến y . Nghĩa là

$$\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in D; u_1 \leq u_2 \text{ và } v_2 \leq v_1 \text{ ta có } A(u_1, v_1) \leq A(u_2, v_2)$$

- Điểm $(x^*, y^*) \in D^2$ được gọi là cặp điểm tựa bất động của toán tử A nếu $A(x^*, y^*) = x^*$ và $A(y^*, x^*) = y^*$
- Điểm $x^* \in D$ được gọi là điểm bất động của toán tử A nếu $A(x^*, x^*) = x^*$
- Toán tử $F: D \subset X \rightarrow X$ được gọi là lồi nếu $\forall x, y \in D$ mà $x \leq y$ và $\forall t \in [0, 1]$

$$\text{Ta có } F(tx + (1-t)y) \leq tF(x) + (1-t)F(y) \quad (4.1.1)$$

F được gọi là lõm nếu $-F$ là lồi

Định lý 4.1.1

Giả sử K là nón chuẩn, $A: K \times K \rightarrow K$ là toán tử hỗn hợp đơn điệu, hơn nữa:

- Với y cố định, $A(., y): K \rightarrow K$ là lõm

Với x cố định, $A(x, .): K \rightarrow K$ là lồi

- $\exists v \in K$ sao cho $v > 0$ và $\exists c > \frac{1}{2}$ thỏa $0 < A(v, 0) < v$ (4.1.2)

$$\text{và } A(0, v) \geq cA(v, 0)$$

Khi đó A có duy nhất điểm bất động $x^* \in \langle 0, v \rangle$ và từ các dãy lặp
$$\begin{cases} x_n = A(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n = A(y_{n-1}, x_{n-1}) \end{cases},$$

$$n \geq 1. \quad (4.1.3)$$

Với các khởi đầu $(x_0, y_0) \in \langle 0, v \rangle \times \langle 0, v \rangle$ tùy ý, ta có

$$\|x_n - x^*\| \rightarrow 0; \|y_n - x^*\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

$$\text{Tốc độ hội tụ là } \begin{cases} \|x_n - x^*\| \leq N^2 \cdot \left(\frac{1-c}{c}\right)^n \cdot \|v\| \\ \|y_n - x^*\| \leq N^2 \cdot \left(\frac{1-c}{c}\right)^n \cdot \|v\| \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Chứng minh

a) Chứng minh sự tồn tại điểm bất động:

Đặt $u_0 = 0, v_0 = v$ ta có $u_0 < v_0$.

$$\text{Giả sử } \begin{cases} u_n = A(u_{n-1}, v_{n-1}) \\ v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1}) \end{cases}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1.5)$$

Vì A tăng theo biến thứ nhất và giảm theo biến thứ hai nên
 $0 = u_0 < u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq v_{n-2} \leq \dots \leq v_1 \leq v_0 = v$ (4.1.6)

từ giả thiết ii) của định lý ta thấy :

$$u_n \geq u_1 = A(u_0, v_0) \text{ mà } A(u_0, v_0) = A(0, v) \geq cA(v, 0) \text{ và } cA(v, 0) = cv_1 \geq cv_n \text{ nên suy ra}$$

$$u_n \geq cv_n \quad (4.1.7)$$

Đặt $t_n = \sup\{t > 0 : u_n \geq tv_n\}, n = 1, 2, 3, \dots$ suy ra $t_n \leq 1$ (vì $u_n \leq v_n$)

$$\text{Khi đó } u_n \geq t_n v_n \text{ và } u_{n+1} \geq u_n \geq t_n v_n \geq t_n v_{n+1} \text{ (do (4.1.6))} \quad (4.1.8)$$

Từ (4.1.7) và (4.1.8) suy ra

$$0 < c \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq \dots \leq 1 \quad (4.1.9)$$

Nên tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t^*$ và $0 \leq t^* \leq 1$

*** Bây giờ ta chứng minh $t^* = 1$**

Thật vậy từ giả thiết i. ta có các hệ thức sau:

$$\forall x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2, t \in [0, 1]$$

$$A(tx_1 + (1-t)x_2, y) \geq tA(x_1, y) + (1-t)A(x_2, y) \quad (4.1.10)$$

(do $A(., y) : K \rightarrow K$ là lõm)

$$A(x, ty_1 + (1-t)y_2) \leq tA(x, y_1) + (1-t)A(x, y_2) \quad (4.1.11)$$

(do $A(x, .) : K \rightarrow K$ là lồi)

$$A(x, y) = A(x, t.t^{-1}y + (1-t).0) \leq tA(x, t^{-1}y) + (1-t)A(x, 0), \forall t \in [0, 1] \quad (4.1.12)$$

Từ (4.1.11) ta suy ra

$$A(x, t^{-1}y) \geq \frac{1}{t}A(x, y) - (1-t)A(x, 0) \quad (4.1.13)$$

Từ (4.1.5) đến (4.1.12) và giả thiết A là toán tử hỗn hợp đơn điệu tăng ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= A(u_n, v_n) \geq A(tv_n, v_n) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \\ &\geq t_n A(v_n, v_n) + (1-t_n) A(0, v_n) \\ &\geq t_n A(v_n, t_n^{-1}u_n) + (1-t_n) A(0, v) \end{aligned}$$

(do A giảm theo biến thứ nhất và tăng theo biến thứ hai)

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } u_{n+1} &\geq t_n [t_n^{-1} A(v_n, u_n) - t_n^{-1} (1-t_n) A(v_n, 0)] + (1-t_n) A(0, v) \\ &\geq A(v_n, u_n) - (1-t_n) A(v_n, 0) + (1-t_n) A(0, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq v_{n+1} + (1-t_n)[u_1 - A(v_0, u_0)] \\ &\geq v_{n+1} + (1-t_n)[u_1 - v_1] \end{aligned}$$

Mà $A(0, v) \geq cA(v, 0)$ nên $u_1 \geq cv_1$ hay $v_1 \leq \frac{1}{c}u_1$

$$\text{Suy ra} \quad u_{n+1} \geq v_{n+1} + (1-t_n)\left[u_1 - \frac{1}{c}u_1\right]$$

$$u_{n+1} \geq v_{n+1} + (1-t_n)\left(1 - \frac{1}{c}\right)u_1$$

$$\text{Mặt khác} \quad \text{do} \quad \frac{1}{2} < c \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{c} \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{c} \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{c}\right)u_1 \geq \left(1 - \frac{1}{c}\right)v_{n+1} \quad (\text{do } u_1 \leq v_{n+1})$$

$$\text{Nên} \quad u_{n+1} \geq \left[1 + (1-t_n)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\right]v_{n+1} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Suy ra} \quad t_{n+1} \geq 1 + (1-t_n)\left(1 - \frac{1}{c}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - t_{n+1} \leq (1-t_n)\left(\frac{1}{c} - 1\right) = (1-t_n)\frac{1-c}{c} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1.14)$$

Như vậy

$$1 - t_{n+1} \leq (1-t_n)\left(\frac{1}{c} - 1\right)$$

$$1 - t_n \leq (1-t_{n-1})\left(\frac{1}{c} - 1\right)$$

$$(1-t_{n-1}) \leq (1-t_{n-2})\left(\frac{1}{c} - 1\right)$$

.....

$$(1-t_2) \leq (1-t_1)\left(\frac{1}{c} - 1\right)$$

$$\text{Nên suy ra} \quad 1 - t_{n+1} \leq (1-t_n)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \leq (1-t_1)\left(\frac{1}{c} - 1\right)^n$$

$$\begin{aligned}
Do \quad u_1 &\geq cv_1 \Rightarrow t_1 \geq c \\
&\Rightarrow 1-t_1 \leq 1-c \\
&\Rightarrow 1-t_1 \leq \frac{1-c}{c} \quad (do \ 0 < c \leq 1) \\
Suy ra \quad 0 &\leq 1-t_{n+1} \leq \left(\frac{1}{c}-1\right)^{n+1} = \left(\frac{1-c}{c}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
Do \quad \frac{1}{2} < c \leq 1 &\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{c} < 2 \\
&\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{c} - 1 < 1
\end{aligned}$$

$$\text{Nên} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{c}-1\right)^{n+1} = 0 \quad \text{suy ra} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1 \quad (4.1.15)$$

Từ (4.1.6) và (4.1.15) ta có : $\forall p \geq 0, p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
0 &\leq u_{n+p} - u_n \leq v_{n+p} - u_n \leq v_n - u_n \leq v_n - t_n v_n \\
&\Rightarrow 0 \leq u_{n+p} - u_n \leq (1-t_n)v_n \leq (1-t_n)v
\end{aligned}$$

Do K là nón chuẩn, với N là hằng số chuẩn ta có

$$\|u_{n+p} - u_n\| \leq N.(1-t_n)\|v\| \leq N.\left(\frac{1-c}{c}\right)^n \|v\| \quad (4.1.16)$$

$$\|v_n - u_n\| \leq N.(1-t_n)\|v\| \leq N.\left(\frac{1-c}{c}\right)^n \|v\| \quad (4.1.17)$$

Từ (4.1.16) và X là không gian Banach nên tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u^*$

Ta lại có

$$\begin{aligned}
0 &\leq v_{n+p} - u_{n+p} \leq (1-t_{n+p})v_{n+p} \leq (1-t_{n+p})v \leq (1-t_n)v \\
&\Rightarrow \|v_{n+p} - u_{n+p}\| \leq N.\left(\frac{1-c}{c}\right)^n \|v\| \quad (4.1.18)
\end{aligned}$$

$$\text{Và} \quad \|v_{n+p} - v_n\| \leq \|v_{n+p} - u_{n+p}\| + \|u_{n+p} - u_n\| + \|u_n - v_n\|$$

$$\text{Nên} \Rightarrow \|v_{n+p} - v_n\| \leq 3.N.\left(\frac{1-c}{c}\right)^n \|v\| \quad (4.1.19)$$

mà X là không gian Banach nên tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v^*$

Cho $p \rightarrow \infty$, từ (4.1.15) và (4.1.19) ta được

$$\|u_n - u^*\| \leq N \cdot \left(\frac{1-c}{c}\right)^n \|v\|$$

$$\|v_n - v^*\| \leq 3N \cdot \left(\frac{1-c}{c}\right)^n \|v\|$$

Vì $u_n \leq u^* \leq v^* \leq v_n$ nên ta có $0 \leq v^* - u^* \leq v_n - u_n$

Mà $u_n \geq t_n v_n$ nên $v_n - u_n \leq (1-t_n)v_n \leq (1-t_n)v$

Do vậy $0 \leq v^* - u^* \leq (1-t_n)v$

$$\Rightarrow \|v^* - u^*\| \leq (1-t_n)\|v\|, \text{ mà } (1-t_n)\|v\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

Do đó $v^* = u^*$

Lấy $x^* = u^*$ thì $x^* \in \langle 0, v \rangle, x^* > 0$

Từ $u_n \leq x^* \leq v_n \Rightarrow u_{n+1} = A(u_n, v_n) \leq A(x^*, v_n)$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq A(x^*, x^*)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq A(v_n, u_n) = v_{n+1}$$

Lấy giới hạn khi $n \rightarrow \infty$ ta có $u^* \leq A(x^*, x^*) \leq v^*$

$$\Rightarrow x^* \leq A(x^*, x^*) \leq x^*$$

$$\Rightarrow A(x^*, x^*) = x^*$$

Nghĩa là x^* là điểm bất động của A

b) Sự duy nhất của điểm bất động

Giả sử $\bar{x}$ là điểm bất động nào đó của A trên $\langle 0, v \rangle$

Khi đó : $u_0 = 0 \leq \bar{x} \leq v = v_0$ suy ra $A(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$

Nên $u_1 = A(u_0, v_0) \leq A(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x} \leq A(v_0, u_0) = v_1$

$$u_2 = A(u_1, v_1) \leq A(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x} \leq A(v_1, u_1) = v_2$$

.....

Theo phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$u_n = A(u_{n-1}, v_{n-1}) \leq A(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x} \leq A(v_{n-1}, u_{n-1}) = v_n \quad \forall n \geq 1$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta được $x^* \leq \bar{x} \leq x^*$ hay $x^* = \bar{x}$

Vậy A có điểm bất động duy nhất trên $\langle 0, v \rangle$

c) Tốc độ hội tụ

Với $\forall x_0, y_0 \in \langle 0, v \rangle$ ta có

$$u_0 = 0 \leq x_0 \leq v = v_0 \quad \text{và} \quad u_0 = 0 \leq y_0 \leq v = v_0$$

$$\text{Suy ra } u_1 = A(u_0, v_0) \leq A(x_0, y_0) = x_1 \leq A(v_0, u_0) = v_1$$

$$u_2 = A(u_1, v_1) \leq A(x_1, y_1) = x_2 \leq A(v_1, u_1) = v_2$$

Theo phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$u_n = A(u_{n-1}, v_{n-1}) \leq A(x_{n-1}, y_{n-1}) = x_n \leq A(v_{n-1}, u_{n-1}) = v_n, \quad \forall n \geq 1$$

Tương tự ta cũng có $u_n \leq y_n \leq v_n, \quad \forall n \geq 1$

$$\text{Suy ra } 0 \leq x_n - u_n \leq v_n - u_n \quad \text{và} \quad 0 \leq y_n - u_n \leq v_n - u_n$$

$$\text{Suy ra } \|x_n - x^*\| \leq N \|v_n - u_n\| \leq N^2 \cdot \left(\frac{1-c}{c} \right)^n \cdot \|v\| \quad \text{và}$$

$$\|y_n - x^*\| \leq N \|v_n - u_n\| \leq N^2 \cdot \left(\frac{1-c}{c} \right)^n \cdot \|v\|$$

Định lý 4.1.2 Giả sử

K là nón chuẩn; $v \in K, v > 0$; $A: \langle 0, v \rangle \times \langle 0, v \rangle \rightarrow \langle 0, v \rangle$ là toán tử hỗn hợp đơn điệu mà

$$A(0, v) > \frac{1}{2}v \quad \text{và}$$

i. Với y cố định, $y \in \langle 0, v \rangle$, $A(., y): \langle 0, v \rangle \rightarrow \langle 0, v \rangle$ là toán tử lồi

Với x cố định, $x \in \langle 0, v \rangle$, $A(x, .): \langle 0, v \rangle \rightarrow \langle 0, v \rangle$ là toán tử lõm

ii. Có hằng số c thỏa $\frac{1}{2} < c \leq 1$ và

$$A(v, 0) \leq c.A(0, v) + (1-c).v \quad (4.1.20)$$

Khi đó A có duy nhất điểm bất động $x^* \in \langle 0, v \rangle$. Hơn nữa, với $x_0, y_0 \in \langle 0, v \rangle$ tùy ý các dãy lặp $(x_n), (y_n)$

$$\begin{cases} x_n = v - A(v - x_{n-1}, v - y_{n-1}) \\ y_n = v - A(v - y_{n-1}, v - x_{n-1}) \end{cases}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1.21)$$

$$\text{có sự hội tụ } \begin{cases} v - x_n \rightarrow x^* \\ v - y_n \rightarrow x^* \end{cases} \quad \text{khi } n \rightarrow \infty \quad (4.1.22)$$

Chứng minh

a) Sự tồn tại điểm bất động

$$\text{Bặt } B(x, y) = v - A(v - x, v - y) \quad \forall x, y \in \langle 0, v \rangle$$

Do A là toán tử hỗn hợp đơn điệu nên toán tử B cũng hỗn hợp đơn điệu.

Ngược lại với toán tử A, với y cố định thuộc $\langle 0, v \rangle$, $B(., y) : \langle 0, v \rangle \rightarrow \langle 0, v \rangle$ là lõm và với x cố định thuộc $\langle 0, v \rangle$, $B(x, .) : \langle 0, v \rangle \rightarrow \langle 0, v \rangle$ là lồi.

- Nếu $A(0, v) = v$

Vì $0 < v \Rightarrow A(0, v) \leq A(v, 0)$ (do A là toán tử hỗn hợp đơn điệu)

Mà $A(v, 0) \leq c.A(0, v) + (1 - v).v = c.v + (1 - v).v = v$

Nên $A(v, 0) = A(0, v) = v$

Suy ra $A(v, v) = v$ (do $A(0, v) \leq A(v, v) \leq A(v, 0)$)

Vậy trong tương hợp này A có điểm bất động

- Nếu $\frac{1}{2}v < A(0, v) < v$ khi đó

$$0 < B(v, 0) < \frac{1}{2}v \left(\text{do } B(v, 0) = v - A(0, v); \frac{1}{2}v < A(0, v) < v \right)$$

Theo ii. Có hằng số c thỏa $\frac{1}{2} < c \leq 1$ và $A(v, 0) \leq c.A(0, v) + (1 - v).v$

nên

$$B(0, v) = v - A(v, 0) \geq v - c.A(0, v) - (1 - v).v \geq c.(v - A(0, v)) - (1 - v).v$$

$$\text{Suy ra } B(0, v) \geq cB(v, 0)$$

Vậy theo định lý 4.1.1 thì toán tử B có duy nhất điểm bất động $\bar{x} \in \langle 0, v \rangle$ suy

ra $x^* = v - \bar{x}$ là điểm bất động của toán tử A.

b) Sự duy nhất của điểm bất động

Giả sử $\bar{x}_0 \in \langle 0, v \rangle$ là điểm bất động của A. Ta cần chứng minh $\bar{x}_0 = x^*$

Ta có $A(\bar{x}_0, \bar{x}_0) = \bar{x}_0$

$$B(v - \bar{x}_0, v - \bar{x}_0) = v - A(\bar{x}_0, \bar{x}_0) = v - \bar{x}_0$$

Suy ra $v - \bar{x}_0$ là điểm bất động của B mà do B có duy nhất điểm bất động $\bar{x}$ nên

$$v - \bar{x}_0 = \bar{x} \text{ suy ra } \bar{x}_0 = v - \bar{x}$$

Vậy $\bar{x}_0 = x^*$

c) Chứng minh (4.1.22)

Với mọi $x_0, y_0 \in \langle 0, v \rangle$ ta có

$$\begin{cases} x_1 = v - A(v - x_0, v - y_0) = B(x_0, y_0) \\ y_1 = v - A(v - y_0, v - x_0) = B(y_0, x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = v - A(v - x_1, v - y_1) = B(x_1, y_1) \\ y_2 = v - A(v - y_1, v - x_1) = B(y_1, x_1) \end{cases}$$

.....

$$\begin{cases} x_n = v - A(v - x_{n-1}, v - y_{n-1}) = B(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n = v - A(v - y_{n-1}, v - x_{n-1}) = B(y_{n-1}, x_{n-1}) \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Theo định lý 4.1.1 thì

$$\begin{cases} \|x_n - \bar{x}\| \rightarrow 0 \\ \|y_n - \bar{x}\| \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{khi } n \rightarrow \infty \quad \text{mà } x^* = v - \bar{x}$$

$$\text{Nên ta có } \begin{cases} \|x_n - v + x^*\| \rightarrow 0 \\ \|y_n - v + x^*\| \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{khi } n \rightarrow \infty \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \|v - x_n - x^*\| \rightarrow 0 \\ \|v - y_n - x^*\| \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{khi } n \rightarrow \infty$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} v - x_n \rightarrow x^* \\ v - y_n \rightarrow x^* \end{cases} \quad \text{khi } n \rightarrow \infty$$

Định lý 4.1.3

Giả sử các điều kiện i. và ii. của định lý 4.1.1 được thỏa mãn. khi đó các tồn tại số $\lambda_0 \geq 1$ sao cho $\lambda_0 A(v, 0) \leq v$ và $\forall \lambda \in [0, \lambda_0]$ phương trình $u = \lambda A(u, u)$ có duy nhất nghiệm $u(\lambda)$.

Giả sử $u_0(\lambda) = 0, v_0(\lambda) = v$ và

$$\begin{cases} u_n(\lambda) = \lambda A(u_{n-1}(\lambda), v_{n-1}(\lambda)) \\ v_n(\lambda) = \lambda A(v_{n-1}(\lambda), u_{n-1}(\lambda)) \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{khi đó ta ước lượng}$$

$$\begin{cases} \|u_n(\lambda) - u(\lambda)\| \leq N \cdot \left(\frac{1-c}{c}\right)^n \rightarrow 0 \\ \|v_n(\lambda) - v(\lambda)\| \leq N \cdot \left(\frac{1-c}{c}\right)^n \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{khi } n \rightarrow \infty \quad (4.1.23)$$

Chứng minh

Điều kiện i. và ii. của định lý 4.1.1 đó là : Giả sử K là nón chuẩn, $A: K \times K \rightarrow K$ là toán tử hỗn hợp đơn điệu, hơn nữa

i. Với y cố định, $A(., y): K \rightarrow K$ là lõm

Với x cố định, $A(x, .): K \rightarrow K$ là lồi

ii. $\exists v \in K$ sao cho $v > 0$ và $\exists c > \frac{1}{2}$ thỏa $0 < A(v, 0) < v$ (4.1.2)

và $A(0, v) \geq cA(v, 0)$

* Từ giả thiết ii. của định lý suy ra $\sup \{t > 0 : tA(v, 0) < v\}$ luôn tồn tại

Đặt $\lambda_0 = \sup \{t > 0 : tA(v, 0) < v\}$, cũng từ giả thiết ii. Ta suy ra $\lambda_0 \geq 1$

* Với $\forall \lambda \in [0, \lambda_0]$

Nếu $\lambda = 0$ ta có $u(0) = 0$ là nghiệm của phương trình $u = \lambda A(u, u)$ và thỏa các điều kiện còn lại

Nếu $\lambda \in (0, \lambda_0]$ ta có $0 < \lambda A(v, 0) \leq \lambda_0 A(v, 0) < v$ và $\lambda A(0, v) \geq c \lambda A(v, 0)$

Vậy λA thỏa các điều kiện của định lý 4.1.1 nên theo định lý 4.1.1 thì λA có duy nhất điểm bất động $u(\lambda) \in \langle 0, v \rangle$ và $u(\lambda) > 0$

* Các ước lượng về tốc độ hội tụ (4.1.23) dễ dàng suy ra từ định lý 4.1.1

Bổ đề 4.1.1

Giả sử X là không gian Banach được sắp bởi nón dương K_1 , Y là không gian Banach được sắp bởi nón chuẩn dương K_2 và toán tử $A : D \subset X \rightarrow Y$ là lõm hoặc lồi. Với $x_0 \in D$, khi đó A liên tục tại x_0 nếu và chỉ nếu A bị chặn địa phương tại x_0 . Nghĩa là tồn tại số $\delta > 0$ sao cho A bị chặn trong lân cận $N_\delta(x_0)$ tại x_0 .

Chứng minh

a) Điều kiện cần : A liên tục tại x_0 nên $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|A(x) - A(x_0)\| < \varepsilon$$

Nếu lấy $N_\delta(x_0) = \{x \in D : \|x - x_0\| < \delta\}$ thì $\|A(x)\| < \|A(x_0)\| + \varepsilon, \forall x \in N_\delta(x_0)$

b) Điều kiện đủ.

Giả sử A bị chặn địa phương trên $N_\delta(x_0) = B(v, \delta)$ tức là $\exists M > 0 : \|A(x)\| < M$ trên $B(v, \delta)$. Bằng cách giảm δ , có thể coi $B(v, \delta) \subset D$, xét dãy $(x_n), x_n \in D$ và

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Ta có thể viết $x_n = x_0 + t_n y_n$ với $t_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ và $\|y_n\| \leq \frac{\delta}{2}$

$$\text{Chẳng hạn lấy } y_n = \frac{(x_n - x_0)}{\|x_n - x_0\|} \frac{\delta}{2}, \quad t_n = \frac{2}{\delta} \|x_n - x_0\|$$

Với n đủ lớn mà $t_n \leq 1$ ta viết $x_n = (1 - t_n)x_0 + t_n(x_0 + y_n)$ và áp dụng tính lồi của A ta có

$$\begin{aligned} A(x_n) &\leq (1 - t_n)A(x_0) + t_n A(x_0 + y_n) \\ \Rightarrow A(x_n) - A(x_0) &\leq t_n [A(x_0 + y_n) - A(x_0)] \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Vì ta cũng có $x_0 = x_n + t_n(-y_n)$

$$\Rightarrow x_0 = (1 - t_n)x_n + t_n(x_n - y_n)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow A(x_0) \leq (1-t_n)A(x_n) + t_n A(x_n - y_n) \\
&\Rightarrow A(x_0) - A(x_n) \leq t_n [A(x_n - y_n) - A(x_n)] \quad (4.1.26)
\end{aligned}$$

từ (4.1.25) và (4.1.26) ta có :

$$\Rightarrow -t_n [A(x_n - y_n) - A(x_n)] \leq A(x_n) - A(x_0) \leq t_n [A(x_0 + y_n) - A(x_0)] \quad (4.1.27)$$

Vì $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ nên $\exists n_0$ sao cho $\forall n \geq n_0$ ta có

$$\begin{cases} \|x_n - x_0\| \leq \frac{\delta}{2} \\ \|x_n - y_n - x_0\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n\| \leq \delta \\ \|x_0 + y_n - x_0\| = \|y_n\| \leq \frac{\delta}{2} \end{cases} \quad (4.1.28)$$

Từ (4.1.28) suy ra $x_n, x_n - y_n, x_0 + y_n \in B(x_0, \delta)$

$$\text{Nên } \begin{cases} \|A(x_n - y_n) - A(x_n)\| \leq \|A(x_n - y_n)\| + \|A(x_n)\| \leq 2M \\ \|A(x_0) - A(x_0 + y_n)\| \leq \|A(x_0)\| + \|A(x_0 + y_n)\| \leq 2M \end{cases} \quad \text{và } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$$

Suy ra $-t_n [A(x_n - y_n) - A(x_n)]$ và $t_n [A(x_0 + y_n) - A(x_0)]$ hội tụ về 0

khi $n \rightarrow \infty$

Do K_2 là nón chuẩn nên $\|A(x_n) - A(x_0)\| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$

hay $A(x_n) \rightarrow A(x_0)$ khi $n \rightarrow \infty$

Vậy A liên tục tại x_0

Định lý 4.1.4

Giả sử K là nón chuẩn trong X ; $A : K \times K \rightarrow K$ là toán tử hỗn hợp đơn điệu, các giả thiết i. và ii. trong định lý 4.1.1 được thỏa và $A(v, 0) \geq 0$

$$\text{Khi đó phương trình } \lambda A(u, u) = u, \lambda \in [0, \lambda_0] \quad (4.1.29)$$

có đúng một nghiệm $u(\lambda)$ thỏa :

i. $u(\cdot) : [0, \lambda_0] \rightarrow \langle 0, v \rangle$ liên tục

$$\text{ii. } \forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, \lambda_0] \text{ ta có } \begin{cases} u(\lambda_2) \geq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} cu(\lambda_1) \\ u(\lambda_1) \geq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} cu(\lambda_2) \end{cases} \quad (4.1.30)$$

Ở đây $\lambda_0 = \sup \{t > 0 : tA(v, 0) < v\}$

Chứng minh

Do điều kiện i. và ii. của định lý 4.1.1 được thỏa nên theo định lý 4.1.3 thì tồn tại $\lambda_0 \geq 1$ sao cho $\lambda_0 A(v, 0) \leq v$ và phương trình $u = \lambda A(u, u)$ có duy nhất nghiệm $u(\lambda)$

1) Ta chứng minh sự tồn tại nghiệm

$\forall \lambda \in [0, \lambda_0]$, đặt $u_0(\lambda) = 0, v_0(\lambda) = v$ và

$$\begin{cases} u_n(\lambda) = \lambda A(u_{n-1}(\lambda), v_{n-1}(\lambda)) \\ v_n(\lambda) = \lambda A(v_{n-1}(\lambda), u_{n-1}(\lambda)) \end{cases}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1.31)$$

Từ định lý 4.1.3 ta có $u_n(\lambda) \rightarrow u(\lambda), v_n(\lambda) \rightarrow v(\lambda)$ là đều theo $\lambda \in [0, \lambda_0]$

* Ta chứng minh u_n, v_n liên tục trên $[0, \lambda_0]$ với $\forall n \geq 1$

Với $\forall x_0, y_0 \in \overset{0}{K} \cap \langle 0, v \rangle$ và $\forall x_n, y_n \in \langle 0, v \rangle$ sao cho $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$

Ta có

$$\|A(x_0, y_0) - A(x_n, y_n)\| \leq \|A(x_0, y_0) - A(x_0, y_n)\| + \|A(x_0, y_n) - A(x_n, y_n)\| \quad (4.1.32)$$

Theo bổ đề 4.1.1 : Nếu cố định y thì $A(., y)$ bị chặn trên $\langle 0, v \rangle$ nên $A(., y)$ liên tục tại $x_0 \in \langle 0, v \rangle$ và tương tự nếu cố định x thì $A(x, .)$ liên tục tại $y_0 \in \langle 0, v \rangle$

Vậy theo (4.1.32) suy ra $A(., .)$ liên tục tại (x_0, y_0)

Suy ra $A(., .)$ liên tục trên $\overset{0}{K} \cap \langle 0, v \rangle$

* $\forall \lambda \in [0, \lambda_0]$ ta có $\begin{cases} u_1(\lambda) = \lambda A(u_0(\lambda), v_0(\lambda)) = \lambda A(0, v) \\ v_1(\lambda) = \lambda A(v_0(\lambda), u_0(\lambda)) = \lambda A(v, 0) \end{cases}$

Để dàng ta chứng minh được u_1, v_1 liên tục trên $[0, \lambda_0]$

* Giả sử u_{n-1}, v_{n-1} liên tục tại $\lambda' \in [0, \lambda_0]$

$$u_n(\lambda) = \lambda A(u_{n-1}(\lambda), v_{n-1}(\lambda))$$

Vì $A(., .)$ liên tục trên $\overset{0}{K} \cap \langle 0, v \rangle$ nên

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda'} A(u_{n-1}(\lambda), v_{n-1}(\lambda)) &= A(u_{n-1}(\lambda'), v_{n-1}(\lambda')) \\ \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \lambda'} u_n(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda'} \lambda A(u_{n-1}(\lambda), v_{n-1}(\lambda)) \\ &= \lambda' A(u_{n-1}(\lambda'), v_{n-1}(\lambda')) = u_n(\lambda') \end{aligned}$$

Suy ra u_n liên tục tại λ' suy ra u_n liên tục trên $[0, \lambda_0]$

Vậy theo phương pháp chứng minh quy nạp ta có u_n liên tục trên $[0, \lambda_0]$ $\forall n = 1, 2, 3, \dots$

Tương tự ta cũng chứng minh được v_n liên tục trên $[0, \lambda_0]$ $\forall n = 1, 2, 3, \dots$

Kết luận : $u_n(\lambda) \rightarrow u(\lambda), v_n(\lambda) \rightarrow v(\lambda)$ là đều theo $\lambda \in [0, \lambda_0]$ và u_n, v_n liên tục trên $[0, \lambda_0]$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ nên suy ra $u(\cdot), v(\cdot)$ liên tục trên $[0, \lambda_0]$.

2) Chứng minh (4.1.30)

Vì $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, \lambda_0] \Rightarrow u(\lambda_1), u(\lambda_2) \in \langle 0, v \rangle$ nên

$$\begin{aligned} u(\lambda_1) &= \lambda_1 A(u(\lambda_1), u(\lambda_1)) \geq \lambda_1 A(0, v) \\ &\geq \lambda_1 c A(v, 0) \\ &\geq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} c \lambda_2 A(v, 0) \end{aligned}$$

Suy ra $u(\lambda_1) \geq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} c \lambda_2 A(u(\lambda_2), u(\lambda_2))$ (do $u(\lambda_2), u(\lambda_2) \in \langle 0, v \rangle$)

$$\Rightarrow u(\lambda_1) \geq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} c u(\lambda_2)$$

Tương tự ta chứng minh được $u(\lambda_2) \geq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} c u(\lambda_1)$

Hệ quả 4.1.1

Giả sử K là nón chuẩn trong X ; $A: K \times K \rightarrow K$ là toán tử hỗn hợp đơn điệu, thỏa các điều kiện sau:

i. Với y cố định, $A(\cdot, y): K \rightarrow K$ là lõm

Với x cố định, $A(x, \cdot): K \rightarrow K$ là lồi

ii. $\exists c, \exists u, v \in K$ sao cho $\frac{1}{2} < c \leq 1, A(\langle u, v \rangle \times \langle u, v \rangle) \subset \langle u, v \rangle$ và

$$A(u, v) \geq c A(v, u) + (1 - c) u \quad (4.1.33)$$

Khi đó A có đúng một điểm bất động $x \in \langle u, v \rangle$

Chứng minh

$$\text{Đặt } B(x, y) = A(x + u, y + u) - u \quad \forall x, y \in K \quad (4.1.34)$$

Khi đó ta có $B(\langle 0, v - u \rangle \times \langle 0, v - u \rangle) \subset \langle 0, v - u \rangle$ và B là toán tử hỗn hợp đơn điệu thỏa điều

kiện i. của định lý 4.1.1

$$\text{Hơn nữa } \begin{cases} B(v - u, 0) = A(v, u) - u \\ B(0, v - u) = A(u, v) - u \end{cases} \quad (4.1.35)$$

Từ các hệ thức (4.1.33), (4.1.34) và (4.1.35) ta có

$$\begin{cases} B(v-u, 0) \leq v-u \\ B(0, v-u) = A(u, v) - u \geq c[A(v, u) - u] \geq cB(v-u, 0) \end{cases}$$

* Nếu $B(v-u, 0) = 0$ thì $A(v, u) = u$ (do (4.1.35))

$$\forall x, y \in \langle u, v \rangle \text{ ta có } A(x, y) \geq u$$

$$\text{Mặt khác } A(x, y) \leq A(v, u) = u$$

$$\text{Suy ra } A(x, y) = u, \forall x, y \in \langle u, v \rangle$$

Suy ra $A(u, u) = u$ nên u là điểm bất động duy nhất của A

* Nếu $B(v-u, 0) > 0$ thì toán tử B thỏa giả thiết ii. trong định lý 4.1.1 nên B có duy nhất điểm bất động $x^* \in \langle 0, v-u \rangle$ nghĩa là

$$A(x^* + u, x^* + u) - u = x^* \Leftrightarrow A(x^* + u, x^* + u) = x^* + u$$

$$\text{Hay } A(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x} \text{ với } \bar{x} = x^* + u$$

Vậy $\bar{x}$ là điểm bất động duy nhất của của A $\square$

Hệ quả 4.1.2

Giả sử K là nón chuẩn trong X , $A: \langle u, v \rangle \times \langle u, v \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$ là toán tử hỗn hợp đơn điệu và thỏa các điều kiện sau :

i. Với y cố định, $A(., y): \langle u, v \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$ là lõm

Với x cố định, $A(x, .): \langle u, v \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$ là lồi

ii. Tồn tại số c sao cho $\frac{1}{2} < c \leq 1$, $A(v, u) \leq cA(u, v) + (1-c)v$

$$\text{và } A(u, v) \geq \frac{1}{2}(u + v)$$

Khi đó A có đúng một điểm bất động $\bar{x} \in \langle u, v \rangle$

Chứng minh

Tương tự như chứng minh hệ quả 4.1.1 ta xét toán tử $B: \langle 0, v-u \rangle \times \langle 0, v-u \rangle \rightarrow \langle 0, v-u \rangle$ được xác định như sau $B(x, y) = A(x+u, y+u) - u \quad \forall x, y \in \langle 0, v-u \rangle$

Như vậy ta thấy B thỏa các điều kiện i. và ii. của định lý 4.1.2 nên theo định lý 4.1.2 thì B có duy nhất điểm bất động $x^* \in \langle 0, v-u \rangle$. Nghĩa là $x^* = B(x^*, x^*)$

$$\text{Hay } A(x^* + u, x^* + u) - u = x^*$$

$$\Leftrightarrow A(x^* + u, x^* + u) = x^* + u$$

$$\Leftrightarrow A(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x} \text{ với } \bar{x} = x^* + u$$

Vậy $\bar{x}$ là điểm bất động duy nhất của của A

4.2 Điểm tựa bất động của toán tử hỗn hợp đơn điệu

* Các khái niệm :

X là không gian Banach được sắp bởi nón K

Đặt $D = \langle u_0, v_0 \rangle$ và $D_1 = D_2 = \dots = D_k = D \subset X$

Định nghĩa 4.2.1

- Toán tử $A : D_1 \times D_2 \times \dots \times D_k \rightarrow X$ được gọi là hỗn hợp đơn điệu nếu A tăng đối với mỗi một trong m biến đầu tiên và giảm đối với mỗi một trong các biến còn lại.
- Giả sử $A : D_1 \times D_2 \times \dots \times D_k \rightarrow X$ là hỗn hợp đơn điệu. điểm $(x, y) \in D \times D$ được gọi là cặp điểm tựa bất động của A nếu $x = A(s_1, s_2, \dots, s_k)$ và $y = A(s'_1, s'_2, \dots, s'_k)$ ở đây $s_i = x, s'_i = y$ nếu A tăng theo biến thứ i và $s_i = y, s'_i = x$ nếu A giảm ở biến thứ i

Nhận xét :

- Nếu A là toán tử hỗn hợp đơn điệu, tăng với m biến đầu và giảm với k-m biến còn lại thì ta có thể xét toán tử $A' : D' \subset X' \rightarrow X'$ xác định như sau $A'(x, y) = A(\underbrace{x, x, \dots, x}_m \text{ biến}, \underbrace{y, y, \dots, y}_{k-m \text{ biến}})$, trong đó $D' = D \times D$ và $X' = X \times X$. Khi đó A' tăng

theo biến thứ nhất và giảm theo biến thứ hai.

- Trong không gian Banach X' , ta xét nón $K' = K \times (-K)$ và kí hiệu " α " là quan hệ

thứ tự trong X' sinh bởi nón K' như sau : $(x, y) \alpha (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x' \\ y' \leq y \end{cases}$ với $\leq$ là quan hệ thứ tự

sinh bởi nón K. Dễ dàng kiểm tra được rằng nếu K có tính chất nón chuẩn hay nón chính quy hay nón Minihedral thì K' cũng có tính chất tương tự

Xét ánh xạ $B : D' \rightarrow X'$ xác định bởi

$$B(x, y) = (A'(x, y), A'(y, x)) \quad (4.2.2)$$

Bổ đề 4.2.1.

Giả sử $A : D^k \rightarrow X$ là toán tử hỗn hợp đơn điệu và $B : D' \rightarrow X'$ được xác định bởi (4.2.2) khi đó:

- (x, y) là cặp điểm tựa bất động của A nếu và chỉ nếu nó là điểm tựa bất động của B.
- B là ánh xạ đơn điệu tăng đối với quan hệ " α ".

3. Nếu $u_0 \leq A(u_0, \dots, u_0, v_0, \dots, v_0)$, $A(v_0, \dots, v_0, u_0, \dots, u_0) \leq v_0$

Thì $v'_0 \propto B(u'_0)$, $B(u'_0) \propto u'_0$ trong đó $u'_0 = (u_0, v_0)$, $u'_0 = (v_0, u_0)$.

Chứng minh:

1. Giả sử A tăng với m biến đầu và giảm với k-m còn lại (x,y) là cặp điểm tựa bất động của A khi

$$\text{và chỉ khi } \begin{cases} x = A(x, x, \dots, x, y, \dots, y) \\ y = A(y, y, \dots, y, x, x, \dots, x) \end{cases}$$

$$\text{Tương đương với } \begin{cases} A'(x, y) = x \\ A'(y, x) = y \end{cases} \text{ hay } B(x, y) = (x, y)$$

Vậy (x,y) là điểm tựa bất động của B

2. B là ánh xạ đơn điệu tăng đối với quan hệ “ $\propto$ ”.

Thật vậy $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D'$ ta có

$$\begin{aligned} (x(x_1, y_1) \propto (x_2, y_2)) &\Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq x_2 \\ y_2 \leq y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'(x_1, y_1) \leq A'(x_2, y_2) \\ A'(y_2, x_2) \leq A'(y_1, x_1) \end{cases} \\ &\Rightarrow B(y_1, x_1) \propto B(y_1, x_2) \end{aligned}$$

3. Do

$$\left\| A\left(\underbrace{x, x, \dots, x}_m, \underbrace{y, \dots, y}_{k-m}\right) - A\left(\underbrace{y, y, \dots, y}_m, \underbrace{x, \dots, x}_{k-m}\right) \right\| \leq \alpha \cdot \|x - y\|, \quad u_0 \leq A(u_0, u_0, \dots, u_0, v_0, \dots, v_0) = A'(u_0, v_0)$$

$$v_0 \geq A(v_0, \dots, v_0, u_0, \dots, u_0) = A'(v_0, u_0)$$

$$\text{Nên } (u_0, v_0) \propto A'(u_0, v_0), A'(v_0, u_0) \Rightarrow u'_0 \propto B(u_0, v_0) = B(u'_0)$$

Tương tự ta chứng minh được $B(v'_0) \propto (v'_0)$.

4.2.2. Trường hợp toán tử liên tục.

Định lý 4.2.1

Giả sử $D_i = D \quad \forall i = \overline{1, k}$, $A: D_1 \times D_2 \times \dots \times D_k \rightarrow X$ là toán tử hỗn hợp đơn điệu có tính chất:

$$\begin{cases} u_0 \leq A(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_k) \\ v_0 \geq A(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, x'_{m+1}, x'_{m+2}, \dots, x'_k) \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Ở đây $x_i = u_0$, $x'_i = v_0$ và $x_j = v_0$, $x'_j = u_0$ với $1 \leq i \leq m$, $m+1 \leq j \leq k$. Giả sử một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

(H1) K là nón chuẩn và A hoàn toàn liên tục

(H2) K là nón chính quy và A là tựa liên tục yếu, tức là nếu $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ thì

$A(x_n, \dots, x_n, y_n, y_n, \dots, y_n) \xrightarrow{yếu} A(x, \dots, x, y, y, \dots, y)$ khi đó A có cặp điểm tựa bất động

(u^*, v^*) nghĩa là $A(u^*, \dots, u^*, v^*, \dots, v^*) = u^*$ và $A(v^*, \dots, v^*, u^*, \dots, u^*) = v^*$, hơn nữa $u^* \leq v^*$ và với cặp điểm tựa bất động bất kỳ (x, y) của A ta có

$$u^* \leq x \leq v^*, \quad u^* \leq y \leq v^* \quad \text{với} \quad u_n = A(u_{n-1}, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}, \dots, v_{n-1}) \quad ;$$

$$v_n = A(v_{n-1}, v_{n-1}, \dots, v_{n-1}, u_{n-1}, u_{n-1}, \dots, u_{n-1}) \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{Và } u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq v_0 \quad (4.2.2)$$

$$\text{Ta có } u^* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \quad v^* = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

Chứng minh: Xét ánh xạ A' :

$$A' : D \times D \rightarrow D \text{ xác định bởi } A'(x, y) = A(x, \dots, x, y, \dots, y)$$

$$\text{Đặt } u_1 = A'(u_0, v_0), \quad v_1 = A'(v_0, u_0)$$

Từ giả thiết A hỗn hợp điệu, $u_0 \leq v_0$ nên $u_0 \leq u_1 \leq v_1 \leq v_0$

$$\text{Ta xác định : } u_{n+1} = A'(u_n, v_n)$$

$$v_{n+1} = A'(v_n, u_n)$$

Từ giả thiết $u_{n-1} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1}$ và A hỗn hợp đơn điệu nên $u_n \leq u_{n+1} \leq v_n$

$$\text{do đó ta có} \quad (4.2.4)$$

* Ta sẽ chứng minh: $u_n \rightarrow u^*, v_n \rightarrow v^* \in X$ trong 2 trường hợp:

a) Nếu có (H_1)

Vì K là nón chuẩn nên dãy $\{x_n\}$ bị chặn mà A hoàn toàn liên tục nên tập $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots\}$ là tập compact tương đối.

Do đó tồn tại dãy $\{u_{n_k}\}_k \subset \{u_n\}_n$ sao cho $u_{n_k} \rightarrow u^*, u^* \in X$ khi $k \rightarrow \infty$

Suy ra $u_n \rightarrow u^*$ khi $n \rightarrow \infty$ (do K là nón chuẩn và dãy $\{x_n\}$ đơn điệu)

$$\text{Suy ra } u_n \leq u^*, \quad \forall n \geq 1$$

Chứng minh tương tự ta có được $v_n \rightarrow v^*, v^* \in X$ khi $n \rightarrow \infty$

$$\text{Vậy ta có } u_n \leq u^* \leq v^* \leq v_n, \quad \forall n \geq 1$$

b) Nếu có (H_2)

Từ giả thiết (4.2.4) và K là nón chính quy nên suy ra $u_n \rightarrow u^*, v_n \rightarrow v^*$ khi $n \rightarrow +\infty$

Vì A tựa liên tục nên :

$$u_{n+1} = A'(u_n, v_n) \xrightarrow{yếu} A'(u^*, v^*) \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

$$v_{n+1} = A'(v_n, u_n) \xrightarrow{yếu} A'(v^*, u^*) \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

Cho $n \rightarrow \infty$, áp dụng (4.2.5) ta được
$$\begin{cases} u^* = A'(u^*, v^*) \\ v^* = A'(v^*, u^*) \end{cases}$$

Như vậy (u^*, v^*) là cặp điểm tựa bất động của A' và rõ ràng $u^* \leq v^*$

* Bây giờ ta giả sử $(\bar{x}, \bar{y})$ là một cặp điểm tựa bất động bất kì của A' ta chứng minh
$$\begin{cases} u^* \leq \bar{x} \leq v^* \\ u^* \leq \bar{y} \leq v^* \end{cases}$$

Thật vậy
$$\begin{cases} \bar{x} = A'(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{y} = A'(\bar{y}, \bar{x}) \end{cases}$$

vì
$$\begin{cases} u_0 \leq \bar{x} \leq v_0 \\ u_0 \leq \bar{y} \leq v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'(u_0, v_0) \leq A'(\bar{x}, \bar{y}) \leq A'(v_0, u_0) \\ A'(u_0, v_0) \leq A'(\bar{y}, \bar{x}) \leq A'(v_0, u_0) \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} u_1 \leq \bar{x} \leq v_1 \\ u_1 \leq \bar{y} \leq v_1 \end{cases}$$

Bằng phương pháp chứng minh quy nạp ta được:
$$\begin{cases} u_n \leq \bar{x} \leq v_n \\ u_n \leq \bar{y} \leq v_n \end{cases}$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta có
$$\begin{cases} u^* \leq \bar{x} \leq v^* \\ u^* \leq \bar{y} \leq v^* \end{cases}$$

Định lý 4.2.2

Giả sử các điều kiện của định lý 4.2.1 được thỏa mãn, hơn nữa $\exists \alpha : 0 < \alpha < 1$ sao cho

$$\left\| A \left(\underbrace{x, x, \dots, x}_m, \underbrace{y, y, \dots, y}_{k-m} \right) - A \left(\underbrace{y, y, \dots, y}_m, \underbrace{x, x, \dots, x}_{k-m} \right) \right\| \leq \alpha \cdot \|x - y\|; \quad \forall x, y \in D \quad (4.2.3)$$

Khi đó A có duy nhất điểm bất động $\bar{x} \in D$

Chứng minh:

Ta cũng giả sử $A'(x, y) = A \left(\underbrace{x, x, \dots, x}_m, \underbrace{y, y, \dots, y}_{k-m} \right)$

Do toán tử A hỗn hợp đơn điệu nên A' cũng là toán tử hỗn hợp đơn điệu

Từ (4.2.6) ta có

$$\|v_{n+1} - u_{n+1}\| \leq \|A'(v_n, u_n) - A'(u_n, v_n)\| \leq \alpha \cdot \|v_n - u_n\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Lặp lại lập luận trên ta có

$$\|v_{n+1} - u_{n+1}\| \leq \alpha^n \cdot \|v_1 - u_1\|$$

Cho $n \rightarrow \infty$, ta được $\|v_{n+1} - u_{n+1}\| \rightarrow 0$ (do $0 < \alpha < 1$)

Từ kết luận của định lý 4.2.1 ta có $\bar{x} = u^* = v^*$

Vậy $\bar{x}$ là điểm bất động duy nhất của A

Nhận xét:

Rõ ràng với $k = 1$ thì điều kiện (4.2.6) là điều kiện Lipschitz truyền thống đã biết cho ánh xạ co .

4.2.3 Trường hợp toán tử không liên tục

Định lý 4.2.3

Giả sử $u_0, v_0 \in X$, K là nón Minihedral mạnh. Toán tử $A: \langle u_0, v_0 \rangle^k \rightarrow X$ là toán tử hỗn hợp

$$\text{đơn điệu sao cho thỏa} \begin{cases} u_0 \leq A \left(\underbrace{u_0, u_0, \dots, u_0}_{m \text{ biến}}, \underbrace{v_0, \dots, v_0}_{k-m \text{ biến}} \right) \\ v_0 \geq A \left(\underbrace{v_0, v_0, \dots, v_0}_{m \text{ biến}}, \underbrace{u_0, \dots, u_0}_{k-m \text{ biến}} \right) \end{cases}.$$

Khi đó A có cặp điểm tựa bất động (u^*, v^*) với $u^* \leq v^*$. Hơn nữa với cặp điểm tựa bất động

$$\text{bất kì } (\bar{x}, \bar{y}) \text{ của toán tử } A \text{ ta luôn có } \begin{cases} u^* \leq \bar{x} \leq v^* \\ u^* \leq \bar{y} \leq v^* \end{cases}.$$

Chứng minh

Với $D' = D \times D$, $X' = X \times X$, trong X' xét nón $K' = K \times (-K)$.

Xét toán tử $B: D' \rightarrow X'$ sao cho $B(x, y) = (A'(x, y), A'(y, x))$

$$\text{Vi} \begin{cases} u_0 \leq A \left(\underbrace{u_0, u_0, \dots, u_0}_{m \text{ biến}}, \underbrace{v_0, \dots, v_0}_{k-m \text{ biến}} \right) \\ v_0 \geq A \left(\underbrace{v_0, v_0, \dots, v_0}_{m \text{ biến}}, \underbrace{u_0, \dots, u_0}_{k-m \text{ biến}} \right) \end{cases} \text{ nên theo bổ đề 4.2.1 thì } (v_0, u_0) \alpha B(u_0, v_0) \text{ mà}$$

$$B(u_0, v_0) = (A'(u_0, v_0), A'(v_0, u_0)) \text{ nên ta có } \begin{cases} v_0 \leq A'(u_0, v_0) \\ u_0 \geq A'(v_0, u_0) \end{cases}$$

- Ta chứng minh B là toán tử đơn điệu từ D' vào X'

Ta có $B(D') \subset X'$ và theo bổ đề 4.2.1 thì B là ánh xạ đơn điệu

- Chứng minh B có điểm bất động

Do K là nón Minihedral mạnh nên K' cũng là nón Minihedral mạnh.

Áp dụng định lý 2.3.1 đối với toán tử B ta suy ra B có điểm bất động $u = (u^*, v^*)$

Vậy theo bổ đề 4.2.1 thì A cũng có điểm tựa bất động là (u^*, v^*)

- Chứng minh $u^* \leq v^*$

Giả sử (u', v') là cặp điểm tựa bất động bất kì của A' , Ta chứng minh
$$\begin{cases} u^* \leq x' \leq v^* \\ u^* \leq y' \leq v^* \end{cases}$$

Chú ý :

Cặp điểm tựa bất động (u^*, v^*) trong định lý 4.2.2 có thể được xác định rõ hơn . Chẳng hạn ta đặt

$$D = \left\{ (x, \dots, x, y, \dots, y) \in \langle u_0, v_0 \rangle^k : A(x, \dots, x, y, \dots, y) \geq x \text{ \& } A(y, \dots, y, x, \dots, x) \leq y \right\}$$

Từ giả thiết (4.2.1) ta suy ra $D \neq \emptyset$

$$\text{Giả sử } D_1 = \{x : (x, \dots, x, y, \dots, y) \in D\}$$

$$D_2 = \{y : (y, \dots, y, x, \dots, x) \in D\}$$

$$\text{Vậy } v^* = \sup D_1, u^* = \inf D_2$$

Định lý 4.2.4

Giả sử $u_0, v_0 \in X, u_0 < v_0$ và $A : \langle u_0, v_0 \rangle^k \rightarrow X$ là toán tử hỗn hợp đơn điệu thỏa (4.2.1)

trong định lý (4.2.1) và $A(\langle u_0, v_0 \rangle^k)$ là tập compact tương đối trong X .

Khi đó A có cặp điểm tựa bất động.

Chứng minh:

Đặt $D' = \langle u_0, v_0 \rangle \times \langle u_0, v_0 \rangle, X' = X \times X$ và

$$B : D' \rightarrow X'$$

$$u' \mapsto B(u') = B(u, v) = (A'(u, v), A'(v, u))$$

Do A thỏa điều kiện (4.2.1) trong định lý 4.2.1 và A là toán tử hỗn hợp đơn điệu nên suy ra B là toán tử tăng . Mặt khác do $A(\langle u_0, v_0 \rangle^k)$ là tập compact tương đối trong X nên suy ra $B(D')$ compact tương đối trong X' và K là nón chuẩn nên theo hệ quả 2.1.1 thì B có điểm bất động (u^*, v^*) trên D' nên suy ra A có cặp điểm tựa bất động (u^*, v^*)

Định lý 4.2.5

Giả sử $u_0, v_0 \in X, u_0 < v_0$ và $A : \langle u_0, v_0 \rangle^k \rightarrow X$ là toán tử hỗn hợp đơn điệu thỏa (4.2.1)

trong định lý (4.2.1) và K là nón chính quy.

Khi đó A có cặp điểm tựa bất động (u^*, v^*) với $u^* \leq v^*$. Hơn nữa nếu $(\bar{x}, \bar{y})$ là điểm tựa bất động nào đó của A thì $u^* \leq \bar{x}, \bar{y} \leq v^*$

Chứng minh

Kết quả suy được khi sử dụng bổ đề 4.2.1, hệ quả 2.2.1 và toán tử B được xác định trong bổ đề 4.2.1

Chương 5: ỨNG DỤNG

5.1 Bài toán tìm nghiệm tuần hoàn chu kỳ 2π của phương trình

$$x' + a(t).x = f(t, x(t), x(t-h)) \quad (5.1.1)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (5.1.1) là tìm hàm $x = x(t)$ có chu kỳ 2π liên tục tuyệt đối và thỏa (5.1.1) hầu khắp nơi.

Giả sử

- $a(t)$ liên tục, có chu kỳ 2π , $\int_0^{2\pi} a(t)dt > 0$
- $f(t, x, y)$ bị chặn trên $\mathbb{R}^3$, liên tục theo t , có chu kỳ 2π theo t và tăng theo x, y .

Ta chứng minh rằng với các giả thiết trên thì phương trình (5.1.1) có ít nhất một nghiệm tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Chứng minh

Công thức nghiệm của phương trình $\begin{cases} x' + a(t).x = g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ là

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} \cdot \left[x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^u a(s)ds} g(u)du \right] \quad (5.1.2)$$

Xét $t_0 = 0$ và ta muốn tìm nghiệm thỏa $x(0) = x(2\pi)$

$$\text{Ta có } x_0 = x(2\pi) = e^{-\int_0^{2\pi} a(s)ds} \cdot \left[x_0 + \int_0^{2\pi} e^{\int_0^u a(s)ds} g(u)du \right]$$

$$\Leftrightarrow x_0 \cdot e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds} - x_0 = \int_0^{2\pi} e^{\int_0^u a(s)ds} g(u)du$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \left[e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds} - 1 \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\int_0^u a(s)ds} g(u)du$$

Khi đó (5.1.2) trở thành

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{-\int_0^t a(s)ds} \left[e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds} - 1 \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\int_0^u a(s)ds} g(u)du + \int_0^t e^{\int_0^u a(s)ds} \cdot e^{-\int_0^t a(s)ds} g(u)du \\
 &= \left[e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds} - 1 \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\int_t^u a(s)ds} g(u)du + \int_0^t e^{\int_t^u a(s)ds} \cdot g(u)du
 \end{aligned}$$

Xét ánh xạ $S : C_0[0; 2\pi] \rightarrow C_0[0; 2\pi]$ được xác định bởi

$$Sx(t) = \begin{cases} x(t-h) & \text{nếu } h \leq t \leq 2\pi \\ x(t+2\pi-h) & \text{nếu } 0 \leq t \leq h \end{cases}$$

Ta có $x = x(t)$ có chu kì 2π và thỏa (5.1.1) tương đương với $x = x(t)$ có chu kì 2π và $x' + a(t)x = f(t, x(t), Sx(t))$, $t \in [0; 2\pi]$ hay

$$\begin{cases} x(0) = x(2\pi) \\ x' + a(t)x = f(t, x(t), Sx(t)) \end{cases}, t \in [0; 2\pi]$$

Xét ánh xạ $F : C_0[0; 2\pi] \rightarrow C_0[0; 2\pi]$ được xác định bởi

$$Fx(t) = \left[e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds} - 1 \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\int_t^u a(s)ds} f(u, x(u), Sx(u))du + \int_0^t e^{\int_t^u a(s)ds} \cdot f(u, x(u), Sx(u))du$$

Nếu x là điểm bất động của F thì ta có $x(0) = x(2\pi)$, $x'(0) = x'(2\pi)$ nên từ x ta có thể xây dựng nghiệm chu kì 2π của (5.1.1)

• **Bây giờ ta chứng minh F có điểm bất động**

i. Ta có F là ánh xạ tăng (do f là ánh xạ tăng theo biến x, y)

Do f bị chặn trên $\mathbb{R}^3$ nên tồn tại $m > 0$ sao cho $|f(t, x, y)| \leq m$, $\forall t, x, y$

$$\Rightarrow |Fx(t)| \leq m \left\{ \left[e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds} - 1 \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\int_0^u a(s)ds} du + \int_0^t e^{\int_t^u a(s)ds} du \right\}$$

Mà do $a(t)$ là hàm liên tục, có chu kì 2π và $\int_0^{2\pi} a(t)dt > 0$ nên có số b đủ lớn sao

cho

$$|Fx(t)| \leq b, \forall t \in [0, 2\pi], \forall x \in C_0[0; 2\pi]$$

$$\Rightarrow -b \leq Fx(t) \leq b, \forall x \in C_0[0; 2\pi]$$

Chọn $x_1 \in C_0[0; 2\pi]$ sao cho $x_1(t) = b \quad \forall t \in [0, 2\pi]$ suy ra $x_1(t) = b$ và thỏa

$$\begin{cases} -x_1 \leq Fx_1 \\ Fx_1 \leq x_1 \end{cases}$$

Vậy $F(\langle -x_1, x_1 \rangle) \subset \langle -x_1, x_1 \rangle$

ii. Ta chứng minh $F(\langle -x_1, x_1 \rangle)$ là tập compact tương đối

Với $x \in C_0[0; 2\pi]$ cho trước, ta có

$$Fx(t) = c \cdot \int_0^{2\pi} h(t, u) du + \int_0^t k(t, u) du$$

$$\Rightarrow (Fx)'(t) = c \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\partial h}{\partial t}(t, u) du + \int_0^t \frac{\partial k}{\partial t}(t, u) du + k(t, u)$$

Nên $\exists M > 0$ sao cho $|(Fx)'(t)| \leq M, \forall t \in [0, 2\pi]$ (do f bị chặn trên $\mathbb{R}^3$)

$$\Rightarrow |(Fx)'(t)| \leq M, \forall t \in [0, 2\pi], \forall x \in C_0[0; 2\pi]$$

Hay $\exists M > 0$ sao cho $|(Fx)'(t)| \leq M, \forall x \in \langle -x_1, x_1 \rangle, \forall t \in [0, 2\pi]$

Nên theo định lý Ascoli-Azela ta có $F(\langle -x_1, x_1 \rangle)$ là tập compact tương đối

iii. Mặt khác nón các hàm không âm trong $C_0[0; 2\pi]$ là nón chuẩn

Vậy theo hệ quả 2.1.1 thì F có điểm bất động x trong $\langle -x_1, x_1 \rangle$

5.2 Xét phương trình

$$-x'' = \lambda f(t, x) \quad (5.2.1)$$

$$\text{với } x(0) = x(1) = 0$$

Ở đây λ là tham số, $f(t, x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0, 1] \times [0, \infty)$, $x = x(t) \geq 0$ và $f(t, 0) \equiv 0$. Rõ ràng ta thấy $x_\lambda(t) \equiv 0$ là nghiệm tầm thường của phương trình (5.2.1) với bất kỳ λ . Bây giờ ta giả thiết:

i. $f(t, x)$ là hàm tăng theo biến x . Nghĩa là $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x_1 \leq x_2$ ta có

$$f(t, x_1) \leq f(t, x_2)$$

ii. $f(t, x) > 0 \quad \forall t \in (0, 1), x > 0$

iii. $\frac{f(t, x)}{x}$ hội tụ đều đến 0 với $t \in [0, 1]$ khi $x \rightarrow +\infty$

Khi đó Với bất kỳ $M > 0$ thì tồn tại số $R > 0$ sao cho khi $\lambda \geq R$ có ít nhất một nghiệm không tầm thường $x_\lambda(t) \in C^2[0, 1]$ thỏa mãn $x_\lambda(t) \geq Mt(1-t) \quad \forall t \in [0, 1]$

Chứng minh

Ta có bài toán (5.2.1) tương đương với việc tìm nghiệm thuộc $C[0,1]$ của phương trình

$$\text{sau } x(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s)) ds$$

Ở đây hàm $G(t,s)$ là hàm Green của toán tử vi phân x'' với điều kiện biên

$$x(0) = x(1) = 0 \text{ và được xác định bởi } G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & t \leq s \\ s(1-t), & t > s \end{cases}$$

Ta xét toán tử $A: P \rightarrow E$ được xác định bởi

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s)) ds$$

Đặt $E = C[0,1]$ và $P = \{x \in C[0,1] / x(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]\}$

* Rõ ràng P là nón chuẩn của E

* Ta thấy A là hàm tăng do giả thiết i.

$$\text{Đặt } w(t) = Au_0(t) = \int_0^t s(1-t)f(s, u_0(s))ds + \int_t^1 t(1-s)f(s, u_0(s))ds$$

$$\text{Với } u_0(t) = Mt(1-t), M > 0$$

Ta tính được

$$w'(t) = \int_0^t (-s)f(s, u_0(s))ds + \int_t^1 (1-s)f(s, u_0(s))ds, \forall t \in [0,1]$$

$$\text{Do đó } w''(t) = -f(t, u_0(t)) < 0 \forall t \in (0,1) \quad (5.2.2)$$

Từ (5.2.2) và $u_0(0) = u_0(1) = 0$, tồn tại số α đủ nhỏ thỏa mãn

$$W(t) \geq \alpha u_0(t) \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\text{Hay } Au_0(t) = W(t) \geq \mu u_0(t) \quad \forall t \in [0,1]$$

Ta đặt $R = \alpha^{-1}$. Khi đó với bất kì $\lambda \geq R$ ta có

$$\lambda Au_0(t) \geq u_0(t) \quad \forall t \in [0,1] \quad (5.2.3)$$

Từ giả thiết (iii) ta chọn số c sao cho $c > M$ và

$$\frac{f(t,c)}{c} \leq \frac{8}{\lambda}, \forall t \in [0,1]$$

Đặt $v_0(t) \equiv c$ thì $u_0(t) < v_0(t) \quad \forall t \in [0,1]$ và

$$\lambda Av_0(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s, c) ds \leq 8c \int_0^1 G(t,s) ds$$

$$\Rightarrow \lambda A v_0(t) \leq 4ct(1-t) \leq c = v_0(t) \quad \forall t \in [0,1] \quad (5.2.4)$$

Từ (5.2.3) và (5.2.4) ta suy ra $\lambda A(\langle u_0, v_0 \rangle) \subset \langle u_0, v_0 \rangle$

* Bây giờ ta chứng minh $\lambda A(\langle u_0, v_0 \rangle)$ là tập compact tương đối

Hàm $f(t, x)$ liên tục trên $[0,1] \times [0,c]$ nên bị chặn .

Do đó $\exists k > 0 : |f(t, x)| \leq k \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall x \in [0,c]$

Ta có $(Ax(t))' = \int_0^t (-s)f(s, x(s))ds + \int_t^1 (1-s)f(s, x(s))ds$

Suy ra $|(Ax(t))'| \leq \int_0^t kds + \int_t^1 kds = k \quad \forall t \in [0,1], \forall x \in \langle u_0, v_0 \rangle$

Từ đây ta thấy tập $\lambda A(\langle u_0, v_0 \rangle)$ liên tục đồng bậc. Áp dụng định lý Arzela-Ascoli ta thấy tập $\lambda A(\langle u_0, v_0 \rangle)$ là tập compact tương đối

Vậy áp dụng hệ quả 2.1.1 đối với toán tử λA thì có ít nhất một điểm bất động $x_\lambda \in \langle u_0, v_0 \rangle$

hay $u_0(t) \leq x_\lambda(t) \leq v_0(t), \quad \forall t \in [0,1]$ và $x_\lambda(t)$ là nghiệm của bài toán (5.2.1) thỏa $x_\lambda(t) \geq Mt(1-t) \quad \forall t \in [0,1]$

KẾT LUẬN

Luận văn đã cố gắng trình bày một cách hệ thống, với các chứng minh đầy đủ và chi tiết các kết quả về điểm bất động một số lớp ánh xạ tăng cơ bản như ánh xạ compắc đơn điệu, compắc đơn điệu tới hạn, T-đơn điệu, hỗn hợp đơn điệu. Luận văn còn có thể phát triển theo hướng nghiên cứu các ánh xạ đa trị và các ứng dụng của ánh xạ tăng.

Qua quá trình làm luận văn tôi đã biết áp dụng các phương pháp nghiên cứu và các kết quả đã học trong các học phần Giải tích hàm, giải tích phi tuyến, phương trình vi phân ... để học tập và nghiên cứu các vấn đề mới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO.

- [1] Dajun Guo and V.Lakshmikantham, *Fixed point theory on Abstract Cones*
- [2] K.Deimling, *Nonlinear Functional in Analysis Cones*, Springer Verlag, NewYork,1985.
- [3] M.A.Krasnoselskii and P.P.Zabreiko, *Geometrical Methods of
Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo,1984.
- [4] E.Zeidler, *Nonlinear Functional in Analysis and its Applieations T1,3*; Springer Verlag, 1987.