BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

VÕ TIẾN

CÁC HÀM SỐ HỌC: LÝ THUYẾT VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán Sơ cấp
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **TS. Nguyễn Duy Thái Sơn**

Phản biện 1: **PGS.TSKH. Trần Quốc Chiến**

Phản biện 2: **PGS.TS. Nguyễn Gia Định**

Luận văn được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ Khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 30 tháng 06 năm 2011

** Có thể tìm hiểu Luận văn tại:*
- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Số học là một phân nhánh toán học lâu đời nhất và từng là sơ cấp nhất, được hầu hết mọi người sử dụng ở các mức độ khác nhau, từ những công việc thường nhật, kinh doanh, cho đến các tính toán khoa học. Số học cũng là lĩnh vực tồn tại nhiều nhất những bài toán, những giả thiết chưa có câu trả lời; trên con đường tìm kiếm lời giải cho những giả thuyết đó, nhiều tư tưởng lớn, nhiều lý thuyết lớn của toán học đã nảy sinh. Các bài toán số học nâng cao thường xuyên có mặt trong các đề thi vô địch toán trong và ngoài nước. Vì thế, trang bị những kiến thức cơ bản cũng như nâng cao về số học cho học sinh ngay ở bậc phổ thông là công việc hết sức cần thiết.

Khi giải các bài toán số học chúng ta vận dụng rất nhiều kiến thức. Có thể kể ra những kiến thức cơ bản như: lý thuyết chia hết, ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất, các số nguyên tố, lý thuyết đồng dư… Vận dụng các kiến thức cơ bản này như thế nào để giải hiệu quả một bài toán số học đã luôn là một vấn đề mà đa số học sinh lúng túng.

Một trong những kiến thức nâng cao mà học sinh cần hiểu biết thấu đáo để có thể áp dụng giải những bài toán số học là về các hàm số học. Đây là một mảng kiến thức hay, nhưng khá khó đối với nhiều học sinh.

Xuất phát từ những vấn đề nêu trên tôi quyết định chọn đề tài: ***"Các hàm số học*: *lý thuyết và ứng dụng"*** với hy vọng sẽ tìm hiểu sâu về lý thuyết và ứng dụng của các hàm số học để góp phần làm phong phú thêm các kết quả trong lĩnh vực này.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Trong chương 1 của luận văn, chúng tôi trình bày cô đọng một số kiến thức có liên quan về lý thuyết chia hết, đồng dư. Nội dung của chương này là những kết quả sẽ thường xuyên được sử dụng trong các chương sau.

Chương 2 dành cho lý thuyết tổng quan về các hàm số học và giới thiệu khá đầy đủ các hàm số học thường dùng.

Trong chương 3, chúng tôi trình bày các phương pháp và kỹ thuật áp dụng các hàm số học để giải các bài toán; tuyển chọn và xây dựng một hệ thống các bài toán (theo mức độ khó dễ khác nhau) phù hợp với từng phương pháp. Chúng tôi sẽ đầu tư để:

- Tuyển chọn một hệ thống các bài tập số học có liên quan đến các hàm số học và đây cũng là những bài toán gặp ở các kì thi, có thể giảng dạy được cho học sinh giỏi ở các cấp độ khác nhau.
- Phân loại các bài toán theo các phương pháp giải khác nhau.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

3.1 Đối tượng nghiên cứu: Các hàm số học (lý thuyết và ứng dụng).

3.2 Phạm vi nghiên cứu: Lý thuyết và ứng dụng các hàm số học để giải các bài toán số học.

4. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu tài liệu, phân tích, giải thích, đánh giá, tổng hợp.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Xây dựng một giáo trình có tính hệ thống với thời lượng thu gọn, có thể giảng dạy được cho các học sinh chuyên toán bậc trung học phổ thông.

Xây dựng được một hệ thống các bài toán với các mức độ khó dễ khác nhau.

6. Cấu trúc luận văn

Luận văn được chia thành ba chương:

Chương 1. NHỮNG KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Chương này trình bày vắn tắt các kiến thức cơ bản có liên quan đến các hàm số học như lý thuyết chia hết, lý thuyết đồng dư …, làm cơ sở để xây dựng lên lý thuyết của các hàm số học và đồng thời áp dụng trong việc giải các bài toán số học.

Chương 2. CÁC HÀM SỐ HỌC

Đây là chương lý thuyết, chương này trình bày khá đầy đủ về định nghĩa và các tính chất của các hàm số học; từ các hàm số học đã biết ta mở rộng thêm các tính chất, thiết lập thêm một số hàm số học khác nữa. Bên cạnh đó, nêu lên các vấn đề có liên quan đến các hàm số học, chẳng hạn như đối với hàm Euler thì có liên quan đến những kiến thức cơ bản về căn nguyên thủy; nghiên cứu khá đầy đủ các kiến thức về các số như: số hoàn hảo, số siêu hoàn hảo, số thiếu, số thừa, số Mersenne, vì các số này được xây dựng dựa trên các hàm số học.

Chương 3: MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

Đây là chương áp dụng lý thuyết của chương hai, nó gồm các dạng toán như: mở rộng thêm các tính chất của các hàm số học; các bài toán về ước số, bội số; các bài toán về đẳng thức số học; các bài toán về bất đẳng thức số học; các bài toán về các số nguyên tố, số hoàn hảo, số thiếu, số thừa, số Mersrenne. Các bài toán này hầu hết được dịch và giải từ các bài toán chưa có lời giải cụ thể nào trên cuốn sách *Elementary Number Theory and Its Applications* của tác giả Kenneth H.Rosen. Các bài toán đó được xây dựng trên cơ sở từ dễ đến khó, từ bài toán nhỏ để xây dựng một bài toán lớn và áp dụng các kiến thức của các hàm số học để giải, tạo nên một hệ thống khá phong phú, tiếp cận được với các đề thi học sinh giỏi các cấp.

Chương 1
NHỮNG KIẾN THỨC LIÊN QUAN

1.1. Lý thuyết chia hết

1.1.1. Phép chia hết; phép chia có dư

Định nghĩa 1.1. ([08]) Cho *a*, *b* là hai số nguyên bất kỳ, *b* khác 0. Nếu tồn tại số nguyên *q* sao cho $a = bq$ thì ta nói *a* chia hết cho *b* hay *a* là bội của *b* $(a \vdots b)$; ta cũng nói b chia hết a hay *b* là ước của *a* *(b|a)*.

Mệnh đề 1.1. ([01]) Giả sử *a, b, c* là các số nguyên. Nếu *a|b, b|c* thì *a|c*.

Mệnh đề 1.2. ([01]) Giả sử *a, b, c, m* và *n* là các số nguyên. Nếu *c|a* và *c|b* thì *c|(ma+nb)*.

Tính chất 1.1.

a) Nếu $a \vdots b$ và $a \neq 0$ thì $|a| \geq |b|$;

b) Nếu $a \vdots b$ và $b \vdots a$ thì $|a| = |b|$;

c) $a \vdots b \Leftrightarrow am \vdots bm \;\; \forall m \in \mathbf{Z}^*$.

Định nghĩa 1.2. ([03]) Giả sử *a, b* là hai số nguyên và $b > 0$. Ta nói rằng số *a* chia cho số *b* có thương là *q* và số dư là *r*, nếu *a* có thể biểu diễn bằng đẳng thức $a = bq + r$, trong đó $q, r \in$ và $0 \leq r < b$.

Định lý 1.1. ([03])

1.1.2. Số nguyên tố, số chính phương

1.1.2.1. Số nguyên tố

Định nghĩa 1.3. ([01]) Số nguyên *p* > 1 được gọi là số nguyên tố nếu *p* chỉ có hai ước dương là 1 và chính nó. Số nguyên lớn hơn 1 không phải là số nguyên tố được gọi là hợp số.

Bổ đề 1.1. ([01]) Mỗi số nguyên dương lớn hơn 1 đều có ước nguyên tố.

Định lý 1.2. ([01]) Tồn tại vô hạn số nguyên tố.

Định lý 1.3. ([01]) Cho hai số nguyên *a, b* và số nguyên tố *p*. Khi đó nếu $p|ab$ thì $p|a$ hoặc $p|b$.

Định lý 1.4. ([01]) Nếu *n* là một hợp số, thì *n* có ước nguyên tố không vượt quá $\sqrt{n}$

Định lý 1.5. ([01])

Định lý 1.6. ([01])

1.1.2.2. Số chính phương

Định nghĩa 1.4. *A* được gọi là số chính phương khi và chỉ khi $A = a^2$ với a là một số nguyên.

Tính chất 1.2. ([04])

1.1.3. Ước số chung lớn nhất

1.1.3.1. Ước chung lớn nhất

Định nghĩa 1.5. ([01]) Ước chung lớn nhất của hai số nguyên *a* và *b* không đồng thời bằng 0 là số nguyên lớn nhất chia hết cả *a* và *b*.

Ta dùng kí hiệu (a,b) để chỉ ước chung lớn nhất của các số nguyên *a* và *b* (không đồng thời bằng 0).

Định nghĩa 1.6. ([01]) Các số nguyên *a* và *b* (không đồng thời bằng 0) được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu $(a,b)=1$.

• **Nhận xét:** $(a,b) = (|a|,|b|), (a,b) = (b,a), (0,n) = n$ nếu $n \in {}^*$, nên ta chỉ cần quan tâm đến ước chung lớn nhất của các số nguyên dương.

Mệnh đề 1.3. ([01]) Giả sử *a, b, c* là các số nguyên, $(a,b) = d$. Khi đó ta có:

a) $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$;

b) $(a + cb, b) = (a, b)$.

Định nghĩa 1.7. ([01]) Nếu *a* và *b* là các số nguyên, thì tổ hợp tuyến tính của a và b là một tổng có dạng $ma + nb,$ trong đó *m, n* là các số nguyên.

Định lý 1.7. ([01]) Ước chung lớn nhất của các số nguyên *a* và *b* không đồng thời bằng 0 là số nguyên dương nhỏ nhất biểu diễn được dưới dạng một tổ hợp tuyến tính của *a* và *b*.

Hệ quả 1.1. ([01]) Hai số nguyên *a* và *b* nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại các số nguyên *m* và *n* sao cho $ma + nb = 1.$

Định nghĩa 1.8. ([01]) Giả sử $2 \leq n \in {}^{*},$ $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên không đồng thời bằng 0. Ước chung lớn nhất của chúng là số nguyên lớn nhất chia hết mỗi số $a_1, a_2, ..., a_n.$ Ta kí hiệu ước chung lớn nhất đó bởi $(a_1, a_2, ..., a_n).$

Bổ đề 1.2. ([01]) Giả sử $3 \leq n \in {}^{*},$ $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên mà $a_{n-1}^2 + a_n^2 \neq 0.$ Khi đó

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1, a_2, ..., (a_{n-1}, a_n)).$$

Định nghĩa 1.9. ([01]) Ta nói rằng các số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n$ (không đồng thời bằng 0) là nguyên tố cùng nhau đồng thời nếu $(a_1, a_2, ..., a_n) = 1.$ Các số nguyên đó là nguyên tố cùng nhau từng đôi một nếu với mọi cặp a_i, a_j $(i \neq j)$ trong tập hợp, ta có $(a_i, a_j) = 1.$

1.1.3.2. Thuật toán Euclid

Thuật toán Euclid. ([01])

Bổ đề 1.3. ([01]) Giả sử *c, d, q* và *r* là các số nguyên, đồng thời $c = dq + r.$ Khi đó $c^2 + d^2 \neq 0$ nếu và chỉ nếu $d^2 + r^2 \neq 0,$ hơn nữa $(c, d) = (d, r).$

1.1.4. Các định lý cơ bản của số học

Định lý 1.8. ([01]) Mọi số nguyên lớn hơn 1 đều biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng tích các số nguyên tố, trong đó các thừa số nguyên tố được viết theo thứ tự không giảm.

Mọi số nguyên n lớn hơn 1 đều viết được dưới dạng $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}$, trong đó $(p_i)_{i=1}^k$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau, còn $(n_i)_{i=1}^k$ là các số nguyên dương; còn nói n có dạng phân tích tiêu chuẩn ra thừa số nguyên tố.

Bổ đề 1.4. ([01]) Giả sử *a, b, c* là các số nguyên, đồng thời $(a,b)=1, a \mid bc$. Khi đó $a \mid c$.

Hệ quả 1.2. ([01])

Định nghĩa 1.10. ([01]) Bội chung nhỏ nhất của hai số nguyên dương *a* và *b* là số nguyên dương nhỏ nhất chia hết cho *a* và *b*. Kí hiệu $[a,b]$.

Bổ đề 1.5. ([01])

Định lý 1.9. ([01]) Giả sử *a, b* là các số nguyên dương. Khi đó

$$[a,b] = \frac{ab}{(a,b)},$$

trong đó $[a,b]$ là bội chung nhỏ nhất, (a,b) là ước chung lớn nhất của hai số.

Bổ đề 1.6. ([01]) Giả sử *m, n* là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Khi đó, nếu *d* là một ước dương của *mn*, thì tồn tại cặp duy nhất các ước dương d_1 của *m*, d_2 của *n* sao cho $d = d_1 d_2$. Ngược lại, nếu d_1 và d_2 là các ước dương tương ứng của *m* và *n*, thì $d = d_1 d_2$ là một ước dương của *mn*.

1.1.5. Các số Fermat

Bổ đề 1.7 (Phân tích Fermat, [01]**).**

Mệnh đề 1.4. ([01]) Số Fermat $F_5 = 2^{2^5} + 1$ chia hết cho 641.

Bổ đề 1.8. ([01])

Định lý 1.10. ([01])

Định lý 1.11. ([01])

1.2 Lý thuyết đồng dư

1.2.1. Khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.11. ([01]) Cho m là một số nguyên dương; *a*, *b* là các số nguyên. Ta nói rằng *a* đồng dư với *b* môđulô *m* nếu $m|(a-b)$. Khi *a*
đồng dư với *b* môđulô *m*, ta viết $a \equiv b \pmod m$.

Nếu a không đồng dư với b môđulô m, ta viết $a \not\equiv b \pmod m$.

Mệnh đề 1.5. ([01]) Nếu *a, b* là các số nguyên thì $a \equiv b \pmod m$ khi và chỉ khi tồn tại số nguyên *k* sao cho $a=b+km$.

Định nghĩa 1.12. ([01])

1.2.2. Các tính chất

Mệnh đề 1.6. ([01]) Giả sử *m* và $(m_i)_{i=1}^{n}$ là các số nguyên dương. Quan hệ đồng dư môđulô *m* thỏa mãn các tính chất sau đây:

a) (Tính phản xạ). Nếu *a* là một số nguyên, thì $a \equiv a \pmod m$.

b) (Tính đối xứng). Giả sử *a, b* là các số nguyên. Khi đó, nếu $a \equiv b \pmod m$ thì $b \equiv a \pmod m$.

c) (Tính bắc cầu). Giả sử *a, b, c* là các số nguyên. Khi đó,
nếu $a \equiv b \pmod m$, $b \equiv c \pmod m$ thì $a \equiv c \pmod m$.

d) Giả sử *a, b, c* là các số nguyên. Khi đó, nếu $a \equiv b \pmod m$ thì

$$a+c \equiv b+c \pmod m.$$

e) Giả sử *a, b, c* là các số nguyên. Khi đó, nếu $a \equiv b \pmod m$ thì

$$ac \equiv bc \pmod m.$$

f) Giả sử *a, b, c, d* là các số nguyên. Khi đó, nếu $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$ thì $a + c \equiv b + d \pmod m$.

g) Giả sử *a, b, c, d* là các số nguyên. Khi đó, nếu $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$ thì $ac \equiv bd \pmod m$.

h) Nếu $a \equiv b$ (mod m) và k là số nguyên dương thì

$$a^k \equiv b^k \,(\text{mod}\, m).$$

i) Nếu $a \equiv b$ (mod m) và $0<d \mid m$ thì $a \equiv b$ (mod d).

j) Nếu $ab \equiv ac$ (mod m) và $(a, m) = d$ thì $b \equiv c$ (mod $\frac{m}{d}$).

k) $a \equiv b$ (mod m_i) (i =1, 2,…, n) $\Leftrightarrow a \equiv b \bmod \left[m_1.m_2...m_n\right]$.

l) Giả sử $r_1, r_2, ..., r_n$ là một hệ thặng dư đầy đủ môđulô n ($n \in \quad ^*$)
và m, r là các số nguyên với $(m,n)=1$. Khi đó, $r_1m+r, r_2m+r,..., r_nm+r$ cũng là một hệ thặng dư đầy đủ môđulô n.

Ghi chú:

1. Ba tính chất a)-c) của Mệnh đề 1.6 nói rằng quan hệ "đồng dư môđulô m" là một quan hệ tương đương trên tập các số nguyên; vì thế, nó phân hoạch tập thành m lớp đồng dư (mod m), mỗi lớp có dạng $\overline{a} = \{x \in \quad / \; x \equiv a \,(\text{mod}\, m)\}$ với $a \in \quad$.

2. Năm tính chất d)-h) của Mệnh đề 1.6 nói về việc có thể làm các phép toán số học trên các đồng dư thức với cùng môđun. Năm tính chất đó gộp lại thì tương đương với hệ quả sau đây:

Hệ quả 1.3.

1.2.3. Đồng dư thức tuyến tính

Định nghĩa 1.13. ([01])

Định lý 1.12. ([01])

Định nghĩa 1.14. ([01])

Mệnh đề 1.7. ([01])

1.2.4. Định lý Trung Quốc về phần dư

Định lý 1.13. ([01])

Bổ đề 1.9. ([01])

Bổ đề 1.10. ([01])

Định lý 1.14. ([01])

1.2.5. Định lý nhỏ Fermat và định lý Wilson

Định lý 1.15 (Định lý Wilson, [01]).

Định lý 1.16. ([01])

Định lý 1.17 (Định lý nhỏ Fermat, [01]).

Hệ quả 1.4. ([01]**)**

Hệ quả 1.5. ([01])

Hệ quả 1.6. ([01])

Chương 2
CÁC HÀM SỐ HỌC

2.1. Định nghĩa hàm số học và tính chất cơ bản

2.1.1 Định nghĩa hàm số học

Định nghĩa 2.1. ([08]) Hàm số học là hàm xác định trên tập hợp các số nguyên dương.

2.1.2 Tính chất nhân tính và cộng tính của hàm số học

Định nghĩa 2.2. ([08]) Một hàm số học *f* được gọi là có tính chất nhân (hay hàm nhân tính) nếu với mọi số nguyên dương *m*, *n* nguyên tố cùng nhau, ta có: $f(mn) = f(m)f(n)$. Trong trường hợp đẳng thức đúng với mọi *m*, *n* (không nhất thiết nguyên tố cùng nhau), hàm *f* được gọi là một hàm có tính chất nhân đầy đủ (hay tính chất nhân hoàn toàn).

Định lý 2.1. ([08]) Giả sử *f* là một hàm có tính chất nhân, và $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ là phân tích tiêu chuẩn của *n* ra thừa số nguyên tố. Khi đó

$$f(n) = f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2})... f(p_k^{a_k}).$$

Định nghĩa 2.3. ([08]) Một hàm nhân tính được gọi là hàm nhân mạnh nếu và chỉ nếu $f(p^k) = f(p)$ với mọi số nguyên tố *p* và mọi số nguyên dương *k*.

Định nghĩa 2.4. ([08]) Một hàm số học f thỏa mãn đẳng thức $f(mn) = f(m) + f(n)$ với tất cả các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau m và n được gọi là một hàm cộng tính; nếu công thức trên thỏa với mọi số nguyên dương m và n thì f được gọi là một hàm hoàn toàn cộng tính (hay cộng tính đầy đủ).

2.2. Hàm Möbius và công thức nghịch đảo của Möbius.

2.2.1. Hàm Möbius

Định nghĩa 2.5. ([08]) Hàm Möbius là hàm số học μ được xác định bởi $\mu(1)=1$ và, khi $n>1$,

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{nếu n là tích của k số nguyên tố đôi một phân biệt} \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Mệnh đề 2.1. ([08]) Hàm Möbius là hàm nhân tính.

Định nghĩa 2.6. ([08]) Cho f là hàm số học. Hàm "tổng giá trị của f trên các ước dương" là hàm F được xác định bởi:

$$F(n) = \sum_{0<d|n} f(d) .$$

Định lý 2.2. ([08]) Giả sử $f(n)$ là một hàm có tính chất nhân. Khi đó hàm

$$F(n) = \sum_{0<d|n} f(d)$$

cũng có tính chất nhân.

Định lý 2.3. ([05])

$$\sum_{0<d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n=1 \\ 0 & \text{trong trường hợp khác.} \end{cases}$$

Định nghĩa 2.7. ([05]) Cho f và g là các hàm số học, ta gọi tích Dirichlet của f và g là hàm số học $f * g$ được xác định bởi công thức:

$$(f*g)(n)=\sum_{0<d|n} f(d)g(\frac{n}{d}).$$

Định lý 2.4. ([05]) Nếu *f* và *g* là các hàm nhân tính thì tích Dirichlet *f*g* cũng là một hàm nhân tính.

Định nghĩa 2.8. ([05]) Ta định nghĩa các hàm số học:

a) $I(n)=1$ với moi $n\in {}^{*}$.

b) $e(n)=\begin{cases}1 & \text{nếu } n=1\\ 0 & \text{trong trường hợp khác.}\end{cases}$

Định lý 2.5. (Tính chất của tích Dirichlet, [05]) Cho *f*, *g*, *h* là các hàm số học. Khi đó:

a) $f*g=g*f;$

b) $(f*g)*h=f*(g*h);$

c) $f*e=e*f=f;$

d) $f*I=F=I*f;$

e) $\mu*I=e.$

2.2.2. Công thức nghịch đảo Möbius

Định lý 2.6 (***công thức nghịch đảo Möbius*, [08]).** Giả sử *f* và *F* là các hàm số học liên hệ với nhau bởi công thức:

$$F(n)=\sum_{0<d|n} f(d)\ \forall n\in {}^{*}.$$

Khi đó:

$$f(n)=\sum_{0<d|n} \mu(d)F(\frac{n}{d})\ \forall n\in {}^{*}.$$

Chú ý rằng mệnh đề đảo của định lý 2.6 cũng đúng.

Định lý 2.7. ([08]) Nếu với mọi số nguyên dương *n*,

$$f(n)=\sum_{0<d|n} \mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right),$$

thì

$$F(n)=\sum_{0<d|n} f(d)\ \forall n\in \;^{*}.$$

2.3. Hàm Euler và căn nguyên thủy

2.3.1. Hàm Euler

Định nghĩa 2.9. ([01]) Hàm Euler $\varphi:\ {}^{*}\rightarrow\ {}^{*}$ (còn gọi là Phi-hàm Euler) là hàm số học có giá trị tại $n\in\ {}^{*}$ bằng số các số nguyên dương không vượt quá *n* và nguyên tố cùng nhau với *n*.

Định nghĩa 2.10. ([01])

Định lý 2.8. ([01])

Định lý 2.9. (Định lý Euler, [01]). Giả sử *m* là số nguyên dương và *a* là số nguyên với (*a, m*)=1. Khi đó $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\bmod m)$.

Định lý 2.10. ([01]) Số nguyên dương *p* là số nguyên tố khi và chỉ khi $\varphi(p)=p-1$.

Định lý 2.11. ([01]) Giả sử *p* là số nguyên tố và *a* là số nguyên dương. Khi đó $\varphi(p^{a})=p^{a}-p^{a-1}$.

Định lý 2.12. ([01]) Nếu *m, n* là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, thì $\varphi(mn)=\varphi(m).\varphi(n)$.

Định lý 2.13. ([01]) Giả sử $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ là phân tích tiêu chuẩn của *n* ra thừa số nguyên tố. Khi đó

$$\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})...(1-\frac{1}{p_k}).$$

Định lý 2.14. ([08]) Giả sử *n* là một số nguyên dương lớn hơn 2. Khi đó $\varphi(n)$ là một số chẵn.

Định lý 2.15. ([08]) Giả sử *n* là một số nguyên dương. Khi đó

$$\sum_{0<d|n}\varphi(d)=n,$$

trong đó tổng được lấy theo mọi ước dương của *n*.

2.3.2. Căn nguyên thủy

Định nghĩa 2.11. ([01])

Định lý 2.16. ([01])

Hệ quả 2.1. ([01])

Hệ quả 2.2. ([01])

Định nghĩa 2.12. ([01]) Nếu *r* và *n* là các số nguyên nguyên tố cùng nhau, *n*>0, đồng thời $\operatorname{ord}_n r = \varphi(n)$, thì *r* được gọi là một căn nguyên thủy môđulô *n*.

Định lý 2.17. ([01])

Định lý 2.18. ([01])

Hệ quả 2.3. ([01])

Định lý 2.19. ([01])

2.4. Hàm $\sigma(n)$, hàm $\tau(n)$, hàm $\sigma_k(n)$, hàm Liouville, hàm số $\omega(n)$, hàm $S(n)$, hàm $g(n)$ và $h(n)$.

2.4.1. Hàm $\sigma(n)$, hàm $\tau(n)$, hàm $\sigma_k(n)$

Định nghĩa 2.13. ([08]) Hàm tổng các ước dương, kí hiệu qua σ, được xác định bởi: $\sigma(n)$ bằng tổng mọi ước dương của số nguyên dương *n*.

Định nghĩa 2.14. ([08]) Hàm số các ước dương, kí hiệu qua τ, được xác định bởi: $\tau(n)$ bằng số các ước dương của số nguyên dương *n*.

Hệ quả 2.4. ([08]) Các hàm $\sigma(n)$ và $\tau(n)$ có tính chất nhân.

Bổ đề 2.1. ([08]) Giả sử *p* là số nguyên tố, *a* là số nguyên dương. Khi đó

$$\sigma(p^a) = 1 + p + p^2 + \dots + p^a = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1},$$

$$\tau(p^a) = a + 1.$$

Định lý 2.20. ([08]) Giả sử số nguyên dương *n* có phân tích ra thừa số nguyên tố $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$.

Khi đó

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}.\frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1}...\frac{p_s^{a_s+1}-1}{p_s-1}=\prod_{j=1}^{s}\frac{p_j^{a_j+1}-1}{p_j-1},$$

$$\tau(n)=(a_1+1)(a_2+1)...(a_s+1)=\prod_{j=1}^{s}(a_j+1).$$

Định nghĩa 2.15. ([08]) Hàm $\sigma_k(n)$ là hàm tính tổng các lũy thừa bậc *k* của các ước dương của *n*. Kí hiệu $\sigma_k(n)=\sum_{0<d|n} d^k$.

Định lý 2.21. ([08]) Hàm σ_k có tính chất nhân.

Định lý 2.22. ([08])

Định lý 2.23. ([08])

Định lý 2.24. ([08]) Nếu *n* có phân tích tiêu chuẩn ra thừa số nguyên tố dưới dạng $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_m^{a_m}$ thì

$$\sigma_k(p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_m^{a_m})=\prod_{i=1}^{m}\frac{p_i^{ka_i+k}-1}{p_i^k-1}.$$

2.4.2. Hàm Liouville, hàm số ω(n), hàm S(n), hàm g(n) và h(n).

Định nghĩa 2.15. ([08]) Hàm Liouville là hàm số học λ được xác định như sau: $\lambda(1)=1$ và $\lambda(n)=(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m}$ nếu $1<n\in$ * có phân tích thành thừa số nguyên tố $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_m^{\alpha_m}$.

Định lý 2.25. ([08]) Hàm Liouville là hàm nhân tính đầy đủ.

Định lý 2.26. ([08]) Với *n* là một số nguyên dương thì

$$\begin{cases}\sum_{0<d|n}\lambda(d)=0 & \text{nếu } n \text{ không là số chính phương}\\ \sum_{0<d|n}\lambda(d)=1 & \text{nếu } n \text{ là số chính phương.}\end{cases}$$

Định nghĩa 2.17. ([08]) Hàm số *học* ω: $^*\rightarrow$ được cho bởi: $\omega(n)$ là số ước nguyên tố của *n*.

Định lý 2.27. ([08])

Định nghĩa 2.18. ([02]) Cho n là số nguyên dương. Ta định nghĩa hàm $S(n)$ là tổng các chữ số của n, khi biểu diễn nó trong hệ thập phân.

Mệnh đề 2.2. ([02]) Cho n là số tự nhiên dương, ta có:

a) $S(n) \equiv n \pmod 9$;

b) $0 < S(n) \leq n$;

c) $S(n) = n \Leftrightarrow 1 \leq n \leq 9$;

d) $S(m+n) \leq S(m) + S(n),$ với mọi m, n nguyên dương;

e) $S(mn) \leq S(m).S(n),$ với mọi m, n nguyên dương;

Định nghĩa 2.19. ([02]) Cho n là số nguyên dương. Ta định nghĩa hàm $g(n)$ là tổng các chữ số biểu diễn trong hệ nhị phân của n.

Định nghĩa 2.20.([02])Cho n là số nguyên dương. Ta định nghĩa hàm $h(n)$ là số nguyên k không âm lớn nhất sao cho n chia hết cho 2^k.

Bổ đề 2.2. ([02]) Hàm $h(n)$ là hàm cộng tính đầy đủ.

Mệnh đề 2.3. ([02])

2.5. Số hoàn hảo, số thiếu, số thừa và số Mersenne.

2.5.1 Số hoàn hảo, số thiếu, số thừa.

Định nghĩa 2.21.([08]) Số nguyên dương n được gọi là số hoàn hảo nếu $2n = \sigma(n)$. Số nguyên n gọi là k-hoàn hảo nếu $\sigma(n) = kn$. Một số nguyên dương n được gọi là số siêu hoàn hảo nếu $\sigma(\sigma(n)) = 2n$.

Định lý 2.28. ([01])

Định lý 2.29. ([01])

Định nghĩa 2.22. ([08]) Cho n là một số nguyên dương, ta nói n là số khuyết nếu $\sigma(n) < 2n$; và ta nói n là số thừa nếu $\sigma(n) > 2n$. Mỗi số nguyên là một số khuyết, hoặc là số hoàn hảo, hoặc là số thừa. Số nguyên n được gọi là k-số thừa nếu $\sigma(n) > (k+1)n$.

Hai số nguyên dương m, n được gọi là một cặp số thân tình nếu

$$\sigma(m) = \sigma(n) = m + n.$$

Định lý 2.30. ([08])

Định lý 2.31. ([08])

Định lý 2.32. ([08])

2.5.2. Số Mersenne

Định nghĩa 2.23. ([01]) Nếu *m* là số nguyên dương thì $M_m = 2^m - 1$ được gọi là số Mersenne thứ *n*. Hơn nữa, nếu *p* là số nguyên tố thì M_p được gọi là số nguyên tố Mersenne.

Định lý 2.33. ([01])

Chương 3
MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

3.1. Các bài toán về tính chất của các hàm số học.

Bài toán 3.11. Chứng minh rằng:

$$S((10^k - 1)m) = 9k$$

với mọi số nguyên dương *m* và *k* mà $m \le 10^k$.

Giải:

Trước hết xét trường hợp $m < 10^k$. Khi đó $m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_s}.10^t$ với $s \in {}^*, t \in \ , s + t \le k, a_s \ne 0.$ Thực hiện phép trừ $10^k m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_s}10^{t+k}$ cho m (để được $(10^k - 1)m$) như hình minh họa, ta thấy:

$$S((10^k - 1)m) = S(\overline{a_1 \ldots a_{s-1}(a_s - 1)\underbrace{9\ldots9}_{(k\text{-}s)\text{ chữ số 9}}(9 - a_1)\ldots(9 - a_{s-1})(10 - a_s)})$$

$$= (\sum_{i=1}^{s-1} a_i) + a_s - 1 + 9(k - s) + (\sum_{i=1}^{s-1}(9 - a_i)) + (10 - a_s)$$

$$= 9(k - s) + 9 + 9(s - 1) = 9k.$$

Vậy trong trường hợp này, điều phải chứng minh là đúng. Cuối cùng, khi $m = 10^k$ (lúc đó $s = 1, t = k, a_s = 1$) thì

$(10^k-1)m = 10^{2k} - 10^k = \overline{\underbrace{9\dots9}_{\text{k chữ số 9}}\underbrace{0\dots0}_{\text{k chữ số 0}}}$ nên cũng có $S((10^k-1)m) = 9k$, điều phải chứng minh.

$$
\begin{array}{l}
-\left\{\begin{array}{l}
a_1\dots\ a_{s-1}\ \ a_s\ \overbrace{\underbrace{00\dots0}_{t\text{ chữ số } 0}\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 00\dots0}_{k\text{ chữ số } 0}}^{\text{t+k chữ số 0}} \quad (=m.10^k)\\
\\
\qquad\qquad\qquad a_1\dots \quad a_{s-1} \quad a_s \qquad \underbrace{00\dots0}_{t\text{ chữ số } 0} \quad (=m \quad)\\
\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\ \ \vdots \qquad\ \vdots
\end{array}\right.\\
\hline
a_1\dots a_{s-1}(a_s-1)\underbrace{99\dots9}_{k\text{-}s\text{ chữ số } 9}(9-a_1)\dots(9-a_{s-1})(10-a_s)\underbrace{00\dots0}_{t\text{ chữ số } 0}\ (=(10^k-1)m)
\end{array}
$$

Hình minh họa phép trừ $m.10^k$ cho m (trong trường hợp $m < 10^k$)

3.2 Các bài toán về ước số, bội số

Bài toán 3.15. Với số nguyên dương *n* nào thì $\varphi(n)$ chia hết cho 4 ?

Giải:

1) Theo kết quả của bài toán 3.14, nếu *n* có 2 ước nguyên tố lẻ khác nhau thì $\varphi(n) \vdots 2^2 = 4.$

2) Vậy ta chỉ còn phải xét trường hợp $n = 2^k p^s;$ trong đó, *p* là một số nguyên tố lẻ và $k, s \in$. Lúc này:

(i) Với $k \geq 3,$ hiển nhiên ta có $\varphi(n) \vdots \varphi(2^k) = 2^{k-1} \vdots 4.$

(ii) Với *k*=2 thì $\varphi(n) = \varphi(4)\varphi(p^s) = 2\varphi(p^s)$ nên

$$\varphi(n) \vdots 4 \Leftrightarrow \varphi(p^s) \vdots 2 \Leftrightarrow s \geq 1 \text{ (theo bài toán 3.14)}$$

(iii) Với $k \in \{0,1\}$ thì $\varphi(2^k) = 1$, suy ra

$$\varphi(n) = \varphi(2^k)\varphi(p^s) = \varphi(p^s);$$

nên

$$\varphi(n) \vdots 4 \Leftrightarrow \varphi(p^s) \vdots 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s \geq 1 \\ (p-1)p^{s-1} \vdots 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s \geq 1 \\ p-1 \vdots 4. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s \geq 1 \\ p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

Kết hợp các trường hợp 1), 2(i), 2(ii), 2(iii) ta thấy $\varphi(n) \vdots 4$ khi và chỉ khi *n* có ít nhất 2 ước nguyên tố lẻ, hoặc $n \vdots 8$, hoặc *n* chia hết đồng thời cho 4 và một số nguyên tố lẻ, hoặc *n* chia hết cho một số nguyên tố *p* mà $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$.

Bài toán 3.19. Chứng minh rằng không có hai số nguyên dương khác nhau nào có tích các ước dương bằng nhau.

Giải:

Theo bài tập 3.12, ta có tích các ước dương của số nguyên dương *n* là $n^{\frac{\tau(n)}{2}}$.

Giả sử có hai số nguyên dương *m, n* khác nhau có cùng tích các ước dương, tức là

$$m^{\frac{\tau(m)}{2}} = n^{\frac{\tau(n)}{2}}.$$

Ta suy ra

$$m^{\tau(m)} = n^{\tau(n)}.$$

Đẳng thức này chứng tỏ rằng số nguyên tố *p* là ước của *m* khi và chỉ khi nó cũng là ước của *n*. Đặc biệt, ta có thể viết:

$$m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i}, n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{b_i}$$

với $(p_i)_{i=1}^s$ là s số nguyên tố đôi một phân biệt; $(a_i)_{i=1}^s$ và $(b_i)_{i=1}^s$ là $2s$ số nguyên dương $(s \in \ ^{*})$. Đẳng thức $m^{\tau(m)} = n^{\tau(n)}$ được viết lại thành

$$\prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i\tau(m)} = \prod_{i=1}^{s} p_i^{b_i\tau(n)};$$

và do tính duy nhất của phân tích tiêu chuẩn ra thừa số nguyên tố, ta thấy

$$a_i\tau(m) = b_i\tau(n) \quad \forall i \in \{1;2;...;s\}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_s}{b_s} = \frac{\tau(n)}{\tau(m)}. \qquad (3.5)$$

Nếu $\tau(m) < \tau(n)$ thì (3.5) kéo theo

$$a_1 > b_1,\ a_2 > b_2,\ ...,\ a_s > b_s$$

$$\Rightarrow \tau(m) = \prod_{i=1}^{s}(1+a_i) > \prod_{i=1}^{s}(1+b_i) = \tau(n),$$

vô lý! Tương tự; nếu $\tau(m) > \tau(n)$ ta cũng gặp mâu thuẫn. Cuối cùng, khi $\tau(m) = \tau(n)$ thì m=n; từ đó, suy ra điều phải chứng minh.

3.3 Các bài toán về đẳng thức số học:

Bài toán 3.27. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho

$$\varphi(n) + \sigma(n) = 2n.$$

Giải:

Rõ ràng, nếu n=1 thì $\varphi(n) + \sigma(n) = 1 + 1 = 2n;$ còn nếu n là một số nguyên tố thì $\varphi(n) + \sigma(n) = (n-1) + (n+1) = 2n;$ vậy n thỏa yêu cầu của bài toán.

Bây giờ, giả sử $n > 1$ và n không nguyên tố. Khi đó $k = \tau(n) > 2.$ Ta liệt kê tất cả các ước dương của n theo chiều tăng:

$$1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n.$$

có đúng $n-\varphi(n)$ số nguyên dương m không vượt quá n mà $(m,n)\neq 1.$ Mỗi số m như thế phải là bội của một d_i nào đó với $2\le i\le k.$ Mặt khác, dễ thấy; số bội nguyên dương không vượt quá n của d_i là $\dfrac{n}{d_i};$ suy ra

$$n-\varphi(n)\le\sum_{i=2}^{k}\frac{n}{d_i}.$$

(3.6)

Dấu “=” không xảy ra ở (3.6) do $k>2$ và do trong vế phải số bội nguyên dương không vượt quá *n* của $d_k=n$ đã được kể trong số bội nguyên dương không vượt quá *n* của d_2 $(1<d_2<n,\ d_2\mid n).$ Vậy,

$$n-\varphi(n)<\sum_{i=2}^{k}\frac{n}{d_i}=\sum_{i=2}^{k}d_{k+1-i}=\sigma(n)-d_k$$

$$\Rightarrow \varphi(n)+\sigma(n)>n+d_k=2n.$$

Kết luận: *n* thỏa yêu cầu bài toán khi và chỉ khi *n*=1 hoặc *n* là số nguyên tố.

3.4 Các bài toán về bất đẳng thức số học

Bài toán 3.34. (Taiwan 1998) Với mỗi số nguyên dương *n* kí hiệu ω(*n*) là số các ước số nguyên tố của *n*. Tìm số nguyên dương *k* bé nhất sao cho với mọi số nguyên dương *n*,

$$2^{\varpi(n)}\le k\sqrt[4]{n}\,.$$

(3.13)

Giải:

Nếu $n=1$ thì $\omega(n)=0$ nên $2^{\omega(n)}\le k\sqrt[4]{n}\Leftrightarrow k\ge 1.$

Đặt $p_0=2<p_1<p_2<\dots$ là dãy tăng tất cả các số nguyên tố. Với mỗi $2\le n\in {}^{*},$ tồn tại một chỉ số $i\in {}^{*}$ sao cho $p_0p_1p_2\dots p_{i-1}\le n<p_0p_1p_2\dots p_i$

$$\Rightarrow \omega(n)\le i \text{ và } \frac{2^{\omega(n)}}{\sqrt[4]{n}}\le\frac{2^i}{\sqrt[4]{p_0p_1p_2\dots p_{i-1}}}.$$

Do đó nếu lấy:

$$k=\max\left\{1,\left\lceil\frac{2^1}{\sqrt[4]{2}}\right\rceil,\left\lceil\frac{2^2}{\sqrt[4]{2.3}}\right\rceil,\left\lceil\frac{2^3}{\sqrt[4]{2.3.5}}\right\rceil,\left\lceil\frac{2^4}{\sqrt[4]{2.3.5.7}}\right\rceil,\dots\right\}=\left\lceil\frac{2^6}{\sqrt[4]{2.3.5.7.11.13}}\right\rceil$$

$$=\lceil 4,8\rceil=5$$

thì k thỏa (3.13) với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Chỉ cần chọn $n=2.3.5.7.11.13$, ta thấy $k=5$ chính là số bé nhất thỏa yêu cầu bài toán.

Ghi chú.

1) Với mỗi $x\in\mathbb{R}$, ta dùng $\lceil x\rceil$ để ký hiệu số nguyên bé nhất không bé hơn x (phần nguyên trần của số thực x) và $\lfloor x\rfloor$ để ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x (phần nguyên nền, cũng là phần nguyên "thông thường" của số thực x).

Ví dụ: $\lceil 4,8\rceil=5,\lfloor 4,8\rfloor=4.$

2) Do $p_6=17>2^4$ nên

$$\frac{2^i}{\sqrt[4]{p_0p_1p_2\dots p_{i-1}}}<\frac{2^6}{\sqrt[4]{2.3.5.7.11.13}}$$

khi $i\ge 7$.

3.5 Các bài toán về các số nguyên tố, số hoàn hảo, số thiếu, số thừa, số Mersrenne.

Bài toán 3.46. (Russia 2000). Chứng minh rằng:

a) Nếu một số hoàn hảo lớn hơn 6 và chia hết cho 3 thì nó chia hết cho 9.

b) Nếu một số hoàn hảo lớn hơn 28 và chia hết cho 7 thì nó chia hết cho 49.

Giải:

Giả sử $p\in\{3,7\}$ và n là một số hoàn hảo chia hết cho p nhưng không chia hết cho p^2. Đặt $n=2^apm$ với $a\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}^*$, và $(m,2p)=1$. Khi đó:

$$2^{a+1}pm=2n=\sigma(n)=\sigma(2^a)\sigma(p)\sigma(m)=(2^{a+1}-1)(p+1)\sigma(m).$$

Vì $p \in \{3,7\}$ nên p+1 là lũy thừa của 2, suy ra $2^{a+1} \geq p+1$. (3.19)

Do đó,

$$\begin{aligned}2^{a+1}pm &= (2^{a+1}-1)(p+1)\sigma(m)\\ &= 2^{a+1}(1-\frac{1}{2^{a+1}})(p+1)\sigma(m)\\ &\geq 2^{a+1}(1-\frac{1}{p+1})(p+1)\sigma(m) = 2^{a+1}p\sigma(m)\\ \Rightarrow m &\geq \sigma(m). \qquad (3.20)\end{aligned}$$

Rõ ràng (3.20) phải trở thành đẳng thức và do đó (3.19) cũng trở thành đẳng thức. Suy ra: $m=1$ và $2^{a+1}=p+1$.

Từ đó:

Với $p=3$ thì $(m,a)=(1,1)$, suy ra $n=2^a pm = 2^1.3.1 = 6$.

Với $p=7$ thì $(m,a)=(1,2)$, suy ra $n=2^a pm = 2^2.7.1 = 28$.

Vậy, nếu một số hoàn hảo lớn hơn 6 (tương ứng, 28) và chia hết cho $p=3$ (tương ứng, $p=7$) thì nó chia hết cho $p^2=9$ (tương ứng, $p^2=49$).

KẾT LUẬN

Có thể nói luận văn đã phần nào đạt được mục tiêu đề ra ban đầu. Cụ thể trong luận văn chúng tôi đã thực hiện được một số nội dung sau:

1) Nghiên cứu các tài liệu khác nhau và trình bày lại lý thuyết các hàm số học theo một thể khép kín trên cơ sở những hiểu biết mà chúng tôi đã đạt được trong quá trình nghiên cứu, tìm tòi. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng dành một số phần trong luận văn để tìm hiểu những vấn đề có liên quan như căn nguyên thủy, số hoàn hảo, số siêu hoàn hảo, số thiếu, số thừa, số Mersenne.

2) Áp dụng lý thuyết để đưa ra lời giải hoàn chỉnh cho một số bài toán có liên quan. Các bài toán này được chúng tôi sưu tầm từ các tài liệu khác nhau ở trong và ngoài nước (hầu hết là các bài toán chưa có sẵn lời giải, hoặc chỉ có hướng dẫn ngắn gọn). Trong luận văn này, lần đầu tiên chúng tôi có dịp tìm hiểu các đề thi chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia và Quốc tế liên quan đến các hàm số học. Từ đây chúng tôi cũng ý thức được và định hướng cho mình những nghiên cứu dài hơn cho công tác bồi dưỡng học sinh giỏi ở trường chúng tôi sau này.

Tuy nhiên đây là đề tài bao gồm nhiều mảng kiến thức liên quan khá rộng, thời gian lại bị hạn định, mà khả năng nghiên cứu của chúng tôi là có hạn nên trong luận văn chúng tôi chưa có điều kiện cung cấp và mở rộng nhiều dạng toán hơn nữa, và chưa đưa ra nhiều hơn những bài toán trong các kỳ thi Olympic Quốc gia và Quốc tế có liên quan đến các hàm số học.

Hướng nghiên cứu tiếp theo của luận văn:

Tìm hiểu và xây dựng thêm các hàm số học khác nữa; giải thêm được nhiều bài toán về các hàm số học của những tài liệu trong nước và ngoài nước mà chưa có lời giải để làm phong phú các dạng bài tập về số học phục vụ cho việc giảng dạy và bồi dưỡng cho học sinh giỏi ở trường THPT.