

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

VŨ HUỲNH PHƯƠNG THẢO

**CÁC PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU ĐỊNH LÝ
KRASNOSELSKII VỀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG NÓN**

Chuyên ngành: **GIẢI TÍCH**

Mã số: **60 46 01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. NGUYỄN BÍCH HUY**

BẢNG CÁC KÍ HIỆU ĐÃ SỬ DỤNG

N	Tập hợp các số tự nhiên.
N^*	Tập hợp các số tự nhiên khác 0.
R	Tập hợp các số thực.
R_+	Tập hợp các số thực không âm.
$\partial\Omega$	Biên của Ω .
$\overline{\Omega}$	Bao đóng của Ω .
$(X, \cdot)$	Không gian Banach X với chuẩn $ \cdot $.
$L^p[a, b]$	Không gian các hàm đo được trên đoạn $[a, b]$
$ x _p$	Chuẩn của x trên không gian L^p
$C[a, b]$	Không gian các hàm số thực liên tục trên đoạn $[a, b]$
$C([a, b], E)$	Không gian các hàm liên tục $u : [a, b] \rightarrow E$
$\square$	Kết thúc chứng minh.

MỞ ĐẦU

Lý thuyết phương trình trong không gian có thứ tự được hình thành từ những năm 1940, phát triển mạnh mẽ vào những năm 1960–1970 và được hoàn thiện cho đến ngày nay. Lý thuyết này tìm được những ứng dụng rộng rãi và sâu sắc trong nhiều lĩnh vực như Lý thuyết phương trình vi phân, vật lý, sinh học, kinh tế

Trong lý thuyết phương trình trong không gian có thứ tự thì định lý Krasnoselskii về điểm bất động của ánh xạ nén hoặc giãn một mặt nón đóng vai trò rất quan trọng. Vai trò của định lý này cũng tương tự các định lý Banach về ánh xạ co và định lý Schauder trong lý thuyết điểm bất động. Nó được sử dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của nhiều lớp phương trình vi phân và tích phân. Vì sự quan trọng của nó, định lý Krasnoselskii được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm, tìm cách mở rộng, để có thể áp dụng cho các lớp phương trình mới. Cho đến nay, định lý này đã được mở rộng theo nhiều hướng khác nhau và là một trong những công cụ chủ yếu để chứng minh sự tồn tại nghiệm dương của nhiều lớp phương trình vi phân và tích phân. Chứng minh ban đầu của Định lý Krasnoselskii dựa trên định lý Schauder, khá phức tạp và dài. Với việc xây dựng khái niệm bậc topo theo nón cho ánh xạ dãn thì định lý Krasnoselskii được chứng minh đơn giản hơn rất nhiều và việc mở rộng định lý cũng trở nên thuận lợi hơn. Tuy nhiên việc sử dụng định lý Schauder để nghiên cứu Định lý Krasnoselskii vẫn còn ý nghĩa trong một số trường hợp, ví dụ khi cần trình bày định lý này một cách độc lập với việc dùng bậc topo.

Luận văn trình bày hai phương pháp nghiên cứu Định lý Krasnoselskii về ánh xạ nén hoặc giãn một nón, đó là phương pháp sử dụng bậc topo và phương pháp sử dụng Định lý Schauder. Ngoài ra luận văn cũng giới thiệu ứng dụng của Định lý và các mở rộng của nó để chứng minh sự tồn tại nghiệm dương của các phương trình tích phân.

Chương 1:

PHƯƠNG PHÁP BẬC TÔPÔ NGHIÊN CỨU ĐỊNH LÝ KRASNOSELSKII

1.1 Không gian Banach với thứ tự sinh bởi nón.

Định nghĩa 1.1.1.

1. Tập K trong không gian Banach thực X gọi là nón nếu:

- (i) K là tập đóng.
- (ii) $K + K \subset K, \lambda K \subset K, \forall \lambda > 0$.
- (iii) $K \cap (-K) = \{0\}$.

2. Nếu K là nón thì thứ tự trong X sinh bởi K được định bởi:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K$$

Mỗi $x \in K \setminus \{0\}$ được gọi là dương.

Mệnh đề 1.1.2. Giả sử “ $\leq$ ” là thứ tự sinh bởi nón K . Khi đó:

- 1. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \lambda x \leq \lambda y \quad \forall z \in K, \forall \lambda \geq 0$.
- 2. $(x_n \leq y_n (n \in N^*), \lim x_n = x, \lim y_n = y) \Rightarrow x \leq y$.
- 3. Nếu x_n là dãy tăng, hội tụ về x thì $x_n \leq x, \forall n \in N^*$.

Chứng minh mệnh đề 1.1.2.

- 1. Sử dụng thứ tự “ $\leq$ ” sinh bởi nón và tính chất (ii) trong định nghĩa 1.1.1.
- 2. Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = y - x$ mà $y_n - x_n \in K \Rightarrow y - x \in K$ (tính chất đóng của K).
- 3. Cho $m \rightarrow \infty$ trong bất đẳng thức $x_n \leq x_{n+m}$ ta có $x_n \leq x, \forall n \in N$.

1.2 Bậc tôpô theo nón.

Trước khi đi vào định nghĩa bậc tôpô theo nón, ta nhắc lại cách xây dựng bậc tôpô trong không gian hữu hạn chiều và không gian vô hạn chiều.

Bậc tôpô trong không gian hữu hạn chiều.

Cho G là tập mở bị chặn trong không gian R^n , $A: \overline{G} \rightarrow R^n, A \in C^1(\overline{G})$. Ta nhắc lại rằng $A \in C^1(G)$ khi và chỉ khi A khả vi tại mọi điểm $x_0 \in G$ và $A': G \rightarrow L(R^n; R^n)$ liên tục. Hơn nữa $A \in C^1(\overline{G})$ khi và chỉ khi có tập $E \supset G$, E mở, có $\overline{A} \in C^1(\overline{G})$ và $\overline{A}|_G = A$.

Định nghĩa 1.2.1. Cho $A \in C^1(\overline{G})$, ta gọi x là *điểm tới hạn* của A nếu $\det A'(x) = 0$, $A(x)$ gọi là *giá trị tới hạn* của A . Tập hợp các điểm tới hạn của A trên $\overline{G}$ kí hiệu là $Z_A(\overline{G})$ hay Z_A . Tập hợp các giá trị tới hạn $A(Z_A)$ được gọi là *nếp* của A .

Định lý 1.2.2. Nếu $A \in C^1(\overline{G})$ và $p \notin A(Z_A)$ thì $A^{-1}(p)$ chứa hữu hạn điểm.

(Chứng minh của Định lý 1.2.2 có thể tham khảo trong [6, p.143]).

Định nghĩa 1.2.3. Giả sử $A \in C^1(\overline{G})$, $p \notin A(\partial G)$ và $p \notin A(Z_A)$. Ta định nghĩa $\deg(A, G, p)$ là *bậc* của A tại p đối với G với:

$$\deg(A, G, p) := \sum_{x \in A^{-1}(p)} \text{sign} \det A'(x).$$

Chú ý 1.1:

- (i) Trong định nghĩa trên điều kiện $p \notin A(\partial G)$ là để cho $A'(x)$ tồn tại khi $x \in A^{-1}(p)$ vì khi đó $x \in A^{-1}(p) \not\subset \partial G$ nên $A'(x)$ tồn tại.
- (ii) Điều kiện $p \notin A(Z_A)$ bảo đảm rằng tổng $\sum_{x \in A^{-1}(p)} \text{sign} \det A'(x)$ là hữu hạn (do Định lý 1.2.2).

Hạn chế của Định nghĩa 1.2.3 là có quá nhiều ràng buộc đối với ánh xạ A và điểm p , sau đây là hai định nghĩa “tốt hơn”, sẽ loại bỏ được điều kiện A khả vi trên $\overline{G}$ và điều kiện $p \notin A(Z_A)$. Để kiểm tra tính đúng đắn của hai định nghĩa này, ta có thể tham khảo trong [6, p. 144-149].

Định nghĩa 1.2.4. Giả sử $A \in C^1(\overline{G})$, $p \notin A(\partial G)$ nhưng $p \in A(Z_A)$. Khi đó:

$$\deg(A, G, p) := \deg(A, G, q)$$

với q là điểm thỏa mãn:

$$q \notin A(Z_A) \text{ và } |q - p| < d(p, A(\partial G))$$

trong đó $d(a, \Delta) := \inf\{\|x - a\| : x \in \Delta\}$.

Định nghĩa 1.2.5. Giả sử $A \in C(\overline{G})$, $p \notin A(\partial G)$. Khi đó:

$$\deg(A, G, p) := \deg(B, G, p)$$

với $B \in C^1(\overline{G})$ thỏa:

$$|A(x) - B(x)| < d(p, A(\partial G)), \forall x \in \overline{G}.$$

Như vậy ta đã xem xét bậc tôpô của ánh xạ liên tục A trong không gian hữu hạn chiều. Câu hỏi đặt ra ở đây là làm thế nào để có thể xây dựng bậc tôpô cho một ánh xạ trong không gian vô hạn chiều. Phần

sau đây sẽ trình bày bậc tôpô trong không gian vô hạn chiều cho ánh xạ A có dạng $A = I - F$ với I là hàm đồng nhất, $F : \overline{G} \rightarrow X$ là hàm compact liên tục.

Bậc tôpô trong không gian vô hạn chiều (Bậc Leray-Schauder).

Định nghĩa 1.2.6. Cho X và Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn, một ánh xạ compact $F : X \rightarrow Y$ được gọi là *ánh xạ hữu hạn chiều* nếu $F(X)$ chứa trong một không gian con tuyến tính hữu hạn chiều của Y .

Định lý 1.2.7. (Định lý xấp xỉ Schauder) Cho G là một tập lồi trong không gian tuyến tính định chuẩn $X = (X, \|\cdot\|)$, $F : X \rightarrow G$ là ánh xạ compact liên tục. Khi đó với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một tập hữu hạn $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ trong $F(X)$ và một hàm liên tục hữu hạn chiều $F_\varepsilon : X \rightarrow G$ thỏa mãn:

$$(i) \|F_\varepsilon(x) - F(x)\| < \varepsilon, \forall x \in X.$$

$$(ii) F_\varepsilon(X) \subseteq co(V) \subseteq G.$$

trong đó $co(V)$ là tập lồi nhỏ nhất chứa V .

(Chứng minh của Định lý 1.2.7 có thể tham khảo trong [6, Định lý 4.12]).

Định nghĩa 1.2.8. Cho G là một tập mở, bị chặn trong không gian định chuẩn $X = (X, \|\cdot\|)$ và $A = I - F$ với I là hàm đồng nhất, $F : \overline{G} \rightarrow X$ là hàm compact liên tục, $p \notin A(\partial G)$. Đặt $\hat{A} = I - \hat{F}$ với $\hat{F}$ là một hàm tùy ý xác định trên $\overline{G}$ liên tục và hữu hạn chiều thỏa:

$$\|F(x) - \hat{F}(x)\| < d(p, A(\partial G)), \forall x \in \overline{G}.$$

Chọn một không gian tuyến tính hữu hạn chiều V chứa $\hat{F}(\overline{G})$ và p , đặt $G_V = G \cap V$, ta định nghĩa:

$$\deg(A, G, p) := \deg(\hat{A}, G_V, p),$$

và gọi $\deg(A, G, p)$ là *bậc Leray - Schauder của ánh xạ A tại p đối với G* .

Nhận xét: Sự tồn tại của ánh xạ $\hat{F}$ được suy ra từ Định lý 1.2.7. Ngoài ra, sự tồn tại của $\deg(\hat{A}, G_V, p)$ và sự độc lập với việc chọn không gian V trong Định nghĩa 1.2.8 có thể tham khảo [6, p.152-153]).

Bậc tôpô theo nón K.

Bổ đề 1.2.9. Cho không gian Banach X , tập đóng $M \subset X$ và ánh xạ compact liên tục $A : M \rightarrow X$. Khi đó tồn tại ánh xạ compact liên tục $\overline{A} : X \rightarrow X$ sao cho:

$$\overline{A}(x) = A(x) \quad \forall x \in M, \quad \text{và} \quad \overline{A}(X) \subset \overline{co}A(M).$$

(Chứng minh của Bổ đề 1.2.9 có thể xem trong [4, p.44]).

Định nghĩa 1.2.10. Cho X là không gian Banach với nón K . Giả sử $G \subset X$ là tập mở, bị chặn. $A: K \cap \partial G \rightarrow K$ là ánh xạ compact liên tục sao cho: $Ax \neq x \quad \forall x \in K \cap \partial G$. Gọi $\bar{A}: X \rightarrow X$ là ánh xạ compact liên tục sao cho:

$$\begin{cases} \bar{A}(x) = A(x) \quad \forall x \in K \cap \partial G \\ \bar{A}(X) \subset \overline{co}(A(K \cap \partial G)) \subset K \end{cases} \quad (1.1)$$

(Sự tồn tại của $\bar{A}$ được suy ra từ Bổ đề 1.2.9).

Khi đó $(I - \bar{A})(x) \neq 0$ với mọi $x \in \partial G$. Giả sử trái lại, ta có $x_0 \in \partial G: x_0 = \bar{A}x_0$ mà $\bar{A}(X) \subset K$, nên $x_0 \in K \cap \partial G$. Do đó $x_0 = \bar{A}(x_0) = A(x_0)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $A(x) \neq x \quad \forall x \in K \cap \partial G$. Vì vậy bậc tôpô $\deg(I - \bar{A}, G, 0)$ được xác định tốt.

Ta định nghĩa:

$$i_k(A, G) := \deg(I - \bar{A}, G, 0)$$

và gọi $i_k(A, G)$ là bậc tôpô theo nón K của ánh xạ A trên tập mở G .

Để kiểm tra tính đúng đắn của Định nghĩa 1.2.10, ta cần xem xét một số kết quả của khái niệm đồng luân của những phép biến đổi compact (Chứng minh của những kết quả này có thể tham khảo trong [6, Định lý 12.16])

Định nghĩa 1.2.11. Cho G là tập mở, bị chặn của không gian tuyến tính định chuẩn $X = (X, \|\cdot\|)$. Giả sử $h: [0, 1] \rightarrow K(\bar{G})$, ở đây $K(\bar{G})$ là tập hợp các hàm compact liên tục từ $\bar{G}$ vào X . Ta nói rằng h là đồng luân của những phép biến đổi compact trên $\bar{G}$ nếu với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho:

$$\|(h(t))(x) - (h(s))(x)\| < \varepsilon \quad \text{với mọi } x \in \bar{G}, |t - s| < \delta.$$

Định lý 1.2.12. (Bất biến dưới đồng luân) Cho G là tập mở, bị chặn của không gian tuyến tính định chuẩn $X = (X, \|\cdot\|)$, h là đồng luân của những phép biến đổi compact trên $\bar{G}$. Đặt $\phi_t = I - h(t)$, nếu $p \notin \phi_t(\partial G)$ với $0 \leq t \leq 1$ thì $\deg(\phi_t, G, p)$ không phụ thuộc vào $t \in [0, 1]$.

Bây giờ ta kiểm tra tính có lý của định nghĩa 1.2.10. Giả sử $\bar{A}'$ là một mở rộng khác của A thỏa (1.1).

$$\text{Đặt } h(t): X \rightarrow K, h(t) = t\bar{A}' + (1-t)\bar{A}$$

Lấy $\varepsilon > 0$ bất kì, chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{\|\bar{A} - \bar{A}'\|}$ ta có:

$$\|(h(t))(x) - (h(s))(x)\| = \|(t-s)(\bar{A} - \bar{A}')(x)\| \leq |t-s| \|\bar{A} - \bar{A}'\| < \varepsilon \quad \text{với } x \in \bar{G}, |t-s| < \delta.$$

Do đó h là một đồng luân của $\bar{A}, \bar{A}'$

Đặt $\phi_t(x) = (I - h(t))(x) = t(I - \bar{A})(x) + (1-t)(I - \bar{A}')(x)$ Ta có:

$$\phi_0 = I - \bar{A}; \phi_1 = I - \bar{A}'. \phi_0 = I - \bar{A}; \phi_1 = I - \bar{A}'$$

$\phi_t(x) \neq 0$ với mọi $x \in \partial G, t \in [0,1]$ (vì nếu trái lại có $x_0 \in \partial G, t_0 \in [0,1]$ sao cho: $\phi_{t_0}(x_0) = 0$ hay

$x_0 = h(t_0)(x_0) \in K$ thì $x_0 \in K \cap \partial G$, nghĩa là $x_0 = Ax_0$, mâu thuẫn với giả thiết). Do đó $0 \notin \phi_t(\partial G)$ với mọi $t \in [0,1]$. Theo Định lý 1.2.12, ta có $\deg(\phi_0, G, 0) = \deg(\phi_1, G, 0)$, hay là

$$\deg(I - \bar{A}, G, 0) = \deg(I - \bar{A}', G, 0).$$

Vậy định nghĩa của bậc tôpô theo nón đã được khẳng định là hợp lý.

Tính chất bậc tôpô theo nón K.

Cho X là không gian Banach với nón K . Giả sử $G \subset X$ là tập mở, bị chặn. $A: K \cap \bar{G} \rightarrow K$ compact liên tục, $Ax \neq x, \forall x \in K \cap \partial G$.

(1) *Tính chuẩn tắc*: Nếu $A(x) = u_0 \in G, \forall x \in \bar{G}$ thì $i_K(A, G) = 1$

(2) *Tính bất biến đồng luân*: Giả sử $A_0, A_1: K \cap \partial G \rightarrow K$ compact liên tục, $A_0x \neq x; A_1x \neq x, \forall x \in K \cap \partial G$ và đồng luân dương trên $K \cap \partial G$ theo nghĩa: tồn tại ánh xạ compact $F: (K \cap \partial G) \times [0,1] \rightarrow K$ sao cho:

$$F(x, t) \neq x, \forall (x, t) \in \partial G \times [0,1]; F(x, 0) = A_0(x); F(x, 1) = A_1(x).$$

Thì $i_K(A_0, G) = i_K(A_1, G)$.

(3) *Tính cộng tính*: Giả sử G, G_1, G_2 là các tập mở bị chặn, $G_1 \cap G_2 = \emptyset, G_i \subset G (i=1,2)$ và $A: K \cap \bar{G} \rightarrow K$ là một ánh xạ compact thỏa mãn: $A(x) \neq x$ với mọi $x \in K \cap (\bar{G} \setminus (G_1 \cup G_2))$. Khi đó:

$$i_K(A, G) = i_K(A, G_1) + i_K(A, G_2).$$

(4) *Tính chất nghiệm*: Nếu $i_K(A, G) \neq 0$ thì A có điểm bất động trong $K \cap G$.

1.3 Định lý Krasnoselskii và các mở rộng.

Trong mục này, ta sẽ trình bày Định lý Krasnoselskii (Định lý 1.3.4) và một số định lý mở rộng. Chứng minh của các định lý này dựa trên bậc topo của một số hàm số. trong các trường hợp đặc biệt. Do đó ta sẽ trình bày trước Định lý 1.3.2 và Định lý 1.3.3 như một cơ sở cho việc chứng minh Định lý Krasnoselskii.

Bổ đề 1.3.1. Cho X là không gian Banach với nón K . Giả sử $G \subset X$ là một tập mở, bị chặn chứa điểm 0, $A: K \cap \bar{G} \rightarrow K; A(x) \equiv u \forall x \in K \cap \bar{G}$. Khi đó, nếu $u \notin G$ thì $i_K(A, G) = 0$.

Chứng minh Bổ đề 1.3.1. Giả sử $i_K(A, G) \neq 0$, theo tính chất nghiệm của bậc tôpô theo nón thì A có điểm bất động x_0 trong $K \cap G$, suy ra $x_0 \equiv u \in G$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

□

Định lý 1.3.2. Cho X là không gian Banach với nón K . Giả sử $G \subset X$ là tập mở, bị chặn chứa 0 , $A: K \cap \overline{G} \rightarrow K$ là ánh xạ compact liên tục sao cho: $Ax \neq x$ với mọi $x \in K \cap \partial G$.

(i) Nếu $A(x) \neq \lambda x, \forall x \in K \cap \partial G, \forall \lambda \geq 1$ thì $i_K(A, G) = 1$.

(ii) Nếu tồn tại phần tử $x_0 \in K \setminus \{0\}$ sao cho $x - A(x) \neq \lambda x_0, \forall x \in K \cap \partial G, \forall \lambda \geq 0$ thì $i_K(A, G) = 0$.

(iii) Giả sử (a) $Ax \neq \lambda x, \forall x \in K \cap \partial G, \forall \lambda \leq 1$, và

$$(b) \inf \{\|Ax\|: x \in K \cap \partial G\} > 0.$$

Khi đó $i_K(A, G) = 0$.

Chứng minh Định lý 1.3.2.

(i). Xét ánh xạ compact $F: (K \cap \partial G) \times [0, 1] \rightarrow K, F(x, t) = tA(x)$.

Ta có $F(x, t) = tA(x) \neq x, \forall x \in K \cap \partial G, \forall t \leq 1$ (do giả thiết), suy ra A đồng luân dương với $A_0(x) \equiv 0$ ($F(x, 0) = 0, F(x, 1) = A(x)$).

Do đó $i_K(A, G) = i_K(0, G) = 1$ (do tính chuẩn tắc của bậc tôpô theo nón, $0 \in G$).

(ii). Ta chứng minh A đồng luân dương với $A_0(x) = \lambda x_0$ khi λ đủ lớn vì khi đó $\lambda x_0 \notin \overline{G}$ và áp dụng Bổ đề 1.3.1 ta có $i_K(A, G) = 0$.

Chỉ cần chứng minh tồn tại λ_0 sao cho:

$$x \neq (1-t)Ax + t\lambda x_0, \forall x \in K \cap \partial G, \forall t \in [0, 1], \forall \lambda \geq \lambda_0. \quad (1.2)$$

Giả sử trái lại, tồn tại $x_n \in K \cap \partial G, t_n \in [0, 1], \lambda_n \geq 0, \lambda_n \rightarrow +\infty$ sao cho:

$$x_n - (1-t_n)Ax_n = t_n\lambda_n x_0. \quad (1.3)$$

Vì $\{x_n\} \subset G, \{t_n\}$ bị chặn, A compact nên vế trái (1.3) bị chặn. Do đó vế phải của (1.3) cũng bị chặn hay $\{t_n\lambda_n\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}$. Không giảm tính tổng quát ta có thể xem $\lim t_n\lambda_n = \lambda \geq 0$ (nếu không ta xét dãy con). Khi đó

$$\lim t_n = \lim \frac{1}{\lambda_n}(t_n\lambda_n) = 0,$$

điều này suy ra $A(x_n)$ hội tụ (do A compact, $\{x_n\} \subset G$ bị chặn).

Do đó $\{x_n\}$ hội tụ về một $x \in K \cap \partial G$ (do $K \cap \partial G$ đóng). Khi đó qua giới hạn trong (1.3) ta có $x - Ax = \lambda x_0, x \in K \cap \partial G, \lambda \geq 0$, mâu thuẫn với giả thiết. Vậy (1.2) đúng.

(iii). Lấy $t > 1$ bất kỳ, xét ánh xạ compact $h_t: (K \cap \partial G) \times [0, 1] \rightarrow K$,

$$h_t(x, s) = (1 - s)Ax + stAx$$

Đặt $\lambda(s, t) = \frac{1}{1 + s(t-1)}$. Ta có $0 < \lambda(s, t) \leq 1, \forall s \in [0, 1], \forall t > 1$ và $h(x, s) = \frac{1}{\lambda(s, t)} Ax$,

điều này suy ra $h(x, s) \neq x$ (do giả thiết (a)). Do đó A và tA (với $t > 1$) đồng luân dương trên $K \cap \partial G$, theo tính bất biến đồng luân của bậc tôpô ta có:

$$i_K(A, G) = i_K(tA, G), \forall t > 1.$$

Ta sẽ chứng minh tồn tại t_0 sao cho $\forall t \geq t_0 : i_K(tA, G) = 0$, khi đó $i_K(A, G) = 0$. Thực vậy, áp dụng kết quả vừa chứng minh ở phần (ii) ta chỉ cần chứng minh với $x_0 \in K \setminus \{0\}$ cố định thì:

$$x - tA(x) \neq \lambda x_0, \forall t \geq t_0, \forall x \in K \cap \partial G, \forall \lambda \geq 0. \quad (1.4)$$

Giả sử trái lại, tồn tại các dãy $t_n \rightarrow +\infty, x_n \in K \cap \partial G, \lambda_n \geq 0$ sao cho

$$x_n - t_n A(x_n) = \lambda_n x_0.$$

Vì $A : K \cap \overline{G} \rightarrow K$ compact nên tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ để $A(x_{n_k}) \rightarrow y \in K$. Mặt khác, chú ý rằng

$$\frac{x_{n_k}}{t_{n_k}} - A(x_{n_k}) = \frac{\lambda_{n_k}}{t_{n_k}} x_0 \in K.$$

Cho $k \rightarrow +\infty$ ta có $-y \in K$, suy ra $y \in K \cap (-K)$ hay $y = 0$, mâu thuẫn với (b). Do đó (1.4) đúng hay $i_K(tA, G) = 0 \forall t \geq t_0$. Vậy $i_K(A, G) = i_K(tA, G) = 0 (t \geq t_0)$. $\square$

Định lý 1.3.3. Cho X là không gian Banach với nón K . Giả sử $G \subset X$ là tập mở, bị chặn, chứa 0 và $A : K \cap \overline{G} \rightarrow K$ là ánh xạ compact liên tục sao cho $Ax \neq x$ với mọi $x \in K \cap \partial G$.

(i) Giả sử tồn tại $u \in G$ sao cho $Ax - x \neq \lambda(x - u), \forall x \in \partial G, \forall \lambda \geq 0$, khi đó $i_K(A, G) = 1$.

(ii) Nếu tồn tại $u \in K \setminus \overline{G}$ sao cho $Ax - x \neq \lambda(x - u), \forall x \in \partial G, \forall \lambda \geq 0$, khi đó $i_K(A, G) = 0$.

Chứng minh Định lý 1.3.3.

(i) Xét ánh xạ compact $h : (K \cap \partial G) \times [0, 1] \rightarrow K$, $h(x, t) = (1 - t)Ax + tu$, ta chứng minh rằng $h(x, t) \neq x, \forall (x, t) \in (K \cap \partial G) \times [0, 1]$. Thật vậy, giả sử trái lại rằng tồn tại

$$x_0 \in (K \cap \partial G), t_0 \in [0, 1] \text{ sao cho } (1 - t_0)Ax_0 + t_0 u_0 = x_0.$$

Ta suy ra $t_0 \neq 1$, vì nếu không ta có $u_0 = x_0$, mâu thuẫn với $x_0 \in \partial G, u \in G$ (G mở). Khi đó

$$Ax_0 - x_0 = \frac{t_0}{1 - t_0}(x_0 - u_0) \text{ với } \frac{t_0}{1 - t_0} > 0, \text{ điều này mâu thuẫn với giả thiết.}$$

Do đó $h(x, t) \neq x, \forall (x, t) \in (K \cap \partial G) \times [0, 1]$. Theo tính bất biến đồng luân ta có:

$$i_K(A, G) = i_K(u, G) = 1 \text{ (do } u \in G \text{)}.$$

(ii) Chứng minh tương tự như trên ta có:

$$i_K(A, G) = i_K(u, G) = 0 \text{ (do } u \notin G \text{, Bổ đề 1.3.1)}.$$

Ta kết thúc chứng minh. $\square$

Như vậy ở phần trên ta đã xét một số trường hợp tính bậc tôpô theo nón của ánh xạ compact liên tục. Sau đây ta sẽ sử dụng những kết quả đó để chứng minh Định lý Krasnoselskii và các định lý mở rộng. Trước hết để dễ theo dõi ta sẽ quy ước một số kí hiệu tập hợp: $B_r = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$; $S_r = \{x \in X : \|x\| = r\}$, $K_r = K \cap \overline{B_r}$, $r > 0$.

Định lý 1.3.4. (Định lý Krasnoselskii)

Cho X là không gian Banach với nón K . Cho hai số thực $r, R : 0 < r < R$. Giả sử $A : K_R \rightarrow K$ compact liên tục và:

(i) $Ax \neq \lambda x, \forall x \in K \cap S_r, \forall \lambda \geq 1$.

(ii) Tồn tại phần tử $x_0 \in K \setminus \{0\}$ thỏa $x - A(x) \neq \lambda x_0, \forall x \in K \cap S_R, \forall \lambda \geq 0$.

Khi đó A có điểm bất động dương x thỏa $r < \|x\| < R$.

Chứng minh định lý 1.3.4.

Theo Định lý 1.3.2 ta có $i_K(A, B_r) = 1; i_K(A, B_R) = 0$. Ta áp dụng tính cộng tính của bậc tôpô với:

$G = B_R, G_1 = B_r, G_2 = B_R \setminus \overline{B_r}$. Khi đó ta có

$$G_i \subset G, i = 1, 2; G_1 \cap G_2 = \emptyset; K \cap (\overline{G} \setminus (G_1 \cup G_2)) = (K \cap S_r) \cup (K \cap S_R).$$

Từ giả thiết của định lý ta có $x \neq Ax$ với mọi $x \in (K \cap S_r) \cup (K \cap S_R)$, hay là:

$$x \neq Ax, \forall x \in K \cap (\overline{G} \setminus (G_1 \cup G_2)).$$

Áp dụng tính cộng tính của bậc tôpô ta có đẳng thức:

$$i_K(A, G_2) = i_K(A, G) - i_K(A, G_1).$$

Suy ra $i_K(A, B_R \setminus \overline{B_r}) = i_K(A, B_R) - i_K(A, B_r) = 0 - 1 = -1 \neq 0$. Vì vậy tồn tại $x \in K \cap (B_R \setminus \overline{B_r})$ sao cho

$Ax = x$, hay là A có điểm bất động dương thỏa $r < \|x\| < R$. $\square$

Hệ quả 1.3.5. Kết luận của Định lý 1.3.4 vẫn đúng nếu thay cả hai điều kiện (i), (ii) bởi một trong hai điều kiện sau:

(i') $A(x) \not\leq x, \forall x \in K \cap S_r$ và $A(x) \not\leq x, \forall x \in K \cap S_R$.

(ii') $A(x) \not\leq x, \forall x \in K \cap S_r$ và $A(x) \not\geq x, \forall x \in K \cap S_R$.

Chứng minh hệ quả 1.3.5.

(i') Ta sẽ chứng minh rằng:

$$Ax \neq \lambda x, \forall \lambda \geq 1, \forall x \in K \cap S_r. \quad (1.5)$$

Thật vậy, giả sử trái lại có $\lambda_0 \geq 1, x_0 \in K \cap S_r : Ax_0 = \lambda_0 x_0$. Khi đó $A(x_0) \geq x_0$, mâu thuẫn với giả thiết

(i'). Vậy (1.5) đúng. Theo Định lý 1.3.2 ta có

$$i_K(A, K \cap B_r) = 1. \quad (1.6)$$

Mặt khác với $u_0 \in K \setminus \{0\}$ bất kì. ta có

$$x - A(x) \neq \lambda u_0, \forall \lambda \geq 0, x \in K \cap S_R. \quad (1.7)$$

Thật vậy, giả sử trái lại tồn tại $\lambda_1 \geq 0, x_1 \in K \cap S_R : x_1 - A(x_1) = \lambda_1 u_0$. Khi đó $A(x_1) \leq x_1$, điều này mâu thuẫn với giả thiết (i'). Vậy (1.7) đúng. Mặt khác theo Định lý 1.3.2 ta có

$$i_K(A, K \cap B_R) = 0. \quad (1.8)$$

Từ (1.6), (1.8) và áp dụng cách chứng minh tương tự như trong Định lý 1.3.4, ta có:

$$i_K(A, K \cap (B_R \setminus \overline{B_r})) = -1 \neq 0.$$

Theo tính chất nghiệm, A có ít nhất một điểm bất động dương trong $B_R \setminus \overline{B_r}$.

(ii') Lý luận tương tự như (i') ta có $i_K(A, K \cap B_r) = 0$, $i_K(A, K \cap B_R) = 1$ và $i_K(A, K \cap (B_R \setminus \overline{B_r})) = 1 \neq 0$ hay A có ít nhất một điểm bất động dương trong $B_R \setminus \overline{B_r}$.

.□

Định lý 1.3.6 Giả sử có điều kiện (i) của Định lý 1.3.3 và điều kiện :

$$(a) Ax \neq x, \forall x \in S_{r_2} \cap K, \forall \lambda \leq 1.$$

$$(b) \inf \{ \|Ax\| : x \in S_{r_2} \cap K \} > 0.$$

Khi đó kết luận của Định lý 1.3.4 vẫn đúng.

Chứng minh định lý 1.3.6.

(áp dụng Định lý 1.3.2 (iii), và cách chứng minh tương tự Định lý 1.3.4).

Định lý 1.3.7. Cho X là một không gian Banach được sắp thứ tự theo nón K , $U_1, U_2 \subseteq X$ là hai tập mở, bị chặn, khác $\emptyset$ sao cho $0 \in U_1, \overline{U_1} \subseteq U_2$; $A : K \cap \overline{U_2} \rightarrow K$ compact liên tục và thỏa một trong hai điều kiện sau:

$$(i) \|Ax\|_X \leq \|x\|_X, \forall x \in K \cap \partial U_1 \text{ và } \|Ax\|_X \geq \|x\|_X, \forall x \in K \cap \partial U_2.$$

$$(ii) \|Ax\|_X \geq \|x\|_X, \forall x \in K \cap \partial U_1 \text{ và } \|Ax\|_X \leq \|x\|_X, \forall x \in K \cap \partial U_2.$$

Khi đó A có ít nhất một điểm bất động trong $K \cap (\overline{U_2} \setminus U_1)$.

Chứng minh Định lý 1.3.7.

Ta có thể giả sử rằng A không có điểm bất động trên $K \cap \partial U_2$ và $K \cap \partial U_1$ vì nếu không ta đã có điều phải chứng minh. Do đó $A(x) \neq x, \forall x \in (K \cap \partial U_1) \cup (K \cap \partial U_2)$, hay là

$$A(x) \neq x, \forall x \in K \cap (\overline{G} \setminus (G_1 \cup G_2)) \text{ với } G = U_2, G_1 = U_1, G_2 = U_2 \setminus \overline{U_1}. \quad (1.9)$$

(i) Ta chứng minh rằng

$$A(x) \neq \lambda x, \forall x \in K \cap \partial U_1, \forall \lambda \geq 1. \quad (1.10)$$

Thật vậy, giả sử trái lại $\exists x_0 \in K \cap \partial U_1, \exists \lambda_0 > 1: A(x_0) = \lambda_0 x_0$ (do ta giả sử A không có điểm bất động trên $K \cap \partial U_1$ nên $\lambda_0 \neq 1$).

Khi đó $\|Ax_0\|_X = \lambda_0 \|x_0\|_X > \|x_0\|_X$, mâu thuẫn với giả thiết (i), do đó (1.10) đúng. hay là:

$$i_K(A, U_1) = 1 \text{ (Định lý 1.3.1(1)).} \quad (1.11)$$

Ta cũng chứng minh được rằng

$$A(x) \neq \lambda x, \forall x \in K \cap \partial U_2, \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (1.12)$$

Thật vậy, giả sử trái lại $\exists x_1 \in K \cap \partial U_2, \exists \lambda_1 \in [0, 1): A(x_1) = \lambda_1 x_1$. Khi đó:

$$\|Ax_1\|_X = \lambda_1 \|x_1\|_X < \|x_1\|_X,$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết (i). Do đó (1.12) đúng.

Mặt khác từ (i) ta có

$$\inf_{x \in K \cap \partial U_2} \|Ax\|_X \geq \inf_{x \in K \cap \partial U_2} \|x\|_X > 0 \quad (1.13)$$

(do $0 \in U_2$ mở, $x \in \partial U_2$ suy ra $x \neq 0$).

Từ (1.12) và (1.13) ta có

$$i_K(A, U_2) = 0 \text{ (Định lý 1.3.2 (iii)).} \quad (1.14)$$

Từ (1.9), (1.11) và (1.14), áp dụng tính cộng tính của bậc tôpô theo nón ta có:

$$i_K(A, U_2 \setminus \overline{U_1}) = i_K(A, U_2) - i_K(A, U_1) = -1 \neq 0.$$

Vậy theo tính chất nghiệm ta có tồn tại ít nhất một điểm bất động trong $K \cap (\overline{U_2} \setminus U_1)$.

(ii) Chứng minh tương tự như (i).

Định nghĩa 1.3.8. Cho X là không gian Banach với nón K , $\xi: K \rightarrow R$ là hàm liên tục lồi, $\vartheta: K \rightarrow R$ là hàm liên tục lõm. Cho trước $\lambda, \mu \in R$, ta định nghĩa:

$$K_1 = K(\xi, \lambda) = \{x \in K : \xi(x) \leq \lambda\}.$$

$$K_2 = K(\vartheta, \mu) = \{x \in K : \vartheta(x) \geq \mu\}.$$

$$K_{1,2} = K(\xi, \vartheta, \lambda, \mu) = K(\xi, \lambda) \cap K(\vartheta, \mu).$$

Mệnh đề 1.3.9. Cho X là không gian Banach với nón K , $\xi: K \rightarrow R$ là hàm liên tục lồi, $\vartheta: K \rightarrow R$ là hàm liên tục lõm. Cho trước $\lambda, \mu \in R$. Đặt $G = \{x \in K : \vartheta(x) < \mu\}$ là tập khác $\emptyset$ và bị chặn. Giả sử tập

$\{x \in K_{1,2} : \vartheta(x) > \mu\} \neq \emptyset$. $A: K \rightarrow K$ compact liên tục sao cho $Ax \neq x, \forall x \in K \cap \partial G$ và thỏa:

(i) $\vartheta(Ax) > \mu, \forall x \in K_{1,2}$.

(ii) $\vartheta(Ax) > \mu, \forall x \in K_2$ với $\xi(Ax) > \lambda$.

Khi đó $i_K(A, G) = 0$.

Chứng minh Mệnh đề 1.3.9.

Lấy $u \in \{x \in K_{1,2} : \mathcal{G}(x) > \mu\}$ ta có $u \in K \setminus \overline{G}$, $\xi(u) \leq \lambda$ và $\mathcal{G}(u) > \mu$. Để áp dụng Định lý 1.3.3 ta cần chứng minh rằng

$$Ax - x \neq \lambda(x - u), \forall x \in \partial G, \forall \lambda \geq 0. \quad (1.15)$$

Thật vậy, giả sử trái lại $\exists x_0 \in \partial G, \lambda_0 \geq 0 : Ax_0 - x_0 = \lambda_0(x_0 - u)$, ta có $x_0 \in K_2$,

$$\mathcal{G}(x_0) = \mu \text{ và } x_0 = \frac{1}{1 + \lambda_0} Ax_0 + \frac{\lambda_0}{1 + \lambda_0} u.$$

Trường hợp 1: Nếu $\xi(Ax_0) \leq \lambda$.

Khai thác tính lồi của hàm ξ ta có $\xi(x_0) \leq \frac{1}{1 + t_0} \xi(Ax_0) + \frac{\lambda_0}{1 + t_0} \xi(u) \leq \lambda$, do đó $x_0 \in K_{1,2}$, suy ra

$\mathcal{G}(Ax_0) > \mu$ (giả thiết (i)). Vì $\mathcal{G}$ lõm nên ta có mâu thuẫn:

$$\mu = \mathcal{G}(x_0) \geq \frac{1}{1 + t_0} \mathcal{G}(Ax_0) + \frac{\lambda_0}{1 + t_0} \mathcal{G}(u) > \mu.$$

Trường hợp 2: Nếu $\xi(Ax_0) > \lambda$.

Theo giả thiết (ii) ta có $\mathcal{G}(Ax_0) > \mu$, khi đó ta có mâu thuẫn:

$$\mu = \mathcal{G}(x_0) \geq \frac{1}{1 + t_0} \mathcal{G}(Ax_0) + \frac{1}{1 + t_0} \mathcal{G}(u) > \mu.$$

Vậy (1.15) đúng, do $u \in K \setminus \overline{G}$ nên áp dụng Mệnh đề 1.3.3 (iii) ta có $i_K(A, G) = 0$. $\square$

Mệnh đề 1.3.10. Cho X là không gian Banach với nón K , $\xi : K \rightarrow R$ là hàm liên tục lồi, $\mathcal{G} : K \rightarrow R$ là hàm liên tục lõm. Cho trước $\lambda, \mu \in R$. Đặt $G = \{x \in K : \xi(x) < \lambda\}$ là tập khác $\emptyset$ và bị chặn. Giả sử tập $\{x \in K_{1,2} : \xi(x) < \lambda\} \neq \emptyset$, $A : K \rightarrow K$ compact liên tục sao cho $Ax \neq x, \forall x \in K \cap \partial G$ và thỏa:

(i) $\xi(Ax) < \lambda, \forall x \in K_{1,2}$.

(ii) $\xi(Ax) < \lambda, \forall x \in K_1$ với $\mathcal{G}(Ax) < \mu$.

Khi đó $i_K(A, G) = 1$.

Chứng minh Mệnh đề 1.3.10.

Lấy $u \in \{x \in K_{1,2} : \xi(x) < \lambda\}$ ta có $u \in G$, $\xi(u) < \lambda$ và $\mathcal{G}(u) \geq \mu$. Để áp dụng Định lý 1.3.3 ta cần chứng minh rằng $Ax - x \neq \lambda(x - u), \forall x \in \partial G, \forall \lambda \geq 0$ (1.16)

Thật vậy, giả sử trái lại $\exists x_0 \in \partial G, \lambda_0 \geq 0 : Ax_0 - x_0 = \lambda_0(x_0 - u)$. Ta có $x_0 \in K_1$, $\xi(x_0) = \lambda$ và

$$x_0 = \frac{1}{1 + \lambda_0} Ax_0 + \frac{\lambda_0}{1 + \lambda_0} u.$$

Trường hợp 1: Nếu $\mathcal{G}(Ax_0) \geq \mu$.

Khai thác tính lõm của hàm $\mathcal{G}$ ta có $\mathcal{G}(x_0) \geq \frac{1}{1+\lambda_0} \mathcal{G}(Ax_0) + \frac{\lambda_0}{1+\lambda_0} \mathcal{G}(u) \geq \mu$, do đó $x_0 \in K_{1,2}$, suy ra $\xi(Ax_0) < \lambda$ (giả thiết (i)).

Do ξ lõm ta lại có $\lambda = \xi(x_0) \leq \frac{1}{1+\lambda_0} \xi(Ax_0) + \frac{\lambda_0}{1+\lambda_0} \xi(u) < \lambda$, mâu thuẫn.

Trường hợp 2: Nếu $\mathcal{G}(Ax_0) < \mu$.

Theo giả thiết (ii) ta có $\xi(Ax_0) < \lambda$, do đó $\lambda = \xi(x_0) \leq \frac{1}{1+t_0} \xi(Ax_0) + \frac{1}{1+t_0} \xi(u) < \lambda$, mâu thuẫn.

Vậy (1.16) đúng, do $u \in G$ nên áp dụng Định lý 1.3.3 (i) ta có $i_K(A, G) = 1$. $\square$

Định lý 1.3.11. Cho X là không gian Banach với nón K , $\xi: K \rightarrow R$ là hàm liên tục lõm, $\mathcal{G}: K \rightarrow R$ là hàm liên tục lõm. Cho trước $\lambda, \mu \in R$. Đặt $G = \{x \in K : \mathcal{G}(x) < \mu\}$ là tập bị chặn, $0 \in G$. Giả sử tập $\{x \in K_{1,2} : \mathcal{G}(x) > \mu\} \neq \emptyset$, ánh xạ $A: K \rightarrow K$ compact liên tục sao cho $Ax \neq x, \forall x \in \partial G$ và thỏa :

- (i) $\mathcal{G}(Ax) > \mu, \forall x \in K_{1,2}$.
- (ii) $\mathcal{G}(Ax) > \mu, \forall x \in K_2$ với $\xi(Ax) > \lambda$.
- (iii) $i_K(A, K_r) = 1$ với $r > 0$ đủ nhỏ và $i_K(A, K_R) = 1$ với $R > 0$ đủ lớn.

Khi đó A có ít nhất 3 điểm bất động trong K .

Chứng minh Định lý 1.3.11.

Theo Mệnh đề 1.3.9 ta có $i_K(A, G) = 0$. Do $0 \in G$ và G bị chặn nên tồn tại $r > 0$ đủ nhỏ và $R > 0$ đủ lớn sao cho:

$$0 \in \overline{K_r} \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq K_R.$$

Từ giả thiết (iii) ta có $Ax \neq x, \forall x \in \partial K_r \cup \partial K_R \cup \partial G$. Lại có

$$\overline{G} \setminus ((G \setminus \overline{K_r}) \cup K_r) = \partial G \cup \partial K_r, \quad \text{và} \quad \overline{K_R} \setminus ((K_R \setminus \overline{G}) \cup G) = \partial G \cup \partial K_R.$$

Áp dụng tính cộng tính của bậc tôpô theo nón ta có:

$$i_K(A, G \setminus \overline{K_r}) = i_K(A, G) - i_K(A, K_r) = 0 - 1 = -1 \neq 0,$$

$$i_K(A, K_R \setminus \overline{G}) = i_K(A, K_R) - i_K(A, G) = 1 - 0 = 1 \neq 0.$$

Do đó theo tính chất nghiệm của bậc tôpô theo nón ta có A có ít nhất 3 điểm bất động $x_1 \in K_r, x_2 \in G \setminus \overline{K_r}, x_3 \in K_R \setminus G$. $\square$

Định lý 1.3.10. Cho X là không gian Banach với nón K , $\xi: K \rightarrow R$ là hàm liên tục lõm, $\mathcal{G}: K \rightarrow R$ là hàm liên tục lõm. Cho trước $\lambda, \mu \in R$. Đặt $G = \{x \in K : \xi(x) < \lambda\}$ là tập bị chặn, $0 \in G$. Giả sử tập $\{x \in K_{1,2} : \xi(x) < \lambda\} \neq \emptyset$, ánh xạ $A: K \rightarrow K$ compact liên tục sao cho $Ax \neq x, \forall x \in \partial G$ và thỏa:

(i) $\xi(Ax) < \lambda, \forall x \in K_{1,2}$.

(ii) $\xi(Ax) < \lambda, \forall x \in K_1$ với $\mathcal{G}(Ax) < \mu$.

(iii) $i_K(A, K_r) = 0$ với $r > 0$ đủ nhỏ và $i_K(A, K_R) = 0$ với $R > 0$ đủ lớn.

Khi đó A có ít nhất 3 điểm bất động trong K .

Chứng minh Định lý 1.3.10.

Theo Mệnh đề 1.3.10 ta có $i_K(A, G) = 1$. Do $0 \in G$ và G bị chặn nên tồn tại $r > 0$ đủ nhỏ và $R > 0$ đủ lớn sao cho:

$$0 \in \overline{K_r} \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq K_R.$$

Từ giả thiết (iii) ta có $Ax \neq x$ với mọi $x \in \partial K_r \cup \partial K_R \cup \partial G$. Lại có

$$\overline{G} \setminus \left((G \setminus \overline{K_r}) \cup K_r \right) = \partial G \cup \partial K_r, \quad \text{và} \quad \overline{K_R} \setminus \left((K_R \setminus \overline{G}) \cup G \right) = \partial G \cup \partial K_R.$$

Áp dụng tính cộng tính của bậc tôpô theo nón ta có:

$$i_K(A, G \setminus \overline{K_r}) = i_K(A, G) - i_K(A, K_r) = 1 - 0 = 1 \neq 0,$$

$$i_K(A, K_R \setminus \overline{G}) = i_K(A, K_R) - i_K(A, G) = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

Do đó theo tính chất nghiệm của bậc tôpô theo nón ta có A có ít nhất 3 điểm bất động

$$x_1 \in K_r, x_2 \in G \setminus \overline{K_r}, x_3 \in K_R \setminus G.$$

Chương 2.

SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ SCHAUDER ĐỂ NGHIÊN CỨU ĐỊNH LÝ KRASNOSELSKII

Trong chương này ta sẽ trình bày việc chứng minh định lý nón Krasnoselskii của ánh xạ nén và giãn và những mở rộng của nó bằng việc sử dụng Định lý điểm bất động Schauder: “Nếu K là một tập con lồi của không gian vectơ topo V và T là một hàm liên tục từ K vào chính nó sao cho $T(K)$ chứa trong một tập con compact của K , Khi đó T có một điểm bất động ” Tuy nhiên việc chứng minh Định lý Krasnoselskii theo hướng này cần một khái niệm mới, đó là khái niệm “cốt yếu”, chính trong những chứng minh các định lý liên quan tới hàm cốt yếu ta có sử dụng Định lý Schauder. Do đó đầu tiên ta sẽ xem xét qua khái niệm “hàm cốt yếu” và một số định lý về các điều kiện cần của một hàm cốt yếu.

Trong phần 2.1 và 2.2 của chương này ta sẽ kí hiệu $X = (X, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach (vô hạn hoặc hữu hạn chiều), C là một tập con lồi đóng khác rỗng của X thỏa $\alpha u + \beta v \in C$ với mọi $\alpha, \beta \geq 0$ và $u, v \in C$, và U là một tập con mở của C . Kí hiệu $K(\overline{U}, C)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ compact liên tục $A: \overline{U} \rightarrow C$; $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ $A \in K(\overline{U}, C)$ với $x \neq A(x)$ với mọi $x \in \partial U$.

2.1 Hàm cốt yếu

Định nghĩa 2.1.1. Một ánh xạ $A \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ được gọi là *cốt yếu* trên $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ nếu với mọi $G \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ thỏa $G|_{\partial U} = A|_{\partial U}$ thì tồn tại $x \in U$ sao cho $x = G(x)$. Ngược lại A được gọi là *không cốt yếu* trên $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ nếu tồn tại $G \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ thỏa $G|_{\partial U} = A|_{\partial U}$ và $x \neq G(x)$ với mọi $x \in U$.

Nhận xét 2.1: Nếu $A \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ là cốt yếu thì tồn tại $x \in U$ sao cho $x = Ax$. Ngược lại nếu $x \neq Ax$ với mọi $x \in U$ thì A không cốt yếu trong $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$.

Định nghĩa 2.1.2. Hai ánh xạ $F, G \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ được gọi là *đồng luân* trong $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$, kí hiệu $F \simeq G$ trong $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ nếu tồn tại ánh xạ compact liên tục $H: \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow C$ sao cho $H_t(\cdot) = H(\cdot, t): \overline{U} \rightarrow C$ thuộc $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ với mỗi $t \in [0, 1]$ và $H_0 = F, H_1 = G$.

Định lý 2.1.3. Cho X, C, U được xác định như trên. Giả sử rằng F, G là hai hàm trên $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ với $F \simeq G$ trong $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. Khi đó F cốt yếu trong $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ khi và chỉ khi G cốt yếu trong $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$.

(Chứng minh định lý này có thể tham khảo trong [6, p. 68])

Định lý 2.1.4. Cho X, C, U được xác định như trên và hàm hằng $A(x) = p$ với mọi $x \in \overline{U}$. Khi đó ta có:

- (a) Nếu $p \in U$ thì A là cốt yếu trên $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$.
- (b) Nếu $p \notin U$ thì A không cốt yếu trên $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$.

Chứng minh Định lý 2.1.4.

(a) Giả sử $G \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ thỏa $G|_{\partial U} = A|_{\partial U} = p$. Ta chứng minh G có điểm bất động $x \in U$. Xét ánh xạ $J : C \rightarrow C$ xác định bởi:

$$J(x) := \begin{cases} G(x), & x \in \overline{U}, \\ p, & x \in C \setminus \overline{U}. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng J là ánh xạ compact liên tục. Định lý điểm bất động Schauder chứng tỏ rằng J có một điểm bất động $x \in C$. Do $p \in U$ và $G \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ nên $x \in U$. Vì vậy ta có $x = J(x) = G(x)$ hay G có điểm bất động $x \in U$. Từ đó ta có A là cốt yếu trên $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$.

(b) Do $Ax \equiv p \notin U$ nên $Ax \neq x$ với mọi $x \in U$, theo Nhận xét 2.1 ta có điều phải chứng minh.

2.2 Định lý Krasnoselskii mở rộng.

Thông qua việc sử dụng khái niệm hàm cốt yếu ở trên, ta sẽ chứng minh một số định lý chứng minh sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ $A \in K(\overline{B_R}, C)$ trong miền $\Omega := \{x \in C : r < \|x\| < R\}$. Cuối cùng, thông qua các định lý này ta sẽ chứng minh Định lý Krasnoselskii của ánh xạ nén và giãn ở các Định lý 2.1.8 và 2.1.11.

Định lý 2.1.5. Cho X, C được xác định như trên và hai hằng số $r, R : 0 < r < R$. Giả sử $A \in K(\overline{B_R}, C)$ và thỏa những điều kiện sau:

(P1) $x \neq A(x)$ với mọi $x \in S_r \cup S_R$. (P2) $A : \overline{B_r} \rightarrow C$
không cốt yếu trên $K_{S_r}(\overline{B_r}, C)$.

(P3) $A : \overline{B_R} \rightarrow C$ cốt yếu trên $K_{S_R}(\overline{B_R}, C)$.

Khi đó A có ít nhất một điểm bất động trong tập $\Omega := \{x \in C : r < \|x\| < R\}$.

Chứng minh Định lý 2.1.5.

Giả sử rằng A không có điểm bất động trong Ω . Điều kiện (P2) suy ra rằng có một hàm số $\theta \in K_{S_r}(\overline{B_r}, C)$ thỏa $\theta|_{S_r} = A|_{S_r}$ và $x \neq \theta(x) \forall x \in \overline{B_r}$.

Đặt $\Phi : \overline{B_R} \rightarrow C$ với $\Phi(x) = \begin{cases} \theta(x), 0 \leq \|x\| \leq r, \\ A(x), r < \|x\| \leq R. \end{cases}$

Ta có $\Phi \in K_{S_R}(\overline{B_R}, C)$, $\Phi|_{S_R} = A|_{S_R}$ và Φ không có điểm bất động trong $\overline{B_R}$ (do θ không có điểm bất động trong $\overline{B_r}$, A không có điểm bất động trong Ω và S_R). Điều này mâu thuẫn với (P3). Vậy A có ít nhất một điểm bất động trong Ω .

Định lý 2.1.6. Cho X, C được xác định như trên và hai hằng số $0 < r < R$. Giả sử những điều kiện sau được thỏa:

(Q1) $N \in K(\overline{B_R} \times [0, 1], C)$: $N(x, 0) = 0, \forall x \in \overline{B_R}$ và với mỗi $t \in [0, 1]$: $x \neq N(x, t)$ với mọi $x \in S_R$.

(Q2) $H \in K(\overline{B_r} \times [0, 1], C)$: với mỗi $t \in [0, 1]$: $x \neq H(x, t)$ với mọi $x \in S_r$.

(Q3) $H(., 1)|_{\overline{B_r}} = N(., 1)|_{\overline{B_r}}$.

(Q4) $x \neq H(x, 0), \forall x \in \overline{B_r}$.

Khi đó $N(., 1)$ có một điểm bất động trong $\Omega := \{x \in C : r < \|x\| < R\}$.

Chứng minh Định lý 2.1.6.

Ta có $N(., 0) \simeq N(., 1)$ trong $K_{S_R}(\overline{B_R}, C)$ (do điều kiện (Q1)) và $H(., 0) \simeq H(., 1)$ trong $K_{S_r}(\overline{B_r}, C)$ (do điều kiện (Q2)). Từ (Q1), (Q2) và (Q3) ta có

$$N(x, 1) \neq x, \forall x \in S_r \cup S_R. \quad (2.1)$$

Từ (Q2) ta có $H(., 0) \in K_{S_r}(\overline{B_r}, C)$, do đó theo (Q4) thì $H(., 0)$ là hàm không cốt yếu trong $K_{S_r}(\overline{B_r}, C)$.

Vì $H(., 1) \simeq H(., 0)$ trong $K_{S_r}(\overline{B_r}, C)$ nên $H(., 1)$ cũng là hàm không cốt yếu trong $K_{S_r}(\overline{B_r}, C)$, do đó ta có kết luận:

$$N(., 1)|_{\overline{B_r}} = H(., 1) : \overline{B_r} \rightarrow C \text{ là hàm không cốt yếu trong } K_{S_r}(\overline{B_r}, C). \quad (2.2)$$

Mặt khác, do $0 \in B_R$ nên theo Định lý 2.1.4 ta có hàm hằng $N(x, 0) = 0$ (với mọi $x \in \overline{B_R}$) là cốt yếu trên $K_{S_R}(\overline{B_R}, C)$. Vì $N(., 1) \simeq N(., 0)$ trong $K_{S_R}(\overline{B_R}, C)$ nên theo Định lý 2.1.3 ta có

$$N(., 1) : \overline{B_R} \rightarrow C \text{ cũng là hàm cốt yếu. trong } K_{S_R}(\overline{B_R}, C). \quad (2.3)$$

Ta nhận thấy (2.1), (2.2) và (2.3) chính là các điều kiện (P1), (P2) và (P3) của Định lý 2.1.5 ứng với hàm $N(., 1)$ thay cho hàm $T(., 1)$. Vậy $N(., 1)$ có một điểm bất động trong $\Omega := \{x \in C : r < \|x\| < R\}$.

□

Định lý 2.1.7. Cho X, C được xác định như trên và hai hằng số $0 < r < R$. Giả sử $A \in K(\overline{B_R}, C)$ và thỏa những điều kiện sau:

(H1) $Ax \neq \lambda x, \forall \lambda \geq 1, \forall x \in S_R$.

(H2) Tồn tại $p \in C \setminus \{0\}$ sao cho $x \neq A(x) + \delta p, \forall \delta \geq 0, \forall x \in S_r$.

Khi đó A có một điểm bất động trong $\Omega := \{x \in C : r < \|x\| < R\}$.

Chứng minh Định lý 2.1.7.

Từ (H1), (H2) ta nhận thấy rằng

$$x \neq A(x), \forall x \in S_r \cup S_R. \quad (2.4)$$

Chọn $M > 0$ sao cho $\|A(x)\| \leq M$ với mọi $x \in \overline{B_r}$ và chọn $\delta_0 > 0 : \|\delta_0 p\| > M + r$.

Đặt $N(., t) := tA(.)$ và $H(., t) := A(.) + (1-t)\delta_0 p, t \in [0, 1]$.

Từ (H1), (H2) và (2.4) ta suy ra điều kiện (Q1), (Q2) của Định lý 2.1.6 thỏa (với $\delta = (1-t)\delta_0 \geq 0 \forall t \in [0, 1]$). Mặt khác $N(x, 1) = A(x) = H(x, 1)$ với $x \in B_r$ nên (Q3) thỏa. Hơn thế nữa

$$\|H(x, 0)\| = \|A(x) + \delta_0 p\| \geq \|\delta_0 p\| - \|A(x)\| > M + r - M = r, \forall x \in \overline{B_r}.$$

Suy ra $x \neq H(x, 0)$ với mọi $x \in \overline{B_r}$, đây chính là điều kiện (Q4). Vậy theo Định lý 2.1.6 ta có A (hay $N(., 1)$) có một điểm bất động trong $\Omega = \{x \in C : r < \|x\| < R\}$.

□

Định lý 2.1.8. (Định lý nón Krasnoselskii của ánh xạ nén)

Cho $X = (X, \|\cdot\|)$ là không gian Banach như trên nhưng thay $C \subseteq X$ bởi nón $K \subseteq X$ và chuẩn $\|\cdot\|$ tăng đối với K , nghĩa là $\|x + y\| \geq \|x\|$ với mọi $x, y \in K$. Cho hai hằng số $r, R : 0 < r < R$. Giả sử $A \in K(\overline{B_R}, C)$ và thỏa:

(K1) $\|A(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in S_R \cap K$.

(K2) $\|A(x)\| > \|x\|, \forall x \in S_r \cap K$.

Khi đó A có một điểm bất động trong $\Omega := \{x \in K : r < \|x\| < R\}$.

Chứng minh Định lý 2.1.8.

Ta thấy điều kiện (K1) sẽ kéo theo điều kiện (H1) đúng. Thật vậy, giả sử tồn tại $x \in S_R$ và $\lambda \in [0, 1]$ sao cho $x = \lambda A(x)$. Khi đó ta có mâu thuẫn sau:

$$R = \|x\| = \|\lambda A(x)\| \leq \|A(x)\| < \|x\| = R.$$

Ta cũng có (K2) sẽ kéo theo điều kiện (H2) đúng. Thật vậy, giả sử tồn tại $p \in K \setminus \{0\}$ sao cho $x = A(x) + \delta p$ với $\delta > 0$ và $x \in S_r$ nào đó. Khi đó ta có mâu thuẫn sau:

$$\|x\| = \|A(x) + \delta p\| \geq \|A(x)\| > \|x\| \text{ (do } Ax, \delta p \in K \text{ và } \|\cdot\| \text{ tăng đối với } K).$$

Vậy theo Định lý 2.1.7 ta có điều phải chứng minh. $\square$

Như vậy ở phần trên ta đã chứng minh xong định lý nón Krasnoselskii của ánh xạ nén dựa vào một số định lý trước đó (Định lý 2.1.5, 2.1.6, 2.1.7). Sau đây ta sẽ trình bày cách chứng minh Định lý Krasnoselskii của ánh xạ giãn (Định lý 2.1.11) một cách tương tự như vậy.

Định lý 2.1.9. Cho X, C được xác định như trên và hai hằng số $r, R : 0 < r < R$. Giả sử $A \in K(\overline{B_R}, C)$ và thỏa những điều kiện sau:

(P'1) $x \neq A(x)$ với $\forall x \in S_r \cup S_R$.

(P'2) $A : \overline{B_r} \rightarrow C$ cốt yếu trên $K_{S_r}(\overline{B_r}, C)$.

(P'3) $A : \overline{B_R} \rightarrow C$ không cốt yếu trên $K_{S_R}(\overline{B_R}, C)$.

Khi đó A có ít nhất hai điểm bất động $x_0 \in B_r; x_1 \in \Omega := \{x \in C : r < \|x\| < R\}$.

Chứng minh Định lý 2.1.9.

Từ (P'2) suy ra A có một điểm bất động trong B_r . Ta chỉ còn phải chứng minh A có ít nhất một điểm bất động $x_1 \in \Omega := \{x \in C : r < \|x\| < R\}$.

Đặt $\Psi = A|_{\overline{\Omega}}$ và giả sử $\Psi : \overline{\Omega} \rightarrow C$ không có điểm bất động trong Ω .

Điều kiện (P'3) suy ra rằng có một hàm số $\theta \in K_{S_R}(\overline{B_R}, C)$ thỏa $\theta|_{S_R} = A|_{S_R}$ và $x \neq \theta(x) \forall x \in \overline{B_R}$. Có

định $\rho \in (0, r)$ và đặt $\Phi : \overline{B_R} \rightarrow C$, trong đó

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{\rho}{R} \theta\left(\frac{R}{\rho} x\right) & 0 \leq \|x\| \leq \rho, \\ \frac{(r-\rho)\|x\|}{(R-\rho)r - (R-r)\|x\|} \Psi\left(\frac{(R-\rho)r - (R-r)\|x\|}{(r-\rho)\|x\|} x\right) & \rho \leq \|x\| \leq r, \\ \Psi(x) & r \leq \|x\| \leq R. \end{cases}$$

Lưu ý rằng $\Phi : \overline{B_R} \rightarrow C$ được định nghĩa tốt vì khi $\rho \leq \|x\| \leq r$ thì:

$$r \leq \left\| \frac{(R-\rho)r - (R-r)\|x\|}{(r-\rho)\|x\|} x \right\| \leq R$$

Ta có $\Phi \in K(\overline{B_R}, C)$, $\Phi|_{S_R} = \Psi|_{S_R} = A|_{S_R}$ và $\Phi|_{\overline{\Omega}} = \Psi|_{\overline{\Omega}} = A|_{\overline{\Omega}}$ và Φ không có điểm bất động trong $\overline{B_R}$ (do θ không có điểm bất động trong $\overline{B_R}$, A không có điểm bất động trong $\overline{\Omega}$).

Bây giờ ta tập trung vào hàm $\Phi|_{\overline{B_r}} : \overline{B_r} \rightarrow C$ ta có $\Phi|_{S_r} = \Psi|_{S_r} = A|_{S_r}$ mà $Ax \neq x \forall x \in S_r$ do đó ta có

$\Phi|_{\overline{B_r}} \in K_{S_r}(\overline{B_r}, C)$ và Φ không có điểm bất động trong $\overline{B_r}$. Điều này mâu thuẫn với (P'2). Vậy Ψ

(hay A) có ít nhất một điểm bất động trong Ω . Điều này suy ra rằng A có ít nhất hai điểm bất động x_0, x_1 với $x_0 \in B_r; x_1 \in \Omega := \{x \in C : r < \|x\| < R\}$. $\square$

Định lý 2.1.10. Cho X, C được xác định như trên và hai hằng số $r, R : 0 < r < R$. Giả sử $A \in K(\overline{B_R}, C)$ và thỏa những điều kiện sau:

(H'1) $Ax \neq \lambda x, \forall \lambda \geq 1, \forall x \in S_r$.

(H'2) Tồn tại $p \in C \setminus \{0\}$ sao cho $x \neq A(x) + \delta p, \forall \delta \geq 0, \forall x \in S_R$.

Khi đó A có một điểm bất động trong $\Omega := \{x \in C : r < \|x\| < R\}$

Chứng minh định lý 2.1.10.

Xét $H : \overline{B_r} \times [0, 1] \rightarrow C, H(x, \lambda) = \lambda A(x)$.

Ta có $H_\lambda(.) = H(., \lambda) : \overline{B_r} \rightarrow C$ thuộc $K_{S_r}(\overline{B_r}, C)$ với mỗi $\lambda \in [0, 1]$ (do $A \in K(\overline{B_R}, C)$ và điều kiện (H'1)).

Mặt khác $H_0 = 0, H_1 = A$, do đó $A \simeq 0$ trên $K_{S_r}(\overline{B_r}, C)$.

Từ Định lý 2.1.3 suy ra A cốt yếu trên $K_{S_r}(\overline{B_r}, C)$ (do Định lý 2.2.4 hàm hằng $F(x) \equiv 0$ cốt yếu trên $K_{S_r}(\overline{B_r}, C)$), đây chính là điều kiện (P'2) của Định lý 2.1.9.

Chọn $\delta_0 > 0$ sao cho :

$$\|\delta_0 p\| > \sup_{x \in S_R} \|A(x)\| + R \quad (2.5)$$

Xét $N : \overline{B_R} \times [0, 1] \rightarrow C, N(x, \lambda) := A(x) + \lambda \delta_0 p$. Khi đó ta có được $N_\lambda(.) = N(., \lambda)$ thuộc $K_{S_R}(\overline{B_R}, C)$ với mỗi $\lambda \in [0, 1]$ (do $A \in K(\overline{B_R}, C)$, điều kiện (H'2)). Do đó

$$N_0 \simeq N_1 \text{ trên } K_{S_R}(\overline{B_R}, C) \quad (2.6)$$

Xét $J : \overline{B_R} \times [0, 1] \rightarrow C, J(., \lambda) := \lambda A(.) + \delta_0 p$. Với mỗi $\lambda \in [0, 1]$ và $x \in S_R$ ta có:

$$\|\lambda A(.) + \delta_0 p\| \geq \|\delta_0 p\| - |\lambda| \cdot \|A(.)\| > \sup_{x \in S_R} \|A(x)\| + R - \sup_{x \in S_R} \|A(x)\| = R.$$

Suy ra $x \neq \lambda A(x) + \delta_0 p$ với $\lambda \in [0, 1]$ và $x \in S_R$. Do vậy $J_\lambda(.) = J(., \lambda) : \overline{B_R} \rightarrow C$ thuộc $K_{S_R}(\overline{B_R}, C)$ với mỗi $\lambda \in [0, 1]$, điều này cho ta được

$$N_1 = J_1 \simeq J_0 = \delta_0 p \text{ trên } K_{S_R}(\overline{B_R}, C). \quad (2.7)$$

Từ (2.6) và (2.7) suy ra

$$A = N_0 \simeq \delta_0 p \text{ trên } K_{S_R}(\overline{B_R}, C). \quad (2.8)$$

Mặt khác hàm số $G(x) \equiv \delta_0 p$ là không cố yếu trên $K_{S_R}(\overline{B_R}, C)$ (do (2.5) và $x \neq G(x)$ với mọi $x \in S_R$).

Do đó A là không cố yếu trên $K_{S_R}(\overline{B_R}, C)$, đây chính là điều kiện (P'3) của Định lý 2.1.9. Dễ thấy điều kiện (P'1) của Định lý 2.1.9 cũng thỏa. Từ đây theo Định lý 2.1.9 ta có điều phải chứng minh. $\square$

Định lý 2.1.11. (Định lý nón Krasnoselskii của ánh xạ giãn.)

Cho $X = (X, \|\cdot\|)$ là không gian Banach như trên nhưng thay $C \subseteq X$ bởi nón $K \subseteq X$ và chuẩn $\|\cdot\|$ tăng đối với K , nghĩa là $\|x + y\| \geq \|x\| \forall x, y \in K$. Cho hai hằng số $r, R: 0 < r < R$. **Giả sử và thỏa:**

(K'1) $\|A(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in S_r \cap K$.

(K'2) $\|A(x)\| > \|x\|, \forall x \in S_R \cap K$.

Khi đó A có một điểm bất động trong $\overline{\Omega} := \{x \in K : r \leq \|x\| \leq R\}$.

Chứng minh Định lý 2.1.11.

Ta thấy điều kiện (K'1) sẽ kéo theo điều kiện (H'1) đúng. Thật vậy, giả sử tồn tại $x \in S_r$ và $\lambda \in [0, 1]$ sao cho $Ax = \lambda x$. Khi đó ta có mâu thuẫn sau:

$$r = \|x\| = \left| \frac{1}{\lambda} \right| \cdot \|A(x)\| \leq \|A(x)\| < \|x\| = r.$$

Ta cũng có (K'2) sẽ kéo theo điều kiện (H'2) đúng. Thật vậy, giả sử tồn tại $p \in K \setminus \{0\}$ sao cho $x = A(x) + \delta p$ với số $\delta \geq 0$ và $x \in S_R$ nào đó. Khi đó ta có mâu thuẫn sau:

$$\|x\| = \|A(x) + \delta p\| \geq \|A(x)\| > \|x\| \text{ (do } A(x), \delta p \in K \text{ và } \|\cdot\| \text{ tăng đối với } K).$$

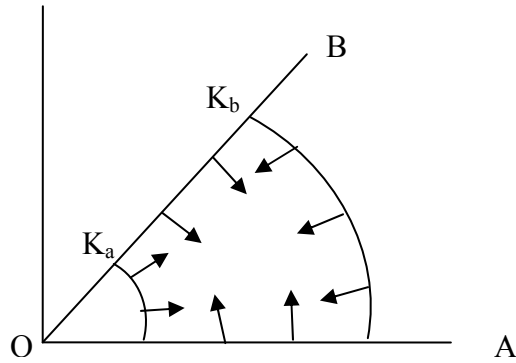
Vậy theo Định lý 2.1.10 ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét 2.2: Thật ra với điều kiện (K'1) và (K'2) của Định lý 2.1.11 ta có thể kết luận rằng A có ít nhất hai điểm bất động x_0 và x_1 với $x_0 \in (B_R \setminus \overline{B_r}) \cap K$ và $x_1 \in B_r \cap K$. Thật vậy, theo Định lý 2.1.11 ta có ngay A có ít nhất một điểm bất động $x_0 \in (B_R \setminus \overline{B_r}) \cap K$, ta chỉ cần chứng minh A có ít nhất một điểm bất động $x_1 \in B_r \cap K$. Từ (K'2) ta suy ra rằng:

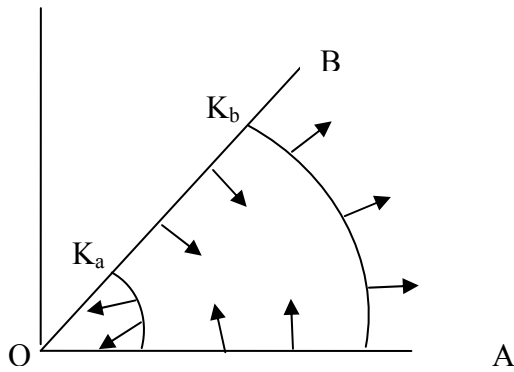
$$x \neq \lambda A(x), \forall x \in S_r \cap K, \lambda \in [0, 1]. \quad (2.9)$$

Xét đồng luân $H(x, \lambda) = \lambda A(x) + (1 - \lambda).0, x \in S_r \cap K, \lambda \in [0, 1]$. Do $A \in K(\overline{B_R}, C)$ nên với mỗi $\lambda \in [0, 1]: H(\cdot, \lambda) \in K_{\partial K_r}(\overline{K_r}, C)$, hơn nữa do (2.9) nên $x \neq H(x, \lambda)$ với mọi $x \in S_r \cap K$. Suy ra $A \approx 0$ trong $K_{\partial K_r}(\overline{K_r}, C)$, do đó A cốt yếu trong $K_{\partial K_r}(\overline{K_r}, C)$. Từ đây A có điểm bất động $x_0 \in K_r$ hay $x_0 \in B_r \cap K$ (điều phải chứng minh). $\square$

Ví dụ. Để dễ hình dung, ta xét X là không gian ba chiều R^3 với chuẩn Euclide và K là nón tròn với đỉnh tại gốc O. Hoặc đơn giản hơn, ta có thể xét trường hợp X là không gian hai chiều R^2 và K có hình cánh quạt trong miền AOB như hình vẽ 2.1 và hình vẽ 2.2.



Hình 2.1: Định lý Krasnoselskii của ánh xạ nén trong R^2



Hình 2.2: Định lý Krasnoselskii của ánh xạ giãn trong R^2

Cho 2 số a, b sao cho $0 < a < b$. Ta quan tâm tới những điều kiện đảm bảo rằng A có điểm bất động trong miền hình vành khuyên $K(a,b) = \{x \in K : a \leq \|x\| \leq b\}$, chú ý rằng $K(a,b)$ nói chung không lồi cho dù K lồi. Ta định nghĩa $K_a = \{x \in K : \|x\| = a\}$ và $K_b = \{x \in K : \|x\| = b\}$ theo thứ tự là biên trong và biên ngoài của $K(a,b)$.

Sau đây là một dạng đơn giản của Định lý Krasnoselskii: Cho X là không gian hai chiều R^2 và K có hình cánh quạt trong miền AOB như hình vẽ, K_a, K_b $K(a,b)$ xác định như trên. Cho ánh xạ hoàn toàn liên tục $A : K \rightarrow K$. Khi đó:

(1) (Dạng nén) A có điểm bất động trên $K(a,b)$ nếu:

$$\|A(x)\| \geq \|x\|, \forall x \in K_a \text{ và}$$

$$\|A(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in K_b.$$

(2) (Dạng giãn) A có điểm bất động trên $K(a,b)$ nếu:

$$\|A(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in K_a \text{ và}$$

$$\|A(x)\| \geq \|x\|, \forall x \in K_b.$$

Chú ý rằng các điều kiện trên chỉ cần đúng với những điểm trên hai biên cong của $K(a,b)$, những điểm trong và những điểm trên hai cạnh của nó có thể di chuyển trên bất cứ hướng nào (miễn là vẫn thuộc K), những điều kiện này cũng không bắt buộc rằng ảnh $T(x)$ phải nằm trong $K(a,b)$.

Định lý 2.1.12. Cho $X = (X, \|\cdot\|)$ là không gian Banach, K là nón trong X và chuẩn $\|\cdot\|$ tăng đối với K . Cho ba hằng số $l, r, R: 0 < l < r < R$. Giả sử $A \in \overline{K(K_R, C)}$ và thỏa:

$$x \neq A(x) \quad \forall x \in S_r \cap K$$

$$(i) \quad \|A(x)\| > \|x\|, \quad \forall x \in S_l \cap K$$

$$(ii) \quad \|A(x)\| < \|x\|, \quad \forall x \in S_r \cap K$$

$$(iii) \quad \|A(x)\| > \|x\|, \quad \forall x \in S_R \cap K$$

Khi đó A có ít nhất hai điểm bất động x_0 và x_1 với $x_0 \in (B_r \setminus B_l) \cap K$ và $x_1 \in (\overline{B_R} \setminus \overline{B_r}) \cap K$.

Chứng minh Định lý 2.1.12.

Từ (i) và (ii), áp dụng Định lý 2.1.8 ta có A có điểm bất động $x_0 \in (B_r \setminus \overline{B_l}) \cap K$.

Từ (ii) và (iii), áp dụng Định lý 2.1.11 ta có A có điểm bất động $x_1 \in (\overline{B_R} \setminus \overline{B_r}) \cap K$.

□

2.3 Định lý Krasnoselskii's đối với hai chuẩn.

Trong phần này, ta sẽ xét thêm một chuẩn mới $|\cdot|$ trong không gian banach X , $C \subset X$ là một tập lồi khác rỗng (không cần phải đóng) với $0 \notin C$ và $\lambda C \subset C$ với mọi $\lambda > 0$. Giả sử tồn tại $c_1, c_2 > 0$ thỏa mãn:

$$c_1 |x| \leq \|x\| \leq c_2 |x|, \quad \forall x \in C \quad (2.10)$$

Điều này nghĩa là hai chuẩn $\|\cdot\|$ và $|\cdot|$ tương đương topo với nhau trên C (không cần thiết phải trên X).

Cho hai số $\rho, R: 0 < c_2 \rho < R$, ta kí hiệu:

$$B_R = \{x \in C: \|x\| \leq R\}; \quad S_R = \{x \in C: \|x\| = R\}.$$

$$B'_\rho = \{x \in C: |x| \leq \rho\}; \quad S'_\rho = \{x \in C: |x| = \rho\}.$$

$$C_{\rho,R} = \{x \in C: \rho \leq |x|, \|x\| \leq R\}.$$

Để thấy rằng do $0 < c_2 \rho < R$ và $c_1 |x| \leq \|x\| \leq c_2 |x|$ với mọi $x \in C$ nên ta có:

$$B'_\rho \subset B_R \text{ và } C_{\rho,R} = (B_R \setminus B'_\rho) \cup S'_\rho.$$

Định lý 2.2.1. Cho X là không gian Banach với hai chuẩn $|\cdot|$ và $\|\cdot\|$ thỏa (2.10). Giả sử có 2 số $\rho, R: 0 < c_2 \rho < R$, $A \in K_{S_R \cup S'_\rho}(B_R, C)$ thỏa những điều kiện sau:

- (i) $A|_{B'_\rho}$ là cốt yếu trên $K_{S'_\rho}(B'_\rho, C)$.
- (ii) A không cốt yếu trên $K_{S_R}(B_R, C)$.

Khi đó A có ít nhất hai điểm bất động x_1 và x_2 với $|x_1| < \rho < |x_2|$ và $\|x_2\| < R$

Chứng minh Định lý 2.2.1.

Từ (i) ta có A có một điểm bất động $x_1 \in B'_\rho$. Do $x \neq A(x) \forall x \in S'_\rho$ nên ta có $|x_1| < \rho$. Ta phải chỉ ra rằng A có điểm bất động trong $C_{\rho, R}$. Giả sử trái lại $x \neq A(x)$ với mọi $x \in C_{\rho, R}$. Mặt khác, từ (ii) suy ra tồn tại một hàm $G \in K_{S_R}(B_R, C)$ với $G|_{S_R} = A|_{S_R}$ và $x \neq G(x)$ với mọi $x \in B_R$.

Ta sẽ xây dựng hàm $H: B'_\rho \rightarrow C$ như sau:

$$H(x) = \begin{cases} a^2 G\left(\frac{1}{a^2} x\right) & 0 < |x| \leq a\rho \\ \frac{|x|^2}{\rho^2} A\left(\frac{\rho^2}{|x|^2} x\right) & a\rho \leq |x| \leq \rho \end{cases}, \text{ với } a = a(x) := \frac{\rho \|x\|}{R |x|} < 1.$$

Từ (2.10) ta có $c_1 \leq \frac{\|x\|}{|x|} \leq c_2$ với mọi $x \in C$, suy ra $\frac{\rho}{R} c_1 \leq a(x) \leq \frac{\rho}{R} c_2$, $\forall x \in B'_\rho$.

Do đó ta có H được định nghĩa tốt và không có điểm bất động trong B'_ρ . Thật vậy:

Nếu $0 < |x| \leq a\rho$ thì $\left\| \frac{1}{a^2} x \right\| = \frac{1}{a^2} \|x\| = \frac{1}{a^2} \frac{aR|x|}{\rho} = \frac{R|x|}{a\rho} \leq R$, suy ra $\frac{1}{a^2} x \in B_R$ và $a^2 G\left(\frac{1}{a^2} x\right) \neq x$.

Ngược lại, nếu $a\rho \leq |x| \leq \rho$ thì $\left| \frac{\rho^2}{|x|^2} x \right| = \frac{\rho^2}{|x|} \geq \rho$ và

$$\left\| \frac{\rho^2}{|x|^2} x \right\| = \frac{\rho^2}{|x|^2} \|x\| = \frac{\rho^2 aR}{\rho |x|} \leq \frac{\rho aR}{a\rho} = R,$$

điều này suy ra $\frac{\rho^2}{|x|^2} x \in C_{\rho, R}$ và $\frac{|x|^2}{\rho^2} A\left(\frac{\rho^2}{|x|^2} x\right) \neq x$.

Mặt khác khi $|x| = a\rho$ thì $\left\| \frac{\rho^2}{|x|^2} x \right\| = \left\| \frac{1}{a^2} x \right\| = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \|x\| = \frac{1}{a} \cdot \frac{R|x|}{\rho \|x\|} \|x\| = \frac{R|x|}{a\rho} = R$, suy ra

$G\left(\frac{1}{a^2} x\right) = A\left(\frac{\rho^2}{|x|^2} x\right)$, lại có $a^2 = \frac{|x|^2}{\rho^2}$ do đó H liên tục trên B'_ρ . Cuối cùng vì $G \in K_{S_R}(B_R, C)$,

$A \in K_{S_R}(B_R, C)$ nên ta có $H \in K_{S'_\rho}(B'_\rho, C)$. Do đó $H \in K_{S'_\rho}(B'_\rho, C)$, $H|_{S'_\rho} = A|_{S'_\rho}$ và $x \neq H(x)$ với mọi $x \in S'_\rho$. Điều này đồng nghĩa với việc A không cốt yếu trên $K_{S'_\rho}(B'_\rho, C)$, mâu thuẫn với (i).

Vậy A có điểm bất động x_2 trong $C_{\rho,R}$, lại do $x \neq A(x)$ với mọi $x \in S_R \cup S'_\rho$ nên $\rho < |x_2|$ và $\|x_2\| < R$ (điều phải chứng minh). $\square$

Định lý 2.2.2. Giả sử có 2 số $\rho, R: 0 < c_2 \rho < R$, $A \in K(B_R, C)$ thỏa những điều kiện sau:

(a) $|A(x)| < |x|$ với mọi $x \in S'_\rho$

(b) $\exists e \in C: x \neq A(x) + \lambda e$ với mọi $\lambda > 0, x \in S_R$

(c) $\exists \delta_0 > \frac{R}{\|e\|}: x \neq \lambda A(x) + \delta_0 e$ với $\lambda \in (0,1), x \in S_R$

Khi đó A có ít nhất hai điểm bất động x_1 và x_2 với $|x_1| < \rho \leq |x_2|$ và $\|x_2\| \leq R$

Chứng minh Định lý 2.2.2.

Ta sẽ chứng tỏ rằng điều kiện (i), (ii) của Định lý 2.2.1 thỏa. Trước hết để chứng minh $A|_{B'_\rho}$ là cốt yếu trên $K_{S'_\rho}(B'_\rho, C)$ ta chứng minh A đồng luân với một hàm cốt yếu trong $K_{S'_\rho}(B'_\rho, C)$.

Cố định một điểm $x_0 \in C: |x_0| = \rho$. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $\eta \in (0,1)$ sao cho:

$$x \neq (1-\lambda)\eta x_0 + \lambda A(x) \text{ với mọi } \lambda \in (0,1), x \in S'_\rho. \quad (2.11) \text{ Giả sử trái lại, với mỗi}$$

$n \in N^*$, tồn tại $\lambda_n \in (0,1), x_n \in S'_\rho$ sao cho:

$$x_n = (1-\lambda_n)\frac{1}{n}x_0 + \lambda_n A(x_n). \quad (2.12)$$

Do A là ánh xạ compact, S'_ρ là tập bị chặn nên $\{A(x_n)\}_{n \in N^*}$ có dãy con $\{A(x_{n_k})\}$ hội tụ. Ta cũng có

$\{\lambda_{n_k}\}$ có dãy con $\{\lambda_{n_{k_l}}\}$ hội tụ về một $\bar{\lambda} \in [0,1]$ nào đó. Từ (2.12) ta có

$$x_{n_{k_l}} = (1-\lambda_{n_{k_l}})\frac{1}{n_{k_l}}x_0 + \lambda_{n_{k_l}} A(x_{n_{k_l}}).$$

Cho $l \rightarrow \infty$ ta có dãy $\{x_{n_{k_l}}\}$ hội tụ về một điểm $\bar{x}$. Dễ thấy rằng $\bar{x} \in S'_\rho$ và $\bar{x} = \bar{\lambda} A(\bar{x})$. Suy ra

$|\bar{x}| = \bar{\lambda} |A(\bar{x})| \leq |A(\bar{x})|$, điều này mâu thuẫn với (a). Do đó (2.11) đúng với $\eta \in (0,1)$ nào đó hay $\eta x_0 \simeq A$ trong $K_{S'_\rho}(B'_\rho, C)$.

Hơn thế nữa, vì $|\eta x_0| < \rho$, hay $\eta x_0 \in B'_\rho$, nên theo Định lý 2.1.4 thì hàm $N(x) \equiv \eta x_0$ là cốt yếu trong $K_{S'_\rho}(B'_\rho, C)$. Từ đó suy ra A là cốt yếu trong $K_{S'_\rho}(B'_\rho, C)$ hay điều kiện (i) của Định lý 2.2.1 thỏa.

Giả sử rằng $x \neq A(x)$ với mọi $x \in S_R$ (nếu không ta có điều phải chứng minh)

Xét đồng luân $H: B_R \times [0,1] \rightarrow C$ xác định bởi $H(x, \lambda) = A(x) + \lambda \delta_0 e$. Dễ thấy rằng H là ánh xạ compact, $H(., 0) = A; H(., 1) = A(x) + \delta_0 e$. Do (b) ta có $x \neq H(x, \lambda)$ với mọi $x \in S_R, \lambda \in (0,1]$, lại có giả thiết $x \neq A(x) \forall x \in S_R$ nên $x \neq H(x, \lambda)$ với mọi $x \in S_R, \lambda \in [0,1]$, hay là

$$A \simeq A + \delta_0 e \text{ trong } K_{S_R}(B_R, C). \quad (2.13)$$

Từ (b) và (c) ta có $x \neq \lambda A(x) + \delta_0 e$ với mọi $\lambda \in [0, 1], x \in S_R$, suy ra:

$$A + \delta_0 e \simeq \delta_0 e \text{ trong } K_{S_R}(B_R, C). \quad (2.14)$$

Từ (2.13) và (2.14) ta có $A \simeq \delta_0 e$ trong $K_{S_R}(B_R, C)$. Do $\|\delta_0 e\| > R$ nên từ Định lý 2.1.4 (b) $\delta_0 e$ không cốt yếu trên $K_{S_R}(B_R, C)$. Điều đó suy ra rằng A cũng không cốt yếu trên $K_{S_R}(B_R, C)$ hay điều kiện (ii) của Định lý 2.2.1 thỏa. Vậy theo Định lý 2.2.1 ta có điều phải chứng minh. $\square$

Định lý 2.2.3. (Định lý Krasnoselskii dưới dạng hai chuẩn)

Cho X, C xác định như trên và $\|\cdot\|$ tăng đối với C nghĩa là $\|x + y\| \geq \|x\|$ với mọi $x \in C$. Cho 2 số $\rho, R: 0 < \rho < R$ và $A \in K(B_R, C)$ thỏa những điều kiện sau:

(h1) $|A(x)| < \rho$ với mọi $x \in C, |x| = \rho$.

(h2) $\|A(x)\| \geq \|x\|$ với mọi $x \in C, \|x\| = R$.

Khi đó A có ít nhất hai điểm bất động x_1 và x_2 với $|x_1| < \rho \leq |x_2|$ và $\|x_2\| \leq R$.

Chứng minh định lý 2.2.3.

T c có (h1) chính là điều kiện (a) của Định lý 2.2.2.

Ta sẽ chứng minh rằng điều kiện (b) và (c) của Định lý 2.2.2 thỏa với bất kỳ vectơ $e \in C$ và $\delta_0 > \frac{R}{\|e\|}$.

Thật vậy:

Giả sử (b) không đúng với một vectơ $e \in C$ cho trước, khi đó tồn tại $x \in S_R$ và $\delta > 0$ sao cho $x = A(x) + \delta e$. Từ đây ta có mâu thuẫn:

$$\|x\| = \|A(x) + \delta e\| \geq \|A(x)\| \geq \|x\| \text{ (do } A(x), \delta e \in C, \|\cdot\| \text{ tăng đối với } C).$$

Giả sử (c) không đúng với một vectơ $e \in C$ cố định và một số $\delta_0 > \frac{R}{\|e\|}$ thì tồn tại $x \in S_R$ và $\lambda \in (0, 1)$

sao cho $x = \lambda A(x) + \delta_0 e$. Từ đây ta có mâu thuẫn:

$$R = \|x\| = \|\lambda A(x) + \delta_0 e\| \geq \|\delta_0 e\| > R \text{ (do } \lambda A(x), \delta e \in C, \|\cdot\| \text{ tăng đối với } C).$$

Vậy các giả thiết của Định lý 2.2.2 thỏa mãn, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Định lý 2.2.4 (Đối ngẫu của Định lý Krasnoselskii dưới dạng hai chuẩn)

Cho X, C được xác định như trên và $|\cdot|$ tăng đối với C nghĩa là $|x + y| \geq |x| \forall x, y \in C$. Cho 2 số

$\rho, R: 0 < \frac{1}{c_1} \rho < R$ và $A: \{x \in C: |x| \leq R\} \rightarrow C$ là ánh xạ compact và thỏa những điều kiện sau:

(h1) $\|N(x)\| < \|x\|$ với mọi $x \in C, \|x\| = \rho$.

(h2) $\|N(x)\| \geq \|x\|$ với mọi $x \in C, \|x\| = R$.

Khi đó A có ít nhất hai điểm bất động x_1 và x_2 với $\|x_1\| < \rho \leq \|x_2\|$ và $\|x_2\| \leq R$.

□

Chương 3.

ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ KRASNOSELSKII CHỨNG MINH SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN PHI TUYẾN

3.1. Ứng dụng của Định lý Krasnoselskii chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân phi tuyến.

Xét phương trình tích phân phi tuyến.

$$y(t) = h(t) + \int_0^1 k(t,s)f(y(s))ds, \quad t \in [0,1] \quad (3.1)$$

Ta sẽ tìm những điều kiện của k, h và f để (3.1) có ít nhất một nghiệm không âm $y \in C[0,1]$.

Định lý 3.1. Giả sử rằng

$$0 \leq k_t(s) = k(t,s) \in L^1[0,1] \text{ với mỗi } t \in [0,1]. \quad (3.2)$$

$$\text{Ánh xạ } t \mapsto k_t \text{ là ánh xạ liên tục từ } [0,1] \text{ vào } L^1[0,1]. \quad (3.3)$$

$$\text{Tồn tại } M \in (0,1), \kappa \in L^1[0,1] \text{ và } [a,b] \subseteq [0,1] \text{ sao cho } k(t,s) \geq M\kappa(s) \geq 0 \text{ với mọi } t \in [a,b] \text{ và } s \in [0,1] \text{ hầu khắp nơi.} \quad (3.4)$$

$$k(t,s) \leq \kappa(s) \text{ với } t \in [0,1] \text{ và } s \in [0,1] \text{ hầu khắp nơi.} \quad (3.5)$$

$$h \in C[0,1], h(t) \geq 0 \text{ với } t \in [0,1] \text{ và } \min_{t \in [a,b]} h(t) \geq M \|h\|_0 = M \sup_{t \in [0,1]} h(t). \quad (3.6)$$

$$f: R \rightarrow R \text{ là ánh xạ liên tục, không giảm và } f(u) > u \text{ với } u > 0. \quad (3.7)$$

$$\text{Tồn tại } \alpha > 0 \text{ sao cho } \frac{\alpha}{\|h\|_0 + K_1 f(\alpha)} > 1 \text{ với } K_1 = \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 k(t,s)ds > 0. \quad (3.8)$$

$$\text{Tồn tại } \beta > 0, \beta \neq \alpha \text{ sao cho } \frac{\beta}{K_2 f(M\beta)} < 1 \text{ với } K_2 = \sup_{t \in [0,1]} \int_a^b k(t,s)ds. \quad (3.9)$$

Khi đó (3.1) có ít nhất một nghiệm không âm $y \in C[0,1]$ và nếu :

$$(A) \quad \alpha < \beta \text{ thì } 0 < \alpha \leq \|y\|_0 \leq \beta.$$

$$(B) \quad \beta < \alpha \text{ thì } 0 < \beta \leq \|y\|_0 \leq \alpha.$$

Chứng minh định lý 3.1.

Đặt $F: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ xác định bởi:

$$Fy(t) = h(t) + \int_0^1 k(t,s)f(y(s))ds, \quad t \in [0,1]. \quad (3.10)$$

$$\text{Đặt } C = \{y \in C[0,1] : y(t) \geq 0, \forall t \in [0,1] \text{ và } y(t) \geq M \|y\|_0 \quad \forall t \in [a,b]\}. \quad (3.11)$$

Ta sẽ áp dụng Định lý 2.1.11 (Định lý nón dạng giãn của Krasnoselskii) để chứng minh F có điểm bất động trong C .

Bước 1: Chứng minh C là một nón.

C là tập đóng vì khi lấy $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ bất kỳ, $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ ta cũng có $y(t) \geq 0$ với $t \in [0,1]$. Mặt khác do $y_n(t) \geq M \|y_n\|_0$ với mọi $n \in \mathbb{N}, t \in [a,b]$ nên lấy giới hạn hai vế khi $n \rightarrow \infty$ ta có $y(t) \geq M \|y\|_0$ với mọi $t \in [a,b]$. Do đó $y \in C$ hay C là tập đóng.

Với mọi $y, y_1, y_2 \in C, \lambda > 0$ ta có:

$$(y_1 + y_2)(t) = y_1(t) + y_2(t) \geq 0;$$

$$(y_1 + y_2)(t) = y_1(t) + y_2(t) \geq M \|y_1\|_0 + M \|y_2\|_0 \geq M \|y_1 + y_2\|_0 \quad \forall t \in [a,b];$$

$$(\lambda y)(t) = \lambda y(t) \geq 0; \quad (\lambda y)(t) \geq \lambda M \|y\|_0 = M \|\lambda y\|_0 \quad \forall t \in [a,b].$$

suy ra $C + C \subset C, \lambda C \subset C$.

Với mọi $y \in (-C)$ ta có tồn tại $y' \in C : y = -y'$ suy ra $y(t) \leq 0, t \in [0,1]$, do đó $C \cap \{-C\} = \{0\}$.

Bước 2: Chứng minh $F : C \rightarrow C$.

Lấy $y \in C$ ta chứng minh $Fy \in C$. Thật vậy, lấy $t_1, t_2 \in [0,1]$ ta có

$$|Fy(t_1) - Fy(t_2)| \leq |h(t_1) - h(t_2)| + \left| \int_0^1 k(t_1, s)f(y(s))ds - \int_0^1 k(t_2, s)f(y(s))ds \right|$$

$$\leq |h(t_1) - h(t_2)| + \sup_{s \in [0,1]} f(y(s)) \int_0^1 |k(t_1, s) - k(t_2, s)| ds$$

$$(\text{do (3.2), (3.7)})$$

$$\rightarrow 0 \text{ khi } t_1 \rightarrow t_2 \text{ (do } f(y(s)) > y(s) > 0 \text{ với mọi } s \in [0,1]).$$

Do đó

$$Fy \in C[0,1]. \quad (3.12)$$

Mặt khác: $h(t) \geq 0, k(t,s) \geq 0, f(y(s)) \geq y(s) \geq 0$ với mọi $t \in [0,1], s \in [0,1]$ suy ra:

$$Fy(t) \geq 0 \quad t \in [0,1]. \quad (3.13)$$

$$\text{Lại có } \min_{t \in [a,b]} Fy(t) = \min_{t \in [a,b]} \left(h(t) + \int_0^1 k(t,s)f(y(s))ds \right)$$

$$\geq \min_{t \in [a,b]} h(t) + \min_{t \in [a,b]} \int_0^1 k(t,s)f(y(s))ds$$

$$\geq M |h|_0 + \int_0^1 M \kappa(s) f(y(s)) ds.$$

(do (3.4), (3.6) và $f(y(s)) > y(s) \geq 0$ với mọi $s \in C[0,1]$).

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \min_{t \in [a,b]} Fy(t) &\geq M \left(|h|_0 + \int_0^1 \kappa(s) f(y(s)) ds \right) \\ &\geq M \left(|h|_0 + \int_0^1 k(t,s) f(y(s)) ds \right), \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

(do (3.5) và $f(y(s)) \geq 0$ với mọi $s \in C[0,1]$)

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \min_{t \in [a,b]} Fy(t) &\geq M \left(\sup_{t \in [0,1]} h(t) + \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 k(t,s) f(y(s)) ds \right) \\ &\geq M \sup_{t \in [0,1]} \left(h(t) + \int_0^1 k(t,s) f(y(s)) ds \right) \\ &= M |Fy|_0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Từ (3.12), (3.13) và (3.14) ta có $Fy \in C$ khi $y \in C$ hay $F : C \rightarrow C$.

Bước 3: Chứng minh F compact liên tục.

Lấy $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C[0,1]$, $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ trong $C[0,1]$ ta có:

$$\begin{aligned} \|Fy_n - Fy\| &= \sup_{t \in [0,1]} |Fy_n(t) - Fy(t)| \\ &= \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^1 k(t,s) [f(y_n(s)) - f(y(s))] ds \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 |k(t,s)| |f(y_n(s)) - f(y(s))| ds \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 \left[\sup_{s \in [0,1]} \kappa(s) \right] |f(y_n(s)) - f(y(s))| ds \\ &= \left[\sup_{s \in [0,1]} \kappa(s) \right] \int_0^1 |f(y_n(s)) - f(y(s))| ds \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{do } \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in C[0,1], \quad f \text{ liên tục}) \end{aligned}$$

Vậy F liên tục.

Tiếp theo ta lấy U là tập bị chặn bất kỳ trong $C[0,1]$ ta sẽ sử dụng Định lý Arzela-Ascoli để chứng minh $F(U)$ compact tương đối trong $C[0,1]$. Thật vậy, do U là tập bị chặn nên tồn tại $c > 0 : |y(s)| \leq c$ với mọi $s \in [0,1]$, $y \in U$.

Suy ra tồn tại $C > 0 : |f(y(s))| \leq C$ với mọi $s \in [0,1]$, $y \in U$ (do f liên tục).

Với mọi $t \in [0,1]$ ta có:

$$\begin{aligned} |Fy(t)| &\leq |h(t)| + \left| \int_0^1 k(t,s)f(y(s))ds \right| \\ &\leq |h(t)| + \int_0^1 |k(t,s)| |f(y(s))| ds \\ &\leq |h|_0 + C \int_0^1 |\kappa(s)| ds, \quad y \in U. \end{aligned}$$

Do đó $F(U)$ bị chặn từng điểm. (3.15)

Lấy $t_0 \in [0,1], \varepsilon > 0$ bất kỳ, do $h \in C[0,1]$ nên tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho với mọi $t \in [0,1], |t - t_0| < \delta_1$ thì

$$|h(t) - h(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do ánh xạ $t \mapsto k_t$ là ánh xạ liên tục từ $[0,1]$ vào $L^1[0,1]$ nên tồn tại $\delta_2 > 0$ sao cho với mọi

$$t \in [0,1], |t - t_0| < \delta_2 \text{ thì } \|k_t - k_{t_0}\| < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Đặt $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ khi đó với mọi $t \in [0,1], |t - t_0| < \delta$ ta có:

$$\begin{aligned} |Fy(t) - Fy(t_0)| &\leq |h(t) - h(t_0)| + \left| \int_0^1 [k(t,s) - k(t_0,s)] f(y(s)) ds \right| \\ &\leq |h(t) - h(t_0)| + \|k_t - k_{t_0}\| \int_0^1 |f(y(s))| ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2C} C = \varepsilon, \quad \forall y \in U. \end{aligned}$$

Do đó $F(U)$ liên tục đồng bậc trong $C([0,1], R)$. (3.16)

Từ (3.15) và (3.16), theo Định lý Arzela-Ascoli ta có $F(U)$ là tập compact tương đối trong $C([0,1], R)$.

Vậy $F : C \rightarrow C$ compact liên tục.

Bước 4: Đặt $\Omega_\alpha := \{y \in C[0,1] : |y|_0 < \alpha\}$,

$$\Omega_\beta := \{y \in C[0,1] : |y|_0 < \beta\}.$$

Ta sẽ chứng minh:

$$|Fy|_0 < |y|_0, \quad \forall y \in \partial\Omega_\alpha \cap C. \quad (3.17)$$

$$|Fy|_0 > |y|_0, \quad \forall y \in \partial\Omega_\beta \cap C. \quad (3.18)$$

Thật vậy, lấy $y \in \partial\Omega_\alpha \cap C$ bất kỳ, khi đó $|y|_0 = \alpha$ và $y(t) \geq 0, t \in [0,1]$. Từ (3.2), (3.7) và (3.8) ta có:

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0,1]} |Fy(t)| &= \sup_{t \in [0,1]} \left(h(t) + \int_0^1 k(t,s) f(y(s)) ds \right) \\
&\leq \sup_{t \in [0,1]} h(t) + f(|y|_0) \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 k(t,s) ds \\
&\leq |h|_0 + K_1 f(\alpha) \\
&< \alpha = |y|_0.
\end{aligned}$$

Do đó (3.17) đúng.

Lấy $y \in \partial\Omega_\beta \cap C$ bất kỳ, khi đó $y(t) \geq 0, t \in [0,1]$, $|y|_0 = \beta$ với $t \in [a,b]$ ta có $M\beta \leq y(t) \leq \beta$. Từ (3.2), (3.6), (3.7) và (3.9) ta có:

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0,1]} |Fy(t)| &= \sup_{t \in [0,1]} \left| h(t) + \int_0^1 k(t,s) f(y(s)) ds \right| \\
&\geq \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_a^b k(t,s) f(y(s)) ds \right| \\
&\geq \sup_{t \in [0,1]} \int_a^b |k(t,s)| \cdot |f(y(s))| ds \\
&\geq K_2 f(M\beta) > \beta = |y|_0.
\end{aligned}$$

Do đó (3.18) đúng.

Vậy nếu $\alpha < \beta$ thì theo Định lý 2.1.11, F có một điểm bất động y trong $\Omega_1 := \{x \in C : \alpha < |x|_0 < \beta\}$.

Nếu $\beta < \alpha$ thì theo Định lý 2.1.8, F có một điểm bất động y trong $\Omega_2 := \{x \in C : \beta < |x|_0 < \alpha\}$.

□

Chú ý 3.1: Điều kiện (3.9) có thể thay bởi điều kiện:

$$(3.19) \text{ Tồn tại } \beta > 0, \beta \neq \alpha \text{ và } t^* \in [0,1] \text{ sao cho } \frac{\beta}{h(t^*) + f(M\beta) \int_a^b k(t^*,s) ds} < 1$$

Do kết quả (3.18) được suy ra từ (3.9) nên ta sẽ chứng minh (3.19) cũng suy ra (3.18). Thật vậy, lấy $y \in \partial\Omega_\beta \cap C$ bất kỳ, khi đó $y(t) \geq 0, t \in [0,1]$, $|y|_0 = \beta$ và với $t \in [a,b]$ ta có $M\beta \leq y(t) \leq \beta$. Khi đó từ (3.2), (3.6), (3.7) và (3.18) ta có:

$$\begin{aligned}
|Fy|_0 &\geq Fy(t^*) = h(t^*) + \int_0^1 k(t^*,s) f(y(s)) ds \\
&\geq h(t^*) + \int_a^b k(t^*,s) f(y(s)) ds \\
&\geq h(t^*) + f(M\beta) \int_a^b k(t^*,s) ds
\end{aligned}$$

$$> \beta = |y|_0$$

Do đó (3.18) đúng.

Chú ý 3.2: Để dàng kiểm tra điều kiện $f: R \rightarrow R$ không giảm (điều kiện 3.7) có thể bỏ qua, và thay vào đó ta sẽ thay điều kiện (3.8) và (3.9) theo thứ tự bởi

$$(3.20) \text{ Tồn tại } \alpha > 0 \text{ sao cho } \frac{\alpha}{|h|_0 + K_1 \sup_{z \in [0, \alpha]} f(z)} > 1 \text{ với } K_1 = \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^1 k(t, s) ds > 0.$$

$$(3.21) \text{ Tồn tại } \beta > 0, \beta \neq \alpha \text{ sao cho } \frac{\beta}{K_2 \inf_{z \in [M\beta, \beta]} f(z)} < 1 \text{ với } K_2 = \sup_{t \in [0, 1]} \int_a^b k(t, s) ds.$$

Như vậy Định lý 3.1 đã chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình (3.1) nhờ vào Định lý Krasnoselskii 2.1.11. Dưới đây ta sẽ trình bày ứng dụng của Định lý 2.2.3 (Định lý Krasnoselskii dưới dạng hai chuẩn)

3.2. Ứng dụng của Định lý Krasnoselskii dưới dạng hai chuẩn chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân.

Xét phương trình tích phân:

$$y(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s, y(s)) ds \text{ với } t \in [0, 1] \text{ h.k.n} \quad (3.22)$$

Ta sẽ tìm nghiệm dương $y \in L^p[0, 1]$ với $1 \leq p < \infty$ của phương trình (3.22), nghĩa là $y(t) > 0$ với

$$t \in [0, 1] \text{ h.k.n và } \left[\int_0^1 |y(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Định lý 3.2. Cho không gian $L^p[0, 1] (1 \leq p < \infty)$. Giả sử rằng:

$f: [0, 1] \times R \rightarrow R$ là hàm Carathéodory, nghĩa là:

$$\text{Ánh xạ } t \mapsto f(t, y) \text{ là đo được với mọi } y \in R \text{ và} \quad (3.23)$$

$$\text{Ánh xạ } y \mapsto f(t, y) \text{ là liên tục với } t \in [0, 1] \text{ h.k.n} \quad (3.24)$$

Tồn tại $p_2 \in (1, \infty); a_0, a_1 \in L^{p_2}([0, 1], R_+)$ với $a_0(t) > 0$ trên một tập có độ đo dương và $a_2 > 0$ sao cho:

$$|f(t, y)| \leq a_1(t) + a_2 |y|^{\frac{p}{p_2}} \text{ với } \forall y \in R, t \in [0, 1] \text{ h.k.n.} \quad (3.25)$$

$$f(t, y) \geq a_0(t) \text{ với } \forall y \in R_+, t \in [0, 1] \text{ h.k.n.} \quad (3.26)$$

$$f(t, y) \text{ không giảm theo biến } y \text{ với } t \in [0, 1] \text{ h.k.n.} \quad (3.27)$$

$$k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R \text{ là hàm đo được.} \quad (3.28)$$

Tồn tại $0 < M \leq 1, \frac{p}{p_2} \leq q \leq p, k_1 \in L^p[0,1], k_2 \in L^{\bar{p}_1}$ với $\bar{p}_1 := \frac{p_2 q}{p_2 q - p}$ sao cho:

$$0 < k_1(t), k_2(t) \text{ với } t \in [0,1] \text{ h.k.n.} \quad (3.29)$$

$$Mk_1(t)k_2(s) \leq k(t,s) \leq k_1(t)k_2(s) \text{ với } t \in [0,1] \text{ h.k.n; với } s \in [0,1] \text{ h.k.n} \quad (3.30)$$

Tồn tại $\rho, R: 0 < \rho < R$ và $r \in [1, q]$ sao cho:

$$|k_1|_q |k_2|_{\bar{p}_1} \psi(\rho) < \rho \text{ với } \psi(t) := |a_1|_{\frac{p}{p_2}} + a_2 t^{\frac{p}{p_2}} (t \geq 0), \text{ trong đó } \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1. \quad (3.31)$$

$$(b) \quad M |k_1|_r \int_0^1 k_2(s) f(s, b_r(s) R) ds \geq R \quad \text{với} \quad b_r(t) := M \frac{k_1(t)}{|k_1|_r}, \quad t \in [0,1] \quad \text{h.k.n} \quad (0 \leq r \leq p)$$

(3.32)

Khi đó (3.22) có ít nhất hai nghiệm dương y_1, y_2 với $|y_1|_q < \rho \leq |y_2|_q$ và $|y_2|_r \leq R$

Chứng minh định lý 3.2.

Đặt $X := L^p[0,1]$ và $A = KF$ với:

$$F: L^p[0,1] \rightarrow L^{p_2}[0,1]; \quad F(y)(t) = f(t, y(t))$$

$$K: L^{p_2}[0,1] \rightarrow L^p[0,1]; \quad K(v)(t) = \int_0^1 k(t,s)v(s)ds$$

$$\text{Đặt } C = \{y \in L^p[0,1]: y \neq 0; y(t) \geq b_r(t) |y|_r, t \in [0,1] \text{ h.k.n, } \forall r \in [1, p]\}. \quad (3.33)$$

Ta sẽ áp dụng Định lý 2.2.3 để chứng minh A có hai điểm bất động trong C .

Bước 1: Chứng minh $C \subset X$ là một tập lồi khác $\emptyset$ với $0 \notin C$ và $\lambda C \subset C$ với mọi $\lambda > 0$. Thật vậy:

Dễ thấy $C \neq \emptyset$ (do $k_1 \in C$); $0 \notin C$ và $\lambda C \subset C$ với mọi $\lambda > 0$.

C lồi vì lấy bất kỳ $y_1, y_2 \in C, \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]: \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ta có:

$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \neq 0$ (hiển nhiên).

$$\begin{aligned} (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)(t) &= \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \\ &\geq b_r(t) (\lambda_1 |y_1|_r + \lambda_2 |y_2|_r) \\ &\geq b_r(t) (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)_r, t \in [0,1] \text{ h.k.n, } \forall r \in [1, p]. \end{aligned}$$

Bước 2: Chứng minh F, K xác định. $A: C \rightarrow C$.

Với mọi $y \in L^p[0,1]$ ta có $|f(t, y(t))| \leq a_1(t) + a_2 |y|^{\frac{p}{p_2}}$ với $t \in [0,1]$ h.k.n.

$$\text{Mà } a_1 \in L^{p_2}[0,1], |y|^{\frac{p}{p_2}} \in L^{p_2}[0,1] \text{ (do } \left(\int_0^1 \left(|y|^{\frac{p}{p_2}} \right)^{p_2} dt \right)^{\frac{1}{p_2}} = |y|_{\frac{p}{p_2}} < \infty).$$

Do đó $a_1 + a_2 |y|^{\frac{p}{p_2}} \in L^{p_2}[0,1]$, suy ra $F(y) = f(., y(.)) \in L^{p_2}[0,1]$.

Vậy $F : L^p[0,1] \rightarrow L^{p_2}[0,1]$.

$$\begin{aligned} \text{Với mọi } v \in L^{p_2}[0,1] \text{ ta có:} \quad & \left(\int_0^1 |K(v)(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |k_1(t)k_2(s)v(s)| ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_0^1 (k_1(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |k_2(s)v(s)| ds \right) \\ & \leq \|k_1\|_p \left(\int_0^1 |k_2(s)|^{p_1} ds \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_0^1 |v(s)|^{p_2} ds \right)^{\frac{1}{p_2}} \text{ (bất đẳng thức Holder)} \\ & = \|k_1\|_p \|k_2\|_{p_1} \|v\|_{p_2} \\ & < \infty. \end{aligned}$$

$$(k_2 \in \overline{L^{p_1}} \subset L^{p_1} \text{ vì do } p \geq q \text{ ta có: } \overline{p_1} := \frac{p_2 q}{p_2 q - p} = \frac{q}{q - \frac{p}{p_2}} \geq \frac{q}{q - \frac{q}{p_2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} = p_1).$$

Do vậy $K(v) \in L^p[0,1]$ hay $K : L^{p_2}[0,1] \rightarrow L^p[0,1]$.

$$\text{Lấy } y \in C \text{ bất kỳ, ta có: } A(y)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s,y(s))ds \geq Mk_1(t) \int_0^1 k_2(s)f(s,y(s))ds, t \in [0,1] \text{ h.k.n,}$$

$$\text{suy ra } \int_0^1 k_2(s)f(s,y(s))ds \leq \frac{A(y)(t)}{Mk_1(t)}, t \in [0,1] \text{ h.k.n.}$$

Lấy $\gamma \in [1, p]$ ta có:

$$|A(y)|_\gamma = \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 k(t,s)f(s,y(s))ds \right)^\gamma dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} = |k_1|_\gamma \int_0^1 k_2(s)f(s,y(s))ds \leq |k_1|_\gamma \frac{A(y)(t)}{Mk_1(t)}, t \in [0,1] \text{ h.k.n suy ra}$$

$$A(y)(t) \geq \frac{Mk_1(t)}{|k_1|_\gamma} |A(y)|_\gamma = b_\lambda(t) |A(y)|_\gamma, t \in [0,1] \text{ h.k.n, } \gamma \in [1, p]. \quad (3.34)$$

$$\text{Mặt khác } A(y)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s,y(s))ds$$

$$\geq M \int_0^1 k_1(t).k_2(s).a_0(s)ds \quad \forall t \in [0,1], y \in C$$

$$> 0 \quad \forall t \in [0,1] \text{ (do } a_0(t) > 0 \text{ và } k_1(t), k_2(t) > 0, t \in [0,1] \text{ h.k.n)}$$

$$\text{Suy ra } A(y) \neq 0, \forall y \in C \quad (3.35)$$

Từ (3.34) và (3.35) ta có $A(y) \in C$.

Vậy $A : C \rightarrow C$.

Bước 3: Chứng minh A hoàn toàn liên tục. Ta sẽ chứng minh F liên tục, bị chặn và K hoàn toàn liên tục.

* Chứng minh $F : L^p[0,1] \rightarrow L^{p_2}[0,1]$ liên tục:

Lấy $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset L^p[0,1]$ bất kỳ, $y_n \rightarrow y$ trong $L^p[0,1]$. Giả sử $\{Fy_n\}_n$ không hội tụ về Fy trong $L^{p_2}[0,1]$, khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ và dãy con $\{Fy_{n_k}\}_k$:

$$\|Fy_{n_k} - Fy\|_{p_2} \geq \varepsilon, \forall n_k \in \mathbb{N}. \quad (3.36)$$

Lại có $y_{n_k} \rightarrow y$ trong $L^p[0,1]$ nên có dãy con $\{y_{n_{k_l}}\}_l$ sao cho: $y_{n_{k_l}}(t) \rightarrow y(t)$, $t \in [0,1]$ h.k.n. và tồn tại $h \in L^p[0,1]$: $|y_{n_{k_l}}(t)| \leq h(t)$ với mọi $n_k \geq 1, t \in [0,1]$. Từ đây ta suy ra:

$$Fy_{n_{k_l}}(t) = f(t, y_{n_{k_l}}(t)) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} f(t, y(t)) = Fy(t), t \in [0,1] \text{ h.k.n} \quad (3.37)$$

và

$$Fy_{n_{k_l}}(t) \leq a_1(t) + a_2 \left| y_{n_{k_l}}(t) \right|^{\frac{p}{p_2}} \leq a_1(t) + a_2 |h(t)|^{\frac{p}{p_2}}, \forall t \in [0,1], \forall n_k \geq 1 \quad (3.38)$$

trong đó hàm $g(t) = a_1(t) + a_2 |h(t)|^{\frac{p}{p_2}}$ là khả tích trong $L^{p_2}[0,1]$ (do $a_1 \in L^{p_2}$; $|h|^{\frac{p}{p_2}} \in L^{p_2}$).

$$\left| Fy_{n_{k_l}}(t) - Fy(t) \right|^{p_2} \leq 2^{p_2-1} \left| Fy_{n_{k_l}}(t) \right|^{p_2} + 2^{p_2-1} \left| Fy(t) \right|^{p_2}$$

Từ (3.38) ta có:

$$\leq 2^{p_2-1} \left| a_1(t) + a_2 \left| y_{n_{k_l}}(t) \right|^{\frac{p}{p_2}} \right|^{p_2} + 2^{p_2-1} \left| a_1(t) + a_2 \left| y(t) \right|^{\frac{p}{p_2}} \right|^{p_2}$$

$$\leq 2^{2p_2-2} \left[2 \left| a_1(t) \right|^{p_2} + a_2 \left| y_{n_{k_l}}(t) \right|^p + a_2 \left| y(t) \right|^p \right]$$

$$\leq 2^{2p_2-2} \left[2 \left| a_1(t) \right|^{p_2} + a_2 \left| h(t) \right|^p + a_2 \left| y(t) \right|^p \right], n_k \geq 1, \forall t \in [0,1]$$

Lại có $k(t) = 2^{2p_2-2} \left[2 \left| a_1(t) \right|^{p_2} + a_2 \left| h(t) \right|^p + a_2 \left| y(t) \right|^p \right] \in L^1$, $t \in [0,1]$ (do $a_1 \in L^{p_2}$; $h \in L^p$).

Do đó $\left| Fy_{n_{k_l}}(t) - Fy(t) \right|^{p_2} \leq k(t), \forall t \in [0,1], \forall n_{k_l} \geq 1$.

Mặt khác $\left| Fy_{n_{k_l}}(t) - Fy(t) \right|^{p_2} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0, t \in [0,1]$ h.k.n. (do (3.37))

Theo Định lý Lebesgue về sự hội tụ bị chặn ta có: $\lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| Fy_{n_{k_l}}(t) - Fy(t) \right|^{p_2} dt = 0$ hay

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|Fy_{n_{k_l}} - Fy\|_{p_2} = 0 \text{ (Mâu thuẫn với (3.36))}$$

Vậy $\{Fy_n\}_n$ không hội tụ về Fy trong $L^{p_2}[0,1]$ hay F là ánh xạ liên tục liên tục.

* Chứng minh F biến tập bị chặn trong $L^p[0,1]$ thành tập bị chặn trong $L^{p_2}[0,1]$:

Lấy Ω là tập bị chặn trong $L^p[0,1]$ nghĩa là với mọi $y \in \Omega$ ta có $M > 0$ sao cho $\|y\|_p \leq M$. Khi đó:

$$\begin{aligned}\|Fy\|_{p_2}^{p_2} &= \int_0^1 |f(t, y(t))|^{p_2} dt \\ &\leq 2^{p_2-1} \int_0^1 |a_1(t)|^{p_2} dt + a_2 2^{p_2-1} \int_0^1 |y(t)|^{\frac{p}{p_2} p_2} dt \\ &\leq 2^{p_2-1} (\|a_1\|_{p_2}^{p_2} + a_2 M^p), \quad y \in \Omega.\end{aligned}$$

Suy ra $F(\Omega)$ là tập bị chặn trong $L^{p_2}[0,1]$.

Ta chỉ cần chứng minh K hoàn toàn liên tục, trước hết ta có bổ đề sau:

Bổ đề: Tiêu chuẩn Riesz về tính compact.

Cho $\Omega \subset L^p[0,1]$ ($1 \leq p < \infty$). Khi đó Ω là tập compact tương đối trong không gian $L^p[0,1]$ khi và chỉ khi những điều kiện sau được thỏa:

(i) Ω bị chặn trong $L^p[0,1]$.

(ii) $\int_0^1 |u(t+h) - u(t)|^p dt \rightarrow 0$ khi $h \rightarrow 0$ đều đối với biến $u \in \Omega$.

* Chứng minh $K : L^{p_2}[0,1] \rightarrow L^p[0,1]$ liên tục và hoàn toàn liên tục:

Lấy $u \in L^{p_2}[0,1]$, khi đó:

$$\begin{aligned}\|Ku\|_p &= \left[\int_0^1 \left| \int_0^1 k(t,s) u(s) ds \right|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[\int_0^1 \left[\left(\int_0^1 |k(t,s)|^{p_1} ds \right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot \left(\int_0^1 |u(s)|^{p_2} ds \right)^{\frac{1}{p_2}} \right]^{p_2} dt \right]^{\frac{1}{p}} \quad (p_1 \text{ là số liên hợp của } p_2)\end{aligned}$$

(do bất đẳng thức Holder và với mọi $t \in [0,1] : k(t, \cdot) \leq k_1(t).k_2(\cdot) \in \overline{L^{p_1}} \subset L^{p_1}$)

$$\begin{aligned}&= \|u\|_{p_2} \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,s)|^{p_1} ds \right)^{\frac{p}{p_1}} dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|u\|_{p_2} \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 |k_1(t)|^{p_1} |k_2(s)|^{p_1} ds \right)^{\frac{p}{p_1}} dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{p_2} \|k_1\|_p \|k_2\|_{p_1}.\end{aligned}$$

Do đó $\|Ku\|_p \leq \|u\|_{p_2} \|k_1\|_p \|k_2\|_{p_1} \quad \forall u \in L^{p_2}$, suy ra $K : L^{p_2}[0,1] \rightarrow L^p[0,1]$ liên tục.

Để chứng minh $K : L^{p_2}[0,1] \rightarrow L^p[0,1]$ hoàn toàn liên tục ta sẽ áp dụng tiêu chuẩn Riesz. Lấy Ω là tập bị chặn bất kỳ trong $L^{p_2}[0,1]$, nghĩa là tồn tại $D > 0 : \|u\|_{p_2} \leq M \quad \forall u \in \Omega$. Lấy $u \in \Omega$ bất kỳ ta có:

$$\|Ku\|_p \leq \|u\|_{p_2} \|k_1\|_p \|k_2\|_{p_1} \leq D \|k_1\|_p \|k_2\|_{p_1} \quad \forall u \in \Omega.$$

Do đó $K(\Omega)$ bị chặn trong $L^p[0,1]$. Tiếp theo ta sẽ chỉ ra rằng:

$\int_0^1 |Ku(t+h) - Ku(t)|^p dt \rightarrow 0$ khi $h \rightarrow 0$ đều đối với biến $u \in \Omega$. Thật vậy:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Ku(t+h) - Ku(t)|^p dt &= \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t+h,s)u(s)ds - \int_0^1 k(t,s)u(s)ds \right|^p dt \\ &\leq \int_0^1 \left[\int_0^1 |k(t+h,s) - k(t,s)| |u(s)| ds \right]^p dt \\ &\leq \|u\|_{p_2}^p \int_0^1 \left[\int_0^1 |k(t+h,s) - k(t,s)|^{p_1} ds \right]^{\frac{p}{p_1}} dt \end{aligned}$$

(bất đẳng thức Holder, $u \in \Omega \subset L^{p_2}$ và với mỗi $t \in [0,1] : k(t, \cdot) \leq k_1(t).k_2(\cdot) \in \overline{L^{p_1}} \subset L^{p_1}$)

$$\begin{aligned} &\leq D^p \cdot \int_0^1 \left[\int_0^1 |k(t+h,s) - k(t,s)|^{p_1} ds \right]^{\frac{p}{p_1}} dt \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Vậy $K : L^{p_2}[0,1] \rightarrow L^p[0,1]$ hoàn toàn liên tục.

Do $F : L^p[0,1] \rightarrow L^{p_2}[0,1]$ liên tục và $K : L^{p_2}[0,1] \rightarrow L^p[0,1]$ hoàn toàn liên tục nên $A = K \circ F : L^p[0,1] \rightarrow L^p[0,1]$ hoàn toàn liên tục.

Bước 4 : Áp dụng Định lý 2.2.3 với $|\cdot| := |\cdot|_q$ và $\|\cdot\| := |\cdot|_r$.

Đầu tiên ta chứng minh tồn tại $c_1, c_2 > 0 : c_1 |y|_q \leq |y|_r \leq c_2 |y|_q, \forall y \in C$ (3.39)

Thật vậy, rõ ràng $|y|_r \leq |y|_q, \forall y \in C$ (do $r \leq q$); mặt khác với $y \in C$ bất kỳ ta có $y(t) \geq b_{\gamma_0}(t) |y|_{\gamma_0}$ với $\gamma_0 \in [0,1]$ nào đó, suy ra $|y|_r \geq |b_{\gamma_0}|_r |y|_{\gamma_0}$. Do vậy (3.39) đúng với $c_1 = |b_{\gamma_0}|_r; c_2 = 1$.

Cuối cùng ta sẽ chứng minh :

$$|A(y)|_q < |y|_q \text{ với mọi } y \in C, |y|_q = \rho \quad (3.40)$$

$$|A(y)|_r > |y|_r \text{ với mọi } y \in C, |y|_r = R \quad (3.41)$$

Thật vậy, với mọi $y \in C, |y|_q = \rho$ ta có:

$$\begin{aligned}
|A(y)|_q &= \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,s)f(s,y(s))| ds \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq |k_1|_q \left(\int_0^1 |k_2(s)|^{\bar{p}_1} ds \right)^{\frac{1}{\bar{p}_1}} \left(\int_0^1 |F(y)(s)|^{\bar{p}_2} ds \right)^{\frac{1}{\bar{p}_2}} \\
&= |k_1|_q |k_2|_{\bar{p}_1} |F(y)|_{\bar{p}_2} \\
&\leq |k_1|_q |k_2|_{\bar{p}_1} \left(|a_1|_{\bar{p}_2} + a_2 |y|^{\frac{p}{p_2}} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Ta có } |y|^{\frac{p}{p_2}} = \left[\int_0^1 |y|^{\frac{p}{p_2}}(s) ds \right]^{\frac{1}{p_2}} = \left[\int_0^1 |y(s)|^{\frac{p}{p_2} \cdot \frac{p_2 q}{p}} ds \right]^{\frac{p}{p_2 q}} = \left[\int_0^1 |y(s)|^q ds \right]^{\frac{1}{q} \frac{p}{p_2}} = |y|_q^{\frac{p}{p_2}}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
|A(y)|_q &\leq |k_1|_q |k_2|_{\bar{p}_1} \psi(|y|_q) \\
&= |k_1|_q |k_2|_{\bar{p}_1} \psi(\rho) \\
&< \rho = |y|_q \text{ (do (3.31))}
\end{aligned}$$

Do đó (3.39) được thỏa mãn.

Cuối cùng lấy $y \in C, |y|_r = R$ bất kỳ ta có :

$$\begin{aligned}
|A(y)|_r &= \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,s)f(s,y(s))| ds \right)^r dt \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\geq M |k_1|_r \int_0^1 k_2(s)f(s,y(s)) ds \\
&\geq M |k_1|_r \int_0^1 k_2(s)f(s,b_r(s)|y|_r) ds \text{ (do } y \in C \text{ và } f(s,y) \text{ không giảm theo } y) \\
&= M |k_1|_r \int_0^1 k_2(s)f(s,b_r(s)R) ds \\
&\geq R = |y|_r \text{ (do (3.32)).}
\end{aligned}$$

Do đó (3.40) cũng được thỏa mãn. Áp dụng Định lý 2.2.3 ta có A có ít nhất hai điểm bất động y_1, y_2

với $|y_1|_q < \rho \leq |y_2|_q$ và $|y_2|_r \leq R$ (đpcm).

□

KẾT LUẬN

Như vậy trong luận văn này tôi đã nêu ra hai phương pháp cơ bản trong việc chứng minh Định lý Krasnoselskii cho ánh xạ nén và giãn trong mặt nón. Đó là phương pháp dùng khái niệm bậc topo và phương pháp dùng Định lý điểm bất động Schauder. Ngoài ra, luận văn còn trình bày hai định lý về ứng dụng của Định lý Krasnoselskii trong việc chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân phi tuyến. Tuy những định này khá cơ bản nhưng chứng minh của chúng khá phức tạp và luận văn đã trình bày chi tiết và rõ ràng hơn một số bài báo và sách đã tham khảo.

Tuy nhiên do thời gian và điều kiện làm việc còn hạn chế nên luận văn chưa đi sâu và nghiên cứu Định lý Krasnoselskii cho ánh xạ đa trị và xem xét thêm nhiều ứng dụng khác của định lý ngoài việc chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân phi tuyến (3.1) và (3.21).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] D. O'Regan, R. Precup (2005), "Compression–expansion fixed point theorem in two norms and applications", *Mathematical Analysis and Applications*, 309, pp.383-391.
- [2] Nguyễn Bích Huy, Giáo trình Cao học Giải tích phi tuyến 2, Đại học sư phạm thành phố Hồ Chí Minh.
- [3] M. K. Kwong (2008), "On Krasnoselskii's cone fixed point theorem", *Fixed point theory and Applications*, Article ID 164537, 18pp.
- [4] K. Deimling (1984), *Nonlinear Functional Analysis*, Springer Verlag, New York.
- [5] Leszek Gasiński, Nikolaos S. Papageorgiou (2005), *Nonlinear Analysis Volume 9*, Taylor & Francis Group, LLC, New York.
- [6] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan (2001), *Fixed point theory and applications*, Cambridge University Press, New York.
- [7] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan (2001), *Nonlinear integral equations and inclusions*, Nova Science Publishers, New York.