

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Nguyễn Thị Lan Vinh

CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG VÀNH
CÁC THƯƠNG CỦA CÁC VÀNH
KHÔNG GIAO HOÁN

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 60 46 05

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS.TS. BÙI TƯỜNG TRÍ

Thành phố Hồ Chí Minh - 2010

BẢNG KÝ HIỆU

$\mathbb{Z}$	: tập các số nguyên.
$\mathbb{Q}$	: tập các số hữu tỷ.
$\mathbb{Z}_n$	: nhóm cyclic $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$.
$\emptyset$	: tập rỗng.
$U(R)$	: nhóm các phần tử khả nghịch của R .
$R_S, RS^{-1}, S^{-1}R$	: vành các thương phải (trái) của R tại S .
R_p	: địa phương hóa của vành giao hoán R tại ideal nguyên tố p .
$Q_{cl}^r(R), Q_{cl}^l(R)$	: vành các thương phải (trái) cổ điển của R .
$N \subseteq_e M$	: N là module con cốt yếu của module M .
$\text{u.dim}(M)$	: chiều điều của module M .
$J(R)$	: radical Jacobson của R .
$k[x_i : i \in I]$	: vành các đa thức trên k với các biến $\{x_i : i \in I\}$.
$k\langle x_i : i \in I \rangle$	: vành tự do trên k sinh bởi $\{x_i : i \in I\}$.
E_{ij}	: các đơn vị ma trận.
$ X $	: bản số của X .
$\text{ann}_l(S), \text{ann}_r(S)$	: lũy linh trái (phải) của S .

MỞ ĐẦU

Như ta đã biết trong đại số giao hoán, việc xây dựng trường các thương của một miền nguyên R thực chất chính là việc ta đi xây dựng vành các thương R_S trong đó $S = R \setminus \{0\}$. Mở rộng hơn nữa đối với một vành giao hoán bất kỳ, lấy một tập con đóng nhân S của R ta cũng xây dựng được vành các thương R_S của R , và các bước xây dựng đã được Atiyah- Macdonald [1] trình bày chi tiết. Tuy nhiên, với các vành không giao hoán thì vành các thương không phải lúc nào cũng tồn tại, và việc xây dựng vành các thương của một vành không giao hoán gặp rất nhiều khó khăn.

Đến những năm đầu của thập niên 1930, Ore đã đưa ra lý thuyết địa phương hóa theo tâm cùng với điều kiện cần và đủ để xây dựng vành các thương của các vành không giao hoán. Có hai phương pháp chính xây dựng vành các thương của các vành không giao hoán. Phương pháp thứ nhất là phương pháp truyền thống tương tự như khi ta xây dựng trường các thương của một miền nguyên trong đại số giao hoán được gọi là địa phương hóa theo tâm của các vành không giao hoán. Phương pháp thứ hai theo một nghĩa nào đó rộng hơn phương pháp thứ nhất gọi là xây dựng vành các thương theo phương pháp của Ore và Goldie.

Luận văn muốn nghiên cứu về hai phương pháp này, về khả năng áp dụng của chúng trong lý thuyết các vành không giao hoán nói chung và lý thuyết các PI-vành nói riêng. Muốn tìm ra những thí dụ chứng tỏ sự giống nhau cũng như khác nhau của hai phương pháp trên. Luận văn được trình bày thành 3 chương với các nội dung chính như sau:

Chương 1: Trình bày lại một số kiến thức cơ bản của lý thuyết vành nhằm làm cơ sở lý luận cho các chương về sau.

Chương 2: Trong chương này chúng tôi trình bày (từ các tài liệu khác nhau) phương pháp truyền thống xây dựng vành các thương của các vành không giao hoán, còn được gọi là địa phương hóa theo tâm của các vành không giao hoán và phương pháp của Ore và Goldie.

Chương 3: Đưa ra một số ví dụ cho thấy việc xây dựng vành các thương của các vành không giao hoán bằng phương pháp truyền thống không phải lúc nào cũng thực hiện được.

CHƯƠNG 1:

XÂY DỰNG VÀNH CÁC THƯƠNG CỦA CÁC VÀNH GIAO HOÁN

1.1. NHẮC LẠI MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho R là một vành có đơn vị.

- **Tập con đóng nhân:** một tập con S của R được gọi là một tập con đóng nhân của R nếu:
 - * $1 \in S$, $0 \notin S$,
 - * S đóng đối với phép toán nhân được định nghĩa trong R .
- **Vành địa phương:** R được gọi là vành địa phương nếu R giao hoán và chỉ có một ideal tối đại duy nhất.
- **Miền nguyên (không giao hoán):** là một vành khác không, không có ước của không.
- **Module trung thành:** M được gọi là một R -module trung thành nếu $Mr = (0)$ suy ra $r = 0$.
- **Tập linh hóa:** nếu M là một R -module thì tập linh hóa toàn bộ M ký hiệu là $A(M)$ và $A(M) = \{x \in R \mid Mx = (0)\}$.
- **Định lý:** $A(M)$ là một ideal hai phía của R . Hơn nữa M là một $R / A(M)$ -module trung thành.
- **Định lý:** cho M là một R -module, gọi $E(M)$ là tập tất cả các tự đồng cấu của nhóm cộng của M , khi đó $E(M)$ với phép toán cộng và nhân trong $E(M)$ được định nghĩa thông thường là một vành. Khi đó ta có $R / A(M)$ đẳng cấu với một vành con của $E(M)$.
- **Vành các tự đồng cấu:** vành các tự đồng cấu của R -module M là:

$$C(M) = \{ \psi \in E(M) \mid T_a \circ \psi = \psi \circ T_a, \forall a \in R \}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} T_a : M &\rightarrow M \\ x &\rightarrow ax \end{aligned}$$

• **Module bất khả quy:** M được gọi là một R -module bất khả quy nếu thỏa hai điều kiện sau:

$$* MR \neq (0),$$

* M chỉ có hai module con duy nhất là (0) và M .

• **Định lý (bổ đề Shur):** nếu M là một R -module bất khả quy thì $C(M)$ là một vành chia.

• **Ideal nguyên tố:** một ideal P được gọi là nguyên tố nếu $BC \subset P$ thì suy ra $B \subset P$ hoặc $C \subset P$, với B, C là các ideal của A .

• **Radical của R :** radical của R , ký hiệu là $J(R)$, là tập tất cả các phần tử của R mà linh hóa tất cả các R -module bất khả quy. Nếu R không có module bất khả quy nào thì ta đặt $J(R) = R$.

Radical được định nghĩa như trên được gọi là radical Jacobson của R .

• **Tập $(p : R)$:** nếu p là một ideal phải của R thì $(p : R) = \{x \in R \mid Rx \subset p\}$.

• **Định lý:** $J(R) = \cap (p : R)$ trong đó p chạy khắp các tập ideal phải tối đại của R .

• **Định lý:** $J(R) = \cap p$ trong đó p chạy khắp các tập ideal phải tối đại của R và $(p : R)$ là ideal hai phía lớn nhất của R chứa trong p .

• **Lũy linh:** ta nói một phần tử $a \in R$ là lũy linh nếu $a^n = 0$ với n là một số nguyên dương nào đó.

• **Nil ideal:** ta gọi một ideal phải (trái, hai phía) là một nil ideal nếu mọi phần tử của nó đều lũy linh.

- **Ideal lũy linh:** ta gọi một ideal phải (trái, hai phía) p là một ideal lũy linh nếu có một số nguyên dương m sao cho $a_1 \cdot a_2 \dots a_m = 0$ với mọi $a_1, a_2, \dots, a_m \in p$ suy ra $p^m = (0)$.
- **Nửa nguyên thủy:** R được gọi là nửa nguyên thủy nếu $J(R) = 0$.
- **Định lý:** nếu R là nửa nguyên thủy thì các ideal của R cũng nửa nguyên thủy.
- **Vành Artin phải:** một vành được gọi là Artin phải nếu mọi tập không rỗng các ideal phải có phần tử tối tiểu.
- **Định lý:** nếu R là vành Artin thì $J(R)$ là một ideal lũy linh.
- **Định lý:** nếu R là vành Artin thì một nil ideal (phải, trái, hai phía) của R là lũy linh.
- **Định lý (Wedderburn–Artin):** một ideal của một vành Artin nửa đơn là một vành Artin nửa đơn.
- **Vành đơn:** một vành R được gọi là đơn nếu $R^2 \neq (0)$ và R không có ideal khác ngoài hai ideal (0) và chính nó.
- **Định lý:** một vành Artin nửa nguyên thủy là tổng trực tiếp của một số hữu hạn các vành Artin đơn.
- **Vành Noether phải:** một vành được gọi là Noether phải nếu mọi tập không rỗng các ideal phải có một phần tử tối đại.
- **Định lý:** cho A là một nil ideal một phía của một vành Noether phải R . Khi đó A là lũy linh.
- **Vành nguyên thủy:** một vành R được gọi là một vành nguyên thủy nếu nó có một module bất khả quy trung thành.
- **Vành nguyên tố:** một vành R được gọi là nguyên tố nếu $aRb = (0)$, với $a, b \in R$ suy ra $a = 0$ hoặc $b = 0$.
- **Định lý:** các khẳng định sau là tương đương:
 1. R là vành nguyên tố,

2. Nếu A, B là hai ideal của R thì $AB = (0)$ thì $A = 0$, hoặc $B = 0$,

3. Linh hóa tử bên trái của ideal trái khác (0) bất kỳ của R là (0) ,

4. Linh hóa tử bên phải của ideal trái khác (0) bất kỳ của R là (0) .

- **Định lý:** một vành nguyên thủy là vành nguyên tố.
- **Định lý:** một phần tử khác không trong tâm của một vành nguyên tố R là phần tử không có ước của không trong R . Hay tâm của một vành nguyên tố là một miền nguyên.
- **Chính quy phải:** cho R là một vành, một phần tử $x \in R$, $x \neq 0$ được gọi là chính quy phải nếu $xr = 0 \Rightarrow r = 0$ với $r \in R$, nói cách khác x không có ước của không bên phải.
- **Chính quy trái:** cho R là một vành, một phần tử $x \in R$, $x \neq 0$ được gọi là chính quy trái nếu $rx = 0 \Rightarrow r = 0$ với $r \in R$, nói cách khác x không có ước của không bên phải.
- **Chính quy:** cho R là một vành, một phần tử $x \in R$, $x \neq 0$ vừa chính quy phải vừa chính quy trái được gọi là chính quy, nói cách khác x không có ước của không.
- **Đại số:** cho K là một vành giao hoán có đơn vị. A được gọi là đại số trên K nếu thỏa mãn:
 - * A là K -module,
 - * A là vành,
 - * $\forall k \in K, \forall a, b \in A : k(ab) = (ka)b = a(kb)$.
- **Ideal của đại số** được hiểu là ideal của vành A và đồng thời là K -module con của A .
- **Đại số đơn:** đại số A được gọi là đại số đơn nếu $A \neq 0$ và A không có ideal nào khác ngoài (0) và A . Nếu A là đại số đơn thì tâm của A , tập hợp $C = \{c \in A \mid cx = xc, \forall x \in A\}$ là một trường. Khi đó A có thể được xem là một đại số trên C .

- **Đại số đơn tâm:** cho K là một trường, đại số A được gọi là đại số đơn tâm nếu A đơn và tâm của A đẳng cấu với K .
- **Đại số nguyên thủy:** một đại số A là nguyên thủy nếu nó có một A -module bất khả quy và trung thành.
- **Đại số nửa nguyên thủy:** đại số A được gọi là nửa nguyên thủy nếu $J(A) = (0)$.
- **Ideal nguyên thủy của đại số:** một ideal p của đại số A được gọi là ideal nguyên thủy nếu A/p là đại số nguyên thủy.
- **Định lý (Amitsur):** gọi $A[x]$ là đại số theo biến x với hệ số lấy trong A , nếu A không có nil ideal khác (0) thì $A[x]$ là đại số nửa nguyên thủy.
- **Ideal nguyên tố:** một ideal P của một đại số A được gọi là nguyên tố nếu $BC \subset P$ thì suy ra $B \subset P$ hoặc $C \subset P$, với B, C là các ideal của A .
- C/B là ideal nguyên tố của A/B khi và chỉ khi C là ideal nguyên tố của A chứa B .
- **Đại số nguyên tố:** một đại số A được gọi là một đại số nguyên tố nếu (0) là ideal nguyên tố của A , tức là nếu $BC = 0$ thì suy ra $B = 0$, hoặc $C = 0$ với B, C là các ideal của A .
- **Nhận xét:** nếu A là đại số nguyên thủy thì A là đại số nguyên tố.
- **Định lý:** các khẳng định sau là tương đương:
 1. A là đại số nguyên tố,
 2. Nếu $bAc = (0)$ thì $b = 0$, hoặc $c = 0$,
 3. Linh hóa tử bên trái của ideal trái khác (0) bất kỳ của A là (0) ,
 4. Linh hóa tử bên phải của ideal trái khác (0) bất kỳ của A là (0) .
- **Đại số nửa nguyên tố:** đại số A được gọi là nửa nguyên tố nếu A không có ideal lũy linh khác (0) .
- **Nhận xét:** nếu A là một đại số nguyên tố thì A là đại số nửa nguyên tố.

- **Ideal nửa nguyên tố:** một ideal B của A được gọi là nửa nguyên tố nếu đại số thương A/B là nửa nguyên tố.
- **Đại số tự do:** cho $\{x_1, x_2, \dots\}$ là tập vô hạn đếm được các phần tử, giả sử X là một vị nhóm tự do sinh bởi tập đếm được các phần tử $x_1, x_2, \dots$. Gọi $K\{X\}$ là đại số vị nhóm của X trên K . Khi đó $K\{X\}$ được gọi là đại số tự do với tập đếm được các phần tử sinh x_i , hay còn ký hiệu là $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$. Tập hợp $\{x_1, x_2, \dots\}$ được nhúng vào $K\{X\}$ là phép nhúng $i: \{x_1, x_2, \dots\} \rightarrow K\{X\}$ có tính chất phổ dụng. Điều này có nghĩa là với A là một đại số bất kỳ và một ánh xạ $\alpha: \{x_1, x_2, \dots\} \rightarrow A$ luôn tồn tại duy nhất đồng cấu $\beta: K\{X\} \rightarrow A$ sao cho biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccc}
 \{x_1, x_2, \dots\} & \xrightarrow{i} & K\{X\} \\
 \downarrow \alpha & \nearrow \exists! \beta & \\
 A & &
 \end{array}$$

- **Định nghĩa:** cho A là một đại số trên trường F , $a \in A$ được gọi là đại số trên F nếu có một đa thức khác không $p(x) \in F[x]$ sao cho $p(a) = 0$. A được gọi là một đại số đại số (algebraic algebra) trên F nếu mọi phần tử của A là đại số trên F .

Trước khi xây dựng vành các thương của các vành không giao hoán, ta nhắc lại các bước xây dựng vành các thương của các vành giao hoán như sau:

1.2. VÀNH CÁC THƯƠNG CỦA CÁC VÀNH GIAO HOÁN

Với R là một vành giao hoán bất kỳ, S là một tập con đóng nhân của R , ta cũng đã xây dựng được vành các thương của R , ký hiệu là R_S (hoặc RS^{-1}), theo tập con đóng nhân S , và một đồng cấu vành: $\varepsilon: R \rightarrow RS^{-1}$ với $\varepsilon(s)$ khả nghịch trong R_S với mọi $s \in S$ như sau:

Cho tập con nhân S của một vành R . Trên tập $R \times S$ ta định nghĩa một quan hệ hai ngôi $\square$ như sau:

$$\forall (r, s), (r', s') \in R \times S: (r, s) \square (r', s') \Leftrightarrow \exists t \in S: (rs' - r's)t = 0$$

$\sqsubset$ là một quan hệ tương đương trên $R \times S$, thật vậy:

* $\sqsubset$ có tính chất phản xạ: $\forall (r,s) \in R \times S: (rs - rs)t = 0$ với mọi $t \in S$, do đó $(r,s) \sqsubset (r,s)$.

* $\sqsubset$ có tính chất đối xứng: giả sử ta có $(r,s) \sqsubset (r',s') \Leftrightarrow \exists t \in S: (rs' - r's)t = 0$ suy ra $-(r's - rs')t = 0 \Leftrightarrow (r',s') \sqsubset (r,s)$.

* $\sqsubset$ có tính chất bắc cầu: giả sử ta có $(a,s) \sim (b,t)$ và $(b,t) \sim (c,u)$, khi đó tồn tại $v, w \in S$ sao cho $(at - bs)v = 0$ và $(bu - ct)w = 0$, suy ra $(au - cs)tvw = 0$, do S là đóng với phép nhân nên $tvw \in S$, do đó: $(a,s) \sim (c,u)$.

Ta ký hiệu tập thương $R \times S / \sqsubset$ là RS^{-1} và ký hiệu lớp tương đương của phần tử

(r,s) là $\frac{r}{s}$.

Mệnh đề 1.1:

Tập RS^{-1} cùng với hai quy tắc:

- Cộng: $\forall \frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in RS^{-1} \quad \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$
- Nhân: $\forall \frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in RS^{-1} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

là một vành.

Chứng minh:

Các quy tắc đã cho là một phép toán, thật vậy: $\forall \frac{a}{s}, \frac{b}{t}, \frac{a'}{s'}, \frac{b'}{t'} \in RS^{-1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \\ \frac{b}{t} = \frac{b'}{t'} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists u, v \in S: \left\{ \begin{array}{l} (as' - a's)u = 0 \quad (1) \\ (bt' - b't)v = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(1) \text{ và } (2) \text{ suy ra: } \begin{cases} (as' - a's)uvtt' = 0 \\ (bt' - b't)vuss' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (as'tt' - a'stt')uv = 0 \\ (bt'ss' - b'tss')vu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow [(at + bs)t's' - (a't' + b's')st]uv = 0 \\ &\Rightarrow \frac{at + bs}{st} = \frac{a't' + b's'}{s't'} \Rightarrow \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{a'}{s'} + \frac{b'}{t'} \end{aligned}$$

Mặt khác (1) và (2) cũng cho:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} as'u = a'su \\ bt'v = b'tv \end{cases} \Rightarrow abs't'uv = a'b'stuv \Rightarrow (abs't' + a'b'st)uv = 0 \\ &\Rightarrow \frac{a}{st} = \frac{ba'b'}{s't'} \Rightarrow \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{a'}{s'} \cdot \frac{b'}{t} \end{aligned}$$

Các tiên đề định nghĩa của vành dễ dàng được kiểm tra, đơn vị của vành là $\frac{1}{1}$.

Vành R_S hay RS^{-1} còn được gọi là vành các thương của R theo S .

Định lý 1.2:

Cho $g : R \rightarrow B$ là một đồng cấu vành sao cho $g(s)$ là phần tử khả nghịch trong B với mọi $s \in S$. Khi đó tồn tại duy nhất một đồng cấu vành $h : RS^{-1} \rightarrow B$ sao cho: $g = h \circ \varepsilon$.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{g} & B \\ \varepsilon \downarrow & \nearrow \exists! h & \\ RS^{-1} & & \end{array}$$

Chứng minh:

i. Tính duy nhất: nếu h thỏa mãn điều kiện trên thì $h\left(\frac{a}{1}\right) = h\varepsilon(a) = g(a)$ với mọi

$a \in R$, do đó nếu $s \in S$ ta có: $h\left(\frac{1}{s}\right) = h\left(\left(\frac{s}{1}\right)^{-1}\right) = h\left(\frac{s}{1}\right)^{-1} = g(s)^{-1}$, do đó:

$h\left(\frac{a}{s}\right) = h\left(\frac{a}{1}\right)h\left(\frac{1}{s}\right) = g(a)g(s)^{-1}$ do đó h là duy nhất được xác định bởi g .

ii. Tồn tại: đặt $h\left(\frac{a}{s}\right) = g(a)g(s)^{-1}$ khi đó h được định nghĩa tốt, thật vậy: giả sử

$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ khi đó tồn tại $t \in S$ sao cho: $(as' - a's)t = 0$, do đó:

$$(g(a)g(s') - g(a')g(s))g(t) = 0,$$

mà $g(t)$ khả nghịch trong B nên $g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1}$.

Và h được xác định như trên là một đồng cấu vành.

R_S, ε có hai tính chất đặc trưng sau:

- (i) $s \in S$ suy ra $\varepsilon(s)$ khả nghịch trong RS^{-1} ,
- (ii) Mọi phần tử trong R_S đều có dạng: $\varepsilon(r)\varepsilon(s)^{-1}$, trong đó $r \in R$ và $s \in S$,
- (ii) $\ker \varepsilon = \{r \in R : rs = 0, s \in S\}$ ($\ker \varepsilon$ là một ideal trong R).

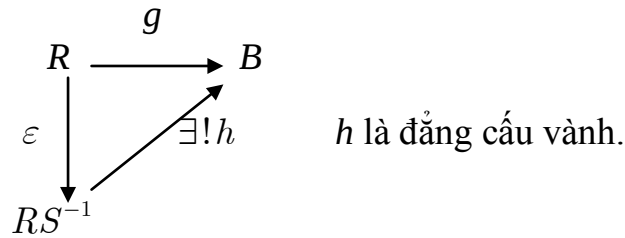
Để đơn giản cho ký hiệu trên ta viết lại các phần tử của R_S dưới dạng $\frac{r}{s}$ hoặc rs^{-1} (thay cho $\varepsilon(r)\varepsilon(s)^{-1}$).

Hệ quả 1.3:

Nếu $g : R \rightarrow B$ là một đồng cấu vành sao cho:

- i) $s \in S$ suy ra $g(s)$ khả nghịch trong B ,
- ii) $\ker g = \{r \in R : rs = 0, s \in S\}$,
- iii) Mọi phần tử trong B đều có dạng: $g(r)g(s)^{-1}$, trong đó $r \in R$ và $s \in S$.

Khi đó có một đẳng cấu $h : RS^{-1} \rightarrow B$ sao cho $g = h \circ \varepsilon$.



1.3. MỘT SỐ VÀNH CÁC THƯƠNG ĐẶC BIỆT CỦA VÀNH GIAO HOÁN

Ví dụ 1:

Cho p là một ideal nguyên tố của R . Đặt $S = R \setminus p$ thì S là một tập con đóng nhân (do p là một ideal nguyên tố của R khi và chỉ khi $S = R \setminus p$ là tập con đóng nhân). Khi đó vành các thương RS^{-1} của vành R theo tập con đóng nhân S trong trường hợp này chính là vành R_p mà ta đã biết.

Gọi m là tập tất cả các phân tử có dạng a/s với $a \in p$, khi đó m là một ideal trong R_p . Mặt khác $b/t \notin m$ thì $b \notin p$, do đó $b \in S$ và b/t khả nghịch trong R_p , điều này nói lên rằng nếu α là một ideal trong R_p và $\alpha \not\subset m$ thì α chứa một phân tử khả nghịch nên $\alpha = R_p$. Nói cách khác m là ideal tối đại duy nhất của R_p hay R_p là vành địa phương.

Tên gọi địa phương hóa R theo ideal nguyên tố p xuất phát từ trường hợp đặc biệt này.

Ví dụ 2:

Với trường hợp cổ điển R là một miền nguyên thì trường các thương của R tương ứng với địa phương hóa của R tại tập con đóng nhân $S = R \setminus \{0\}$.

Với trường hợp xây dựng vành các thương của các vành không giao hoán ta cũng có một số kết quả tương tự như các kết quả đã trình bày cho trường hợp vành giao hoán sẽ trình bày ở chương 2.

CHƯƠNG 2:

XÂY DỰNG VÀNH CÁC THƯƠNG CỦA VÀNH KHÔNG GIAO HOÁN

Cho vành R , S là một tập con đóng nhân của R , R có đơn vị.

2.1. ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI VÀNH CÁC THƯƠNG CỦA CÁC VÀNH KHÔNG GIAO HOÁN

Mở rộng hơn cho vành không giao hoán, cách xây dựng vành các thương bằng phương pháp địa phương hóa theo tâm của lý thuyết vành giao hoán như trên cũng có thể áp dụng để xây dựng vành các thương cho một số vành không giao hoán, tuy nhiên, không phải với vành không giao hoán bất kỳ nào chúng ta cũng có thể xây dựng được R_S bằng phương pháp trên (ở chương 3 của luận văn sẽ cung cấp một số ví dụ cụ thể dẫn chứng cho điều này). Hay việc chỉ mô tả R_S từ định lý sau là rất mơ hồ và khó khăn.

Định nghĩa 2.1:

Cho S là một tập con đóng nhân của vành R . Một đồng cấu $\alpha: R \rightarrow R'$ được gọi là một S -nghịch đảo nếu $\alpha(S) \subseteq U(R')$ ($U(R')$: nhóm các phần tử khả nghịch của vành R').

Định nghĩa 2.2:

Một vành R' được gọi là một vành các thương phải (tương ứng với $S \subseteq R$) nếu có một đồng cấu $\varphi: R \rightarrow R'$ sao cho:

(a) φ là S -nghịch đảo.

(b) Mọi phần tử R' có dạng $\varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ với $a \in R$ và $s \in S$.

(c) $\ker \varphi = \{r \in R : rs = 0 \text{ với } s \in S\}$.

Lưu ý: Từ (c) ta có $R' \neq 0$, tuy nhiên với một vành R bất kỳ ta không kỳ vọng là sẽ tồn tại vành các thương phải R' , nếu R' tồn tại thì theo định nghĩa trên ta có hai điều kiện cần theo S như sau:

Định lý 2.3:

Cho R tồn tại vành các thương phải, khi đó với mọi $a \in R$ và $s \in S$ ta đều có $aS \cap sR \neq \emptyset$ (với tính chất này S được gọi là khả hoán bên phải (right permutable), hoặc S là một tập Ore phải).

Chứng minh:

Với mọi $a \in R$ và $s \in S$, $\varphi(s)^{-1}\varphi(a) \in R'$, nên tồn tại $r \in R$ và $s' \in S$ sao cho:

$$\varphi(s)^{-1}\varphi(a) = \varphi(r)\varphi(s')^{-1} \Rightarrow \varphi(as') = \varphi(sr)$$

Do đó theo (c) ta được: $(as' - sr)s'' = 0$, với $s'' \in S$,

Vậy: $as's'' = srs'' \in aS \cap sR$.

Định lý 2.4:

Cho R tồn tại vành các thương phải, khi đó cho $a \in R$, nếu $s'a = 0$, với $s' \in S$ nào đó thì $as = 0$ với $s \in S$ (S thỏa mãn tính chất này nên S còn được gọi là khả nghịch phải (right reversible)).

Chứng minh:

$s'a = 0$ suy ra $\varphi(s')\varphi(a) = 0$ do đó $\varphi(a) = 0$, theo (c) ta được $as = 0$ với $s \in S$.

Định nghĩa 2.5:

Tập con đóng nhân $S \subseteq R$ vừa là tập khả hoán bên phải vừa khả nghịch phải thì ta gọi S là tập mẫu số phải (right denominator).

Ta có một kết quả quan trọng được phát biểu dưới dạng định lý dưới đây, và để chứng minh định lý này, Ore đã nghiên cứu việc sử dụng địa phương hóa theo tâm vành không giao hoán với R là một miền nguyên không giao hoán và $S = R \setminus \{0\}$, sau này Asano và các cộng sự khác đã mở rộng lý thuyết Ore cho vành bất kỳ.

Định lý 2.6:

Vành R có vành thương phải tương ứng với S khi và chỉ khi S là một tập mẫu số phải.

Chứng minh:

Chiều thuận: giả sử vành R có vành thương phải tương ứng với S , khi đó theo định nghĩa của vành thương phải ta suy ra S là một tập mẫu số phải.

Chiều đảo: giả sử S là một tập mẫu số phải, và ta ký hiệu vành thương phải tương ứng với S (nếu có) là RS^{-1} .

Trước hết ta đi xây dựng cấu trúc của tập RS^{-1} (tương tự như cách xây dựng đối với vành giao hoán):

Vì mọi phần tử của RS^{-1} phải có dạng " as^{-1} " (với $a \in R$ và $s \in S$), nên ta bắt đầu với tập $R \times S$ và định nghĩa một quan hệ " $\square$ " trên $R \times S$ như sau:

$(a, s) \square (a', s')$ (trong $R \times S$) nếu và chỉ nếu tồn tại $b, b' \in R$ sao cho $sb = s'b' \in S$ và $ab = a'b' \in R$.

" $\square$ " là một quan hệ tương đương:

Tính phản xạ: $(a, s) \square (a, s)$ với $b = b' = 1$.

Tính đối xứng: $(a, s) \square (a', s') \Leftrightarrow (a', s') \square (a, s)$.

Tính bắc cầu: $(a, s) \square (a', s')$ và $(a', s') \square (a'', s'')$ khi đó ta có:

tồn tại $b, b' \in R$ sao cho $sb = s'b' \in S$ và $ab = a'b' \in R$,

tồn tại $c, c' \in R$ sao cho $sc = s'c' \in S$ và $ac = a'c' \in R$,

do $(s'c)S \cap (s'b')R \neq \emptyset$ nên tồn tại $r \in R$ và $t \in S$ sao cho $sb'r = s'ct \in S$, áp dụng tính khả nghịch phải, ta có: $b'rt' = ctt'$ với $t' \in S$, khi đó:

$$sbr = s'b'r = s''c't \in S \Rightarrow s(brt') = s''(c'tt') \in S$$

và $a(brt') = a'b'rt' = a'ctt' = a''(c'tt')$

vậy $(a, s) \sim (a'', s'')$.

Đề ý: $(a, s) \sim (ab, sb)$ nếu $sb \in S$ (với $b' = 1$).

Ta ký hiệu lớp tương đương của (a, s) là $\frac{a}{s}$ hoặc as^{-1} , và tập tất cả các lớp tương đương này ký hiệu là RS^{-1} .

Định nghĩa phép toán cộng trên RS^{-1} :

Đề ý hai thương $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2}$ có thể có một mẫu số chung, do $s_1S \cap s_2R \neq \emptyset$ nên có $r \in R, s \in S$ sao cho $s_2r = s_1s \in S$, và ta có:

$$\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_1s}{s_1s} \text{ và } \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_2r}{s_2r}$$

Do đó ta có thể định nghĩa phép toán cộng như sau:

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1s + a_2r}{t} \text{ trong đó } t = s_1s = s_2r.$$

Ta có đồng cấu nhóm: $\varphi: R \rightarrow RS^{-1}$ thỏa mãn:

$$\ker \varphi = \{a \in R: (a, 1) \sim (0, 1)\} = \{a \in R: as = 0 \text{ với } s \in S\}$$

Bước tiếp theo ta xây dựng phép toán nhân trên RS^{-1} :

Cho $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2}$, do $s_1R \cap a_2S \neq \emptyset$ nên tồn tại $r \in R$ và $s \in S$ sao cho: $s_1r = a_2s$, do đó ta

định nghĩa phép toán nhân như sau:

$$\left(\frac{a_1}{s_1}\right)\left(\frac{a_2}{s_2}\right) = \frac{a_1r}{s_2s}.$$

$(RS^{-1}, +, \times)$ là một vành, và φ lúc này là một đồng cấu vành.

$\frac{1}{s}, (s \in S)$ là nghịch đảo của $\varphi(s) = \frac{s}{1}$, do đó φ là một S nghịch đảo và

$$\frac{a}{s} = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$$

Vậy RS^{-1} là một vành các thương phải của R tương ứng với S .

Hệ quả 2.7:

Nếu S là một tập mẫu số phải thì $\varphi: R \rightarrow RS^{-1}$ là một đồng cấu S – nghịch đảo có tính chất phổ dụng. Nói riêng, có duy nhất một đẳng cấu $g: R_S \rightarrow RS^{-1}$ sao cho $g \circ \varepsilon = \varphi$, trong đó $\varepsilon: R \rightarrow R_S$.

Chứng minh:

Cho $\alpha: R \rightarrow T$ là một đồng cấu S – nghịch đảo. Ta định nghĩa $f: RS^{-1} \rightarrow T$ như sau:

$$f\left(\frac{a}{s}\right) = \alpha(a)\alpha(s)^{-1} \quad (a \in R, s \in S) \quad .$$

Nếu $b \in R$ sao cho $sb \in S$, khi đó: $\alpha(s)\alpha(b) = \alpha(sb)$ là khả nghịch trong T , do đó $\alpha(b)$ cũng khả nghịch trong T . Mặt khác:

$$\alpha(ab)\alpha(sb)^{-1} = \alpha(a)\alpha(b)\alpha(b)^{-1}\alpha(s)^{-1} = \alpha(a)\alpha(s)^{-1}.$$

Nên $f: RS^{-1} \rightarrow T$ được định nghĩa tốt, và f là một đồng cấu vành, thật vậy:

- $f\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right) = f\left(\frac{a_1s_2 + a_2s_1}{t}\right)$ (trong đó $t = s_1s_2 = s_2s_1$)

$$= \alpha(a_1s_2 + a_2s_1)\alpha(t)^{-1} = \alpha(a_1s_2)\alpha(t)^{-1} + \alpha(a_2s_1)\alpha(t)^{-1}$$

$$= \alpha(a_1s_2)\alpha(s_1s_2)^{-1} + \alpha(a_2s_1)\alpha(s_2s_1)^{-1} = \alpha(a_1)\alpha(s_1)^{-1} + \alpha(a_2)\alpha(s_2)^{-1}$$

$$= f\left(\frac{a_1}{s_1}\right) + f\left(\frac{a_2}{s_2}\right).$$
- $f\left(\frac{a_1}{s_1} \times \frac{a_2}{s_2}\right) = f\left(\frac{a_1a_2}{s_1s_2}\right)$ (trong đó $s_1r = a_2s$)

$$= \alpha(a_1a_2)\alpha(s_1s_2)^{-1} = \alpha(a_1)\alpha(a_2)(\alpha(s_1)\alpha(s_2))^{-1}$$

$$= \alpha(a_1)\alpha(r)\alpha(s)^{-1}\alpha(s_2)^{-1} \quad (\text{do } \alpha \text{ là } S - \text{nghịch đảo})$$

$$= \alpha(a_1)\alpha(s_1)^{-1}\alpha(a_2)\alpha(s)\alpha(s)^{-1}\alpha(s_2)^{-1}$$

$$(\text{do } s_1r = a_2s \Rightarrow \alpha(r) = \alpha(s_1)^{-1}\alpha(a_2)\alpha(s))$$

$$= \alpha(a_1)\alpha(s_1)^{-1}\alpha(a_2)\alpha(s_2)^{-1} = f\left(\frac{a_1}{s_1}\right) \times f\left(\frac{a_2}{s_2}\right),$$

Vậy f là một đồng cấu vành và $f \circ \varphi = \alpha$.

Do $\frac{a}{s} = \varphi(a)\varphi(s)^{-1} \in RS^{-1}$ nên f là đồng cấu duy nhất thỏa $f \circ \varphi = \alpha$.

Tương tự như định nghĩa vành các thương phải ta cũng có khái niệm “khả hoán bên trái”, “khả nghịch trái” và vành các thương trái ta ký hiệu là $S^{-1}R$:

Định lý 2.8:

Với mọi $a \in R$ và $s \in S$ ta đều có $Sa \cap Rs \neq \emptyset$ (với tính chất này S được gọi là khả hoán bên trái (left permutable), hoặc S là một tập Ore trái).

Định lý 2.9:

Cho $a \in R$, nếu $as' = 0$, với $s' \in S$ nào đó thì $sa = 0$ với $s \in S$ (S thỏa mãn tính chất này nên S còn được gọi là khả nghịch trái (left reversible)).

Định nghĩa 2.10:

Tập con đóng nhân $S \subseteq R$ vừa là tập khả hoán bên trái vừa khả nghịch trái thì ta gọi S là tập mẫu số trái (left denominator).

Định lý 2.11:

Vành R có vành thương trái tương ứng với S , ký hiệu là $S^{-1}R$, khi và chỉ khi S là một tập mẫu số trái.

Ta có hệ quả sau:

Hệ quả 2.12:

Nếu cả RS^{-1} và $S^{-1}R$ tồn tại thì $RS^{-1} \cong S^{-1}R (\cong R_s)$ trên R .

Định lý 2.13:

Cho S là một tập con đóng nhân của vành R , khi đó tồn tại một đồng cấu S -nghịch đảo ε đi từ R vào vành R_S (hay RS^{-1}), thỏa mãn tính chất phổ dụng: với một đồng cấu S -nghịch đảo $\alpha: R \rightarrow R'$ bất kỳ, tồn tại duy nhất một đồng cấu vành $f: R_S \rightarrow R'$ sao cho $\alpha = f \circ \varepsilon$.

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\alpha} & R' \\
 \varepsilon \downarrow & \nearrow \exists! f & \\
 RS^{-1} & &
 \end{array}$$

Chứng minh:

Cố định một tập sinh của R , với mỗi $s \in S$, bổ sung thêm một phần tử sinh mới s^* thỏa mãn: $\tilde{s}s^* = 1, s^*\tilde{s} = 1$, trong đó $\tilde{s}$ là một phần tử thuộc $\square$ – đại số tự do mà ảnh được cho bởi s . Tập sinh mới với các quan hệ định nghĩa vành R_S với đồng cấu vành $\varepsilon: R \rightarrow R_S$. Với mỗi $s \in S$, $\varepsilon(s)$ là ảnh của s^* trong R_S khả nghịch, do đó $\varepsilon(s) \in U(R_S)$.

Chứng minh tính phổ dụng của ε :

f được định nghĩa như sau: $f(\varepsilon(a)\varepsilon(s)^{-1}) = \alpha(a)\alpha(s)^{-1}$, ta chứng minh được định nghĩa tốt: giả sử $\varepsilon(a)\varepsilon(s)^{-1} = \varepsilon(b)\varepsilon(t)^{-1}$, trong đó $a, b \in R, s, t \in S$,

theo (i) suy ra: $\varepsilon(a) = \varepsilon(b)\varepsilon(t)^{-1}\varepsilon(s) = \varepsilon(b)\varepsilon(c)\varepsilon(u)^{-1}$ với $c \in R, u \in S$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon(a)\varepsilon(u) = \varepsilon(b)\varepsilon(c) \\ \varepsilon(s)\varepsilon(u) = \varepsilon(t)\varepsilon(c) \end{cases}$$

theo (ii) suy ra: $\begin{cases} auv = bcv \\ suv' = tcv' \end{cases}$ với $v, v' \in S$

do $\alpha(v)$ và $\alpha(v')$ khả nghịch nên ta được: $\begin{cases} \alpha(a)\alpha(u) = \alpha(b)\alpha(c) \\ \alpha(s)\alpha(u) = \alpha(t)\alpha(c) \end{cases}$

suy ra: $\alpha(a)\alpha(s)^{-1} = \alpha(b)\alpha(t)^{-1}$.

Với đồng cấu f được định nghĩa như trên thỏa mãn: $\alpha = f \circ \varepsilon$.

Từ những vấn đề nêu trên, vào đầu những thập niên 1930, Ore đã tìm ra điều kiện cần và đủ để có thể xây dựng vành các thương của vành không giao hoán bằng phương pháp địa phương hóa theo tâm.

2.2. VÀNH VÀ MIỀN NGUYÊN ORE PHẢI

Trước khi đi vào khái niệm vành và các miền nguyên Ore phải ta có một số kết quả sau đối với tập con đóng nhân S :

- ❖ Nếu S là tâm của R thì S vừa là tập mẫu số trái vừa là tập mẫu số phải, do đó tồn tại RS^{-1} và $S^{-1}R$. Ta gọi $RS^{-1} = S^{-1}R$ là “vành các thương theo tâm S ” của R .
- ❖ Ta gọi một phần tử $s \in R$ là chính quy nếu nó không là ước trái của không và không là ước phải của không. Nếu các phần tử thuộc S là các phần tử chính quy của R thì S khả nghịch trái và khả nghịch phải.
- ❖ Một phần tử $a \in R$ được gọi là chính quy Von Neumann nếu a chính quy và $a \in aRa$.
- ❖ Cho S là tập tất cả các phần tử chính quy của R (S khả nghịch trái và khả nghịch phải), khi đó S là tập con đóng nhân, thật vậy: $\forall x, y \in S$ thì xy cũng chính quy, vì nếu xy không chính quy khi đó $xyz = 0$ (với $z \in R, z \neq 0$), do y chính quy nên $yz \neq 0$, khi đó $x(yz) = 0$ (mâu thuẫn với giả thiết x chính quy). Vậy S là một tập con đóng nhân, với S được xác định như trên ta có một số khái niệm sau:

Định nghĩa 2.14:

Cho S là tập tất cả các phần tử chính quy của R (S khả nghịch trái và khả nghịch phải).

Ta gọi R là vành Ore phải nếu và chỉ nếu S khả hoán bên phải, hay nếu và chỉ nếu tồn tại RS^{-1} . Lúc này ta gọi RS^{-1} là vành các thương phải cổ điển của R , ký hiệu là $Q_{cl}^r(R)$.

Tương tự như trên ta cũng định nghĩa vành các thương trái cổ điển của R , ký hiệu là $Q_{cl}^l(R)$.

Nếu R vừa là vành Ore trái, vừa là vành Ore phải hay $Q_{cl}^r(R) = Q_{cl}^l(R)$ thì ta gọi R là vành Ore.

- ❖ Vành giao hoán nào cũng là vành Ore.
- ❖ Vành chính quy Von Neumann cũng là một vành Ore.
- ❖ Cho R là một miền nguyên (không giao hoán) và $S = R \setminus \{0\}$, khái niệm khả hoán bên trái trên S được phát biểu lại dưới dạng tương đương như sau:

$$aR \cap bR \neq 0 \text{ với } a, b \in R \setminus \{0\} \quad (*)$$

(*) được gọi là điều kiện Ore phải trên R .

Định nghĩa 2.15:

Cho R, Q là các vành và $R \subseteq Q$. Ta gọi R thứ tự phải (right order) trong Q nếu:

- (1) Mọi phần tử chính quy trong của R cũng là phần tử khả nghịch trong Q
- (2) Mọi phần tử của Q có dạng as^{-1} trong đó $a \in R$ và s là phần tử chính quy của R .

Tương tự như trên ta cũng có định nghĩa thứ tự trái (left order). Nếu R vừa là thứ tự trái vừa là thứ tự phải trong Q thì ta gọi R là bậc của Q .

Định nghĩa 2.16:

- Cho A là một miền nguyên (không giao hoán), ta gọi D là một division hull của A nếu có một phép nhúng $A \rightarrow D$ sao cho không có vành chia D_0 nào thỏa mãn:

$$A \subseteq D_0 \subseteq D \quad (D_0 \neq D).$$

- Cho một module M_R khác không được gọi là đều (uniform) nếu với hai module con khác không bất kỳ của M giao nhau khác rỗng.
- Cho một module M_R , một module con N được biểu diễn như sau:

$$N = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k \quad (N_i \neq 0)$$

Với k là số dương lớn nhất thì N được gọi là module con cốt yếu (essential submodule) của M_R , ký hiệu: $N \subseteq_e M$.

• Ta gọi một R – module M_R n chiều đều, ký hiệu $\text{u.dim}(M_R) = n$, nếu có một module con cốt yếu $V \subseteq_e M$ là tổng trực tiếp của n các module con:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$$

Nếu n không tồn tại ta viết $\text{u.dim}(M_R) = \infty$.

Đặc biệt: * $\text{u.dim}(M_R) = 0$ khi và chỉ khi $M_R = 0$

* $\text{u.dim}(M_R) = 1$ khi và chỉ khi M_R là một module đều.

Định lý 2.17:

Vành R là vành Ore phải nếu và chỉ nếu nó là thứ tự phải trong một vành Q nào đó. Trong trường hợp này, $Q \cong Q_{cl}^r(R)$ trên R . Hơn nữa, nếu R là một miền nguyên (không giao hoán) thì Q là một vành chia.

Định lý 2.18 (Goldie):

R là một miền nguyên, các phát biểu sau là tương đương:

(1) R là miền nguyên Ore phải.

(2) $\text{u.dim}(R_R) = 1$.

(3) $\text{u.dim}(R_R) < \infty$.

Chứng minh:

(1) $\Leftrightarrow$ (2) theo định nghĩa của vành Ore phải và $\text{u.dim}(R_R) = 1$.

Chứng minh (3) $\Rightarrow$ (1): giả sử tồn tại $a, b \in R \setminus \{0\}$ sao cho $aR \cap bR = (0)$, theo Goldie ta chỉ ra rằng $\{a^i b : i \geq 0\}$ là R – độc lập tuyến tính phải, thật vậy:

Nếu $\sum_{i \geq 0} a^i b r_i = 0$ trong đó hầu hết các $r_i \in R$ là bằng không thì suy ra

$$b r_0 + (b r_1 + a b r_2 + \dots) = 0 \Rightarrow r_0 = 0 \text{ và } b r_1 + a b r_2 + \dots = 0.$$

Lập lại quá trình trên ta được $r_i = 0, \forall i$.

Do đó R chứa $\bigoplus_{i \geq 0} a^i b R$ (là các module phải tự do có hạng vô hạn đếm được), vậy $\text{u.dim}(R_R) = \infty$ (mâu thuẫn với giả thiết $\text{u.dim}(R_R) < \infty$).

Hệ quả 2.19:

Nếu R là một miền nguyên Noether phải thì R là Ore phải, nói riêng $Q_{cl}^r(R)$ tồn tại, và nó là division hull duy nhất của R .

Chứng minh:

Một miền nguyên Noether không thể chứa một tổng trực tiếp vô hạn các module con khác không nên theo định lý trên nó là Ore phải.

Phát biểu ngược lại của hệ quả trên nói chung không đúng, ví dụ: một miền nguyên giao hoán R là miền nguyên Ore, nhưng R không cần thiết là vành Noether.

Hệ quả 2.20:

Một miền nguyên R được gọi là miền nguyên Bézout nếu mọi mở rộng hữu hạn các ideal phải của R là chính.

Một miền nguyên Bézout luôn luôn là Ore phải.

Chứng minh:

Giả sử rằng $aR \cap bR = 0$ trong đó $a, b \in R \setminus \{0\}$, chọn $c \in R$ sao cho:

$$cR = aR \oplus bR$$

khi đó tồn tại $r, s, d \in R$ sao cho: $c = ar + bs$ và $b = cd$, suy ra: $b = ard + bsd$, và $rd = 0$, do $b = cd$ và $b \neq 0$ nên $d \neq 0$, vậy: $rd = 0 \Rightarrow r = 0$, và $c = bs$,

suy ra $cR = bR$

mà $cR = aR \oplus bR \Rightarrow a = 0$ (mâu thuẫn).

Bổ đề Jategaonkar:

Giả sử a, b là hai phần tử trong một vành R độc lập tuyến tính phải trên R . Cho $C \subseteq R$ là một vành con khác không mà các phần tử của nó giao hoán được với a và b . thì tập con của R sinh bởi a, b trên C là một C – vành tự do trên a, b .

Chứng minh:

Nếu a, b không tự do trên C , chọn đa thức (khác đa thức hằng) $f(x, y) \in C\langle x, y \rangle$ có bậc n nhỏ nhất sao cho $f(a, b) = 0$. Biểu diễn f dưới dạng:

$$\alpha + xg(x, y) + yh(x, y) \quad (\alpha \in C), \quad g(x, y) \neq 0$$

Ta có: $0 = f(a, b)b = a(g(a, b)b) + b(\alpha + h(a, b)b)$

suy ra $g(a, b)b = 0$.

Bây giờ viết g dưới dạng: $\beta + xp(x, y) + yq(x, y) \quad (\beta \in C)$.

Ta có: $\deg g \leq n-1, \quad \deg p \leq n-2, \quad \deg q \leq n-2 \quad (*)$

và $0 = g(a, b)b = a(p(a, b)b) + b(\beta + q(a, b)b) \quad (**)$

$(**)$ suy ra: $\begin{cases} p(x, y)y = 0 \\ \beta + q(x, y)y = 0 \end{cases} \quad \text{khi } x = a, y = b.$

$(*)$ suy ra: $\begin{cases} p(x, y) = q(x, y) = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad (\text{mâu thuẫn với } g(x, y) \neq 0).$

Vậy tập con của R sinh bởi a, b trên C là một C – vành tự do trên a, b .

Định lý 2.21:

Nếu một miền nguyên R không phải là một miền nguyên Ore thì R chứa một bản sao của đại số tự do $C\langle x_1, x_2, \dots \rangle$, trong đó C là tâm của R .

Chứng minh:

R không phải là miền nguyên Ore nên tồn tại $a, b \in R_R$ R – độc lập tuyến tính phải.

Theo bổ đề Jategaonkar suy ra vành sinh bởi a và b trên C là đẳng cấu với $C\langle x, y \rangle$,

suy ra vành sinh bởi $a, ab, ab^2, \dots$ trên C là đẳng cấu với $C\langle x_1, x_2, \dots \rangle$.

Định nghĩa 2.22:

Một đại số trên trường k được gọi là một *PI – đại số* (polynomial identity algebra) nếu nó tồn tại một đa thức khác không:

$$f(x_1, \dots, x_n) \in k\langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

sao cho $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ với mọi $a_1, \dots, a_n \in R$.

Từ định lý 2.21 và định nghĩa 2.22 ta có hệ quả sau:

Hệ quả 2.23:

Một miền nguyên R là một *PI – đại số* trên trường k thì R là một miền nguyên Ore.

2.3. MỘT SỐ VÍ DỤ**Ví dụ 1:**

Cho k là một trường, một k – miền nguyên tự do $R = k\langle X \rangle$ không phải là miền nguyên Ore trái (phải) khi $|X| \geq 2$, vì với hai phần tử a, b khác nhau trong X , ta có $aR \cap bR = (0)$.

Ví dụ 2:

Cho R là một $\mathbb{C}$ – đại số sinh bởi hai phần tử x, y với quan hệ như sau: $yx = y^2 = 0$.

Đặt $S = \{x^n : n \geq 0\}$, với các phần tử của R có dạng:

$$f(x) + g(x)y \quad (f, g \in \mathbb{C}[x])$$

Không có ước trái của không, do đó S là khả nghịch phải. Ta sẽ chứng minh S cũng là khả hoán bên phải, ta cần chứng minh: $aS \cap sR \neq \emptyset$ với $a = f(x) + g(x)y$ và $s = x^n$ ($n \geq 1$), thật vậy: $a \cdot x^n = f(x)x^n = sf(x)$ nên $aS \cap sR \neq \emptyset$. Vậy tồn tại vành các thương phải RS^{-1} .

Để xác định vành các thương phải RS^{-1} , trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề:

Cho $S \subseteq R$ là tập mẫu số phải, gọi $U = \{a \in R : as = 0, \text{ với } s \text{ nào đó thuộc } S\}$.

a. Chứng minh U là ideal của R .

b. Đặt $\overline{R} = R/U$, chứng minh $\overline{S}$ là tập mẫu số phải của $\overline{R}$ chứa các phần tử chính quy của $\overline{R}$, và $RS^{-1} \cong \overline{RS}^{-1}$ trên R .

chứng minh:

a. Ta có: với mọi $r \in R$ với mọi $a \in U$, tồn tại $s \in S$ sao cho: $(ra)s = r(as) = 0$, do đó $ra \in U$, $RU \subset U$. Ta chứng minh $UR \subset U$, thật vậy: cho $r \in R$ và $a \in U$: tồn tại $s \in S$ sao cho $as = 0$. Vì S là khả hoán bên phải, ta có: $rs' = sr'$ với $s' \in S$ và $r' \in R$, nhân a vào hai vế của phương trình ta được: $(ar)s' = (as)r' = 0$, do đó $ar \in U$.

U là nhóm con của nhóm $(R, +)$: với một phần tử khác $a' \in U$, theo chứng minh trên: $(a \pm a')s = \pm a's \in U$ với $s \in S$, do đó tồn tại $t \in S$ sao cho: $0 = \pm a'st = (a \pm a')st$, đẳng thức này suy ra $a \pm a' \in U$.

Vậy U là ideal của R . Hơn nữa ta đã có kết quả sau: nếu S là một tập mẫu phải của R , ta có đồng cấu vành $\varphi: R \rightarrow RS^{-1}$, xác định như sau: $\varphi(r) = \frac{r}{1}$ với $\ker \varphi = U$.

b. Trước tiên ta chứng minh $\overline{S}$ chứa các phần tử chính quy của $\overline{R}$:

Nếu $\overline{xs} = 0$ ($x \in R, s \in S$) thì $xs \in U$, do đó $xss' = 0$ với $s' \in S$, điều này chứng tỏ $x \in U$, vậy $\overline{x} = 0$.

Giả sử $\overline{sy} = 0$ ($y \in R, s \in S$) thì $sy \in U$, do đó $sys_1 = 0$ với $s_1 \in S$. Vì S khả nghịch phải, suy ra $(ys_1)s_2 = 0$ với $s_2 \in S$, do đó $y \in U$, vậy $\overline{y} = 0$.

Vậy $\overline{S}$ chứa các phần tử chính quy của $\overline{R}$.

Do S là khả đảo phải nên $\overline{S}$ cũng khả đảo phải. Vậy $\overline{S}$ là tập mẫu số phải của $\overline{R}$ chứa các phần tử chính quy của $\overline{R}$.

Cho f là hợp của các ánh xạ $R \rightarrow \overline{R} \rightarrow \overline{RS}^{-1}$. Vì $f(s) \in U(\overline{RS}^{-1})$ và ánh xạ $\varphi: R \rightarrow RS^{-1}$ là đồng cấu S -khả nghịch có tính phổ dụng nên tồn tại duy nhất một

đồng cấu vành $g: RS^{-1} \rightarrow \overline{RS}^{-1}$ sao cho $g \circ \varphi = f$, $g(rs^{-1}) = \overline{rs}^{-1}$. Mặt khác ta có: với $rs^{-1} \in \ker g$ thì $\overline{rs}^{-1} = 0$, suy ra $r \in U$ và $rs^{-1} = \varphi(r)\varphi(s)^{-1} = 0$ trong RS^{-1} . Do đó g là một đẳng cấu.

Quay lại ví dụ 2 trên, theo bổ đề trên, ta có kernel của $\varphi: R \rightarrow RS^{-1}$ là $U = Ry = \sum [x]y$, $\overline{R} = R/U$, vậy RS^{-1} đẳng cấu với địa phương hóa của vành giao hoán $\sum [x]$ tại tập $\{x^n : n \geq 0\}$.

Mặt khác S không khả nghịch trái vì $yx = 0$ nhưng $x^n y \neq 0$ với mọi $n \geq 0$, do đó vành các thương trái $S^{-1}R$ không tồn tại.

CHƯƠNG 3:

MỘT SỐ VÍ DỤ VÀNH CÁC THƯƠNG CỦA CÁC VÀNH KHÔNG GIAO HOÁN

Như đã trình bày ở chương 2, một tập con đóng nhân bất kỳ $S \subseteq R$, với R là một vành bất kỳ, chúng ta hy vọng có thể tìm được vành các thương R_S với khái niệm “vành phổ dụng S – nghịch đảo”.

Khác với trường hợp vành giao hoán, đối với vành không giao hoán thì vành “ S – nghịch đảo” R_S có thể là vành không, mặc dù $R \neq \{0\}$ và $0 \notin S$.

Ví dụ: cho $R = M_n(k)$, ($n \geq 2$) trong đó k là một vành khác không, cho S là một tập con đóng nhân $\{1, E_{11}\}$, trong đó E_{ij} là các đơn vị ma trận, gọi $\varepsilon: R \rightarrow R_S$, khi đó $\ker \varepsilon$ có dạng $M_n(U)$, trong đó U là một ideal trong k .

Nhưng ta lại có: $E_{11}E_{22} = 0$ suy ra $E_{22} \in \ker \varepsilon$, do đó ta có $1 \in U$, suy ra $U = k$, do đó ε là ánh xạ không và $R_S = (0)$!

Từ ví dụ trên chỉ ra rằng vành R_S rất khó dự đoán, và nói chung rất khó để chứng minh các vấn đề về R_S vì $\varepsilon: R \rightarrow R_S$ không chắc chắn bảo toàn tính chất (i), (ii).

Định nghĩa 3.1:

Vành R được gọi là chính quy mạnh nếu: với mọi $a \in R$, tồn tại $x \in R$ sao cho $a = a^2x$.

Định lý 3.2:

Vành R là chính quy mạnh nếu và chỉ nếu R là chính quy Von Neumann và giản ước được. Vành này luôn là tích trực tiếp con của các vành chia.

Ta chỉ phát biểu không chứng minh định lý trên. Bây giờ chúng ta sẽ trình phát biểu và chứng minh kết quả sau của Robinson.

Định lý 3.3:

Nếu một miền nguyên R (không giao hoán) có thể nhúng vào một tích trực tiếp của các vành chia D_i ($i \in I$), thì R có thể nhúng vào một vành chia.

Chứng minh:

Đặt $P = \prod_i D_i$, và viết mỗi phần tử $x \in P$ dưới dạng $(x_i)_{i \in I}$.

Với mỗi $x \in P$, ta xác định một phần tử $x^* = (x_i^*)_{i \in I} \in P$ như sau:

$$\begin{cases} x_i^* = 0, & x_i = 0 \\ x_i^* = x_i^{-1}, & x_i \neq 0 \end{cases}.$$

Ta cũng định nghĩa: $U_x = \{(a_i)_{i \in I} : \forall i \in I, x_i \neq 0 \Rightarrow a_i = 0\}$.

Ta có: $U_x = ann_l(x) = ann_r(x)$: là một ideal của P , ta có:

$$1 - xx^* \in U_x$$

và: $(U_x + U_y + \dots + U_z)xy\dots z = 0 \quad (*)$.

Xem R là một tập con của P , đặt $U = \sum U_x$, x chạy khắp $R \setminus \{0\}$, khi đó ta có $U \neq P$, vì nếu $U = P$ thì với $x, y, \dots, z \in R \setminus \{0\}$ thích hợp ta được $1 \in U_x + U_y + \dots + U_z$ và theo (*) ta được $xy\dots z = 0$, điều này mâu thuẫn với giả thiết R là miền nguyên.

Vì mỗi D_i là chính quy mạnh nên $P = \prod_i D_i$ và P/U cũng chính quy mạnh nên theo định lý 3.2, tồn tại một đồng cấu vành f từ P vào một vành chia D thích hợp, với $f(U) = 0$.

Với $x \in R \setminus \{0\}$: $f(1 - xx^*) = 0 = 1 - f(x)f(x^*)$ suy ra $f(x) \neq 0 \in D$.

Vậy $f|_R$ là phép nhúng R vào một vành chia.

Hệ quả 3.4:

Nếu một miền nguyên R (không giao hoán) có thể nhúng vào một vành chính quy mạnh R' thì R có thể nhúng vào một vành chia.

Chứng minh:

Theo định lý 3.3, R' là một tích trực tiếp con của một họ các vành chia $D_i (i \in I)$, nói riêng R' (hay cả R) có thể được nhúng trong $\prod_{i \in I} D_i$. Do R là một miền nguyên (không giao hoán) nên theo định lý 3.3 suy ra R có thể được nhúng vào một vành chia.

Ví dụ 1:

Cho $R = \mathbb{F}[G]$, trong đó G là một nhóm, đặt $S = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ thì vành các thương phải của R tương ứng với S là vành $\mathbb{F}[G]$, do đó tâm địa phương hóa RS^{-1} cho ta một đẳng cấu vành tự nhiên đến $\mathbb{F}[G]$.

Tương tự nếu R là vành các phần tử có dạng: $\{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{F}\}$ và $S = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ khi đó RS^{-1} là tập có dạng:

$$RS^{-1} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{F}\}$$

Trong trường hợp này $RS^{-1} = Q_{cl}^r(R)$ vì RS^{-1} là vành chia.

Ví dụ 2:

Cho $R = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ 0 & \mathbb{F} \end{pmatrix}$, chọn $T = \{nI : 0 \neq n \in \mathbb{F}\}$, trong đó I là ma trận đơn vị. Viết lại R như sau:

$$R = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F} \right\}$$

Nên theo ví dụ 1 tâm địa phương hóa RT^{-1} là vành $Q = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ 0 & \mathbb{F} \end{pmatrix}$

Các phần tử chính quy trong R là các phần tử có dạng $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ trong đó $a \neq 0$ và $c \neq 0$, thật vậy, vì:

nếu $a = 0$ thì: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ nên $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ không chính quy,

nếu $c = 0$ thì: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ nên $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ không chính quy.

Với $a \neq 0, c \neq 0$ thì $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ khả nghịch trong Q :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = I$$

Do đó R là một bậc (order) trong Q , và $Q = Q_{cl}^r(R) = Q_{cl}^l(R)$, nói riêng R là vành Ore.

Ta xét tập con đóng nhân S như sau:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \square, a \neq 0 \right\}$$

Các phần tử của S không nhất thiết phải chính quy. Xét đồng cấu φ được xác định như sau:

$$\varphi: R \rightarrow \square, \quad \varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a,$$

thì $\square$ là vành các thương phải của R tương ứng với S . Do đó RS^{-1} tồn tại và đẳng cấu với $\square$.

Mặt khác ta có: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ với $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$, nhưng với mọi phần tử có dạng

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in S$ ta lại có: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, do đó S không khả nghịch trái hay

$S^{-1}R$ không tồn tại.

Ví dụ 3:

Cho trước một số nguyên tố p , đặt $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$, thực hiện tương tự như ví dụ trên

đặt: $T = \left\{ n.I = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z}, p \nmid n \right\}$ thì tâm địa phương hóa RT^{-1} chính là vành

$Q = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & 0 \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$, trong đó ký hiệu $\mathbb{Z}_{(p)}$ là địa phương hóa của $\mathbb{Z}$ tại ideal nguyên tố

(p) , và $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_{(p)} / p\mathbb{Z}_{(p)}$ là một $\mathbb{Z}_{(p)}$ -module.

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}^{-1} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\}$$

Xét tập con đóng nhân S được xác định như sau:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} : p \nmid x, z \neq 0 \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

* Mọi phần tử của S đều chính quy. Thật vậy, với mọi $s = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in S$:

$$\text{Giả sử } \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} xa = 0 \\ ya + zb = 0 \\ zc = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \in \mathbb{Z}_p \\ c = 0 \in \mathbb{Z}_p \end{cases} \text{ vậy } s \text{ là chính quy trái.}$$

$$\text{Giả sử } \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} ax = 0 \\ bx + cy = 0 \\ cz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \in \mathbb{Z}_p \\ c = 0 \in \mathbb{Z}_p \end{cases} \text{ vậy } s \text{ là chính quy phải.}$$

* Mọi phần tử chính quy của R đều thuộc S . Thật vậy, lấy $r = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in R$ là chính

quy, ta chứng minh $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in S$ tức cần chứng minh $p \nmid x$ và $z \neq 0 \in \mathbb{Z}_p$.

Nếu $p \mid x$ ta có: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{x} & 0 \end{pmatrix} = 0$ (do $p \mid x$ suy ra $\bar{x} = 0$), mâu thuẫn với r là chính quy.

Nếu $z = 0 \in \mathbb{F}_p$ ta có: $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, mâu thuẫn với r là chính quy.

Vậy S là tập con đóng nhân chứa tất cả các phần tử chính quy của R , và các phần tử này khả nghịch trong Q , thật vậy: do $p \nmid x$ nên $\frac{1}{x} \in \mathbb{F}_{(p)}$ và $\bar{x}$ khả nghịch trong $\mathbb{F}_p$.

Nghịch đảo của $r = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ trong Q là $\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -z^{-1}yx^{-1} & z^{-1} \end{pmatrix}$

Do đó R là một bậc trong Q , $Q = Q_{cl}^r(R) = Q_{cl}^l(R)$, nói riêng R là vành Ore.

Ta cũng có thể kiểm tra R là vành Ore một cách trực tiếp bằng cách kiểm tra S là khả hoán bên trái và khả hoán bên phải.

Với $s = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in S$ và $a = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix} \in R$, giải phương trình ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ n & w \end{pmatrix} \Rightarrow vx = yu + zn$$

phương trình này có nghiệm duy nhất $n \in \mathbb{F}_p$ vì z khả nghịch trong $\mathbb{F}_p$, do đó ta có:

$aS \cap sR \neq \emptyset$ hay S là khả hoán bên phải. Tương tự như trên ta cũng chứng minh được S là khả hoán bên trái.

Ta có ba lưu ý sau về tính chất của phép toán cộng trên R :

(1) Với $s \in R$, $\text{ann}_l(s) = 0 \Rightarrow s \in S$.

(2) Phần tử $t = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ có $\text{ann}_r(t) = 0$, nhưng $t \notin S$.

(3) Phần tử $t = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ta có: $aS \cap tR = \emptyset$.

* Với (1), đặt $s = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \notin S$. Nếu $p \mid x$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}s = 0$. Nếu $p \nmid x$ ta phải có $z = 0$, trong trường hợp này $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -y & x \end{pmatrix}s = 0$.

* Với (2), ta có $t \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pu & 0 \\ v & w \end{pmatrix}$ bằng không nếu và chỉ nếu $u = 0 \in \mathfrak{p}$ và $v = w = 0 \in \mathfrak{p}$.

* Với (3), giả sử phương trình: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix}$ với $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in S$ có nghiệm, suy ra $x = pu$ (mâu thuẫn).

Ví dụ 4:

Cho $R = \begin{pmatrix} k & k[x] \\ 0 & k[x] \end{pmatrix}$, trong đó k là một trường. Tập con nhân S được xác định như sau:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} c & f(x) \\ 0 & g(x) \end{pmatrix} : c \in k, f, g \in k[x], c.g \neq 0 \right\}$$

S là tập hợp tất cả các phần tử chính quy của R .

Mọi phần tử chính quy trong S đều khả nghịch trong Q .

Suy ra R là một thứ tự phải trong $Q = \begin{pmatrix} k & k(x) \\ 0 & k(x) \end{pmatrix}$, do đó $Q_{cl}^r(R) = RS^{-1} = Q$.

Mặt khác $Q_{cl}^l(R)$ không tồn tại vì S không khả hoán bên trái, thật vậy:

Cho $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ và $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in S$, ta có:

$$\begin{pmatrix} c & f(x) \\ 0 & g(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c & f(x) \\ 0 & g(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & xf(x) \\ 0 & xg(x) \end{pmatrix},$$

do đó $Sa \cap Rs = \emptyset$.

Suy ra R là vành Ore phải nhưng không phải là vành Ore trái. Mặc dù các phần tử chính quy trong R đều khả nghịch trong Q , nhưng $Sa \cap Rs = \emptyset$ nói lên rằng

$as^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & x^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q$ không thể viết dưới dạng $t^{-1}r$ với $r \in R$ và t là phần tử chính

quy trong R . Do đó Q không thể là vành thương trái của R tương ứng với S .

KẾT LUẬN

Trong luận văn này tôi đã trình bày hai phương pháp để xây dựng vành các thương của các vành không giao hoán: phương pháp truyền thống gọi là địa phương hóa theo tâm tương tự như cách xây dựng vành các thương của các vành giao hoán; phương pháp của Ore cùng với định lý điều kiện cần và đủ để tồn tại vành các thương của các vành không giao hoán, phương pháp này theo một nghĩa nào đó tốt hơn và khắc phục được một số hạn chế của phương pháp xây dựng vành các thương của các vành không giao hoán theo phương pháp truyền thống.

Qua luận văn này, tôi đã học tập được khả năng tự học hỏi và làm quen dần với khả năng tự nghiên cứu. Trong quá trình làm luận văn, vẫn còn nhiều vấn đề liên quan đến đề tài mà tôi thực sự chưa nghiên cứu một cách sâu sắc và đầy đủ. Hy vọng rằng trong các bậc học cao hơn sau này tôi có đủ điều kiện và khả năng để tiếp tục nghiên cứu sâu sắc hơn về các phương pháp xây dựng vành các thương của các vành không giao hoán, đặc biệt là phương pháp của Ore và Goldie, với các ứng dụng của lý thuyết này trong lĩnh vực nghiên cứu các tính chất của vành không giao hoán.

Cuối cùng, tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành đến Trường ĐHSP tp.HCM, phòng KHCN&SDH, các Thầy, Cô đã trực tiếp giảng dạy tôi trong suốt khóa học. Đặc biệt, tôi xin được biết ơn sâu sắc PGS. TS Bùi Tường Trí, người đã trực tiếp giảng dạy, hướng dẫn và tận tình giúp đỡ tôi trong suốt khóa học này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, University of Oxford, Cambridge, Massachusetts.
2. Jacobson, N. (1964), *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 37.
3. Jacobson, N. (1975), *Pi-Algebras*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York.
4. Herstein, I. N. (1968), *Noncommutative rings*, The math. Assoc. Amer.
5. Lam, T. Y., *Lectures on Modules and Rings*, Springer.
6. Lam, T. Y., *Exercises in Modules and Rings*, Springer.
7. Lam, T. Y., *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag.
8. McConnell, J. C., Robson, J. C., with the cooperation of Small, L.W., *Noncommutative Noetherian Rings*, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island.
9. Stenström, Bo (1975), *Rings of Quotients*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York.