



**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Nguyễn Thị Thanh Lý

CÁC TIÊN ĐỀ TÁCH VÀ ĐỊNH LÝ MATHERON

**Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 604601**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS. ĐẬU THẾ CẤP**

Thành phố Hồ Chí Minh - 2009

LỜI CẢM ƠN

Trong thời gian thực hiện đề tài, tuy em đã gặp không ít khó khăn nhưng nhờ sự giúp đỡ của thầy cô, gia đình và bè bạn cùng với sự nỗ lực của bản thân, em đã học hỏi, bổ sung nhiều kiến thức bổ ích cho bản thân và hoàn thành đề tài đã chọn.

Đầu tiên em xin phép được bày tỏ lòng biết ơn vô cùng đến thầy PGS.TS Đậu Thế Cấp, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh, đã giảng dạy, hướng dẫn và nhiệt tình giúp đỡ, động viên em trong suốt quá trình thực hiện đề tài.

Em xin kính gửi đến Quý thầy cô trong Hội đồng chấm luận văn thạc sĩ, đã cho em những đánh giá, phê bình quý báu cùng những chỉ bảo nhiệt tình giúp em hoàn thiện luận văn, những lời cảm ơn chân thành và trân trọng.

Em cũng xin kính gửi lời cảm ơn chân thành và trân trọng đến Quý thầy cô trong và ngoài trường ĐH Sư phạm TP. Hồ Chí Minh đã giảng dạy, trang bị cho em những kiến thức quý báu; cảm ơn Quý thầy cô là cán bộ của phòng KH CN và Sau Đại học đã giúp đỡ trong quá trình học tập và tổ chức bảo vệ đề tài.

Em xin kính gửi lời cảm ơn sâu sắc đến Ban Giám Hiệu, Quý thầy cô và các đồng nghiệp của trường Đại Học Đồng Tháp, nơi em công tác, đã tạo điều kiện thuận lợi giúp em hoàn thành luận văn.

Gia đình em cũng là nguồn động viên to lớn, giúp em vượt qua khó khăn trong cuộc sống để hoàn thành luận văn.

Em xin được ghi ơn tất cả!

BẢNG KÝ HIỆU ĐÃ SỬ DỤNG

$\mathbb{R}$	Tập số thực
$\mathbb{N}$	Tập số tự nhiên
$\mathbb{Q}$	Tập số hữu tỷ
$C(X, [0, 1])$	Tập các hàm liên tục từ X vào $[0, 1]$
A^0	Phần trong của A
$\overline{A}$	Bao đóng của A
∂A	Biên của A
$\aleph_0$	Lực lượng của tập đếm được
■	Kết thúc chứng minh

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Các tiên đề tách là một trong những vấn đề trọng tâm của Tôpô đại cương, định lý Matheron có ứng dụng trong giải tích hàm và trong lý thuyết độ đo tích phân, lý thuyết xác suất, có liên hệ chặt chẽ với các tiên đề tách. Đề tài nghiên cứu hai vấn đề trên trong một thể thống nhất.

2. Mục đích

Cho một tài liệu tổng quan về các tiên đề tách và định lý Matheron, trên cơ sở đó cho một số nghiên cứu, tìm tòi mới.

3. Đối tượng nghiên cứu

Tôpô đại cương, lý thuyết độ đo tích phân.

4. Ý nghĩa khoa học thực tiễn

Đề tài cập nhật các kết quả liên quan trong thời gian gần đây để những giới có quan tâm có thể tham khảo, cho một vài kết quả mới. Đề tài có khả năng áp dụng trong lý thuyết độ đo, tích phân và xác suất.

5. Tổng quan đề tài

5.1. *Sơ lược tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài*

Trong tôpô và các lĩnh vực có liên quan, tùy theo mục đích nghiên cứu và ứng dụng ta cần thêm các điều kiện để được lớp không gian hẹp hơn có tính chất mong muốn. Trong các điều kiện đưa vào có các tiên đề tách. Các tiên đề tách đề cập đến việc tách điểm, tách điểm và tập đóng hoặc tách các tập đóng. Các tiên đề tách đã được nghiên cứu là $T_0, T_{\frac{1}{2}}, T_1, T_2, T_{\frac{1}{2}}, T_3, T_{\frac{1}{2}}, T_4, T_5$. Có nhiều tài liệu về các tiên đề tách. Tuy nhiên đa số các tài liệu chỉ trình bày một số tiên đề tách

hoặc trình bày theo cách rời rạc. Thậm chí hiện còn một số tiên đề tách có các định nghĩa khác nhau ở các tài liệu khác nhau.

Định lý Matheron có liên hệ chặt chẽ với các tiên đề tách, đề cập đến không gian các tập đóng. Trong [5] Matheron đã chứng minh: *Cho X là không gian compắc địa phương, khả metric, đầy đủ và khả ly. Khi đó không gian miss-and-hit $\mathcal{F}$ của X là compắc, khả ly và Hausdorff.*

Từ đó nảy sinh vấn đề một cách tự nhiên là nếu ta thay đổi một số giả thuyết của không gian X thì không gian miss-and-hit của nó sẽ thế nào? Việc tìm điều kiện đặt lên X để không gian miss-and-hit của nó có những tính chất tốt nào đó là có ý nghĩa. Vấn đề này cũng được sự quan tâm của nhiều tác giả. Các tác giả đã giải quyết vấn đề cho trường hợp X là không gian metric có ít nhất một điểm không compắc địa phương trong [7] và không gian tôpô tổng quát trong [3]. Trong [2], các tác giả tiếp tục giải quyết vấn đề trên không gian tôpô một và cho nhiều kết quả thú vị.

5.2. Nội dung đề tài

Đề tài nghiên cứu các tiên đề tách và các mở rộng của định lý Matheron. Cấu trúc đề tài gồm mở đầu, 3 chương nội dung (1-3), kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1 là chương kiến thức chuẩn bị. Chương này trình bày tóm tắt, cô đọng một số kiến thức về tôpô đại cương và một số lý thuyết liên quan, là cơ sở để theo dõi các chương sau.

Chương 2 trình bày định nghĩa và một số tính chất đặc trưng của các tiên đề tách. Đồng thời đưa ra các phản ví dụ để làm rõ hơn cho nội dung chương này.

Chương 3 được xem như là ứng dụng của chương 2. Trình bày định lý Matheron và các mở rộng của nó.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Không gian tôpô

1.1.1. Định nghĩa

Cho một tập X . Một họ τ các tập con của X gọi là một tôpô trên X nếu thỏa mãn các điều kiện:

(τ_1) X và $\emptyset$ thuộc τ ;

(τ_2) Hợp tùy ý của các tập thuộc τ là thuộc τ ;

(τ_3) Giao hữu hạn của các tập thuộc τ là thuộc τ .

Một tập X cùng với một tôpô trên X gọi là một không gian tôpô. Để chỉ rõ τ là tôpô của không gian tôpô X , ta viết (X, τ) .

Cho (X, τ) là không gian tôpô. Tập $G \in \tau$ được gọi là tập mở của X . Tập con F của X được gọi là tập đóng nếu $X \setminus F$ là tập mở.

Từ định nghĩa ta có:

- 1) $\emptyset$ và X là các tập đóng.
- 2) Giao tùy ý của các tập đóng là tập đóng.
- 3) Hợp hữu hạn của các tập đóng là tập đóng.

Ví dụ 1. Với mọi tập X , $\mathcal{P}(X) = \{G \mid G \subset X\}$ là một tôpô trên X , gọi là tôpô rời rạc. Tập X cùng với tôpô rời rạc gọi là không gian rời rạc.

Ví dụ 2. Với mọi tập vô hạn X , họ bao gồm tập $\emptyset$ và tất cả các tập con G của X có $X \setminus G$ hữu hạn, là một tôpô trên X . Tôpô này gọi là tôpô Zariski.

Ví dụ 3. Cho X là một tập. Một hàm $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là một mêtric trên X nếu thỏa mãn các điều kiện :

$$(m_1) \quad d(x, y) \geq 0; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(m_2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(m_1) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$$

Một tập X cùng với một metric d trên X gọi là không gian metric (X, d) ; $d(x, y)$ gọi là khoảng cách từ x đến y .

Với mỗi $a \in X$ và $\varepsilon > 0$, đặt $B(a, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$, $B(a, \varepsilon)$ gọi là hình cầu mở tâm a bán kính ε . Tập con G của X gọi là tập mở nếu với mọi $a \in G$ tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $B(a, \varepsilon) \subset G$.

Với mọi không gian metric (X, d) , họ các tập mở theo metric d là một tôpô trên X . Tôpô này gọi là tôpô sinh bởi metric d . Không gian metric luôn được coi là không gian tôpô với tôpô sinh bởi metric.

1.1.2. Cơ sở và tiền cơ sở

Cho τ là một tôpô trên X . Một họ con β của τ gọi là một cơ sở của τ nếu mọi tập thuộc τ đều bằng hợp của một họ các tập thuộc β . Nói cách khác, họ con β của τ là cơ sở của τ nếu mọi $G \in \tau$ và mọi $x \in G$ tồn tại $V \in \beta$ sao cho $x \in V \subset G$.

Một họ con σ của τ gọi là một tiền cơ sở của τ nếu họ tất cả các giao hữu hạn các tập thuộc σ là một cơ sở của τ .

Một tôpô hoàn toàn được xác định khi biết được một cơ sở hay tiền cơ sở của nó.

Không gian tôpô X gọi là thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai nếu tôpô của nó có một cơ sở đếm được.

1.1.3. lân cận và cơ sở lân cận

Cho X là một không gian tôpô và $x \in X$, $A \subset X$

Tập con U của X được gọi là *lân cận của điểm* x nếu tồn tại tập mở G sao cho $x \in G \subset U$. Nếu lân cận U của x là tập mở thì U gọi là lân cận mở của x .

Một họ $\mathcal{U}_x$ các lân cận của x được gọi là một *cơ sở lân cận của điểm* x nếu mọi lân cận V của x đều tồn tại một lân cận $U \in \mathcal{U}_x$ sao cho $U \subset V$.

Không gian tôpô X gọi là thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất nếu mọi điểm $x \in X$ đều có cơ sở lân cận đếm được.

Tập con U của X được gọi là *một lân cận của tập* A nếu tồn tại một tập mở G sao cho $A \subset G \subset U$. Nếu lân cận U của A là tập mở thì U gọi là lân cận mở của A .

1.1.4. Phần trong và bao đóng

Cho X là một không gian tôpô và tập con A của X . Ta gọi *phần trong* của A là hợp của tất cả các tập mở được chứa trong A , kí hiệu là A^0 . Từ định nghĩa ta có: A^0 là tập mở lớn nhất chứa trong A ; nếu $A \subset B$ thì $A^0 \subset B^0$ và A mở nếu và chỉ nếu $A = A^0$.

Ta gọi *bao đóng* của A là giao của tất cả các tập đóng chứa A , kí hiệu là $\overline{A}$. Từ định nghĩa ta có $\overline{A}$ là tập đóng nhỏ nhất chứa A ; nếu $A \subset B$ thì $\overline{A} \subset \overline{B}$ và A đóng nếu và chỉ nếu $A = \overline{A}$.

Tập con D gọi là *trù mật* trong X nếu $\overline{D} = X$.

Tập con A của X gọi là *không đâu trù mật* nếu $(\overline{A})^0 = \emptyset$.

Tập con A và B của X được gọi là *tách nhau* nếu $A \cap \overline{B} = \emptyset$ và $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

1.1.5. Lưới

Ta gọi D là một tập định hướng nếu trên D có một quan hệ $\leq$ thỏa mãn các tính chất sau:

- (i) $\alpha \lesssim \alpha$ với mọi $\alpha \in D$
- (ii) $\alpha \lesssim \beta, \beta \lesssim \gamma$ thì $\alpha \lesssim \gamma$ với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in D$
- (iii) Mọi $\alpha, \beta \in D$, tồn tại $\gamma \in D$ sao cho $\alpha \lesssim \gamma$ và $\beta \lesssim \gamma$.

Ta gọi một *lưới* trong X là một ánh xạ từ một tập định hướng D vào X , kí hiệu là $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in D}$.

Lưới $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in D}$ trong không gian tôpô X gọi là hội tụ đến $x \in X$, x gọi là giới hạn của lưới, nếu mọi lân cận V của x , tồn tại $\alpha_0 \in D$ sao cho $x_{\alpha_0} \in V$ với mọi $\alpha \succ \alpha_0$. Kí hiệu là $x_\alpha \rightarrow x$.

1.1.6. Vị trí tương đối của điểm và tập con

Cho không gian tôpô X , tập con A của X và điểm x thuộc X .

Điểm x gọi là *điểm trong* của A nếu x có một lân cận V sao cho $V \subset A$.

Điểm x gọi là *điểm ngoài* của A nếu x có một lân cận V sao cho $V \cap A = \emptyset$.

Điểm x gọi là *điểm biên* của A nếu mọi lân cận V của x đều có $V \cap A \neq \emptyset$ và $V \cap X \setminus A \neq \emptyset$.

Tập tất cả các điểm biên của A gọi là *biên* của A , kí hiệu là bA .

Rõ ràng rằng điểm $x \in X$ chỉ có thể hoặc là điểm trong của A , hoặc là điểm ngoài của A hoặc là điểm biên của A . Dễ dàng kiểm tra rằng x là điểm trong của A nếu và chỉ nếu $x \in A^\circ$.

1.2. Ánh xạ liên tục

1.2.1. Định nghĩa

Cho X, Y là các không gian tôpô và ánh xạ $f: X \rightarrow Y$. Ánh xạ f gọi là *liên tục tại điểm* $x \in X$ nếu mọi lân cận (mở) của $f(x)$ trong Y đều tồn tại lân cận (mở) U của x trong X sao cho $f(U) \subset V$, hay một cách tương đương, $f^{-1}(V)$ là lân cận của x .

Ảnh xạ gọi là *liên tục trên X* nếu nó liên tục tại mọi $x \in X$.

1.2.2. Định lý

Cho X, Y là các không gian tôpô và ảnh xạ $f : X \rightarrow Y$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương

- (a) f liên tục trên X .
- (b) $f^{-1}(G)$ mở trong X với mọi tập G mở trong Y .
- (c) $f^{-1}(G)$ mở trong X với mọi tập G thuộc một cơ sở của Y .
- (d) $f^{-1}(G)$ mở trong X với mọi tập G thuộc một tiền cơ sở của Y .
- (e) $f^{-1}(F)$ đóng trong X với mọi tập F đóng trong Y .
- (f) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ với mọi tập con A của X .
- (g) $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$ với mọi tập con B của Y .

1.2.3. Định lý

Ảnh xạ $f : Z \rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ liên tục nếu và chỉ nếu $\pi_{\alpha} \circ f$ (với $\pi_{\alpha} : \prod_{\alpha \in I} X_{\alpha} \rightarrow X_{\alpha}$ là phép chiếu thứ α) liên tục với mọi $\alpha \in I$.

1.3. Ảnh xạ mở, ảnh xạ đóng. Phép đồng phôi

1.3.1. Định nghĩa

Cho ảnh xạ $f : X \rightarrow Y$. Ảnh xạ f gọi là *mở* nếu mọi tập mở G trong X , $f(G)$ là tập mở trong Y ; gọi là *đóng* nếu mọi tập đóng F trong X , $f(F)$ là tập đóng trong Y .

Một song ảnh $f : X \rightarrow Y$ gọi là *phép đồng phôi* nếu f và f^{-1} đều là ảnh xạ liên tục.

1.3.2. Định lý

Cho $f: X \rightarrow Y$ là một song ánh, liên tục. Khi đó các điều kiện sau là tương đương

- a) f là phép đồng phôi.
- b) f là ánh xạ mở.
- c) f là ánh xạ đóng.

1.4. Không gian con

1.4.1. Định nghĩa

Cho (X, τ) là không gian tôpô và A là một tập con của X . Khi đó họ $\tau_A = \{G \cap A \mid G \in \tau\}$ là một tôpô trên A , gọi là tôpô cảm sinh bởi tôpô trên X .

Không gian A với tôpô cảm sinh gọi là *không gian con* của không gian X .

1.4.2. Định lý

(a) *Tập con mở của một tập mở là mở trong X ; tập con đóng của tập đóng là đóng trong X .*

(b) *Tập E đóng trong A khi và chỉ khi tồn tại tập F đóng trong X sao cho $E = A \cap F$.*

(c) *Nếu $f: X \rightarrow Y$ là ánh xạ liên tục thì $f|_A$ cũng liên tục.*

Chứng minh

(a) Giả sử A là tập mở (đóng) trong X . Nếu G là tập mở (đóng) trong A thì G có dạng $G = A \cap U$, trong đó U là một tập mở (đóng) trong X . Vì A và U đều là các tập mở (đóng) trong X nên G là tập mở (đóng) trong X .

(b) E đóng trong $A \Leftrightarrow A \setminus E$ mở trong $A \Leftrightarrow$ tồn tại V mở trong X sao cho $A \setminus E = V \cap A \Leftrightarrow E = A \setminus (V \cap A) = (X \setminus V) \cap A$ ($F = X \setminus V$ đóng trong X).

(c) Giả sử U là tập mở bất kỳ trong Y .

Ta có $(f|_A)^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U)$

Vì f liên tục nên $f^{-1}(U)$ mở trong X , do đó $A \cap f^{-1}(U)$ mở trong A .
 Vậy $f|_A$ liên tục đối với tôpô trong A . ■

1.5. Không gian khả ly

1.5.1. Định nghĩa

Không gian X gọi là không gian khả ly nếu nó có một tập con đếm được trù mật.

1.5.2. Định lý

Không gian tôpô X có cơ sở đếm được thì khả ly.

1.6. Không gian compac

1.6.1. Định nghĩa

Tập con A của một không gian tôpô X gọi là *tập compac* nếu mọi phủ mở của A trong X đều có phủ con hữu hạn.

Không gian tôpô X gọi là *không gian compac* nếu X là tập compac của X .

Một họ các tập $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ gọi là *có tâm* nếu mọi tập con hữu hạn I_0 của I đều có $\bigcap_{\alpha \in I_0} F_\alpha \neq \emptyset$.

1.6.2. Định lý

Không gian X compac nếu và chỉ nếu mọi họ các tập con đóng $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ có tâm thì đều có giao khác rỗng, tức là $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \emptyset$.

1.6.3. Định lý

Tập con đóng của không gian compac là compac.

1.6.4. Bổ đề Alexandrov

Cho σ là một tiên cơ sở của không gian X . Khi đó nếu mọi phủ mở bao gồm các tập thuộc σ đều có một phủ con hữu hạn thì X compac.

1.6.5. Định lý (Định lý Tikhonov)

Không gian tích $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ compact nếu và chỉ nếu mọi không gian tọa độ X_α là compact.

1.6.6. Không gian compact địa phương

Không gian tôpô X gọi là compact địa phương nếu mọi điểm của nó đều có một lân cận compact.

1.7. Không gian khả metric

1.7.1. Định nghĩa

Không gian tôpô X gọi là không gian khả metric nếu trên X có một metric d sao cho tôpô sinh bởi metric d trùng với tôpô xuất phát trên X .

1.7.2. Định lý

Mọi không gian khả metric khả ly đều thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai.

1.7.3. Định lý

Cho $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ là họ các không gian khả metric và d_n là metric sinh ra tôpô trên X_n . Khi đó tích $\prod_{n=1}^\infty X_n$ của họ đếm được các không gian khả metric là không gian khả metric với metric $d(x, y) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$.

1.8. Nhúng vào hình hộp

1.8.1. Các định nghĩa

Kí hiệu $C(X, [0, 1])$ là tập các hàm liên tục $f: X \rightarrow [0, 1]$ và $\mathcal{H} \subset C(X, [0, 1])$.

Tập $\mathcal{H}$ gọi là *tách các điểm* nếu mọi $x, y \in X, x \neq y$ tồn tại $f \in \mathcal{H}$ sao cho $f(x) \neq f(y)$.

Tập $\mathcal{H}$ gọi là *tách điểm và tập đóng* nếu mọi $x \in X$ và mọi tập con đóng E của X không chứa x , tồn tại $f \in \mathcal{H}$ sao cho $f(x) \notin \overline{f(E)}$.

Lũy thừa Descartes $[0,1]^{\mathcal{H}}$ với tôpô tích gọi là một *hình hộp*.

Ánh xạ $e: X \rightarrow [0,1]^{\mathcal{H}}, \pi_f(e(x)) = f(x)$ với mọi $x \in X, f \in \mathcal{H}$ gọi là *ánh xạ (chính tắc) kết hợp* với $\mathcal{H}$.

1.8.2. Định lý

Cho X là một không gian tôpô, $\mathcal{H} \subset C(X, [0,1])$ và $e: X \rightarrow [0,1]^{\mathcal{H}}$ là ánh xạ kết hợp với $\mathcal{H}$. Khi đó

- a) e là ánh xạ liên tục.
- b) Nếu $\mathcal{H}$ tách các điểm thì e là đơn ánh.
- c) Nếu $\mathcal{H}$ tách các điểm đồng thời tách điểm và tập đóng thì e là phép đồng phôi X lên $e(X)$.

Chứng minh

a) Vì $\pi_f \circ e = f: X \rightarrow [0,1]$ liên tục với mọi $f \in \mathcal{H}$ nên ánh xạ e liên tục theo Định lý 1.2.3.

b) Mọi $x, y \in X, x \neq y$, tồn tại $f \in \mathcal{H}$ sao cho $f(x) \neq f(y)$. Từ đó $\pi_f(e(x)) \neq \pi_f(e(y))$ và $e(x) \neq e(y)$. Vậy e đơn ánh.

c) Xét tập mở tùy ý $U \subset X$. Mọi $x \in U$ chọn $f \in \mathcal{H}$ sao cho $f(x) \notin \overline{f(X \setminus U)}$. Đặt

$$V = [0,1]^{\mathcal{H}} \setminus \pi_f^{-1}(\overline{f(X \setminus U)}) = \{p \in [0,1]^{\mathcal{H}} \mid \pi_f(p) \notin \overline{f(X \setminus U)}\},$$

ta có V là tập mở trong $[0,1]^{\mathcal{H}}$ và $e(x) \in V \cap e(X) \subset e(U)$.

Thật vậy, hiển nhiên $e(x) \in V \cap e(X)$. Với mọi $p \in V \cap e(X)$ tồn tại $y \in X$ sao cho $e(y) = p$. Từ đó $\pi_f(p) = f(y) \notin \overline{f(X \setminus U)}$, suy ra $y \in X \setminus (X \setminus U) = U$ và $p = e(y) \in e(U)$.

Do $V \cap e(X)$ mở trong $e(X)$ nên $e(U)$ là lân cận của $e(x)$, tức là $e(U)$ mở trong $e(X)$. Vì $e: X \rightarrow e(X)$ là song ánh liên tục và mở nên là phép đồng phôi theo Định lý 1.3.2. ■

CHƯƠNG 2

CÁC TIÊN ĐỀ TÁCH

2.1. T_0 - không gian

2.1.1. Định nghĩa

Không gian tôpô X gọi là T_0 - không gian nếu hai điểm x, y khác nhau bất kì thuộc X đều có một lân cận (mở) của x không chứa y hoặc một lân cận (mở) của y không chứa x .

2.1.2. Định lý

Cho X là một không gian tôpô. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

- (i) X là T_0 - không gian.
- (ii) Với mọi $x, y \in X, x \neq y$ đều có $x \notin \overline{\{y\}}$ hoặc $y \notin \overline{\{x\}}$.
- (iii) Với mọi $x, y \in X, x \neq y$ đều có $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Chứng minh

(i) $\Rightarrow$ (ii). Do X là T_0 - không gian nên tồn tại lân cận mở U của x không chứa y (hoặc lân cận mở V của y không chứa x). Do đó, $\overline{\{y\}} \subset X \setminus U$ suy ra $x \notin \overline{\{y\}}$ (hoặc $\overline{\{x\}} \subset X \setminus V$ suy ra $y \notin \overline{\{x\}}$).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Giả sử trái lại ta có $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Suy ra $x \in \overline{\{y\}}$ và $y \in \overline{\{x\}}$. Điều này mâu thuẫn với (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Với mọi $x, y \in X, x \neq y$, vì $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ nên tồn tại $z \in \overline{\{x\}} \setminus \overline{\{y\}}$ (hoặc $z \in \overline{\{y\}} \setminus \overline{\{x\}}$). Do $z \notin \overline{\{y\}}$ nên tồn tại lân cận mở U của z

sao cho $U \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$ (hoặc lân cận V của z sao cho $V \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$) suy ra $y \notin U$ (hoặc $x \notin V$). Mặt khác, vì $z \in \overline{\{x\}}$ nên $U \cap \overline{\{x\}} \neq \emptyset$ suy ra $x \in U$ (hoặc $y \in V$). Vậy X là T_0 -không gian. ■

2.2. $T_{\frac{1}{2}}$ - không gian

2.2.1. Định nghĩa

Tập con A của không gian tôpô X gọi là tập g -đóng nếu mọi tập con mở U của X chứa A đều có $\overline{A} \subset U$.

2.2.2. Định nghĩa

Không gian tôpô X gọi là $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian nếu mọi tập g -đóng của X đều là tập đóng.

2.2.3. Định lý

Không gian tôpô X là $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian khi và chỉ khi với mọi phần tử x thuộc X thì hoặc $\{x\}$ là tập đóng hoặc $\{x\}$ là tập mở.

Chứng minh

($\Rightarrow$) Giả sử $x \in X$ và $\{x\}$ không đóng. Ta sẽ chứng minh $\{x\}$ mở. Thật vậy, do $X \setminus \{x\}$ không mở nên chỉ có một tập mở duy nhất chứa $X \setminus \{x\}$ là X và $\overline{X \setminus \{x\}} \subset X$ nên $X \setminus \{x\}$ là tập g -đóng. Do X là $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian nên $X \setminus \{x\}$ đóng. Suy ra $\{x\}$ mở.

($\Leftarrow$) Gọi A là tập g -đóng bất kỳ của X . Ta chứng minh A đóng.

Với mọi $x \in \overline{A}$

Nếu $\{x\}$ mở thì $\{x\}$ là lân cận của x nên $\{x\} \cap A \neq \emptyset$. Do đó $x \in A$.

Nếu $\{x\}$ đóng thì $\overline{\{x\}} = \{x\}$. Khi đó $\overline{\{x\}} \cap A \neq \emptyset$ (vì nếu $\overline{\{x\}} \cap A = \emptyset$ thì $A \subset X \setminus \{x\}$, do $X \setminus \{x\}$ là tập mở và A là tập g – đóng nên $\overline{A} \subset X \setminus \{x\}$, suy ra $\overline{A} \cap \{x\} = \emptyset$, mâu thuẫn với $x \in \overline{A}$). Do $\{x\} \cap A = \overline{\{x\}} \cap A \neq \emptyset$, nên trường hợp này ta cũng có $x \in A$. Suy ra $\overline{A} = A$. Vậy A đóng. ■

2.2.4. Hệ quả

Nếu X là $T_{\frac{1}{2}}$ - không gian thì X là T_0 - không gian.

Chứng minh

Với mọi $x, y \in X, x \neq y$. Theo Định lý 2.2.3 nếu X là $T_{\frac{1}{2}}$ - không gian thì hoặc $\{x\}$ mở, khi đó $\{x\}$ là lân cận của x không chứa y ; hoặc $\{x\}$ đóng thì $X \setminus \{x\}$ là lân cận của y không chứa x . Vậy X là T_0 - không gian. ■

2.2.5. Hệ quả

Không gian tôpô X là $T_{\frac{1}{2}}$ - không gian khi và chỉ khi mọi tập con A của X

đều là giao của tất cả các tập mở hoặc đóng của X chứa A .

Chứng minh

($\Rightarrow$) Giả sử A là tập con tùy ý của X , ta sẽ chứng minh mọi $x \notin A$ thì hoặc x không thuộc một tập mở chứa A , hoặc x không thuộc một tập đóng chứa A . Thật vậy, do $x \notin A$ nên $x \in X \setminus A$. Vì X là $T_{\frac{1}{2}}$ - không gian nên theo Định lý 2.2.3 ta có $\{x\}$ mở hoặc đóng. Suy ra $X \setminus \{x\}$ là tập đóng hoặc mở chứa A mà không chứa x .

($\Leftarrow$) Với mọi $x \in X$, ta có $X \setminus \{x\} \subset X$ bằng giao của một họ các tập đóng hoặc mở của X chứa $X \setminus \{x\}$. Khi đó, $X \setminus \{x\}$ bằng một tập nào đó của

họ, tức là $X \setminus \{x\}$ đóng hoặc mở. Suy ra $\{x\}$ mở hoặc đóng. Theo Định lý

2.2.3 ta có X là $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian. ■

2.3. T_1 -không gian

2.3.1. Định nghĩa

Không gian tôpô X là T_1 -không gian nếu hai điểm x, y khác nhau bất kỳ của X đều có một lân cận (mở) của x không chứa y và một lân cận (mở) của y không chứa x .

2.3.2. Định lý

Không gian tôpô X là T_1 -không gian khi và chỉ khi mọi tập con chỉ gồm một điểm của X là tập đóng.

Chứng minh

($\Rightarrow$) Gọi x là phần tử bất kỳ thuộc X . Với mọi $y \in X \setminus \{x\}$, vì X là T_1 -không gian nên tồn tại lân cận V của y , V không chứa x . Do đó $V \subset X \setminus \{x\}$. Vậy $X \setminus \{x\}$ mở hay $\{x\}$ đóng.

($\Leftarrow$) Với mọi $x, y \in X$, $x \neq y$. Vì $\{x\}, \{y\}$ đóng nên $X \setminus \{x\}, X \setminus \{y\}$ là các lân cận tương ứng của y không chứa x và của x không chứa y . Vậy X là T_1 -không gian. ■

Từ Định lý 2.2.3 và Định lý 2.3.2 ta có hệ quả sau

2.3.3. Hệ quả

Nếu X là T_1 -không gian thì X là $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian.

2.3.4. Hệ quả

Cho X là tập hữu hạn. Khi đó không gian tôpô (X, τ) là T_1 -không gian khi và chỉ khi τ là tôpô rời rạc.

Chứng minh

$(\Rightarrow)$ Do X hữu hạn nên mọi tập con A của X hữu hạn, ta có $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$.

Vì X là T_1 -không gian nên mọi tập con chỉ gồm một phần tử đều là tập đóng, do đó A đóng. Suy ra mọi tập con của X đều là tập mở. Vậy τ là tôpô rời rạc.

$(\Leftarrow)$ Nếu τ là tôpô rời rạc thì mọi $x \in X$, $\{x\}$ là tập đóng. Theo Định lý

2.3.2 ta có X là T_1 -không gian. ■

2.4. $T_{1\frac{1}{2}}$ - không gian

2.4.1. Định nghĩa

Không gian tôpô X gọi là $T_{1\frac{1}{2}}$ - không gian nếu mọi tập con compắc của X đều là tập đóng.

2.4.2. Nhận xét

Nếu X là $T_{1\frac{1}{2}}$ - không gian thì mọi tập chỉ gồm một phần tử đều là compắc nên là tập đóng, do đó X là T_1 - không gian.

2.5. T_2 - không gian

2.5.1. Định nghĩa

Không gian tôpô X là T_2 - không gian (hay không gian Hausdorff) nếu hai điểm x, y khác nhau bất kỳ của X tồn tại các lân cận (mở) U của x và V của y sao cho $U \cap V = \emptyset$.

Từ định nghĩa ta dễ dàng suy ra nhận xét sau

2.5.2. Nhận xét

Nếu X là không gian Hausdorff thì X là T_1 - không gian.

2.5.3. Định lý

Không gian tôpô X là Hausdorff khi và chỉ khi mọi lưới hội tụ trong X đều hội tụ đến một điểm duy nhất.

Chứng minh

($\Rightarrow$) Giả sử X là không gian Hausdorff, lưới $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in D} \subset X$, $x_\alpha \rightarrow a$, và $x_\alpha \rightarrow b$. Ta sẽ chứng minh $a = b$. Thật vậy, nếu $a \neq b$ thì tồn tại các lân cận rời nhau U và V của a và b tương ứng. Chọn $\alpha_U, \alpha_V \in D$ sao cho $x_\alpha \in U$ với mọi $\alpha \succeq \alpha_U$ và $x_\alpha \in V$ với mọi $\alpha \succeq \alpha_V$. Chọn $\beta \in D$ sao cho $\beta \succeq \alpha_U$ và $\beta \succeq \alpha_V$, ta có $x_\beta \in U \cap V$ mâu thuẫn với $U \cap V = \emptyset$. Vậy $a = b$.

($\Leftarrow$) Giả sử X không Hausdorff. Khi đó tồn tại $a, b \in X$, $a \neq b$ và mọi lân cận U của a và V của b đều có $U \cap V \neq \emptyset$. Kí hiệu $\mathcal{N}_a, \mathcal{N}_b$ lần lượt là họ các lân cận của a và b tương ứng. Ta định hướng tập $\mathcal{D} = \mathcal{N}_a \times \mathcal{N}_b$ bởi quan hệ $(U', V') \succeq (U, V)$ nếu $U' \subset U$ và $V' \subset V$. Với mọi $(U, V) \in \mathcal{D}$, chọn $x_{(U, V)} \in U \cap V$ ta được lưới $\langle x_{(U, V)} \rangle_{(U, V) \in \mathcal{D}}$. Với mọi lân cận U_0 của a và V_0 của b , $x_{(U, V)} \in U_0$ với mọi $(U, V) \succeq (U_0, V_0)$ và $x_{(U, V)} \in V_0$ với mọi $(U, V) \succeq (U_0, V_0)$. Do đó, $x_{(U, V)} \rightarrow a$ và $x_{(U, V)} \rightarrow b$, $a \neq b$. Mâu thuẫn với giả thiết. ■

2.5.4. Định lý

Cho X là không gian Hausdorff. Nếu A là tập con compắc của X và điểm x thuộc $X \setminus A$ thì tồn tại các lân cận U của x và V của A sao cho $U \cap V = \emptyset$

Chứng minh

Với mọi $y \in A$ thì $y \neq x$. Vì X Hausdorff nên tồn tại lân cận mở U_y của y thỏa $x \notin \overline{U_y}$. Khi đó $A \subset \bigcup_{y \in A} U_y$. Vì A compact nên có phủ hữu hạn các tập mở $U_1, U_2, \dots, U_n$ sao cho $x \notin \overline{U_i}$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Đặt $V = \bigcup_{i=1}^n U_i$, $U = X \setminus \overline{V}$, ta có V, U là các lân cận của A và x tương ứng thỏa $U \cap V = \emptyset$. ■

2.5.5. Hệ quả

Mọi tập con compact của không gian Hausdorff là tập đóng.

Chứng minh

Cho A là tập con compact của không gian Hausdorff X . Cố định $x \in X \setminus A$. Mỗi $y \in A$ tồn tại các lân cận mở rời nhau U_y của y và V^y của x . Họ $\{U_y\}_{y \in A}$ là phủ mở của A nên có phủ con hữu hạn $\{U_{y_i}\}_{i=1}^n$. Đặt $V = \bigcap_{i=1}^n V^{y_i}$ ta có V là một lân cận của x không giao với A . Vậy $X \setminus A$ mở và A đóng. ■

2.5.6. Định lý

Cho X là không gian tôpô thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất. Khi đó X là T_2 - không gian khi và chỉ khi X là $T_{\frac{1}{2}}$ - không gian.

Chứng minh

($\Rightarrow$) Suy ra từ Hệ quả 2.5.5.

($\Leftarrow$) Giả sử trái lại X không là T_2 - không gian. Khi đó tồn tại $a, b \in X$, tồn tại cơ sở lân cận giảm đếm được $\{U_n\}$ của a không chứa b và $\{V_n\}$ của b không chứa a sao cho $U_n \cap V_n \neq \emptyset$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chọn $x_n \in U_n \cap V_n$ và đặt $A = \{a\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Xét phủ mở tùy ý $\{G_i\}_{i \in I}$ của A . Chọn $i_0 \in I$ sao cho $a \in G_{i_0}$. Khi đó tồn tại n_0 sao cho $U_{n_0} \subset G_{i_0}$. Ta có

$x_n \in U_{n_0}$ với mọi $n \geq n_0$. Mọi $j < n_0$, chọn i_j sao cho $x_j \in G_{i_j}$. Ta có $\{G_{i_j}\}_{j=0}^{n_0-1}$ là phủ con hữu hạn của A . Vậy A là tập compac. Do $\{x_n\} \subset A$, $x_n \rightarrow b$ nên $b \in \overline{A}$, $b \notin A$. Ta có A là tập compac nhưng không là tập đóng nên X không là $T_{\frac{1}{2}}$ - không gian. ■

2.5.7. Định lý

Cho X là một không gian Hausdorff compac địa phương. Khi đó

- a) *Mọi $x \in X$ và mọi lân cận U của x , tồn tại một lân cận compac N của x sao cho $N \subset U$.*
- b) *Mọi tập compac K của X và mọi tập mở U chứa K , tồn tại tập mở V sao cho $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ và $\overline{V}$ là tập compac.*

Chứng minh

a) Ta có thể giả thiết $\overline{U}$ compac vì nếu cần thì ta thay U bởi $U \cap F^0$, trong đó F là một lân cận compac của x . Khi đó tồn tại các tập mở rời nhau V và W trong $\overline{U}$ sao cho $x \in V$ và $\overline{U} \subset W$. Vì V mở trong U nên V mở trong X , $\overline{V}$ là tập đóng và do đó là tập compac của $U \setminus W = \overline{U} \setminus W$. Đặt $N = \overline{V}$ ta có lân cận compac của x cần tìm.

b) Theo a), mỗi $x \in K$ tồn tại lân cận compac $N_x \subset U$. Họ $\{N_x^0\}_{x \in K}$ là một phủ mở của K nên có phủ con hữu hạn $\{N_{x_i}^0\}_{i=1}^n$. Đặt $V = \bigcup_{i=1}^n N_{x_i}^0$ ta có $K \subset V$ và $\overline{V} \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{N_{x_i}^0} \subset U$, $\overline{V}$ là tập compac. ■

2.6. $T_{\frac{1}{2}}$ - không gian

2.6.1. Định nghĩa

Không gian tôpô X là $T_{\frac{1}{2}}$ - không gian (hay không gian hoàn toàn Hausdorff) nếu hai điểm x, y khác nhau bất kỳ của X , tồn tại các lân cận (mở) U của x và V của y sao cho $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

Từ định nghĩa ta suy ra nhận xét sau

2.6.2. Nhận xét

Nếu X là không gian hoàn toàn Hausdorff thì suy ra X Hausdorff.

2.7. T_3 - không gian

2.7.1. Định nghĩa

Không gian tôpô X gọi là chính quy nếu mọi điểm x thuộc X và mọi tập con đóng A của X không chứa x , tồn tại các lân cận U của x và V của A sao cho $U \cap V = \emptyset$.

2.7.2. Định nghĩa

Không gian tôpô X gọi là T_3 - không gian (hay không gian Tychonoff) nếu nó là chính quy và T_1 - không gian.

2.7.3. Định lý

Không gian tôpô X là T_3 - không gian khi và chỉ khi X là T_1 - không gian và mọi lân cận U của điểm x bất kỳ thuộc X đều chứa một lân cận đóng.

Chứng minh

($\Rightarrow$) Giả sử X là T_3 - không gian. Hiển nhiên X là T_1 - không gian. Lấy phần tử x bất kỳ thuộc X . Giả sử U là một lân cận tùy ý của x . Ta có thể giả sử U mở, suy ra $F = X \setminus U$ là tập đóng không chứa x . Do X là T_3 - không gian nên tồn tại các tập mở V và W thỏa $x \in V, F \subset W$ và $V \cap W = \emptyset$. Khi đó, $X \setminus W$

là tập đóng chứa $\bar{V}$. Từ đó, ta có $x \in V \subset \bar{V} \subset X \setminus W \subset X \setminus F \subset U$. Vậy điều kiện của định lý được thỏa.

($\Leftarrow$) Giả sử điều kiện của định lý được thỏa. Để chứng minh X là T_3 -không gian ta chỉ cần chứng minh X chính quy. Giả sử x là một phần tử tùy ý của X . Gọi F là một tập đóng tùy ý không chứa x . Khi đó, $X \setminus F$ là một lân cận của x . Theo giả thiết, tồn tại một lân cận đóng U của x sao cho $U \subset X \setminus F$. Suy ra $X \setminus U$ là tập mở chứa F và $U \cap (X \setminus U) = \emptyset$ nên X là không gian chính quy. ■

2.8. $T_{3\frac{1}{2}}$ - không gian

2.8.1. Định nghĩa

Không gian tôpô X gọi là hoàn toàn chính quy nếu mọi phần tử a thuộc X và mọi tập con đóng B của X không chứa a , tồn tại hàm liên tục $f : X \rightarrow [0,1]$ sao cho $f(a) = 0$ và $f(x) = 1$ với mọi $x \in B$.

2.8.2. Định nghĩa

Không gian tôpô X gọi là thỏa mãn tiên đề tách $T_{3\frac{1}{2}}$ hay $T_{3\frac{1}{2}}$ - không gian nếu nó là hoàn toàn chính quy và T_1 - không gian.

2.9. T_4 - không gian

2.9.1. Định nghĩa

Không gian tôpô X gọi là không gian chuẩn tắc nếu với mọi tập con đóng A, B của X , $A \cap B = \emptyset$ đều tồn tại các lân cận (mở) U và V của A và B tương ứng sao cho $U \cap V = \emptyset$.

2.9.2. Định lý (Bổ đề Urysohn)

Cho X là không gian chuẩn tắc và A, B là các tập con đóng của X thỏa $A \cap B = \emptyset$. Khi đó, tồn tại một hàm liên tục $f : X \rightarrow [0, 1]$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in A$ và $f(x) = 1$ với mọi $x \in B$.

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh với mỗi số hữu tỷ dạng $r = k.2^{-n} \in [0, 1]$, tồn tại một tập mở U_r sao cho $A \subset U_r \subset X \setminus B$, $\overline{U_r} \subset U_s$ với $r < s$.

Thật vậy, đặt $U_1 = X \setminus B$. Do X chuẩn tắc nên tồn tại hai tập mở rời nhau V, W chứa A, B tương ứng. Đặt $U_{\frac{1}{2}} = V$ ($k=1, n=1$)

Vì $V \cap W = \emptyset$, $B \subset W$ nên $V \subset X \setminus W \subset X \setminus B$.

Suy ra $A \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset X \setminus W \subset U_1$

Bây giờ giả sử đã xây dựng được U_r với $r = k.2^{-n}$, $0 \leq k \leq 2^n$, $1 \leq n \leq N-1$. Ta sẽ xây dựng U_r với $r = (2j+1).2^{-N}$, $0 \leq j < 2^{N-1}$ (với trường hợp $r = 2j.2^{-N} = j.2^{-N+1} = j.2^{-(N-1)}$, $0 < j < 2^{N-1}$ đã có theo giả thiết quy nạp).

Ta có $j.2^{1-N} < (j+1).2^{1-N}$ với mọi $0 < j < 2^{N-1}$, suy ra $\overline{U_{j.2^{1-N}}} \subset U_{(j+1).2^{1-N}}$ (đặt $\overline{U_0} = A$). Vậy $\overline{U_{j.2^{1-N}}}, X \setminus U_{(j+1).2^{1-N}}$ là hai tập đóng rời nhau.

Tương tự như trên, ta xây dựng được U_r sao cho $\overline{U_{j.2^{1-N}}} \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset \overline{U_{(j+1).2^{1-N}}}$.

Vậy ta có họ các U_r có tính chất đặt ra.

Đặt $U_r = X$ với mọi $r > 1$ và xác định hàm f bởi $f(x) = \inf \{r \mid x \in U_r\}$.

Vì $A \subset U_r \subset X \setminus B = U_1$ với mọi $0 < r < 1$ nên $f(x) = 0$ với mọi $x \in A$, $f(x) = 1$ với mọi $x \in B$ và $0 \leq f(x) \leq 1$ với mọi $x \in X$.

Với mọi $\alpha \in [0,1]$, do các giá trị $r = k.2^{-n}$, $0 \leq k \leq 2^n$, trù mật trong $[0,1]$ nên

$$f(x) < \alpha \Leftrightarrow x \in U_r \text{ (với } r \text{ nào đó, } r < \alpha) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{r < \alpha} U_r.$$

$$f(x) > \alpha \Leftrightarrow x \notin U_r, \forall r > \alpha \Leftrightarrow x \notin U_s, \forall r > s > \alpha \Leftrightarrow x \in \bigcup_{s > \alpha} (X \setminus \overline{U_s}).$$

Vì vậy $f^{-1}(-\infty, \alpha) = \bigcup_{r < \alpha} U_r$ và $f^{-1}(\alpha, +\infty) = \bigcup_{s > \alpha} (X \setminus \overline{U_s})$ là các tập mở. Từ đó f liên tục. ■

2.9.3. Định nghĩa

Không gian tôpô X gọi là thỏa mãn tiên đề tách T_4 hay T_4 - không gian nếu nó là chuẩn tắc và T_1 - không gian.

2.9.4. Nhận xét

Từ Định nghĩa 2.8.1, Định nghĩa 2.9.3 và Bổ đề Urysohn ta suy ra nếu X là T_4 - không gian thì X là $T_{3\frac{1}{2}}$ - không gian.

2.9.5. Định lý

Không gian Hausdorff compact là T_4 - không gian.

Chứng minh

Cho X là không gian Hausdorff compact và A, B là các tập con đóng rời nhau của X . Theo Nhận xét 2.5.2 ta chỉ cần chứng minh X chuẩn tắc. Từ Định lý 1.6.3 ta có A, B là các tập compact. Mỗi $x \in A$ và $y \in B$, tồn tại các lân cận mở rời nhau U_x của x và V^x của y . Do $\{U_x\}_{x \in A}$ là phủ của A nên có phủ con hữu hạn $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$.

Đặt $U^y = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ và $V_y = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ ta được các tập mở rời nhau U^y chứa A và V_y chứa y . Lại do $\{V_y\}_{y \in B}$ là phủ mở của B nên có phủ con hữu hạn $\{V_{y_j}\}_{j=1}^m$. Đặt $U = \bigcap_{j=1}^m U^{y_j}$, $V = \bigcup_{j=1}^m V_{y_j}$ ta được các tập mở rời nhau U chứa A và V chứa B . Vậy X là chuẩn tắc. ■

2.9.6. Hệ quả

Không gian tôpô X là $T_{3\frac{1}{2}}$ - không gian nếu và chỉ nếu nó đồng phôi với một không gian con của không gian Hausdorff compact.

Chứng minh

($\Rightarrow$) Đặt $\mathcal{H} = C(X, [0, 1])$. Vì X là $T_{3\frac{1}{2}}$ - không gian nên ta dễ dàng suy ra $\mathcal{H}$ tách các điểm đồng thời tách điểm và tập đóng theo Định nghĩa 1.8.1. Theo Định lý 1.8.2 ta có X đồng phôi với $e(X) \subset [0, 1]^{\mathcal{H}}$ với $[0, 1]^{\mathcal{H}}$ là không gian compact (theo Định lý Tikhonov) và Hausdorff.

($\Leftarrow$) Do không gian con của $T_{3\frac{1}{2}}$ - không gian là $T_{3\frac{1}{2}}$ - không gian nên chiều ngược này suy từ Định lý 2.9.5 và Nhận xét 2.9.4. ■

2.9.7. Hệ quả

Không gian Hausdorff compact địa phương là $T_{3\frac{1}{2}}$ - không gian.

Chứng minh

Giả sử X là không gian Hausdorff compact địa phương, $x \in X$ và F là tập con đóng của X , $x \notin F$. Theo Nhận xét 2.5.2 ta chỉ cần chứng minh X hoàn toàn chính quy. Từ Định lý 2.5.7 a), tồn tại lân cận compact N của x sao cho $N \subset X \setminus F$. Do N chuẩn tắc (theo Định lý 2.9.5) nên tồn tại hàm liên tục

$f: N \rightarrow [0,1]$ sao cho $f(x)=0$ và $f(y)=1$ với mọi $y \in bN$. Mở rộng f thành hàm $\tilde{f}: X \rightarrow [0,1]$ bằng cách đặt $\tilde{f}(y)=1$ với mọi $y \in X \setminus N$. Ta sẽ chứng minh $\tilde{f}$ liên tục. Thật vậy, với mọi tập con đóng E của $[0,1]$ ta có

$$\tilde{f}^{-1}(E) = \begin{cases} f^{-1}(E) & \text{nếu } 1 \notin E \\ f^{-1}(E) \cup (X \setminus N^0) & \text{nếu } 1 \in E \end{cases}$$

Do $f^{-1}(E)$ đóng trong X nên $\tilde{f}^{-1}(E)$ đóng trong X . Vậy $\tilde{f}$ liên tục. ■

2.9.8. Định lý

Mọi không gian chính quy thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai là không gian chuẩn tắc. Hơn nữa nếu X là T_3 -không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai thì X khả metric.

Chứng minh

Giả sử X là không gian chính quy có cơ sở đếm được $\mathcal{B}$. Gọi A và B là các tập con đóng rời nhau của X . Với mỗi $x \in A$, tồn tại $U \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in U \subset \overline{U} \subset X \setminus B$. Kí hiệu $\{U_n\}$ là dãy các phần tử trong $\mathcal{B}$ sao cho $\overline{U_n} \subset X \setminus B$. Khi đó hiển nhiên $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Tương tự ta có dãy $\{V_n\}$ các phần tử của $\mathcal{B}$ sao cho $\overline{V_n} \subset X \setminus A$ và $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Đặt

$$P_1 = U_1 ; \quad Q_1 = V_1 \setminus \overline{P_1}$$

$$P_2 = U_2 \setminus \overline{Q_1} ; \quad Q_2 = V_2 \setminus (\overline{P_1} \cup \overline{P_2})$$

.....

$$P_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{Q_i} ; \quad Q_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{P_i}$$

.....

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n ; \quad Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$$

ta có P và Q là các tập mở không có điểm chung sao cho $A \subset P$ và $B \subset Q$.

Thật vậy, mọi P_n và Q_n mở nên P và Q mở. Nếu $n \leq m$ thì

$$Q_m = V_m \setminus \bigcup_{i=1}^m \overline{P_i} \subset V_m \setminus \overline{P_n},$$

nếu $n > m$ thì
$$P_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{Q_i} \subset U_n \setminus \overline{Q_m},$$

do đó $P_n \cap Q_m = \emptyset$ với mọi m, n , tức là $P \cap Q = \emptyset$. Nếu $x \in A$ thì $x \in U_{n_0}$. Do $\overline{V_i} \subset X \setminus A$ nên $x \notin \overline{V_i}$ với mọi i , từ đó $x \notin \overline{Q_i}$ với mọi i và $x \in U_{n_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{n_0-1} \overline{Q_i} = P_{n_0}$. Vậy $x \in P$ và $A \subset P$. Tương tự ta có $B \subset Q$. Vậy X chuẩn tắc.

Bây giờ giả sử X là T_3 -không gian có cơ sở đếm được $\mathcal{B}$. Ta chứng minh X khả metric. Với mọi $x \in X$ và mọi tập con đóng F của X không chứa x tồn tại $U, V \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in U \subset \overline{U} \subset V \subset X \setminus F$.

Họ các cặp (U, V) của $\mathcal{B}$ thỏa mãn hệ thức trên là đếm được, ta viết chúng thành dãy $\{(U_n, V_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Do X chuẩn tắc nên với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại hàm $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in U_n$ và $f(x) = 1$ với mọi $x \notin V_n$. Rõ ràng họ $\mathcal{H} = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tách các điểm đồng thời tách điểm và tập đóng của X .

Trên $[0, 1]$ xét tôpô thông thường. Theo Định lý 1.7.3, $[0, 1]^{\mathcal{H}}$ là không gian khả metric với metric $\rho(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |s_n - t_n|$, ở đây với mọi $p \in [0, 1]^{\mathcal{H}}$ và $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $p_n = \pi_{f_n}(p)$.

Theo Định lý 1.8.2, ánh xạ

$$e: X \rightarrow [0,1]^{\mathcal{H}}$$

là phép đồng phôi X lên $e(X) \subset [0,1]^{\mathcal{H}}$. Vì $e(X)$ là khả metric (với metric ρ) nên X là không gian khả metric.

Do $e: X \rightarrow e(X)$ là phép đồng phôi nên đặt

$$d(x, y) = \rho(e(x), e(y))$$

với mọi $x, y \in X$ ta được một metric trên X sinh ra tôpô xuất phát trên X .

Mặt khác ta lại có

$$\rho(e(x), e(y)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|$$

nên
$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|$$

là metric xác định tôpô trên X . ■

2.9.9. Định lý

Không gian tôpô X là T_4 -không gian khi và chỉ khi X là T_1 -không gian và mọi tập con đóng A, B của X , $A \cap B = \emptyset$, tồn tại một hàm liên tục $f: X \rightarrow [0,1]$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in A$ và $f(x) = 1$ với mọi $x \in B$.

Chứng minh

($\Rightarrow$) Hiển nhiên (suy ra từ Định lý 2.9.2)

($\Leftarrow$) Giả sử X có tính chất đã nêu. Để chứng minh X là T_4 -không gian, ta chỉ cần chứng minh X chuẩn tắc. Gọi A, B là hai tập đóng khác rỗng, rời nhau của X . Khi đó, tồn tại hàm liên tục $f: X \rightarrow [0,1]$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in A$ và $f(x) = 1$ với mọi $x \in B$.

Đặt $U = \left\{x \in X : 0 \leq f(x) < \frac{1}{2}\right\}$, $V = \left\{x \in X : \frac{1}{2} < f(x) \leq 1\right\}$. Khi đó ta có

U, V là các lân cận của A và B tương ứng. Mặt khác vì $\left[0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ là các tập mở rời nhau của $[0, 1]$ và f liên tục nên U, V là các tập mở rời nhau của X . Suy ra X chuẩn tắc. Vậy X là T_4 - không gian. ■

2.9.10. Định lý

Không gian tôpô X là T_4 - không gian khi và chỉ khi X là T_1 - không gian và mọi tập đóng F trong X , mọi lân cận V tùy ý của F đều chứa một lân cận đóng của F .

Chứng minh

($\Rightarrow$) Giả sử X là T_4 - không gian. Hiển nhiên X là T_1 - không gian. Với mọi F đóng trong X và V là một lân cận tùy ý của F trong X , ta có thể giả sử V mở. Khi đó $X \setminus V$ đóng. Do $F \subset V$ nên $F \cap (X \setminus V) = \emptyset$. Vì X là T_4 - không gian nên tồn tại hai tập mở rời nhau G, H chứa F và $X \setminus V$ tương ứng. Ta có $G \cap H = \emptyset$, $X \setminus V \subset H$ suy ra $F \subset G \subset X \setminus H \subset V$. Do $X \setminus H$ đóng nên suy ra $F \subset G \subset \overline{G} \subset X \setminus H \subset V$. Vậy $\overline{G}$ là một lân cận đóng của F nằm trong V .

($\Leftarrow$) Giả sử điều kiện của định lý được thỏa. Để chứng minh X là T_4 - không gian, ta chỉ cần chứng minh X chuẩn tắc. Gọi A, B là hai tập đóng tùy ý rời nhau của X . Khi đó $X \setminus B$ là lân cận mở của A . Theo giả thiết, tồn tại một lân cận đóng E của A sao cho $A \subset E \subset X \setminus B$. Ta có E là lân cận của A , $X \setminus E$ là một lân cận của B và $E \cap (X \setminus E) = \emptyset$. Vậy X chuẩn tắc. ■

2.10. T_5 -không gian

2.10.1. Định nghĩa

Không gian tôpô X gọi là hoàn toàn chuẩn tắc nếu mọi tập con A, B tách nhau của X đều tồn tại các lân cận (mở) U và V của A và B tương ứng sao cho $U \cap V = \emptyset$.

Từ định nghĩa ta có nhận xét sau

2.10.2. Nhận xét

Nếu không gian X hoàn toàn chuẩn tắc thì X chuẩn tắc.

2.10.3. Định nghĩa

Không gian tôpô X gọi là thỏa mãn tiên đề T_5 hay T_5 -không gian nếu nó hoàn toàn chuẩn tắc và T_1 -không gian.

Từ Nhận xét 2.10.2 và Định nghĩa 2.10.3 ta có

2.10.4. Nhận xét

Nếu X là T_5 -không gian thì X là T_4 -không gian.

2.10.5. Định lý

Không gian tôpô X là T_5 -không gian khi và chỉ khi mọi không gian con của X đều là T_4 -không gian.

Chứng minh

($\Rightarrow$) Giả sử X là T_5 -không gian, ta sẽ chứng minh mọi không gian con của X không chỉ là T_4 -không gian mà còn là T_5 -không gian.

Giả sử Y là không gian con tùy ý của X . Với mọi $a \in Y$ suy ra $a \in X$. Do X là T_1 -không gian nên $\{a\}$ đóng trong X , suy ra $\{a\} = \{a\} \cap Y$ đóng trong Y . Do đó Y là T_1 -không gian.

Mặt khác, giả sử A, B là các tập con của Y thỏa $A \cap \overline{B_{\tau_Y}} = \emptyset$ và $B \cap \overline{A_{\tau_Y}} = \emptyset$ ($\overline{A_{\tau_Y}}, \overline{B_{\tau_Y}}$ là bao đóng của A, B tương ứng trong Y). Khi đó ta có $A \cap \overline{B} = (A \cap Y) \cap \overline{B} = A \cap (Y \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B_{\tau_Y}} = \emptyset$. Và tương tự ta cũng có $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Vì X hoàn toàn chuẩn tắc nên tồn tại các tập mở U, V trong X chứa A, B tương ứng thỏa $U \cap V = \emptyset$. Khi đó $U \cap Y$ và $V \cap Y$ là các tập con mở trong Y chứa A, B tương ứng thỏa $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$. Vậy Y hoàn toàn chuẩn tắc. Vậy Y là T_5 -không gian.

($\Leftarrow$) Giả sử mọi không gian con của X đều là T_4 -không gian. Ta chứng minh X là T_5 -không gian.

Thật vậy, vì X là không gian con của X nên X là T_4 -không gian. Do đó X là T_1 -không gian.

Mặt khác, giả sử A, B là các tập con của X thỏa $A \cap \overline{B} = \emptyset$ và $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Đặt $Y = X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B})$. Khi đó $Y \cap \overline{A}, Y \cap \overline{B}$ là các tập đóng trong Y thỏa $(Y \cap \overline{A}) \cap (Y \cap \overline{B}) = Y \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \emptyset$. Do (Y, τ_Y) chuẩn tắc nên tồn tại các tập mở rời nhau U, V trong Y chứa $Y \cap \overline{A}$ và $Y \cap \overline{B}$ tương ứng. Vì Y mở trong X nên U, V cũng mở trong X . Hơn nữa, vì $A \cap \overline{B} = \emptyset$ nên $A \subset X \setminus \overline{B}$. Suy ra $A = A \cap (X \setminus \overline{B}) \subset \overline{A} \cap (X \setminus \overline{B}) = \overline{A} \cap Y \subset U$. Tương tự ta cũng có $B \subset V$. Do đó X hoàn toàn chuẩn tắc. Vậy X là T_5 -không gian. ■

2.10.6. Định lý

Nếu X là T_i -không gian thì X là T_j -không gian với mọi $i < j$,

$$i, j \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5 \right\}$$

Chứng minh

Ta có đã có

- $T_{\frac{1}{2}} \Rightarrow T_0$ (Hệ quả 2.2.4)
- $T_1 \Rightarrow T_{\frac{1}{2}}$ (Hệ quả 2.3.3)
- $T_{\frac{1}{2}} \Rightarrow T_1$ (Nhận xét 2.4.2)
- $T_2 \Rightarrow T_{\frac{1}{2}}$ (Định lý 2.5.6)
- $T_{\frac{2}{2}} \Rightarrow T_2$ (Suy ra từ Nhận xét 2.6.2)
- $T_5 \Rightarrow T_4$ (Suy ra từ Nhận xét 2.10.2)

Bây giờ ta chứng minh

- $T_3 \Rightarrow T_{\frac{2}{2}}$

Giả sử X là T_3 - không gian và $a, b \in X, a \neq b$. Khi đó ta có $X \setminus \{b\}$ là lân cận mở của a . Theo Định lý 2.7.3, tồn tại lân cận U của a sao cho $U \subset \overline{U} \subset X \setminus \{b\}$. Khi đó ta cũng có $X \setminus \overline{U}$ là lân cận mở của b nên tồn tại lân cận V của b sao cho $V \subset \overline{V} \subset X \setminus \overline{U}$. Suy ra U, V là các lân cận của a, b tương ứng thỏa $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Vậy X là $T_{\frac{2}{2}}$ - không gian.

- $T_{\frac{3}{2}} \Rightarrow T_3$

Giả sử X là $T_{\frac{3}{2}}$ - không gian, $a \in X$ và B là tập con đóng của X không chứa a . Khi đó tồn tại hàm liên tục $f: X \rightarrow [0,1]$ sao cho $f(a)=0$ và

$f(x)=1$ với mọi $x \in B$. Đặt $U = \left\{x: f(x) < \frac{1}{2}\right\}, V = \left\{x: f(x) > \frac{1}{2}\right\}$. Ta có $U,$

V là các tập con mở rời nhau chứa a và B tương ứng. Vậy X là T_3 -không gian.

$$\bullet \quad T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$$

Giả sử X là T_4 -không gian, $a \in X$ và B là tập con đóng của X không chứa a . Do $\{a\}$ và B là các tập con đóng rời nhau trong X nên theo Định lý Urysohn, tồn tại hàm liên tục $f: X \rightarrow [0,1]$ sao cho $f(a)=0$ và $f(x)=1$ với mọi $x \in B$. Vậy X là $T_{3\frac{1}{2}}$ -không gian. ■

2.10.7. Định lý

Mọi không gian metric là T_i -không gian với mọi $i \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5\right\}$.

Chứng minh

Giả sử X là không gian metric. Theo Định lý 2.10.6 ta chỉ cần chứng minh X là T_5 -không gian.

Thật vậy, xét tôpô sinh bởi metric tương ứng. Hiển nhiên X là T_1 -không gian. Giả sử A, B là hai tập con tách nhau của X . Lấy a là một điểm tùy ý của A . Do $A \cap \overline{B} = \emptyset$ nên $a \in A \subset X \setminus \overline{B}$. Vì $X \setminus \overline{B}$ mở nên tồn tại $r_a > 0$ sao cho $B(a, r_a) \subset X \setminus \overline{B}$. Đặt $U = \bigcup_{a \in A} B\left(a, \frac{1}{2}r_a\right)$. Khi đó U là tập mở chứa A .

Tương tự, nếu b là một điểm tùy ý của B thì tồn tại $s_b > 0$ sao cho $B(b, s_b) \subset X \setminus \overline{A}$ và $V = \bigcup_{b \in B} B\left(b, \frac{1}{2}s_b\right)$ là một tập mở chứa B . Ta sẽ chứng minh $U \cap V = \emptyset$.

Thật vậy, giả sử ngược lại có $x \in U \cap V$ thì sẽ tồn tại các điểm $a \in A$ và $b \in B$ sao cho $x \in B\left(a, \frac{1}{2}r_a\right) \cap B\left(b, \frac{1}{2}s_b\right)$. Do đó

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{1}{2}r_a + \frac{1}{2}s_b \leq \max\{r_a, s_b\}$$

Suy ra $a \in B(b, s_b)$ hoặc $b \in B(a, r_a)$, mâu thuẫn với giả thiết A, B tách nhau. Vậy X hoàn toàn chuẩn tắc và do đó là T_5 -không gian. ■

2.11. Các ví dụ

2.11.1. Tồn tại T_0 -không gian nhưng không là $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian

Giả sử $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$. Dễ kiểm tra (X, τ) là T_0 -không gian. Nhưng nó không là $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian vì tập con $\{a, c\}$ là tập g -đóng nhưng không là tập đóng. ■

2.11.2. Tồn tại $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian nhưng không là T_1 -không gian

Giả sử $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Dễ thấy (X, τ) không là T_1 -không gian. Nhưng nó là $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian vì các tập con g -đóng của X là $\emptyset, \{b\}, X$ đều là tập đóng. ■

2.11.3. Tồn tại T_1 -không gian nhưng không là $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian

Giả sử X là một tập vô hạn. Trên X xét tôpô có phần bù hữu hạn (hay tôpô Zariski), tức là tôpô gồm tập rỗng và tất cả các tập con của X có phần bù hữu hạn.

Mọi $a \in X$ thì $X \setminus \{a\}$ là tập mở nên $\{a\}$ là tập đóng. Vậy X là T_1 -không gian. Dễ thấy mọi tập con vô hạn của X đều trù mật trong X .

Ta sẽ kiểm tra rằng mọi tập con K của X đều compact. Thật vậy, nếu K là tập hữu hạn thì hiển nhiên K compact. Nếu K vô hạn thì xét phủ mở bất kỳ $\{G_i\}_{i \in I}$ của K . Chọn $i_0 \in I$ sao cho $G_{i_0} \cap K \neq \emptyset$. Do $X \setminus G_{i_0}$ là tập hữu hạn nên $J = K \cap (X \setminus G_{i_0})$ là tập hữu hạn. Mọi $j \in J$ chọn $i_j \in I$ sao cho $j \in G_{i_j}$. Khi đó $\{G_{i_j}\}_{j \in J} \cup \{G_{i_0}\}$ là phủ con hữu hạn của K . Vậy K compact.

Chọn K_0 là tập vô hạn của X sao cho $X \setminus K_0$ cũng là tập vô hạn. Ta có K_0 là tập compact nhưng không đóng, tức X không là $T_{\frac{1}{2}}$ – không gian. ■

2.11.4. Tồn tại $T_{\frac{1}{2}}$ - không gian nhưng không là T_2 - không gian

Giả sử X là tập không đếm được với tôpô có phần bù đếm được, tức là tôpô gồm tập rỗng và tất cả các tập con của X có phần bù (không quá) đếm được.

Dễ dàng thấy rằng X không là T_2 – không gian. Ta sẽ chỉ ra X là $T_{\frac{1}{2}}$ – không gian.

Giả sử A là tập con vô hạn bất kỳ của X . Chọn dãy $\{x_n\}$ các điểm phân biệt trong A . Đặt $G_n = X \setminus \{x_k : k \in \mathbb{N}, k \neq n\}$. Ta có $\{G_n\}$ là phủ mở của A không có phủ con hữu hạn. Do đó A không compact.

Từ chứng minh trên suy ra tập con K của X compact khi và chỉ khi K là tập hữu hạn. Do đó mọi tập con compact của X đều đóng hay X là $T_{\frac{1}{2}}$ – không gian. ■

2.11.5. Tồn tại T_2 -không gian nhưng không là $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian

Giả sử $X = S \cup \{(0,0), (1,0)\}$ trong đó S là tập các điểm trong của hình vuông đơn vị. Các điểm thuộc S có cơ sở lân cận địa phương thông thường. Các điểm $(0,0)$, $(1,0)$ có cơ sở lân cận địa phương tương ứng là các tập dạng

$$U_n(0,0) = \{(0,0)\} \cup \left\{ (x,y) \mid 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{n} \right\},$$

$$U_m(1,0) = \{(1,0)\} \cup \left\{ (x,y) \mid \frac{1}{2} < x < 1, 0 < y < \frac{1}{m} \right\}.$$

Dễ thấy X là không gian Hausdorff. Nhưng X không hoàn toàn Hausdorff vì $(0,0)$ và $(1,0)$ không có các lân cận đóng rời nhau. ■

2.11.6. Tồn tại $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian nhưng không là T_3 -không gian

Trên tập $X = [0,1]$, xét tôpô τ có cơ sở là họ các tập mở của $(0,1]$ với tôpô thông thường và các tập dạng $B_a = [0,a) \setminus \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ với mọi a ,

$0 < a \leq 1$. Khi đó (X, τ) là $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian. Ta sẽ chỉ ra (X, τ) không là T_3 -

không gian. Theo Định lý 2.7.3 ta sẽ chỉ ra lân cận $V = [0,1] \setminus \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ của

0 không chứa bất kỳ lân cận đóng nào. Thật vậy, U là lân cận bất kỳ của 0, $U \subset V$ đều tồn tại $a > 0$ sao cho $B_a \subset U$. Chọn n_0 đủ lớn sao cho $\frac{1}{n_0} < a$.

Khi đó $\frac{1}{n_0} \in \overline{U}$ nhưng $\frac{1}{n_0} \notin V$. Do đó $\overline{U} \not\subset V$. ■

2.11.7. Tồn tại T_3 - không gian nhưng không là $T_{\frac{3}{2}}$ - không gian

Giả sử M_0 là tập con của nửa mặt phẳng trên $P = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$ và z_0 là điểm có tọa độ $(0, -1)$. Đặt $M = M_0 \cup \{z_0\}$, L là đường thẳng thực $L = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ và $L_i = \{(x, 0) \in L | i-1 \leq x \leq i\}, i = 1, 2, \dots$. Ta sẽ xây dựng để M là T_3 - không gian nhưng không là $T_{\frac{3}{2}}$ - không gian.

Với mỗi $z \in M$

Nếu $z = (x, 0) \in L$, ta kí hiệu $A_1(z) = \{(x, y) \in M_0 | 0 \leq y \leq 2\}$,

$$A_2(z) = \{(x+y, y) \in M_0 | 0 \leq y \leq 2\},$$

và đặt $B(z)$ là họ các tập có dạng $(A_1(z) \cup A_2(z)) \setminus B$, trong đó B là tập hữu hạn không chứa z .

Nếu $z \in M_0 \setminus L$, đặt $B(z) = \{\{z\}\}$.

Nếu $z \equiv z_0$, đặt $B(z) = \{U_i(z_0)\}_{i=1}^{\infty}$, trong đó

$$U_i(z_0) = \{z_0\} \cup \{(x, y) \in M_0 | x \geq i\}.$$

Ta có họ $\{B(z)\}_{z \in M}$ thỏa mãn các tính chất sau

(B1) Với mỗi $z \in M, B(z) \neq \emptyset$; với mỗi $U \in B(z), z \in U$.

(B2) Nếu $u \in U \in B(v)$ tồn tại $V \in B(v)$ sao cho $V \subset U$.

(B3) Với mọi $U_1, U_2 \in B(z)$ tồn tại $U \in B(z)$ sao cho $U \subset U_1 \cap U_2$.

(B4) Với mọi $u, v \in M, u \neq v$ tồn tại $U \in B(u), V \in B(v)$ sao cho

$$U \cap V = \emptyset.$$

Từ đó ta dễ kiểm tra không gian M với tôpô sinh bởi hệ lân cận $\{B(z)\}_{z \in M}$ là không gian Hausdorff. Do đó M cũng là T_1 - không gian.

- Chứng minh M chính quy

Trước tiên ta chú ý rằng M là không gian Hausdorff và với mỗi $z \in M_0$, họ $B(z)$ là các tập vừa đóng vừa mở của M . Do đó, để chứng minh M chính quy ta chỉ cần chứng minh với mọi tập con đóng F của M không chứa z_0 , tồn tại các tập mở U_1, U_2 thỏa $z_0 \in U_1, F \subset U_2$ và $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Thật vậy, với mỗi tập đóng $F \subset M$ không chứa z_0 , chọn $U_{i_0}(z_0)$ sao cho $F \cap U_{i_0}(z_0) = \emptyset$. Đặt $U_1 = U_{i_0+2}(z_0)$, $U_2 = M \setminus (U_{i_0+2} \cup L_{i_0} \cup L_{i_0+1})$. Ta có U_1, U_2 là các lân cận cần tìm.

- Chứng minh M không hoàn toàn chính quy

Xét hàm liên tục $f: M \rightarrow [0, 1]$ thỏa mãn $f(L_1) = 0$. Ta sẽ chứng minh $f(z_0) = 0$. Trước tiên ta sẽ chứng minh các tập $K_i = \{z \in L_i \mid f(z) = 0\}$, $i = 1, 2, \dots$ là vô hạn.

Thật vậy, ta có $K_1 = L_1$ là tập vô hạn. Giả sử $|K_n| \geq \aleph_0$ ($\aleph_0$ là lực lượng của tập đếm được). Xét tập vô hạn đếm được $K'_n \subset K_n$. Với mỗi $z \in K'_n$, tồn tại tập đếm được $A_0(z) \subset A_2(z)$ sao cho $f(A_2(z) \setminus A_0(z)) = \{0\}$. Hình chiếu A của hợp $\bigcup \{A_0(z) \mid z \in K'_n\}$ lên L là đếm được. Bây giờ với mỗi $t \in L_{n+1}$, tập $A_1(t)$ cắt một trong các tập $A_2(z) \setminus A_0(z)$ với $z \in K'_n$ và do f liên tục nên $f(t) = 0$. Kéo theo $L_{n+1} \setminus A \subset K_{n+1}$. Do vậy $|K_{n+1}| \geq \aleph_0$. Vậy $K_i = \{z \in L_i \mid f(z) = 0\}$, $i = 1, 2, \dots$ là tập vô hạn.

Từ tính vô hạn của các tập $K_i = \{z \in L_i \mid f(z) = 0\}$, $i = 1, 2, \dots$ và tính liên tục của f , ta suy ra $f(z_0) = 0$. Do vậy M không hoàn toàn chính quy. ■

2.11.8. Tồn tại $T_{\frac{3}{2}}$ - không gian nhưng không là T_4 - không gian

Đặt $X = P \cup L$, trong đó $P = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ là nửa mặt phẳng trên và $L = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ là đường thẳng thực. Trên X ta xét tôpô τ^* gồm các tập con mở của P đối với tôpô thông thường τ và các tập dạng $\{x\} \cup D$, trong đó $x \in L$, D là đĩa mở trong P tiếp xúc với L tại x .

Ta có không gian (X, τ^*) là mở rộng của không gian con với tôpô thông thường τ trên X .

Thật vậy, giả sử $U \subset X$, U mở với tôpô thông thường và $x \in U$.

Nếu $x \in P$, tồn tại lân cận V của x mở theo τ sao cho $V \subset U$. Do đó V mở theo τ^* .

Nếu $x \in L$, tồn tại đĩa Δ tâm x , bán kính r , mở trong toàn bộ mặt phẳng, $\Delta \cap X \subset U$. Khi đó, tồn tại đĩa $\Delta_1 \subset P$ bán kính $\frac{r}{2}$, tiếp xúc với L tại x . Vì $\Delta_1 \subset \Delta \cap P$ và $x \in U$ nên $(\{x\} \cup \Delta_1) \subset U$.

Từ đó ta dễ kiểm tra X là T_1 - không gian.

Ta chứng minh (X, τ^*) hoàn toàn chính quy. Giả sử A là tập τ^* - đóng và $b \notin A$.

Nếu $b \in P$ thì tồn tại lân cận mở U của b , $U \subset P$ sao cho $U \subset X \setminus A$. Vì U cũng mở trong τ nên $X \setminus U$ đóng trong τ . Vì (X, τ) là hoàn toàn chính quy nên tồn tại hàm liên tục $f: X \rightarrow [0, 1]$ sao cho $f(b) = 0$ và $f(x) = 1, \forall x \in X \setminus U$. Do đó, vì $\tau \subset \tau^*$ nên f cũng liên tục với τ^* và $f(b) = 0$ và $f(x) = 1, \forall x \in A$.

Nếu $b \in L$ thì tồn tại đĩa Δ bán kính δ , tiếp xúc với L tại b và $\Delta \cap A = \emptyset$. Ta định nghĩa hàm f như sau:

$$f : X \rightarrow [0,1]$$

$$f(b) = 0,$$

$$f(x) = 1, \forall x \notin \Delta \cup \{b\}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - b)^2 + x_2^2}{2\delta x_2}, \forall (x_1, x_2) \in \Delta$$

Ta có f liên tục vì $f^{-1}([0, \alpha)) = \{b\} \cup D_\alpha$, $f^{-1}((\alpha, 1]) = X \setminus \overline{D_\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) và $f^{-1}((\alpha, \beta)) = D_\beta \setminus \overline{D_\alpha}$ ($0 < \alpha < \beta < 1$) là các tập mở, với D_α là đĩa bán kính $\delta\alpha$ tiếp xúc với L tại b và D_β là đĩa bán kính $\delta\beta$ tiếp xúc với L tại b .

Suy ra (X, τ^*) hoàn toàn chính quy. Vậy (X, τ^*) là $T_{3\frac{1}{2}}$ -không gian.

Bây giờ ta chứng minh X không chuẩn tắc.

Gọi Q và I lần lượt là tập các số hữu tỷ và vô tỷ trên L . Ta có I và Q là các tập đóng. Giả sử U, V là các lân cận mở của Q và I tương ứng.

Với mọi $x \in V$ tồn tại đĩa $D_x \subset V$ bán kính r_x , tiếp xúc với L tại x .

Đặt $S_n = \left\{ x \in I \mid r_x > \frac{1}{n} \right\}$. Khi đó $\{S_n\} \cup \{\{x\}\}_{x \in Q}$ tạo thành một phủ của

không gian (L, τ) . Vì không gian (L, τ) thuộc phạm trù thứ hai nên tồn tại S_{n_0} nào đó không là tập không đâu trù mật trong (L, τ) . Do đó tồn tại n_0 sao cho $(a, b) = \overline{S_{n_0}}$. Suy ra mọi lân cận của số hữu tỷ $x \in (a, b)$ đều có giao với V . Kéo theo $U \cap V \neq \emptyset$. Vậy X không chuẩn tắc nên nó không là T_4 -không gian. ■

2.11.9. Tồn tại T_4 - không gian nhưng không là T_5 - không gian

Xét không gian $P = [0, \Omega] \times [0, \omega]$, trong đó Ω là tự số không đếm được đầu tiên, ω là tự số vô hạn đầu tiên. Trên các không gian $[0, \Omega], [0, \omega]$ ta xét tôpô thứ tự.

Vì không gian $[0, \Gamma]$ (với Γ là một tự số giới hạn nào đó) là compact và Hausdorff nên P cũng compact và Hausdorff. Do đó theo Định lý 2.9.5 ta có P là T_4 - không gian.

Ta chứng minh P không là T_5 - không gian.

Vì $P_\infty = P \setminus \{(\Omega, \omega)\}$ không là T_4 - không gian nên theo Định lý 2.10.5 ta có P không là T_5 - không gian.

Thật vậy, đặt $A = \{(\Omega, n) \mid 0 \leq n < \omega\}$, $B = \{(\alpha, \omega) \mid 0 \leq \alpha < \Omega\}$

Ta có A, B là các tập con đóng trong P_∞ (vì phần bù của chúng mở trong P_∞). Gọi U, V là các lân cận của A và B tương ứng trong P_∞ .

Với mỗi $(\Omega, n) \in A$, tồn tại tự số $\alpha_n < \Omega$ sao cho $\{(\alpha, n) \mid \alpha_n < \alpha \leq \Omega\} \subset U$. Nếu $\bar{\alpha}$ là một biên chặn trên của các α_n thì $\bar{\alpha} < \Omega$. Suy ra $(\bar{\alpha}, \Omega] \times (0, \omega] \subset U$. Suy ra mọi lân cận của điểm $(\bar{\alpha} + 1, \omega)$ đều có giao với U . Vì $(\bar{\alpha} + 1, \omega) \in B$ nên $V \cap U \neq \emptyset$. Vậy P_∞ không chuẩn tắc nên nó không là T_4 - không gian. ■

CHƯƠNG 3

ĐỊNH LÝ MATHERON

3.1. Tôpô miss-and-hit và định lý Matheron

3.1.1. Định nghĩa

Cho X là một không gian tôpô. Ký hiệu $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}$ lần lượt là họ các tập con đóng, các tập con compac và các tập con mở của X tương ứng.

Với mọi $A \subset E$, đặt

$$\mathcal{F}_A = \{F : F \in \mathcal{F}, F \cap A \neq \emptyset\}; \quad \mathcal{F}^A = \{F : F \in \mathcal{F}, F \cap A = \emptyset\}$$

Với mọi $K \in \mathcal{K}$ và mọi họ hữu hạn $G_1, G_2, \dots, G_n \in \mathcal{G}$, đặt

$$\mathcal{F}_{G_1, G_2, \dots, G_n}^K = \mathcal{F}^K \cap \mathcal{F}_{G_1} \cap \mathcal{F}_{G_2} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{G_n}$$

Để dàng thấy rằng với mọi $K \in \mathcal{K}$, $G_1, G_2, \dots, G_n \in \mathcal{G}$

$$\mathcal{F}_G = \mathcal{F}_G^\emptyset, \quad \emptyset = \mathcal{F}_\emptyset$$

$$\mathcal{F}^K = \begin{cases} \mathcal{F}_X^K \cup \{\emptyset\} & \text{nếu } K \neq \emptyset \\ \mathcal{F} & \text{nếu } K = \emptyset \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{G_1} \cap \mathcal{F}_{G_2} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{G_n} = \mathcal{F}_{G_1, G_2, \dots, G_n}^\emptyset$$

do đó họ

$$\{\mathcal{F}_{G_1, G_2, \dots, G_n}^K \mid K \in \mathcal{K}, G_1, G_2, \dots, G_n \in \mathcal{G}, n \in \mathbb{N}\}$$

là cơ sở của tôpô trên $\mathcal{F}$. Ta gọi tôpô này là *tôpô miss-and-hit* trên $\mathcal{F}$ và $\mathcal{F}$ với tôpô này gọi là *không gian miss-and-hit* của X .

Chú ý

Ta có $\mathcal{F}_A$ là lớp các tập đóng có giao với A (trúng A) nguyên từ gốc là “*hit* A ” và $\mathcal{F}^A$ là lớp các tập đóng còn lại tức là không có giao với A hay

rời A (không trùng A) nguyên từ gốc là “*miss A*”. Từ đó người ta gọi tôpô xác định bởi cơ sở

$$\left\{ \mathcal{F}_{G_1, G_2, \dots, G_n}^K = \mathcal{F}^K \cap \mathcal{F}_{G_1} \cap \mathcal{F}_{G_2} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{G_n} \mid K \in \mathcal{K}, G_1, G_2, \dots, G_n \in \mathcal{G}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

là tôpô *miss-and-hit*.

3.1.2. Định lý (Định lý Matheron nguyên thủy)

Cho X là không gian compact địa phương, khả metric, đầy đủ và khả ly. Khi đó không gian miss-and-hit $\mathcal{F}$ của X là compact, khả ly và Hausdorff.

Chú ý

Định lý Matheron cho ta ba kết quả chính là tính compact, tính khả ly và tính Hausdorff của không gian miss-and-hit. Bằng cách tách riêng từng kết quả, ta sẽ từng bước mở rộng định lý Matheron và sẽ đi đến một định lý có thể xem là tổng quát của định lý Matheron.

3.2. Các mở rộng của định lý Matheron

3.2.1. Mệnh đề

Cho X là không gian tôpô tùy ý. Khi đó không gian miss-and-hit của X là T_1 - không gian và compact.

Chứng minh

Lấy $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \neq F_2$. Ta có thể giả thiết $F_2 \setminus F_1 \neq \emptyset$. Chọn $x \in F_2 \setminus F_1$. Khi đó $U_{F_1} = \mathcal{F}^{\{x\}}$, $U_{F_2} = \mathcal{F}_{X \setminus F_1}^\emptyset$ là các lân cận của F_1 và F_2 tương ứng thỏa mãn $F_2 \notin U_{F_1}$ và $F_1 \notin U_{F_2}$. Vậy $\mathcal{F}$ là T_1 - không gian.

Để chứng minh $\mathcal{F}$ compact, theo bổ đề Alexandrov ta chỉ cần chứng minh mọi phủ của $\mathcal{F}$ dạng $\left\{ \mathcal{F}^{K_i} : K_i \in \mathcal{K}, i \in I \right\} \cup \left\{ \mathcal{F}_{G_j} : G_j \in \mathcal{G}, j \in J \right\}$ có phủ con hữu hạn.

Đặt $\Omega = \bigcup_{j \in J} G_j$. Khi đó Ω mở. Vì

$$\mathcal{F} = \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}^{K_i} \right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} \mathcal{F}_{G_j} \right)$$

nên

$$\begin{aligned} \emptyset &= \left(\bigcap_{i \in I} (\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^{K_i}) \right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} (\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{G_j}) \right) \\ &= \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_{K_i} \right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_{G_j} \right) \\ &= \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_{K_i} \right) \cap \mathcal{F}^\Omega \\ &= \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_{K_i}^\Omega \end{aligned}$$

Từ đó tồn tại $i_0 \in I$ sao cho $K_{i_0} \subset \Omega$. Thật vậy, nếu trái lại thì $(X \setminus \Omega) \cap K_i \neq \emptyset$ với mọi $i \in I$ nên $X \setminus \Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_{K_i}^\Omega$ là một điều mâu thuẫn.

Do K_{i_0} compắc nên tồn tại $\{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subset J$ sao cho $\{G_{j_1}, G_{j_2}, \dots, G_{j_n}\}$ phủ K_{i_0} . Với mọi $F \in \mathcal{F}$ thì $F \cap K_{i_0} = \emptyset$ hoặc $F \cap G_{j_k} \neq \emptyset$ với k nào đó thuộc $\{1, 2, \dots, n\}$. Do đó $F \in \mathcal{F}^{K_{i_0}} \cup \mathcal{F}_{G_{j_1}} \cup \dots \cup \mathcal{F}_{G_{j_n}}$. ■

3.2.2. Mệnh đề

Cho X là $T_{\frac{1}{2}}$ - không gian khả ly. Khi đó không gian miss-and-hit của X là khả ly.

Chứng minh

Giả sử A là tập con trù mật trong X . Với mọi $F \in \mathcal{F}$ giả sử $\mathcal{F}_{G_1, G_2, \dots, G_n}^K$ là một lân cận của F . Do K đóng nên $G_i \setminus K$ là tập mở khác rỗng. Chọn $x_i \in A \cap (G_i \setminus K)$, ta có $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cap K = \emptyset$ và $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cap G_i \neq \emptyset$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Ký hiệu $I(A)$ là họ các tập con hữu hạn của A . Ta có $I(A) \subset \mathcal{F}$, $I(A)$ đếm được và trù mật trong $\mathcal{F}$ với tôpô miss-and-hit. ■

3.2.3. Mệnh đề

Cho X là không gian Hausdorff compắc địa phương. Khi đó không gian miss-and-hit của X là Hausdorff.

Chứng minh

Giả sử $F, F' \in \mathcal{F}$, $F \neq F'$. Khi đó có thể giả thiết tồn tại $a \in F \setminus F'$. Theo Định lý 2.5.7 a), chọn được V là lân cận của a sao cho V mở, $\bar{V}$ compắc và $\bar{V} \cap F' = \emptyset$. Nếu $F' = \emptyset \in \mathcal{F}$ thì chọn $U_F = \mathcal{F}_V^\emptyset$, $U_{F'} = \mathcal{F}^{\bar{V}}$; nếu $F' \neq \emptyset$ thì chọn $U_F = \mathcal{F}_V^\emptyset$, $U_{F'} = \mathcal{F}_{E \setminus \bar{V}}^{\bar{V}}$, ta có U_F là lân cận của F , $U_{F'}$ là lân cận của F' trong $\mathcal{F}$, $U_F \cap U_{F'} = \emptyset$. ■

3.2.4. Hệ quả

Nếu X là không gian Hausdorff compắc địa phương thì không gian miss-and-hit của X là compắc và T_4 - không gian.

Chứng minh

Do không gian Hausdorff compắc là T_4 - không gian nên từ Mệnh đề 3.2.1 và Mệnh đề 3.2.3 ta suy ra điều phải chứng minh. ■

3.2.5. Nhận xét

Khi tách riêng từng tính chất của không gian miss-and-hit $\mathcal{F}$ thì các điều kiện đặt trên X cũng được giảm nhẹ. Bây giờ ta xét để không gian miss-and-hit $\mathcal{F}$ có đầy đủ ba tính chất compắc, khả ly và Hausdorff thì điều kiện mở rộng cho X có thể là $T_{\frac{1}{2}}$ - không gian (trong khi điều kiện cho X trong định lý

Matheron phải là khả mêtric đầy đủ). Tuy nhiên X phải thỏa tiên đề đếm được thứ hai. Ta có định lý sau

3.2.6. Định lý

Cho X là $T_{\frac{1}{2}}$ – không gian, compắc địa phương và thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai. Khi đó không gian miss-and-hit của X là compắc, khả ly và Hausdorff.

Chứng minh

Theo Định lý 2.5.6 X là Hausdorff nên định lý suy ra từ Mệnh đề 3.2.2 và Mệnh đề 3.2.3. ■

3.3. Tính khả metric của tập miss-and-hit

3.3.1. Mệnh đề

Cho X là $T_{\frac{1}{2}}$ – không gian compắc địa phương thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai. Khi đó không gian miss-and-hit của X là compắc, T_4 - không gian và thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai.

Chứng minh.

Theo Định lý 2.5.6 X là Hausdorff nên từ Hệ quả 3.2.4 ta chỉ cần chứng minh $\mathcal{F}$ với tập miss-and-hit thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai.

Do X compắc địa phương thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai nên ta có thể giả thiết X có một cơ sở tập β đếm được, chứa tập rỗng và có bao đóng của mọi tập thuộc β compắc.

Giả sử $\mathcal{C}$ là tập con mở của $\mathcal{F}$ và $F \in \mathcal{C}$. Ta xét hai trường hợp sau đây

1⁰) Tồn tại $K \in \mathcal{K}$ và $G_1, G_2, \dots, G_n \in \mathcal{G}$ sao cho $F \in \mathcal{F}_{G_1, G_2, \dots, G_n}^K \subset \mathcal{C}$

Chọn $a_i \in F \cap G_i$ và $B_i \in \beta$ sao cho $a_i \in B_i \subset G_i$, $\overline{B_i} \cap K = \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Với mọi $x \in K$, chọn $B_x \in \beta$ sao cho $B_x \cap F = \emptyset$. Do K compắc nên tồn tại

phủ hữu hạn $\{B_{x_j}\}_{j=1}^m$ của K . Đặt $B_j^* = B_{x_j}$, ta có

$$K \subset \bigcup_{j=i}^m \overline{B_j^*} \subset X \setminus F, \quad \bigcup_{j=i}^m \overline{B_j^*} \text{ compact.}$$

Dễ dàng kiểm tra

$$F \in \mathcal{F}_{B_1, \dots, B_n}^{\overline{B_1^*} \cup \dots \cup \overline{B_m^*}} \subset \mathcal{F}_{G_1, \dots, G_n}^K$$

2⁰) Tồn tại $K \in \mathcal{K}$ sao cho $F \in \mathcal{F}^K \subset \mathcal{C}$

Nếu $F = X$ thì $K = \emptyset$, do đó $F \in \mathcal{F}^\emptyset \subset \mathcal{C} = \mathcal{F}$

Nếu $F \neq X$ thì $K \subset X \setminus F$. Do đó tồn tại $B_1^*, \dots, B_m^* \in \beta$ sao cho

$$K \subset \bigcup_{j=i}^m \overline{B_j^*} \subset X \setminus F. \text{ Khi đó ta có}$$

$$F \in \mathcal{F}_{B_1^*, \dots, B_m^*}^{\overline{B_1^*} \cup \dots \cup \overline{B_m^*}} \subset \mathcal{F}^K$$

Từ 1⁰) và 2⁰) suy ra họ

$$\left\{ \mathcal{F}_{B_1, \dots, B_n}^{\overline{B_1^*} \cup \dots \cup \overline{B_m^*}}, \mathcal{F}_{B_1^*, \dots, B_m^*}^{\overline{B_1^*} \cup \dots \cup \overline{B_m^*}} \right\}_{B_1, \dots, B_n, B_1^*, \dots, B_m^* \in \beta}$$

là cơ sở tôpô đếm được của $\mathcal{F}$ với tôpô miss-and-hit. ■

Xét trường hợp đặc biệt X là không gian metric. Khi đó từ Mệnh đề 3.3.1, ta có kết quả thú vị sau

3.3.2. Định lý

Cho X là không gian metric compact địa phương khả ly. Khi đó không gian miss-and-hit của X là compact và khả metric.

Chứng minh

Do mọi không gian metric khả ly đều thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai và mọi T_3 - không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai đều khả metric nên từ Mệnh đề 3.3.1 ta suy ra định lý được chứng minh. ■

3.4. Mối quan hệ giữa không gian X và không gian $\mathcal{F}$

3.4.1. Tính compact địa phương của X và tính Hausdorff của $\mathcal{F}$

Nếu X không compắc địa phương tại ít nhất một điểm thì không gian miss-and-hit của X không Hausdorff.

Chứng minh

Giả sử X không compắc địa phương tại $x_0 \in X$. Lấy tùy ý $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$. Đặt $F = \{x_0, x_1\}$, $F' = \{x_1\}$. Ta sẽ chứng minh mọi lân cận $U_F = \mathcal{F}_{G_1, G_2, \dots, G_n}^K$ của F và $U_{F'} = \mathcal{F}_{G'_1, G'_2, \dots, G'_m}^{K'}$ của F' đều có $U_F \cap U_{F'} \neq \emptyset$.

Nếu $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^n G_i$ thì do $F \cap G_i \neq \emptyset$ với mọi $i=1, \dots, n$ nên $x_1 \in G_i$ với mọi $i=1, \dots, n$. Từ đó $F' \in U_F$ và do đó $F' \in U_F \cap U_{F'}$.

Nếu $x_0 \in \bigcup_{i=1}^n G_i$ thì đặt $G = \bigcap \{G_i : i=1, \dots, n, x_0 \in G_i\}$. Ta có G mở chứa x_0 . Do $G \not\subset K \cup K'$ (vì nếu trái lại thì $K \cup K'$ là lân cận compắc của x_0) nên tồn tại $x_2 \in G \setminus (K \cup K')$. Đặt $F'' = \{x_1, x_2\}$. Dễ thấy $F'' \cap K = \emptyset$ và $F'' \cap K' = \emptyset$.

Mặt khác, $F'' \cap G_i \neq \emptyset$ với mọi $i=1, \dots, n$,

vì mọi G_i chứa x_1 hoặc x_2 , nên $F'' \in U_F$; $F'' \cap G'_j \neq \emptyset$ với mọi $j=1, \dots, m$

vì mọi G'_j đều chứa x_1 nên $F'' \in U_{F'}$. Do đó trường hợp này ta cũng có $U_F \cap U_{F'} \neq \emptyset$. ■

3.4.2. Hệ quả

Cho X là không gian Hausdorff. Khi đó X compắc địa phương khi và chỉ khi không gian miss-and-hit của X là Hausdorff.

Chứng minh

Suy ra từ Mệnh đề 3.4.1 và Mệnh đề 3.2.3. ■

3.4.3. Tính $T_{\frac{1}{2}}$ – không gian của X và tính Hausdorff của $\mathcal{F}$

Cho X là tập vô hạn với tôpô có phần bù hữu hạn. Khi đó X không là $T_{\frac{1}{2}}$ – không gian nhưng không gian miss-and-hit của X là Hausdorff.

Chứng minh.

Theo ví dụ 2.11.3, X không là $T_{\frac{1}{2}}$ – không gian. Giả sử

$F, F' \in \mathcal{F}$, $F \neq F'$. Ta chỉ cần xét hai trường hợp sau:

- Nếu $F = \emptyset$ thì chọn $U_F = \mathcal{F}^X$, $U_{F'} = \mathcal{F}_X$.

- Nếu $F \neq \emptyset, F' \neq \emptyset$ và $F \setminus F' \neq \emptyset$ thì chọn $U_F = \mathcal{F}_{X \setminus F'}^{X \setminus F}$, $U_{F'} = \mathcal{F}_X^{X \setminus F'}$.

Ta có U_F là lân cận của F , $U_{F'}$ là lân cận của F' và $U_F \cap U_{F'} = \emptyset$. ■

3.4.4. Nhận xét

Từ kết quả mục 3.4.3 ta suy ra Mệnh đề 3.2.3 chỉ là một điều kiện đủ để $\mathcal{F}$ Hausdorff.

3.4.5. Tính khả ly của X và tính khả ly của $\mathcal{F}$

Cho X là tập không đếm được với tôpô có phần bù hữu hạn. Khi đó X là compact, khả ly nhưng không gian miss-and-hit của X không khả ly.

Chứng minh

Lấy tập đếm được tùy ý $\mathcal{D}$ của $\mathcal{F}$. Ta sẽ chứng minh $\mathcal{D}$ không trù mật trong $\mathcal{F}$. Đặt

$$R = \bigcup \{F : F \in \mathcal{D}, F \neq X\}.$$

Do mỗi $F \in \mathcal{F}$, $F \neq X$ là tập hữu hạn nên R là tập đếm được. Do đó $X \setminus R \neq \emptyset$. Chọn $x \in X \setminus R$. Ta có $U_{\{x\}} = \mathcal{F}_X^R$ là một lân cận của $\{x\}$ trong $\mathcal{F}$, $\mathcal{D} \cap U_{\{x\}} = \emptyset$. Do đó $\mathcal{D}$ không trù mật trong $\mathcal{F}$. ■

3.4.6. Nhận xét

Từ kết quả mục 3.4.5 ta suy ra tính $T_{\frac{1}{2}}$ – không gian của X trong Mệnh đề 3.2.2 là cốt yếu.

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày các vấn đề về các tiên đề tách và định lý Matheron trong một thể thống nhất.

Đối với các tiên đề tách, chúng tôi đã thống nhất và trình tự từng tiên đề một cách có hệ thống. Các khái niệm, tính chất, ... được trình bày khá chi tiết, có hệ thống đầy đủ các ví dụ nhằm làm rõ và làm phong phú thêm cho phần lý thuyết. Đặc biệt, chúng tôi đã bổ sung vào hệ thống các tiên đề tách tiên đề $T_{\frac{1}{2}}$. Các kết quả đó là Định nghĩa 2.4.1, Định lý 2.5.6. Tiên đề này có liên hệ chặt chẽ với nội dung mở rộng định lý Matheron.

Đối với định lý Matheron, chúng tôi đã giải quyết triệt để vấn đề mở rộng định lý trên không gian tôpô và thu được một số kết quả. Các kết quả đó là Mệnh đề 3.2.2, Hệ quả 3.2.4, Định lý 3.2.6, Mệnh đề 3.3.1, Định lý 3.3.2, Hệ quả 3.4.2, mục 3.4.3 về tính $T_{\frac{1}{2}}$ – không gian của X và tính Hausdorff của $\mathcal{F}$, mục 3.4.5 về tính khả ly của X và tính khả ly của $\mathcal{F}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

- [1] Đậu Thế Cấp (2008), *Tôpô đại cương*, NXB Giáo dục.
- [2] Đậu Thế Cấp, Bùi Đình Thắng, Nguyễn Thị Thanh Lý (2010), " $T_{\frac{1}{2}}$ -không gian và định lý Matheron", *Tạp chí khoa học Đại học Sài Gòn*.
- [3] Phún Xuân Lan (2009), *Các Tiên Đề Tách*, Khóa luận tốt nghiệp đại học, Trường Đại học Sư phạm TP. HCM.

Tiếng Anh

- [1] Dau The Cap, Bui Dinh Thang, "On the matheron theorem for topological spaces", *VNU Journal of science, Mathematics – Physics* 23, pp. 194-200.
- [2] J.L. Kelly (1995), *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, N.J..
- [3] G. Matheron (1975), *Random sets and integral geometry*, John Willey and Sons, New York.
- [4] Lynn A. Steen, J. Arthur Seebach, Jr. (1970), *Counterexample in Topology*, Holt, Rinehart and Winston, Inc..
- [5] Nguyen Nhuy and Vu Hong Thanh (1999), "On Matheron theorem for non – locally compact metric space", *Vietnam Journal of Mathematics* 27, pp. 115-118.
- [6] Ryszard Engelking (1989), *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin.
- [7] Steven A. Gaal (1964), *Point Set Topology Volume XVI*, Academic Press, New York and London,.