

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

NGUYỄN CHÍ HIỂU

**CÁC VÀNH ĐỊA PHƯƠNG, NỬA ĐỊA PHƯƠNG VÀ SỰ PHÂN
TÍCH CÁC MÔĐUN TRÊN CHÚNG**

**Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 604605**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS.TS. BÙI TUỜNG TRÍ**

Thành phố Hồ Chí Minh – Năm 2011

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên tôi xin gửi đến **PGS.TS. Bùi Tường Trí** lời cảm ơn sâu sắc về sự tận tình giúp đỡ của thầy đối với tôi trong suốt khóa học và nhất là trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng rất chân thành cảm ơn cùng tất cả các thầy cô trong Hội đồng chấm luận văn đã dành thời gian đọc và cho những ý kiến quý báu, bổ ích cho luận văn của tôi.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn tất cả quý thầy cô khoa Toán của Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh đã tận tình giảng dạy và truyền đạt những kiến thức bổ ích trong suốt khóa học tại Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh.

Xin cảm ơn quý thầy cô thuộc Phòng sau Đại Học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học.

Xin gửi lời cảm ơn đến Ban Giám Hiệu và Tập thể giáo viên của Trường THPT Diên Hải đã tạo điều kiện thuận lợi và động viên tôi trong suốt quá trình học.

Tôi cũng chân thành cảm ơn các bạn học viên Cao học khóa 19 và các bạn đồng nghiệp đã hỗ trợ cho tôi suốt thời gian học.

Cuối cùng, vì kiến thức còn hạn chế nên dù rất cố gắng trong suốt quá trình học cũng như trong quá trình làm luận văn nhưng chắc chắn có nhiều thiếu sót mong các thầy cô và các bạn đồng nghiệp đóng góp ý kiến để tôi có thể hoàn thiện hơn.

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 10 năm 2011

NGUYỄN CHÍ HIỂU

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN.....	1
MỤC LỤC	2
CÁC KÝ HIỆU SỬ DỤNG TRONG LUẬN VĂN.....	4
PHẦN MỞ ĐẦU.....	5
CHƯƠNG 1 : CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT VÀNH.....	7
1.1. Các khái niệm cơ bản:	7
1.2. Jacobson Radical.....	9
CHƯƠNG 2: VÀNH ĐỊA PHƯƠNG, NỬA ĐỊA PHƯƠNG VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG.....	12
2.1. VÀNH ĐỊA PHƯƠNG:	12
2.1.1. Định lí:	12
2.1.2. Mệnh đề:	13
2.1.3. Mệnh đề:	14
2.2. VÀNH NỬA ĐỊA PHƯƠNG.....	24
CHƯƠNG 3: MỘT SỐ NGHIÊN CỨU VỀ CÁC LÝ ĐĂNG TRONG CÁC VÀNH ĐỊA PHƯƠNG, NỬA ĐỊA PHƯƠNG VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG	30
3.1. Mệnh đề:.....	31
3.2. Hệ quả:	32
3.3. Mệnh đề:.....	32

3.4. Mệnh đề:.....	33
3.5. Định lý:.....	33
3.6. Định lý:.....	34
3.7. Chú ý:.....	35
3.8. Hệ quả:	35
3.9. Ví dụ:.....	35
3.10. Định nghĩa:	36
3.11. Mệnh đề:.....	36
3.12. Hệ quả:	37
3.13. Tính chất:.....	37
3.14. Mệnh đề:.....	38
3.15. Mệnh đề:.....	39
3.16. Mệnh đề:.....	41
3.17. Mệnh đề:.....	41
3.18. Mệnh đề:.....	42
3.19. Ví dụ:.....	43
3.20. Định lý:.....	44
3.21. Hệ quả:	44
3.22. Định lý:.....	45
PHẦN KẾT LUẬN.....	46
PHẦN TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	47

CÁC KÝ HIỆU SỬ DỤNG TRONG LUẬN VĂN

Ký hiệu	Giải nghĩa
ACC	Dãy các môđun tăng (quan hệ bao hàm) đều dừng.
DCC	Dãy các môđun giảm (quan hệ bao hàm) đều dừng.
$U(R)$	Tập các phần tử khả nghịch của vành R
$M_{R,R}M$	Thứ tự là các môđun phải, trái.
$RadR$	Jacobson Radical của vành R .
$n.V$	Tức là $V^n = (v_1, \dots, v_n) : v_i \in V, i = 1, \dots, n$.
Đpcm	Điều phải chứng minh.

PHẦN MỞ ĐẦU

Trong đại số giao hoán ta đã biết vành địa phương, vành nửa địa phương và địa phương hóa một vành địa phương tại một ideal nguyên tố của nó vô cùng quan trọng, đóng một vai trò chủ chốt trong đại số. Nhu cầu tự nhiên chúng ta nghiên cứu lý thuyết vành địa phương và nửa địa phương trong trường hợp không giao hoán. Trong đại số không giao hoán việc nghiên cứu vành địa phương và nửa địa phương cũng tương tự, tuy nhiên cũng gặp nhiều khó khăn nhưng chúng lại có những ứng dụng khá quan trọng, đặc biệt là trong việc phân tích môđun hay giản ước môđun,...

Vành R được gọi là vành địa phương nếu R có duy nhất một ideal trái (hay phải) tối đại.

Vành R được gọi là vành nửa địa phương nếu $R/radR$ là vành artin trái (hay $R/radR$ là vành nửa đơn).

Vành địa phương và nửa địa phương trong trường hợp vành không giao hoán có những tính chất mới lạ, đặc biệt mà trong trường hợp giao hoán không có. Ví dụ vành địa phương gắn liền với phân tích Krull- Schmit, vành nửa địa phương gắn liền với giản ước môđun.

Nghiên cứu vành địa phương và nửa địa phương trong đại số không giao hoán. Cụ thể nghiên cứu vành địa phương với vấn đề phân tích môđun, vành nửa địa phương với vấn đề giản ước môđun.

Đồng thời luận văn cũng nghiên cứu có hệ thống các lũy đẳng trong các vành địa phương và nửa địa phương trong đại số không giao hoán.

Luận văn sẽ làm sáng tỏ hơn, tổng quát hơn các vành địa phương và nửa địa phương trong đại số, đặc biệt trong cấu trúc của vành. Thấy rõ những ưu điểm nổi bật,

các tính chất mới lạ của vành địa phương và nửa địa phương trong đại số không giao hoán so với đại số giao hoán.

Luận văn được trình bày theo thứ tự sau:

Chương 1: Các kiến thức cơ bản của lý thuyết vành và môđun.

Chương 2: Các vành địa phương, nửa địa phương và ứng dụng phân tích các môđun trên chúng.

Chương 3: Lý thuyết các lũy đẳng.

CHƯƠNG 1 : CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT VÀNH

Trong luận văn này ta quy ước khi nói tới vành $R \neq 0$ thì ta luôn được hiểu là vành có đơn vị, không đòi hỏi giao hoán. Nói tới môđun ta luôn được hiểu là R -môđun trái, khi đó chỉ cần lấy đối ngẫu ta sẽ được R -môđun phải.

1.1. Các khái niệm cơ bản:

1.1.1. Một vành $R \neq (0)$ được gọi là đơn nếu R chỉ có hai idêan là (0) và R .

Nhận xét: Nếu R là vành đơn thì $M_n(R)$ cũng vậy.

1.1.2. Một vành R được gọi là miền nguyên nếu R khác 0 và $ab = 0$ suy ra $a = 0$ hoặc $b = 0$, $\forall a, b \in R$.

1.1.3. Một vành R được gọi là bất khả quy nếu R không có các phần tử lũy đẳng khác 0 .

1.1.4. Một vành R được gọi là Dedekind- hữu hạn nếu $ab = 1 \Rightarrow ba = 1$, $\forall a, b \in R$.

1.1.5. Cho R là một vành và M là một R -môđun trái hoặc phải. Ta nói M là noether (hay artin) nếu họ tất cả các môđun con của M thỏa ACC (hay DCC)

1.1.6. Một vành R được gọi là noether trái (hay phải) nếu R là noether khi xem như một R -môđun trái (hay phải). Khi vành R thỏa noether trái và noether phải ta nói R là vành noether.

1.1.7. Một vành R được gọi là artin trái (hay phải) nếu R là artin khi xem như một R -môđun trái (hay phải). Khi vành R thỏa artin trái và artin phải ta nói R là vành artin.

Nhận xét: Một vành artin trái (hay phải) thì luôn luôn noether trái (hay phải)

1.1.8. Cho R là một vành và M là một R -môđun (trái).

1) M được gọi là một R -môđun đơn (hay bất khả quy) nếu M khác 0 và M không có R -môđun con nào khác (0) và M .

2) M được gọi là một R -môđun nửa đơn (hay hoàn toàn khả quy) nếu mỗi R -môđun con của M là một hạng tử trực tiếp của M .

1.1.9. Cho vành $R \neq (0)$, các phát biểu sau đây tương đương:

- 1) Mọi dãy khớp ngắn của R -môđun (trái) đều chẻ.
- 2) Mọi R -môđun (trái) là nửa đơn.
- 3) Mọi R -môđun (trái) hữu hạn sinh là nửa đơn.
- 4) Mọi R -môđun cyclic là nửa đơn.
- 5) R -môđun chính quy ${}_R R$ là nửa đơn.

Nếu một trong các điều kiện trên thỏa mãn ta nói R là vành nửa đơn.

Từ các khái niệm cơ bản trên chúng ta rút ra một số chú ý sau đây:

Chú ý 1: Cho một môđun M nửa đơn trên vành tùy ý, các phát biểu sau là tương đương:

- 1) M là hữu hạn sinh.
- 2) M là noether.
- 3) M là artin.
- 4) M là tổng trực tiếp hữu hạn các môđun đơn.

Chú ý 2: Một vành R được gọi là nửa đơn nếu thỏa một trong các điều kiện sau:

- 1) Mọi R -môđun trái đều nửa đơn.
- 2) Mọi R -môđun bất khả quy trái đều nửa đơn.
- 3) Mọi R -môđun trái hữu hạn sinh đều nửa đơn.
- 4) Mọi dãy khớp ngắn của R -môđun trái đều chẻ.

Chú ý 3:

- 1) Một R -môđun đơn thì luôn luôn là một R -môđun nửa đơn.
- 2) Mọi môđun con của R -môđun nửa đơn là nửa đơn.
- 3) Cho R là vành nửa đơn trái thì R cũng là noether trái và artin trái.
- 4) Cho R là vành nửa đơn trái thì tất cả các R -môđun trái là xạ ảnh và ngược

lại.

5) Cho R là một vành và $M_n(R)$ là vành các ma trận cỡ $n \times n$ trên R thì mọi ideal I của $M_n(R)$ có dạng $M_n(N)$, với một ideal N xác định duy nhất của R . Đặc biệt nếu R là vành đơn thì $M_n(R)$ cũng vậy.

1.2. Jacobson Radical.

1.2.1. Định nghĩa: Jacobson Radical của một vành R là giao tất cả các ideal trái tối đại của R . Kí hiệu: $radR$

Nhận xét:

1) Nếu $R \neq (0)$ thì tập các ideal tối đại (trái) của R luôn thỏa bổ đề Zorn's nên luôn có phần tử tối đại, tức là định nghĩa trên tốt.

2) Cho N là một ideal của R và nằm trong $radR$ thì $rad(R/N) = (radR)/N$.

1.2.2. Một vành R được gọi là J -nửa đơn (nửa nguyên thủy) nếu $radR = 0$

Nhận xét: Chúng ta dễ dàng chứng minh được các tính chất sau:

1) $R/radR$ là J -nửa đơn vì $rad(R/radR) = 0$.

2) R và $R/radR$ có cùng tính môđun đơn trái. Mọi phần tử $x \in R$ là nghịch đảo trái trong R nếu và chỉ nếu $\bar{x} \in \bar{R}$ là nghịch đảo trái trong $\bar{R} = R/radR$.

3) Cho R là một miền nguyên J -nửa đơn và a là một phần tử khác 0 thuộc tâm của R thì giao tất cả các ideal trái tối đại không chứa a bằng 0.

1.2.3. Một ideal một phía (hoặc hai phía) N của vành R được gọi là nil nếu N gồm các phần tử lũy linh; N được gọi là lũy linh nếu tồn tại số tự nhiên n để $N^n = 0$

Rõ ràng N là lũy linh thì N là nil.

1.2.4. Định lí:

Cho D là vành chia và đặt $R = M_n(D)$ thì

1) R là đơn.

2) R có duy nhất môđun trái đơn M , R tác động trung thành trên M và ${}_R R \cong n.M$, với $n.M = \{(v_1, \dots, v_n) : v_i \in M, \forall i = 1, \dots, n\}$.

$$3) \text{End}({}_R M) \cong D.$$

1.2.5. Bổ đề Schur's:

Cho R là một vành và ${}_R M$ là một R -môđun trái đơn thì $\text{End}({}_R M)$ là một vành chia.

1.2.6. Định lý Wedderburn-Artin:

Cho R là vành nửa đơn trái. Khi đó: $R \cong M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_r}(D_r)$.

Trong đó $D_1, D_2, \dots, D_r$ là các vành chia, r xác định duy nhất.

Hệ quả: Một vành nửa đơn trái thì luôn luôn là nửa đơn phải và ngược lại.

1.2.7. Định lý:

Cho R là một vành đơn. Các phát biểu sau là tương đương:

- 1) R là artin trái.
- 2) R là nửa đơn (trái)
- 3) R có duy nhất idêan tối đại trái
- 4) $R \cong M_n(D)$, với số tự nhiên n và vành chia D nào đó.

1.2.8. Định lý Hopkins- Levitzki:

Cho R là vành mà $\text{rad} R$ lũy linh, $R/\text{rad} R$ nửa đơn và mọi R -môđun trái M các phát biểu sau đây tương đương

- 1) M là noether.
- 2) M là artin.
- 3) M có một chuỗi hợp thành.

Đặc biệt: (A) một vành artin trái khi và chỉ khi nó là noether trái và nửa nguyên thủy;

(B) mọi môđun trái hữu hạn sinh trên một vành artin trái có một chuỗi hợp thành.

1.2.9. Bổ đề Nakayama:

Cho idêan trái J của vành R , các phát biểu sau đây tương đương.

1) $J \in \text{rad}R$.

2) Cho mọi R -môđun trái hữu hạn sinh M , $J.M = M$ suy ra $M = 0$.

3) Cho mọi R -môđun trái N thuộc M để M/N hữu hạn sinh, $N + J.M = M$ thì $N = M$.

1.2.10. Bổ đề:

Nếu một idêan trái $N \subseteq R$ là nil thì $N \subseteq \text{rad}R$.

1.2.11. Định lí:

Cho k là một trường có đặc số p và G là một p -nhóm hữu hạn thì $J = \text{rad}kG$ như idêan của kG và chúng ta có $J^{|G|} = 0$. Nếu G được sinh như một nhóm bởi $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ thì J được sinh như một idêan trái bởi $\{g_1 - 1, g_2 - 1, \dots, g_n - 1\}$.

1.2.12. Bổ đề:

Cho R là một k -đại số và M, N là các R -môđun trái, với $\dim_k M < \infty$ thì ta có đẳng cấu tự nhiên của k -không gian vector:

$$\theta : (\text{Hom}_R(M, N))^K \rightarrow \text{Hom}_{R^K}(M^K, N^K)$$

1.2.13. Định lí:

Cho R là một vành giao hoán và S là một R -đại số sao cho S là hữu hạn sinh như một R -môđun thì $(\text{rad}R).S \subseteq \text{rad}S$.

1.2.14. Bổ đề Brauer:

Cho N là một idêan trái tối tiểu trong một vành R thì chúng ta có hoặc $N^2 = 0$ hoặc $N = Re$, với e là phần tử lũy đẳng của N .

CHƯƠNG 2: VÀNH ĐỊA PHƯƠNG, NỬA ĐỊA PHƯƠNG VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

2.1. VÀNH ĐỊA PHƯƠNG:

Trong đại số giao hoán một vành địa phương được định nghĩa là một vành khác (0) mà có duy nhất một ideal tối đại, các vành đó dạng “các vật địa phương” trong đại số giao hoán vì cho mọi vành R và mọi ideal nguyên tố p của R , địa phương hoá R tại p là một vành địa phương R_p với ideal tối đại duy nhất pR_p .

Trong đại số không giao hoán có sự tổng quát tự nhiên khái niệm vành địa phương, một vành R khác (0) được gọi là vành địa phương nếu nó có duy nhất một ideal tối đại trái (hay phải).

Trong phần này chúng ta sẽ tìm hiểu một số tính chất của vành địa phương và ứng dụng của chúng.

Kí hiệu: $U(R)$ là tập hợp tất cả các phần tử khả nghịch của vành R .

2.1.1. Định lý:

Cho vành R khác 0, các phát biểu sau đây là tương đương

- 1) R có duy nhất một ideal trái tối đại.
- 2) R có duy nhất một ideal phải tối đại.
- 3) $R/\text{rad}R$ là vành chia.
- 4) $R \setminus U(R)$ là một ideal của R .
- 5) $R \setminus U(R)$ là một nhóm với phép toán cộng.
- 5') $\forall n, a_1 + a_2 + \dots + a_n \in U(R) \Rightarrow \exists a_i \in U(R)$
- 5'') $a + b \in U(R) \Rightarrow a \in U(R) \text{ hoặc } b \in U(R)$

Nếu một trong các điều kiện trên thoả mãn ta nói R là vành địa phương.

Kí hiệu: (R, m) , với $m = \text{rad}R$.

Chứng minh

(3) $\Rightarrow$ (1) Với mọi ideal trái tối đại $m \supset \text{rad}R$, do $R/\text{rad}R$ là vành chia nên $m = \text{rad}R$.

Do đó ta có (1).

(1) $\Rightarrow$ (3). Từ (1) suy ra $\text{rad}R$ là ideal trái tối đại duy nhất của R , suy ra $R/\text{rad}R$ chỉ có hai ideal trái là (0) và $R/\text{rad}R$.

Vậy $R/\text{rad}R$ là vành chia.

Chứng minh tương tự ta cũng có (3) $\Leftrightarrow$ (2)

(3) $\Rightarrow$ (4) (xem nhận xét (1.2.2)) thì phần 5'') suy ra 3)

Từ (3) suy ra $\forall a \notin \text{rad}R$ là phần tử khả nghịch của R .

Suy ra $R \setminus U(R) = \text{rad}R$ là ideal của R .

(4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (5') $\Rightarrow$ (5'') hiển nhiên.

(5'') $\Rightarrow$ (3). Lấy $a \notin \text{rad}R$, suy ra có một ideal trái tối đại m để $a \notin m$

Ta có $m + Ra = R$ (do $m \subset m + Ra \subset R$, m tối đại và $m \neq m + Ra$)

Suy ra tồn tại $x \in m : 1 = x + ba$, với $b \in R$

Ta thấy $x \notin U(R)$ nên từ (5''), suy ra $ba \in U(R)$.

Suy ra $\bar{a}$ có nghịch đảo trái trong $\bar{R} = R/\text{rad}R$.

Do đó $\bar{R} \setminus \{0\}$ là nhóm nhân.

Vậy $R/\text{rad}R$ là vành chia.

2.1.2. Mệnh đề:

Cho R là vành địa phương bất kỳ.

a) R có duy nhất ideal tối đại.

b) R là vành Dedekind hữu hạn.

c) R không có các lũy đẳng không tầm thường.

Chứng minh

(a) Một idêan tối đại m của R không chứa mọi phần tử khả nghịch nên

$$m \subseteq R \setminus U(R) = \text{rad}R \subseteq R \text{ và } \text{rad}R \neq R$$

Do m tối đại nên $m = \text{rad}R$

(b) Suy ra từ nhận xét (1.2.2)

(c) Gọi e là phần tử lũy đẳng của R , đặt $f = 1 - e$

Do $e + f = 1 \in U(R)$ nên theo (2.1.1)(5'') có $e \in U(R)$ hoặc $f \in U(R)$.

Nhưng $ef = 0$ nên $e = 0$ hoặc $f = 0$ tức $e = 1$ hoặc $e = 0$

Chú ý: (a), (b) và (c) là điều kiện cần chứ không phải điều kiện đủ để R là vành địa phương.

(a) thoả mọi vành đơn nhưng một vành đơn không cần địa phương.

(b) thoả mọi vành giao hoán nhưng một vành giao hoán không cần địa phương.

(c) Mọi miền nguyên thoả (c) nhưng một miền nguyên không cần địa phương.

2.1.3. Mệnh đề:

a) Giả sử R khác 0 và mọi $a \notin U(R)$ là lũy linh thì R là vành địa phương.

b) Giả sử R được chứa trong một vành chia D thoả $\forall d \in D^*, d$ hoặc d^{-1} thuộc R thì R là vành địa phương.

Chứng minh

(a) Ta chứng minh $R \setminus U(R) \subseteq \text{rad}R$ (1)

Từ đó suy ra $R \setminus U(R) = \text{rad}R$, suy ra R là vành địa phương.

Lấy $a \notin U(R)$, gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất để $a^k = 0$ thì

$$Ra \subseteq R \setminus U(R).$$

Thật vậy nếu có $r \in R$ để $ra \in U(R)$ thì $(ra)a^{k-1} = 0$ (vô lý).

Vì $R \setminus U(R)$ gồm toàn các phần tử lũy linh nên Ra là nil-idêan trái.

Vì vậy theo (1.2.10) ta có $Ra \subseteq \text{rad}R$, suy ra (1).

(b). Ta sẽ kiểm tra $a, b \in R^*, a + b \in U(R) \Rightarrow a^{-1} \in R$ hoặc $b^{-1} \in R$

Thật vậy: Ta có thể giả sử $a + b = 1$. Áp dụng giả thiết có $c = a^{-1}b \in D$

Nếu $c \in R$ thì $a^{-1} = a^{-1}(a + b) = 1 + c \in R$

Ngược lại $c^{-1} = b^{-1}a \in D$ thì $b^{-1} = b^{-1}(a + b) = c^{-1} + 1 \in R$

Áp dụng (2.1.1)(5'') ta có R là vành địa phương.

Lưu ý: Trong trường hợp D là trường ta gọi R là vành giá trị.

Sau đây ta sẽ cho một số ví dụ:

2.1.4. Như đã nói ở trên địa phương hoá mọi vành giao hoán R tại idêan nguyên tố p của nó là một vành địa phương R_p với idêan tối đại duy nhất pR_p .

2.1.5. Mọi vành định giá R của một trường luôn luôn là một vành địa phương.

Chặn hạn vành Z_p của các số nguyên dương p -adic (p nguyên tố) là vành giá trị của trường $\hat{Q}_p$ của các số p -adic.

2.1.6. Gọi k là một vành chia, R là vành các ma trận tam giác trên cấp $n \times n$ trên k .

Theo (1.2.8) thì $J = \text{rad}R$ gồm những ma trận trong R với đường chéo chính bằng 0 và $J^n = 0$. Đặt A là vành con của R gồm những ma trận trong R có đường chéo chính không đổi thì $J \subseteq \text{rad}A$ và vì $A = k.1 \oplus J$ suy ra $A/J \cong k$.

Suy ra $A/\text{rad}A$ là vành chia.

Theo (2.1.1)(3) thì A là vành địa phương.

2.1.7. Cho k là trường có đặc số $p > 0$ và G là p -nhóm hữu hạn thì $\text{rad}A$ là idêan của A (với $A = kG$), với $(\text{rad}A)^{|G|} = 0$.

Theo (1.2.14) thì $A/\text{rad}A \cong k$, suy ra $A/\text{rad}A$ là vành chia.

Vậy A là vành địa phương.

2.1.8. Tính chất:

Đặt (R, m) là một vành địa phương giao hoán để $k = R/m$ có đặc số $p > 0$ thì mọi p -nhóm hữu hạn G , đại số nhóm $A = kG$ là một vành địa phương.

Với $A/\text{rad}A \cong k$.

Chứng minh

Xét mọi A -môđun đơn trái V , đây là một A -môđun xylic, suy ra V là môđun hữu hạn sinh.

Theo Bổ đề Nakayama, $V \neq 0$ suy ra $mV \subseteq V$ và $mV \neq V$.

Vì mV là một A -môđun con của V nên $mV = 0$ (do V đơn). Do đó V có thể được xem như kG -môđun đơn trái. Theo (1.2.11) G phải tác động tầm thường trên V thì $\text{rad}A$ chứa idêan I được sinh bởi m và tất cả $g-1$ (với $g \in G$)

Vì $A/I \cong k$, suy ra $\text{rad}A = I$ và A là vành địa phương.

Tiếp theo ta nghiên cứu ứng dụng của vành địa phương để phân tích các môđun trên chúng.

Cho vành R , một R -môđun trái M khác 0 được gọi là không phân tích được nếu M không thể viết dưới dạng tổng trực tiếp của hai R -môđun con khác (0) của M . Định nghĩa này cho ta nếu M không phân tích được thì vành $\text{End}({}_R M)$ không có các lũy đẳng không tầm thường, quan sát này dẫn chúng ta đến định nghĩa sau.

2.1.9. Định nghĩa:

Một R -môđun trái M khác (0) được gọi là “không phân tích được mạnh” nếu $\text{End}({}_R M)$ là vành địa phương.

Nhận xét: Một môđun không phân tích được mạnh luôn luôn không phân tích được.

2.1.10. Mọi M môđun đơn phải là không phân tích được mạnh vì theo Bổ đề Shur's $\text{End}({}_R M)$ là vành địa phương.

2.1.11. Cho $R = \mathbb{Z}$, môđun trái, chính quy $M_1 = \mathbb{Z}$ là không phân tích được nhưng vì $\text{End}({}_R M) \cong \mathbb{Z}$ là không địa phương nên M_1 là không phân tích được mạnh.

Mặt khác: Cho $M_2 = Z/p^n Z$ (p nguyên tố), $End(M_2) \cong Z/p^n Z$ là vành địa phương. Vì vậy M_2 là không phân tích được mạnh.

2.1.12. Định lí: (về sự phân tích môđun)

Cho R là vành, M là R -môđun trái có chiều dài hữu hạn.

Mọi tự đồng cấu $f \in E = End(_R M)$, ta có $M = \ker(f^n) \oplus \text{Im}(f^n)$.

Với mọi số tự nhiên n đủ lớn.

Chứng minh

Ta xét hai dãy chuyển $M \supseteq \text{Im } f \supseteq \text{Im } f^2 \supseteq \dots$

$$0 \subseteq \text{Ker } f \subseteq \text{Ker } f^2 \subseteq \dots$$

Vì M có chiều dài hữu hạn nên các dãy chuyển trên đều dừng, tức tồn tại số tự nhiên n để: $\text{Im } f^n = \text{Im } f^{n+1} = \dots$

$$\text{Ker } f^n = \text{Ker } f^{n+1} = \dots$$

Xét $a \in \text{Ker } f^n \cap \text{Im } f^n \Rightarrow a \in \text{Im } f^n \Rightarrow a = f^n(b), b \in M$

$$\text{và } a \in \text{Ker } f^n \Rightarrow 0 = f^n(a) = f^{2n}(b) \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = 0 \quad (2)$$

$$\forall c \in M, \Rightarrow f^n(c) = f^{2n}(d), d \in M \Rightarrow f(c - f^n(d)) = 0$$

$$\text{Vậy } c = f^n(d) + (c - f^n(d)) \in \text{Im } f^n + \text{Ker } f^n \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $M = \ker(f^n) \oplus \text{Im}(f^n)$ (đpcm)

2.1.13. Định lí:

Đặt M là một R -môđun trái không phân tích được có chiều dài $n < +\infty$ thì $E = End(_R M)$ là vành địa phương và idêan tối đại duy nhất $m = \text{rad } E$ thỏa $m^n = 0$.

Đặc biệt: m là một môđun không phân tích được mạnh.

Chứng minh

Trước tiên ta chứng minh với mọi tự đồng cấu $f \in E \setminus U(E)$ là lũy linh (4)

Khi đó theo (2.1.3) suy ra E là vành địa phương.

Thật vậy: Theo (2.1.11) thì $\exists p \in \mathbb{Z}^+ : M = \text{Im } f^p \oplus \text{Ker } f^p$.

Nếu $\text{Ker} f^p = 0$ thì $\text{Im } f^p = M \Rightarrow f^p \in U(E)$ (do f^p là đẳng cấu)

Suy ra $f \in U(E)$ (mâu thuẫn)

Do đó $\text{Ker} f^p \neq 0$ nhưng vì M không phân tích được nên $\text{Im } f^p = 0 \Rightarrow f^p = 0$

Vậy (4) được chứng minh, tức là E là vành địa phương.

Tiếp theo ta xem M như là E -môđun trái. Theo Bổ đề Nakayama thì

$$mM \subseteq M, mM \neq M$$

Nếu $mM \neq 0$ thì ta có dãy con thật sự $M \supseteq mM \supseteq m^2M \supseteq \dots$

Nhưng M có chiều dài n nên ta phải có $m^n M = 0 \Rightarrow m^n = 0$.

2.1.14. Chú ý: Trong (2.1.13) kết luận sẽ không thỏa nếu chỉ có điều kiện ACC hoặc DCC.

Thấy vậy: Cho $R = \mathbb{Z}$, môđun $M = \mathbb{Z}$ thỏa ACC trên các môđun con của M nhưng $\text{End}(M) \cong \mathbb{Z}$ không là vành địa phương.

2.1.15. Hệ quả:

Một vành artin trái R khác 0 là một vành địa phương khi và chỉ khi R không có các lũy đẳng không tầm thường.

Chứng minh

Xét môđun trái, chính quy $M = {}_R R$, theo định lý HopKins-Levitzki (1.2.8) thì M có chiều dài hữu hạn.

Vành tự đồng cấu $E = \text{End}({}_R M)$ (tác động bên trái M) là đẳng cấu với R . Nếu R không có các lũy đẳng không tầm thường thì M không phân tích được.

Theo (2.1.13) thì $E \cong R$ là vành địa phương.

Nhận xét:

Các vành địa phương được sinh ra bởi vành tự đồng cấu của môđun có chiều dài hữu hạn có tính chất rất đặc biệt: Idêan tối đại duy nhất của nó lũy linh, người ta gọi những vành như vậy là vành nguyên thủy đầy đủ.

Một ứng dụng rất quan trọng của vành địa phương là kết quả định lý Krull-Schmidt-Azumaya. Trước tiên ta trang bị mệnh đề sau:

2.1.16. Mệnh đề:

Cho R là vành, M là một R -môđun trái mà các môđun con thỏa ACC hoặc DCC thì M có thể được phân tích thành tổng trực tiếp hữu hạn các môđun con không phân tích được hay nói ngắn gọn M có một phân tích Krull-Schmidt.

Chứng minh

Ta nói một môđun con $N \subseteq M$ là “tốt” nếu nó có một phân tích Krull-Schmidt. Ngược lại ta nói N là “không tốt”.

Chú ý (0) là “tốt” và mọi môđun không phân tích được $N \subseteq M$ là “tốt”.

Nếu $N, N' \subseteq M$ là các môđun tốt và $N \cap N' = 0$ thì $N + N'$ cũng “tốt”.

Để chứng minh tính chất ta giả sử M không “tốt” tức là M không thể không phân tích được, vì vậy $M = M_1 \oplus M'_1; M_1, M'_1 \neq 0$ và một trong hai phải “không tốt”, giả sử đó là M_1 .

Lặp lại quá trình trên ta có $M_1 = M_2 \oplus M'_2; M_2, M'_2 \neq 0$ và M_2 “không tốt”,...cho ta hai dãy con thật sự vô hạn:

$$M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$$

$$(0) \subseteq M'_1 \subseteq M'_1 \oplus M'_2 \subseteq M'_1 \oplus M'_2 \oplus M'_3 \subseteq \dots$$

Suy ra M không thỏa ACC cũng không thỏa DCC (trái giả thiết)

Vậy tính chất được chứng minh.

2.1.17. Định lý Krull- Schmidt-Azumaya:

Cho R là vành và giả sử rằng một R -môđun trái M có hai sự phân tích thành các môđun con $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_r = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_s$, trong đó N_i là không phân tích được và M_i là không phân tích được mạnh thì $r = s$ và $M_i \cong N_i$, với $1 \leq i \leq r$.

Trước khi chứng minh định lý ta chứng minh trước một số hệ quả sau.

2.1.18. Hệ quả:

Cho M là một R -môđun trái có chiều dài hữu hạn thì tồn tại một phân tích $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_r$, trong đó M_i là một môđun con không phân tích được của M , với r xác định duy nhất và dãy các môđun $M_1, M_2, \dots, M_r$ duy nhất sai khác một hoán vị

Chứng minh

Sự tồn tại của hệ quả suy ra từ (2.1.16).

Theo (2.1.13) mỗi M_i là phân tích được mạnh.

Tính duy nhất của hệ quả suy ra từ (2.1.17).

2.1.19. Hệ quả:

Hai kết luận trong định lý Krull- Schmidt ở trên được áp dụng cho mọi môđun trái, hữu hạn sinh M trên một vành artin trái R (đặc biệt trên mọi đại số hữu hạn chiều trên một trường).

Chứng minh

Cho một vành artin R , ta dễ thấy rằng một R -môđun trái hữu hạn sinh M có một chuỗi hợp thành.

Áp dụng (2.1.17) ta được đpcm.

Bây giờ ta chứng minh Định lý Krull- Schmidt.

Đặt $\alpha_i : M \rightarrow M_i \in M; \beta_j : M \rightarrow N_j \subseteq M$ là toàn ánh vào M_i và N_j .

Xem α_i, β_j như các phần tử của $E = \text{End}(M_R)$.

Ta có: $1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_r = \beta_1 + \dots + \beta_s$.

Do đó: $\alpha_1 = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_1 \beta_s$ và chú ý mỗi $\alpha_1 \beta_j$ từ M vào M_1 .

Thu hẹp trên M_1 ta có: $1_{M_1} = \sum_{j=1}^s \alpha_1 \beta_j|_{M_1} \in \text{End}(M_1)$.

Vì $\text{End}(M_1)$ là một vành địa phương nên một trong các số hạng trên chắn hạn

$\alpha_1 \beta_1|_{M_1}$ là tự đẳng cấu của M_1 .

Suy ra $\beta_1 : M_1 \rightarrow N_1$ là đồng cấu chẻ.

Vì N_1 không phân tích được nên $\beta_1 : M_1 \rightarrow N_1$ là đẳng cấu.

Ta sẽ chứng minh: $M = M_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_s$ (5)

Nếu có (5) thì $N_2 \oplus \dots \oplus N_s \cong M / M_1 \cong M_2 \oplus \dots \oplus M_r$.

Bằng quy nạp theo r ta có được đpcm.

Bây giờ ta chứng minh (5)

Trước tiên ta chú ý $\beta_1 : M_1 \rightarrow N_1$ là đẳng cấu và M_1 không có giao với

$$\text{Ker}\beta_1 = N_2 \oplus \dots \oplus N_s.$$

Ta kiểm tra $N_1 \subseteq M_1 + N_2 + \dots + N_s$ (6)

Thật vậy: lấy $a \in N_1$ và viết $a = \beta_1(b), b \in M_1$ thì $\beta_1(a - b) = a - \beta_1(b) = 0$.

Do đó $a - b \in \text{Ker}\beta_1 = N_2 + \dots + N_s$.

Suy ra: $a \in M_1 + N_2 + \dots + N_s$.

Vậy ta đã có (6) tức định lí được chứng minh.

Minh họa định lí:

Xét một môđun đơn hữu hạn sinh ${}_R M$, suy ra M có một phân tích Krull-schmidt thành các môđun đơn $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_r$ (xem chú ý 1).

Vì môđun đơn là phân tích được mạnh, theo (2.1.13) các tự đẳng cấu của $M_1, M_2, \dots, M_r$ được xác định sai khác một hoán vị.

Theo hệ quả (2.1.19) ta sẽ kết luận thông qua định lí Noether và Deuring sau đây dưới mở rộng vô hướng của phép biểu diễn môđun trên đại số hữu hạn chiều R trên một trường k .

Đặt $K \supseteq k$ là trường mở rộng bất kỳ của k . Cho mọi R -môđun phải M , mở rộng vô hướng $M^K = M \otimes_K K$ là một môđun phải trên $R^K = R \otimes_K K$.

Nó chỉ ra rằng trong trường hợp $\dim_K M < \infty$ tự đẳng cấu của M^K xác định duy nhất tự đẳng cấu của M .

2.1.20. Định lí Noether-Deuring:

Cho R là một đại số hữu hạn chiều trên trường k và M, N là R -môđun phải có số chiều hữu hạn trên k . Gọi K là trường mở rộng bất kỳ của k .

Nếu $M^K \cong N^K$ như R^K -môđun thì $M \cong N$ như R -môđun.

Chứng minh

Theo bổ đề (1.2.9) ta có đẳng cấu tự nhiên:

$$\theta : (Hom_R(M, N))^K \rightarrow Hom_{R^K}(M^K, N^K)$$

Giả sử $n = \dim_k M = \dim_k N$ và coi M, N như không gian k^n với hai R -tác động khác nhau thì $Hom_R(M, N)$ được đồng nhất như một k -không gian S con của $M_n(k)$.

Suy ra $Hom_{R^K}(M^K, N^K) \cong S^K \subseteq M_n(k)$.

Gọi $s_1, \dots, s_r$ là một k -cơ sở của S . cho $x_1, \dots, x_r$ cố định giao hoán trên K .

Đặt: $f(x_1, \dots, x_r) = \det(x_1 s_1 + \dots + x_r s_r) \in k[x_1, \dots, x_r]$ là đa thức thuần nhất bậc n .

Vì $M^K \cong N^K$ như R^K -môđun nên có $a_1, \dots, a_r \in K : a_1 s_1 + \dots + a_r s_r$ khả nghịch.

Vậy $f(a_1, \dots, a_r) \neq 0$, đặc biệt f là đa thức khác đa thức 0.

Ta xét hai khả năng:

Trường hợp 1: Trường k có nhiều hơn n phần tử.

Bằng phương pháp quy nạp theo r dễ thấy rằng

Khi cho $f(x_1, \dots, x_r) \in k[x_1, \dots, x_r] \setminus \{0\}$ có bậc $\leq n$, có $b_1, \dots, b_r : f(b_1, \dots, b_r) \neq 0$

thì $b_1 s_1 + \dots + b_r s_r$ cho một R -đẳng cấu $M \rightarrow N$.

Trường hợp 2: $|k| \leq n$.

Lấy một mở rộng hữu hạn $L \supseteq k : |L| > n$.

Theo trường hợp 1 tồn tại $b_1, b_2, \dots, b_r \in L$ để: $f(b_1, \dots, b_r) \neq 0$.

Vậy ta có $M^L \cong N^L$ như R^L -môđun.

Đặt $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ là k -cơ sở của L thì xem như R -môđun.

$M^L = M \otimes_k L = (M \otimes \alpha_1) \oplus \dots \oplus (M \otimes \alpha_t)$ là đẳng cấu tới $t.M$ (tổng trực tiếp các bảng sao của M).

Vì mỗi $(M \otimes \alpha_i)$ là R -đẳng cấu tới M , trước đó trên R ta có $t.M \cong t.N$.

Dựa trên sự phân tích Krull-Schmidt của M, N chúng ta kết luận rằng

$$t.M \cong t.N \Rightarrow M \cong N \quad (\text{theo 2.1.19})$$

2.1.21. Bổ đề:

Cho R là một vành và $\bar{R} = R/J; J < R$ và $J \subseteq \text{rad}R, J \neq \text{rad}R$. Đặt P, Q là các R -môđun phải, xạ ảnh hữu hạn sinh thì $P \cong Q$ như R -môđun $\Leftrightarrow P/PJ \cong Q/QJ$ như $\bar{R}$ -môđun.

Chứng minh

Xét biểu đồ

Với $\bar{f}$ là đẳng cấu từ $P/PJ \rightarrow Q/QJ$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad} & P/PJ \\ \exists f' \downarrow \text{dashed} & & \downarrow \bar{f} \\ Q & \xrightarrow{\pi_1} & Q/QJ \end{array}$$

Vì P là R -môđun xạ ảnh, tồn tại một đồng cấu $f : P \rightarrow Q$ để biểu đồ giao hoán.

Vì $\bar{f}$ là toàn cấu nên $\text{im}f + QJ = Q$.

Vì Q hữu hạn sinh, theo bổ đề Nakayama suy ra $\text{im}f = Q \Rightarrow f$ là toàn cấu.

Mà Q cũng xạ ảnh nên tồn tại phân tích $P = P' \oplus Q'$, ở đó $P' = \ker f$ và $f': Q' \rightarrow Q$ là đẳng cấu.

Ta lại có: $P/PJ \cong P'/P'J \oplus Q'/QJ$, $\bar{f}$ là đẳng cấu.

Suy ra $P'/P'J = 0 \Rightarrow P' = P'J$.

Tuy nhiên hạn tử trực tiếp của P là P' cũng hữu hạn sinh như một R -môđun.

Áp dụng bổ đề Nakayama lần nữa ta thấy $P' = 0$, nghĩa là f là tương ứng 1-1.

Thế thì $f : P \rightarrow Q$ là một đẳng cấu.

2.1.22. Định lý:

Cho (R, J) là một vành địa phương thì mọi R -môđun hữu hạn sinh, xạ ảnh P là môđun tự do.

Chứng minh

$J = \text{rad}R$, P/PJ là môđun hữu hạn sinh, xạ ảnh trên R/J - là một vành chia nên ta có $P/PJ \cong (R/RJ)^n$, với $n \in \mathbb{Z}^+$.

Theo bổ đề (2.1.21) ta có $P \cong R^n$ -tự do. (đpcm)

Định lý (2.1.22) có nhiều ứng dụng đẹp, sử dụng nó ta có thể thu gọn một kết quả cổ điển đại diện của nhóm hữu hạn đặc số p . Xét vành artin trái R , vì một R -môđun trái ${}_R R$ có một chuỗi hợp thành, trước đó ${}_R R$ có một phân tích Krull-Schmidt $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$.

Mọi R -môđun trái đẳng cấu với U_i ($1 \leq i \leq n$) được gọi là R -môđun chính không phân tích được.

2.2. VÀNH NỬA ĐỊA PHƯƠNG

Trong phần này ta sẽ giới thiệu một lớp mới của vành đó là vành nửa địa phương, đây là một lớp lớn bao gồm tất cả các vành địa phương, vành artin trái (phải), đại số hữu hạn chiều trên một trường.

2.2.1. Định nghĩa:

Một vành R được gọi là nửa địa phương nếu $R/\text{rad}R$ là vành artin trái (hay định nghĩa tương đương $R/\text{rad}R$ là vành nửa đơn).

2.2.2. Mệnh đề:

Cho R là vành, xét hai điều kiện sau:

- a) R là nửa địa phương
- b) R có hữu hạn idêan trái tối đại.

Trong trường hợp tổng quát ta luôn có b) suy ra a) còn a) suy ra b) đúng khi $R/\text{rad}R$ giao hoán.

Chứng minh

Trong cả hai trường hợp ta có quyền giả sử $\text{rad}R = 0$ (tức R là J -nửa đơn)

Giả sử có b) và gọi $m_1, m_2, \dots, m_n$ là các idêan tối đại trái của R thì $\bigcap_{i=1}^n m_i = 0$.

Từ đó ta có đơn cấu R -môđun trái: $R \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n R/m_i$.

Do đó R có một chuỗi hợp thành, theo (1.2.5) R là vành artin trái.

Vậy ta có a).

Vì $\text{rad}R = 0$ nên R là tích trực tiếp hữu hạn của các trường (theo định lý Wedderburn).

Suy ra số các idêan tối đại trong R là số của các thừa số trong phân tích này, từ đó ta có b).

Nhận xét:

- 1) Trong (2.2.2) trong trường hợp tổng quát ta không có a) suy ra b)
- 2) Từ (2.2.2) ta có vành địa phương là vành nửa địa phương, ngược lại không đúng.

Sau đây ta xét một số ví dụ:

2.2.3. Ví dụ: Cho A là vành nửa địa phương thì $R = M_n(A)$ cũng là vành nửa địa phương.

Theo nhận xét (1.2.2) ta có $\text{rad}R = M_n(\text{rad}A)$.

Thế thì $R/\text{rad}R \cong M_n(A/\text{rad}A)$.

Vì $A/\text{rad}A$ là nửa đơn nên $M_n(A/\text{rad}A)$ nửa đơn (theo chú ý 3).

Vậy ta có $R = M_n(A)$ là vành nửa địa phương.

2.2.4. Ví dụ: Một tích trực tiếp hữu hạn các vành địa phương là vành nửa địa phương.

2.2.5. Mệnh đề:

Cho k là một vành nửa địa phương giao hoán và R là một k -đại số, hữu hạn sinh như k -môđun thì R là một vành nửa địa phương và

$$\text{rad}R \supseteq (\text{rad}k)R \supseteq (\text{rad}R)^n, \text{ với } n \geq 1.$$

Chứng minh

Đặt $J = \text{rad}k$. Theo định lí (1.2.13) ta có $J.R \in \text{rad}R$.

Ta xem R/JR như là k/J -môđun (hữu hạn sinh).

Vì k/J là artin nên R/JR là một môđun artin.

Đặc biệt R/JR là vành artin (trái).

Do đó R là vành nửa địa phương.

Ta cũng có $\text{rad}R/JR = \text{rad}(R/JR)$ là lũy linh nên tồn tại số tự nhiên n để:

$$(\text{rad}R/JR)^n = 0.$$

Suy ra $(\text{rad}R)^n \subseteq JR$.

2.2.6. Mệnh đề:

Cho R là một vành nửa địa phương và I là một idêan của R thì

$$\text{rad}(R/I) = (\text{rad}R + I)/I \text{ và } R/I \text{ là vành nửa địa phương.}$$

Chứng minh

Đặt $J = \text{rad}R$, xét đồng cấu thương: $R \rightarrow \bar{R} = R/I$.

Ta có: $\bar{J} = (J + I)/I \subseteq \text{rad}\bar{R}$, suy ra $(\text{rad}\bar{R})/\bar{J} = \text{rad}(\bar{R}/\bar{J}) = \text{rad}(R/(I + J))$

Vì $R/(I + J)$ là vành thương của vành nửa đơn R/J nên

$$R/(I + J) \text{ cũng nửa đơn.}$$

Vậy $\text{rad}(R/(I + J)) = 0$, suy ra $\text{rad}\bar{R} = \bar{J}$.

Từ đó ta có: $\bar{R}/\text{rad}\bar{R} = \bar{R}/\bar{J} \cong R/(I + J)$

Suy ra $R/(I + J)$ là nửa đơn.

Vậy $\bar{R}$ là vành nửa địa phương.

Tiếp theo ta nghiên cứu một số tính chất khả nghịch của các vành nửa địa phương. Dễ thấy rằng vành địa phương là vành Dedekind-hữu hạn do đó các vành nửa địa phương cũng vậy.

2.2.7. Mệnh đề:

Một vành nửa địa phương R là Dedekind- hữu hạn.

Chứng minh

Theo định lí (1.2.4) vành nửa đơn $R/\text{rad}R$ là Dedekind- hữu hạn.

Áp dụng (1.1.11) suy ra đpcm.

2.2.8. Định nghĩa:

Một vành E được gọi là có *ổn định trái hạng 1* nếu $Ea + Eb = E$ ($a, b \in E$), tồn tại $e \in E$ để $a + eb \in U(E)$

Nhận xét:

Cho $b = 0$ điều kiện này để E là Dedekind- hữu hạn.

Ta thấy một vành nửa địa phương có *ổn định trái hạng 1*, ngược lại không đúng.

2.2.9. Định lý giản ước:

Cho R là một vành và A, B, C là các R -môđun trái. Giả sử $E = \text{End}(A)$ có *ổn định trái hạng 1* (E là vành nửa địa phương cũng được) thì $A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$

Chứng minh

Vì $A \oplus B = A \oplus C$ nên tồn tại toàn cầu chẻ $(f, g): A \oplus B \rightarrow A$ với $\text{Ker}(f, g) \cong C$.

Đặt $\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix}: A \rightarrow A \oplus B$ là chẻ thì $1_A = (f, g) \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = f \cdot f' + g \cdot g'$

Suy ra $E \cdot f f' + E \cdot g g' = E \Leftrightarrow E \cdot f' + E g g' = E$.

Vì E có *ổn định trái hạng 1* nên $\exists e \in E$ để: $f' + e g g' = u \in U(E)$

Bây giờ ta có $(1, eg) \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = u \Rightarrow \text{Ker}(1, eg) \cong \text{Ker}(f, g)$ (Vì mỗi Ker đó đều đẳng

cấu với $(A \oplus B) / \text{Im} \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix}$).

Mặt khác dễ thấy rằng $\text{Ker}(1, eg) \cong B, \text{Ker}(f, g) \cong C$.

Vậy nên $B \cong C$

2.2.10. Hệ quả:

Cho k là một vành nửa địa phương, noether, giao hoán và R là một k -đại số mà hữu hạn sinh như k -môđun. Đặt A là một R -môđun trái hữu hạn sinh và B, C là R -môđun trái tùy ý.

Khi đó: $A \oplus B \cong A \oplus C \Rightarrow B \cong C$

Chứng minh

Dễ kiểm tra $E = \text{End}({}_R A)$ là vành nửa địa phương.

Suy ra E có ổn định trái hạng 1.

Thật vậy, xem E như k -môđun con của $\text{End}({}_k A)$. Vì A hữu hạn sinh trên R nên A hữu hạn sinh trên k .

Suy ra $\text{End}({}_k A)$ hữu hạn sinh như một k -môđun.

Vì k là noether nên $E = \text{End}({}_k A)$ hữu hạn sinh như k -môđun

Áp dụng (2.2.5) ta có E là vành nửa địa phương.

Suy ra $E = \text{End}({}_k A)$ có ổn định trái hạng 1

Áp dụng (2.2.8) suy ra đpcm.

Để kết thúc phần này chúng ta sẽ đưa ra một số kết quả giản ước của các môđun xạ ảnh hữu hạn sinh. Nghiên cứu sự giản ước của các môđun là vấn đề hấp dẫn trong k -lý thuyết đại số, trong trường hợp tổng quát sự giản ước các môđun xạ ảnh hữu hạn sinh có thể không thực hiện được, điều này dẫn ta đến định nghĩa: Một môđun (trái) hữu hạn sinh P trên một vành R được gọi là *ổn định tự do* nếu tồn tại hai số nguyên m, n để $P \oplus R^m \cong R^n$ như R -môđun (trái). Từ đó cho ta kết quả:

2.2.11. Định lý:

Cho R là một vành có ổn định trái hạng 1 (R là vành nửa địa phương). Khi đó:

1) Cho A, B, C là các môđun trái, trong đó A là R -môđun trái, xạ ảnh hữu hạn sinh thì $A \oplus B \cong A \oplus C \Rightarrow B \cong C$.

2) R có cơ sở bất biến (hay cho các số nguyên dương $m, n: R^m \cong R^n \Rightarrow m = n$ (ngoại trừ $R = 0$)).

3) Mọi môđun (hữu hạn sinh) ổn định tự do P_R là tự do.

4) $M_n(R)$ là Dedekind- hữu hạn.

Chứng minh

1) Chọn một R -môđun trái A' để $A \oplus A' \cong R^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Từ giả thiết $A \oplus B \cong A \oplus C \Rightarrow R^n \oplus B \cong R^n \oplus C$.

Lúc này cho phép ta xóa một bản sao của R , vì vậy có thể giả sử $A = R$.

Tự đẳng cấu vành $\text{End}({}_R A) = \text{End}({}_R R) \cong R$ có ổn định trái hạng 1.

Áp dụng định lý giản ước ta có đpcm.

2) Giả sử $R^m \cong R^n$ nhưng $n > m$, giản ước R^m được $R^{n-m} = 0 \Rightarrow R = 0$

3) Giả sử $P \oplus R^r \cong R^s$

Nếu $r > s$, giản ước R^s thì $R = 0$ và $P = 0$ (vô lý)

Vậy $r \leq s$, giản ước R^r thì $P \cong R^{s-r}$ tự do.

4) Lấy $\alpha, \beta \in M_n(R)$ thỏa $\alpha\beta = I$ (đơn vị).

α được định nghĩa là một toàn cấu của R -môđun trái từ: $R^n \rightarrow R^n$ mà đồng cấu chẻ là $\beta: R^n \rightarrow R^n$.

Suy ra ta có một đẳng cấu $R^n \cong R^n \oplus \text{Ker}\alpha$, giản ước R^n được $\text{Ker}\alpha = 0$.

Vậy α là đẳng cấu, tức α khả nghịch trong $M_n(R) \Rightarrow \beta\alpha = I$

CHƯƠNG 3: MỘT SỐ NGHIÊN CỨU VỀ CÁC LŨY ĐẲNG TRONG CÁC VÀNH ĐỊA PHƯƠNG, NỬA ĐỊA PHƯƠNG VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Trong chương II chúng ta có dụng các lũy đẳng trong các vành, trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu có hệ thống các lũy đẳng trong một vành. Trong vành giao hoán $R \neq (0)$ có lũy đẳng e không tầm thường thì R phân tích thành tích trực tiếp của hai môđun Re và $R(1-e)$.

Trong vành không giao hoán các tính chất đó vẫn đúng nếu ta thay từ “lũy đẳng” bởi từ “lũy đẳng tâm”. Thật vậy một vành khác (0) là không phân tích được khi và chỉ khi nó không có tâm lũy đẳng không tầm thường. Để hiểu rõ cấu trúc các vành đó rất quan trọng để nghiên cứu các lũy đẳng của họ.

Điều quan trọng đầu tiên về các lũy đẳng trong các vành tùy ý được khám phá bởi Charles Sanders Peirce: Cho mọi lũy đẳng e trong vành R , chúng ta có ba phân tích sau:

$$(3.1) \quad R = Re \oplus Rf$$

$$(3.2) \quad R = eR \oplus fR$$

$$(3.3) \quad R = eRe \oplus eRf \oplus fRe \oplus fRf, \text{ trong đó } f = 1 - e \text{ là bù lũy đẳng với } e$$

$$(3.4) \quad eRe = \{e \in R : er = r = re\}, fRf = \{r \in R : fr = r = rf\}$$

$$(3.5) \quad \text{Bổ đề: } e \text{ thuộc tâm lũy đẳng} \Leftrightarrow eRf = fRe$$

Chứng minh

$$\text{Cho } r \in R, erf = 0, \text{ và } fre = 0 \Rightarrow er = ere = re$$

Một minh họa rất tốt cho phân tích Peirce (3.3) được cho bởi ví dụ của một vành ma trận đầy đủ $R = M_n(k)$, ở đó k là vành.

Nếu r là số nguyên $1 < r < n$ và e là ma trận lũy đẳng $f = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ với r số 1.

Với bù lũy đẳng $f = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ với $n - r$ số 1.

Bằng tính toán thấy rằng $eRe = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $eRf = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $fRe = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\}$,

$fRf = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ ở đó kí hiệu $*$ là ma trận khối cỡ $rxr, rx(n-r), (n-r)xr, (n-r)x(n-r)$

Tiếp theo ta xét hai lũy đẳng e và e' trong vành R và tính $\text{Hom}(eR, e'R)$ - nhóm của R -đồng cấu từ $eR \rightarrow e'R$.

3.1. Mệnh đề:

Cho e, e' là các lũy đẳng và M là R -môđun trái. Khi đó:

Có một đẳng cấu nhóm cộng tự nhiên $\lambda : \text{Hom}_R(eR, M) \rightarrow Me$.

Đặt biệt có một đẳng cấu nhóm tự nhiên: $\text{Hom}_R(eR, e'R) \cong e'R$.

Chứng minh

Cho một R -đồng cấu $\theta : eR \rightarrow M$,

Xét $m = \theta(e)$ thì $me = \theta(e)e = \theta(e^2) = \theta(e) = m$.

Suy ra: $m = me \in Me$.

Ta định nghĩa ánh xạ λ bởi $\lambda(\theta) = \theta(e)$ thì thấy λ là đơn cấu nhóm.

Để kiểm tra λ là toàn cấu ta xét mọi $m \in Me$ và định nghĩa

$$\theta : eR \rightarrow M$$

$$er \mapsto mr \quad \text{với } r \in R$$

Vì $er = 0 \Rightarrow mr \in Mer = 0$ nên θ là R -đồng cấu.

Ta có $\lambda(\theta) = \theta(e) = m$.

Vậy λ là toàn cấu.

Kết luận sau cùng suy ra bằng cách thay $M = e'R$.

3.2. Hệ quả:

Cho mọi lũy đẳng e thuộc vành R , ta có một đẳng cấu vành tự nhiên.

$$\text{End}_R(eR) \cong eRe$$

Chứng minh

Trong mệnh đề (3.1) cho $e = e'$ ta có đẳng cấu nhóm $\lambda : \text{End}_R(eR) \rightarrow eRe$.

Suy ra λ là đẳng cấu vành.

Thật vậy: Lấy $\theta, \theta' \in \text{End}_R(eR)$ và đặt $m = \theta(e) \in eR$ thì

$$\lambda(\theta' \cdot \theta) = \theta' \theta(e) = \theta'(m) = \theta'(em) = \theta'(e) \cdot m = \lambda(\theta') \cdot \lambda(\theta)$$

Định nghĩa: Các lũy đẳng $\alpha, \beta \in R$ được gọi là trực giao nếu $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$

3.3. Mệnh đề:

Trong vành R cho mọi lũy đẳng e khác 0. Các phát biểu sau đây tương đương:

- 1) eR là không phân tích được như một R -môđun phải (trái).
- 2) Vành eRe không có lũy đẳng không tầm thường.
- 3) e không có phân tích thành $\alpha + \beta$, ở đó $\alpha, \beta \neq 0$ là các lũy đẳng trực giao

của vành R

Nếu lũy đẳng e khác 0 thỏa một trong các điều kiện trên ta nói e là một lũy đẳng nguyên thủy của R .

Chứng minh

Do tính đối xứng trái, phải cho phép ta thấy 1), 2), 3) tương đương.

Thật vậy: 1) $\Leftrightarrow$ 2) suy ra từ (3.2).

Vì eR không phân tích được $\Leftrightarrow \text{End}(eR)$ không có lũy đẳng không tầm thường.

3) $\Rightarrow$ 2). Nếu eRe có một lũy đẳng không tầm thường α thì $\beta = e - \alpha$ (phần bù lũy đẳng của α trong eRe).

Suy ra có phân tích trực giao $e = \alpha + \beta$ (vô lí)

2) $\Rightarrow$ 3). Giả sử có một phân tích $e = \alpha + \beta$, ở đó ở đó $\alpha, \beta \neq 0$ lũy đẳng trực giao của R .

Suy ra $e\alpha = \alpha^2 + \beta\alpha = \alpha$ và $\alpha e = \alpha^2 + \alpha\beta = \alpha$.

Theo phân tích Peirce (3.4) suy ra $\alpha \in eRe$ (trái với 2))

3.4. Mệnh đề:

Cho lũy đẳng $e \in R$, các phát biểu sau đây tương đương:

- 1) eR không phân tích được mạnh như R -môđun phải (trái).
- 2) eRe là vành địa phương.

Nếu lũy đẳng e thỏa một trong các điều kiện trên ta nói e là một lũy đẳng địa phương.

Nhận xét: Một lũy đẳng địa phương luôn luôn là một lũy đẳng nguyên thủy.

Chứng minh

Suy ra từ (3.2)

3.5. Định lý:

Cho e là một lũy đẳng trong R và $J = \text{rad}R$ thì $\text{rad}(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$

Hơn nữa $eRe/\text{rad}(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$, trong đó $\bar{e}$ là ảnh của e trong $\bar{R} = R/J$

Chứng minh

Kết luận đầu tiên chỉ cần chứng minh ba điều kiện sau:

- 1) $r \in \text{rad}(eRe) \Rightarrow r \in J$
- 2) $r \in J \cap (eRe) \Rightarrow r \in eJe$
- 3) $r \in eJe \Rightarrow r \in \text{rad}(eRe)$

Ta chứng minh

- 1) Ta thấy $\forall y \in eRe, 1 - yr$ có một nghịch đảo trái trong R (với $r \in R$).

Thật vậy, trước tiên trong eRe ta có thể tìm được:

$$b \in eRe : b(e - eye.r) = e \Rightarrow b(1 - yr) = e \Rightarrow yrb(1 - yr)yre = yr$$

$$\Leftrightarrow yrb(1 - yr) = 1 - (1 - yr)$$

$$\Leftrightarrow (1 + yrb)(1 - yr) = 1$$

Vậy $1 - yr$ có nghịch đảo trái.

2) Vì $r \in J \cap eRe$ nên $r = ere \in eJe$ (do $r \in J$)

3) Ta chỉ cần chứng minh $\forall y \in eRe, e - yr$ có nghịch đảo trái trong eRe .

Vì $r \in eJe \in J$ nên tồn tại $x \in R : x(1 - yr) = 1$.

$$\text{Nhưng } e = ex(1 - yr)e = ex(e - yr) = exe(e - yr).$$

Vậy exe là một nghịch đảo trái của $e - yr$.

Phần còn lại của định lý ta phải tính eRe/eJe .

Xét ánh xạ chiếu $f : eRe \rightarrow \bar{e}R\bar{e}$

$$eRe \ni a \mapsto \bar{e}.r.\bar{e}$$

Đây là một toàn cấu vành nên có $\text{Ker} f = eJe$.

Vậy $eRe/\text{rad}(eRe) \cong \bar{e}R\bar{e}$ (định lý noether)

Tiếp theo chúng ta sẽ nghiên cứu quan hệ giữa cấu trúc idêan của eRe và R .

3.6. Định lý:

Cho e là một lũy đẳng trong R

1) Gọi N là một idêan trái của eRe thì $(RN) \cap eRe = N$.

Đặt biệt : $N \rightarrow RNR$ là một nội xạ từ idêan N đến R .

2) Gọi N là một idêan trong eRe thì $e(RNR)e = Ne$.

Đặt biệt : $N \rightarrow RNR$ là một nội xạ từ idêan của eRe đến R .

Chứng minh

1) Đặt $N_0 = (RN) \cap eRe \supseteq N$.

Vì $N_0 \subseteq eRe$ nên $N_0 = eN_0 \subseteq e.RN = eRe.N \subseteq N$.

Suy ra $N_0 = N$.

Nếu $N \subseteq eRe$ là một idêan thì $e(RNR)e = eR(eNe)Re = (eRe)N(eRe) = N$

Nếu R' là một idêan khác của eRe thì

$$(RNR)(RN'R) = RNRN'R = R(Ne)R(eN')R = RN(eRe)N'R = R(NN')R$$

Giả sử e là đầy đủ tức $ReR = R$.

Một idêan B trong R , xét idêan $N = eRe$ trong eRe thì

$$R(eBe)R = Re(RBR)eR = (ReR)B(ReR) = RBR = B.$$

Suy ra ánh xạ đã cho là toàn cấu.

3.7. Chú ý:

Trong trường hợp khi e là một lũy đẳng đầy đủ ta cũng thấy từ chứng minh trên rằng $radR$ trong R tương ứng với $rad(eRe)$ trong eRe dưới idêan tương ứng trong (3.6)(2).

Vậy $e(radR)e = rad(eRe)$ (theo 3.5)

3.8. Hệ quả:

Cho $e \neq 0$ là một lũy đẳng trong R . Nếu R là J-nửa đơn (nửa đơn, đơn, nguyên tố, nửa nguyên tố, noether, artin) thì eRe cũng vậy.

Chứng minh

eRe là J -nửa đơn cho từ (3.5), các trường hợp khác suy ra từ (3.6).

3.9. Ví dụ:

Cho k là một vành và $R = M_n(k)$.

Gọi $e = E_{11}$ là ma trận đơn vị trong R , bằng tính toán $ere = r_{11}e$, với mọi ma trận $r = (r_{ij})$.

Vậy $eRe \cong k$.

Theo định lý (3.5) và kết quả trước ta có $rad(M_n(k)) = M_n(radk)$.

Ta cũng dễ kiểm tra rằng e là lũy đẳng đầy đủ, thế thì (3.6)(2) gọi cho ta tương ứng 1–1 giữa idêan của k và của $M_n(k)$.

Tiếp theo ta nghiên cứu một lũy đẳng nữa đó là lũy đẳng bất khả quy.

3.10. Định nghĩa:

Ta nói rằng một lũy đẳng $e \neq 0$ là bất khả quy phải (hoặc trái) nếu eR (hoặc Re) là idêan phải (hoặc trái) tối tiểu của R .

Nhận xét: Theo (1.2.14) một idêan tối tiểu I của R được sinh bởi một lũy đẳng bất khả quy nếu và chỉ nếu $I^2 \neq 0$.

3.11. Mệnh đề:

Cho e là một lũy đẳng.

- 1) Nếu e là bất khả quy thì eRe là một vành chia.
- 2) Phần đảo của (1) đúng nếu R là vành nửa nguyên tố.

Chứng minh

- 1) Suy ra từ bổ đề Schur, vì theo (3.2) có $eRe \cong \text{End}_R(eR)$
- 2) Giả sử R là vành nửa nguyên tố và eRe là vành chia.

Xét phần tử $er \in eR$ với $r \in R$.

Vì R là nửa nguyên tố nên $erRer \neq 0$ thì $erse \neq 0, s \in R$.

Đặt ete là nghịch đảo của $erse$ trong eRe thì $(erse)(ete) = e$, trước đó $erR = eR$.

Vậy eR là một R -môđun bất khả quy. (đpcm)

3.12. Hệ quả:

1) Một lũy đẳng bất khả quy phải thì luôn luôn là lũy đẳng địa phương (eRe địa phương).

2) Nếu R là nửa nguyên tố thì một lũy đẳng là bất khả quy phải khi và chỉ khi R là bất khả quy trái.

3) Nếu R là nửa đơn thì một lũy đẳng là bất khả quy phải khi và chỉ khi R là địa phương khi và chỉ khi R là nguyên thủy.

Tiếp theo ta nêu một kết quả thể hiện mối quan hệ giữa các lũy đẳng bất khả quy phải và các lũy đẳng địa phương.

3.13. Tính chất:

Cho e là một lũy đẳng trong R , $J = rad R, \bar{R} = R/J$. Các phát biểu sau đây tương đương.

- 1) e là lũy đẳng địa phương trong R .
- 2) $\bar{e}$ là lũy đẳng bất khả quy phải trong $\bar{R}$.
- 2') $\bar{e}$ là lũy đẳng bất khả quy trái trong $\bar{R}$.
- 3) eR/eJ là R -môđun phải, đơn.
- 4) eJ là môđun con tối đại duy nhất của eR .

Chứng minh

Chú ý rằng $\bar{R}$ là nửa nguyên thủy thì nửa nguyên tố.

Thật vậy theo (3.12)(2) cho $(2) \Leftrightarrow (2')$.

Cũng có $\bar{e}$ bất khả quy phải khi và chỉ khi $\overline{eRe}$ là vành chia.

Theo (3.5) $\overline{eRe} \cong eRe/rad(eRe)$.

Vậy $\overline{eRe}$ là vành chia $\Leftrightarrow eRe$ là vành địa phương.

Do đó $(2) \Leftrightarrow (1)$.

Phần còn lại của chứng minh, chú ý rằng ta có $\overline{R}$ -đẳng cấu:

$$\lambda : eR/eJ \rightarrow \overline{eR}.$$

Từ đó (2) suy ra (3).

Chứng minh (3) $\Rightarrow$ (4)

Giả sử có (3) suy ra mọi idêan phải $I \subseteq eR$ không chứa trong eJ , thế thì $\lambda(I)$ phải là $\overline{eR}$.

Vì $\overline{eR}$ là $\overline{R}$ -môđun đơn, thế thì $eR = I + eJ = I + eRJ$.

Theo bổ đề Nakayama thì $I = eR$.

Vậy có (3) $\Rightarrow$ (4).

Còn (4) $\Rightarrow$ (3) là hiển nhiên vì khi có (4) thì eR/eJ là vành chia suy ra (3)

3.14. Mệnh đề:

Cho e là lũy đẳng địa phương ($e \in R$) và M là một R -môđun phải có chiều dài hữu hạn thì M có một nhân tử của chuỗi hợp thành đẳng cấu với eR/eJ .

(với $J = \text{rad} R \Leftrightarrow Me \neq 0 \Leftrightarrow \text{Hom}(eR, M) \neq 0$).

Chứng minh

Đặt $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_r$ là một chuỗi hợp thành của M (dãy con thật sự).

Trước tiên giả sử $Me \neq (0)$.

Nếu $M_i e \subseteq M_{i+1}, \forall i$ thì $Me = Me^r \subseteq M_0 = (0)$ (mâu thuẫn)

Vậy M có một nhân tử hợp thành trong V để $Ve \neq (0)$.

Lấy phần tử $v \in V : ve \neq 0$ thì $veR = V$, ta có một R -toàn cấu

$$\lambda : eR \rightarrow V = veR$$

$$er \mapsto ver \quad \text{với mọi } r \in R$$

Ta có $\text{Ker} \lambda$ là môđun con tối đại của eR .

Theo (3.13)(4) $\text{Ker} \lambda = eJ$, trước đó $V \cong eR/eJ$ (định lí Noether)

Ngược lại nếu $M_i/M_{i+1} \cong eR/eJ$ thì do $(eR/eJ)e \neq 0$ nên ta có $(M_i/M_{i+1})e \neq 0$.

Đặt biệt $Me \supseteq M_i e \neq 0$.

Phần cuối cùng suy ra từ (3.1).

Sau đây ta cho ví dụ phần tử lũy đẳng bất khả quy trái mà không bất khả quy phải.

Cho k là trường, R là k -đại số của các ma trận tam giác $\left\{ \begin{pmatrix} ab \\ 0c \end{pmatrix} \right\}$ trên k , vành này có radical $\left\{ \begin{pmatrix} 0b \\ 00 \end{pmatrix} \right\}$ với $(radR)^2 = 0$. Vậy R không nửa đơn

Cho một lũy đẳng $e = \begin{pmatrix} 10 \\ 00 \end{pmatrix} \Rightarrow Re = \left\{ \begin{pmatrix} a0 \\ 00 \end{pmatrix} \right\}, eR = \left\{ \begin{pmatrix} ab \\ 00 \end{pmatrix} \right\}$.

Vì $\dim_k Re = 1$ nên e bất khả quy trái.

Tuy nhiên $eR \supsetneq radR \supsetneq (0)$.

Vậy e không là bất khả quy phải.

Chú ý rằng $eRe = \left\{ \begin{pmatrix} a0 \\ 00 \end{pmatrix} \right\}$ là đẳng cấu với k do đó e là lũy đẳng địa phương.

Tiếp theo ta nghiên cứu khái niệm của đẳng cấu các lũy đẳng.

3.15. Mệnh đề:

Cho e, f là các lũy đẳng trong vành R . Các phát biểu sau đây là tương đương:

- 1) $eR \cong fR$ như R -môđun phải
- 1') $Re \cong Rf$ như R -môđun trái
- 2) $\exists a \in eRf, b \in fRe : e = ab, f = ba$
- 3) $\exists a, b \in R : e = ab, f = ba$

Nếu e và f thỏa một trong các điều kiện trên ta nói e và f là các lũy đẳng đẳng cấu. Kí hiệu $e \cong f$

Chứng minh

Theo tính đối xứng trái phải ta chỉ cần chứng minh $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

$(1) \Rightarrow (2)$ Cố định R -đẳng cấu $\theta: eR \rightarrow fR$.

Theo (3.1) tương ứng này phần tử $b = \theta(e) \in fRe$.

Tương tự $\theta^{-1}: fR \rightarrow eR$ tương ứng phần tử $a = \theta^{-1}(f) \in eRf$.

Suy ra $ab = \theta^{-1}\theta(e) = e$.

Chứng minh tương tự ta có $ba = f$

$(2) \Rightarrow (3)$ hiển nhiên

$(3) \Rightarrow (1)$ Cho a, b thỏa (3), ta có $be = b(ab) \in fR$ và $af = a(ba) \in eR$.

Ta định nghĩa $\theta: eR \rightarrow fR$ và $\theta': fR \rightarrow eR$

$$x \mapsto bx \quad y \mapsto ay$$

Thế thì $\theta'\theta(e) = \theta'(be) = abe = e^2 = e$

$$\theta\theta'(f) = \theta(af) = baf = f^2 = f$$

Vậy: $\theta'\theta = 1, \theta\theta' = 1$ (đpcm)

Chú ý nếu R giao hoán thì theo (3) ta có $e \cong f$, tức $e = f$.

Cho $e \in R$ là lũy đẳng bất kỳ và đặt $e' = 1 - e$ thì ta có một phân tích

$$R = eR \oplus e'R$$

Vậy $P = eR$ là R -môđun phải xạ ảnh.

Cố định idêan $I \subseteq R$, đặt $\bar{R} = R/I$ thì $P/PI = eR/eI \cong \bar{e}\bar{R}$ như $\bar{R}$ -môđun.

Sử dụng bổ đề (2.1.21) ta có kết quả sau:

3.16. Mệnh đề:

Cho I là một idêan của R nằm bên trong $\text{rad}R$ thì cho các lũy đẳng $e, f \in R$ ta có $e \cong f$ trong $R \Leftrightarrow \bar{e} \cong \bar{f}$ trong $\bar{R} = R/I$.

Đặc biệt: Nếu $\bar{e} = \bar{f}$ thì $e \cong f$.

Mục tiêu tiếp theo của chúng ta là nghiên cứu khái niệm phép nâng các lũy đẳng. Nếu I là một idêan trong vành R , ta nói rằng “một lũy đẳng $x \in R/I$ có thể được nâng lên tới R nếu tồn tại một lũy đẳng $e \in R$ mà ảnh dưới ánh xạ tự nhiên $R \rightarrow R/I$ là x .”

3.17. Mệnh đề:

Cho $e \in R$ là một lũy đẳng và $I \subseteq \text{rad}R$ là một idêan của R . Nếu $\bar{e}$ là nguyên thủy trong $\bar{R} = R/I$ thì e là nguyên thủy trong R . Đảo lại nếu các lũy đẳng trong $\bar{R}$ có thể được nâng lên tới R .

Chứng minh

Ta xem phân biệt trước tiên cơ sở quan sát về $\text{rad}R$.

Nhận xét: chỉ có lũy đẳng $\alpha \in \text{rad}R$ thì $\alpha = 0$.

Thật vậy, xét bù lũy đẳng $1 - \alpha$.

Vì $\alpha \in \text{rad}R$ nên $1 - \alpha$ là đơn vị.

Tức là $1 - \alpha = 1$.

Vậy $\alpha = 0$.

Để chứng minh (3.17) đặt $e = \alpha + \beta$ là một phân tích được của e thành các lũy đẳng trực giao không tầm thường ($\alpha, \beta \in R$).

Theo nhận xét trên thì $\alpha \neq 0 \Rightarrow \bar{\alpha} \neq 0$ và $\beta \neq 0 \Rightarrow \bar{\beta} \neq 0$ trong $\bar{R}$, thế thì $\bar{e} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ là một phân tích được không tầm thường của $\bar{e}$ thành các lũy đẳng trực giao $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \bar{R}$.

Đảo lại: Giả sử $\bar{e} = x + y$ là một phân tích được không tầm thường của $\bar{e}$ thành các lũy đẳng trực giao $x, y \in \bar{R}$, ở đây ta giả sử rằng có một lũy đẳng có thể được nâng lên tới R .

Đặt α, β là các lũy đẳng của R để $\bar{\alpha} = x, \bar{\beta} = y$ thì ta có

$\alpha\beta \equiv \beta\alpha \equiv 0 \pmod{I}$. Ta sẽ chỉ ra:

Có một lũy đẳng $\beta' \in R$ trực giao với α : $\beta' \equiv \beta \pmod{I}$ (7)

Trước tiên ta đặt $e' = \alpha + \beta'$, đây là một lũy đẳng trong R và nó không nguyên thủy (vì $\alpha, \beta' \neq 0$). Tuy nhiên $\bar{e}' = \bar{\alpha} + \bar{\beta}' = \bar{\alpha} + \bar{\beta} = \bar{e}$ trong $\bar{R}$.

Theo (3.16) thì $e \cong e'$ trong R , trước đó e cũng không nguyên thủy trong R .

Để chứng minh (7) chú ý rằng $\beta\alpha \in I \subseteq \text{rad}R$.

Suy ra $1 - \beta\alpha$ khả nghịch.

Xét lũy đẳng $\beta_0 = (1 - \beta\alpha)^{-1}\beta(1 - \beta\alpha)$.

Trong R ta có $\bar{\beta}_0 = \bar{\beta}$ và $\beta_0\alpha = (1 - \beta\alpha)^{-1}\beta(1 - \beta\alpha) = 0$

Tuy nhiên $\alpha\beta_0$ có thể khác 0. Đặt $\beta' = (1 - \alpha)\beta_0$.

Vì $\overline{\alpha\beta_0} = \bar{\alpha}\bar{\beta} = 0$ nên $\bar{\beta}' = \bar{\beta}_0 = \bar{\beta}$.

Bây giờ không chỉ $\beta'\alpha = (1 - \alpha)\beta_0\alpha = 0$ mà còn $\alpha\beta' = \alpha(1 - \alpha)\beta_0 = 0$ và β' là một lũy đẳng vì $\beta'^2 = (1 - \alpha)\beta_0(1 - \alpha)\beta_0 = (1 - \alpha)\beta_0^2 = \beta'$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

3.18. Mệnh đề:

Cho $I \subseteq \text{rad}R$ là một idêan của R để các lũy đẳng trong $\bar{R} = R/I$ có thể được nâng lên tới R thì mọi tập đếm được $\{x_1, x_2, \dots\}$ gồm các lũy đẳng đôi một trực giao trong $\bar{R} = R/I$ đều có một tập các lũy đẳng đôi một trực giao $\{e_1, e_2, \dots\}$ trong R để:

$$\bar{e}_i = x_i \text{ với mọi } i.$$

Chứng minh

Giả sử đã tìm được tập $\{e_1, e_2, \dots\}$ thỏa điều kiện đầu bài. Ta tìm e_{n+1} .

Đặt α là lũy đẳng $e_1 + e_2 + \dots + e_n$ và đặt β là một lũy đẳng của R nâng tới x_{n+1} thì $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ là các lũy đẳng trực giao trong $\overline{R}$.

Theo (3.9) ta có thể tìm một lũy đẳng e_{n+1} trực giao với α để $\overline{e_{n+1}} = \overline{\beta} = x_{n+1}$.

Vì $e_i = \alpha e_i = e_i \alpha$, $\forall i \leq n$ nên e_{n+1} trực giao với mỗi $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Vậy ta có đpcm.

3.19. Ví dụ:

Cho R là vành mà không Dedekind-hữu hạn (tức là tồn tại a, b thuộc R để $ab = 1$ nhưng $e = ba \neq 1$) thì $e^2 = b(ab)a = e$. Vậy e là một lũy đẳng (không tầm thường).

Cho $i, j \geq 0$, đặt $e_{ij} = b^i(1-e)a^j$ thì $\{e_{ij}\}$ là tập ma trận đơn vị thỏa $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ (ở đó δ_{jk} là Kronecker deltas).

Để thấy điều này, ta chú ý rằng $a^ib^i = 1, \forall i$ và $a(1-e) = 0 = (1-e)b$

Nếu $j \neq k$ thì a^jb^k là $a^{|j-k|}$ hoặc $b^{|j-k|}$.

Vậy $e_{ij}e_{kl} = b^i(1-e)a^jb^k(1-e)a^l = e_{il}$

Chú ý mỗi $e_{ij} \neq 0$ cho ta:

Nếu $b^i(1-e)a^j = 0$ thì $0 = a^ib^i(1-e)a^jb^j = 1-e$ (mâu thuẫn).

Đặc biệt: $\{e_{ii} : i \geq 0\}$ là một dãy không hữu hạn của các lũy đẳng trực giao từng đôi một trong R và R chứa một tổng trực tiếp vô hạn của các idêan phải khác 0 là

$$\bigoplus_{i \geq 0} e_{ii}R.$$

3.20. Định lí:

Cho I là một nil-đêan trong R (tức $I \subseteq \text{rad}R$). Gọi $a \in R : \bar{a} \in \bar{R} = R/I$ là một lũy đẳng thì tồn tại một lũy đẳng $e \in aR : \bar{e} = \bar{a} \in \bar{R}$.

Chứng minh

Đặt $b = 1 - a$, ta có $ab = ba = a - a^2 \in I$, vậy $(ab)^m = 0$ với $m \geq 1$.

Ta có $1 = (a + b)^{2m} = a^{2m} + r_1 a^{2m-1} b + \dots + r_m a^m b^m + \dots + b^{2m}$ với $r_i \in \mathbb{Z}^+$.

$$\begin{aligned} \text{Đặt} \quad e &= a^{2m} + r_1 a^{2m-1} b + \dots + r_m a^m b^m \in aR \\ f &= r_{m+1} a^{m-1} b^{m+1} + \dots + b^{2m} \end{aligned}$$

Vì $a^m b^m = b^m a^m = 0$ nên $ef = 0$.

Vì vậy $e(e + f) = e^2$ hay $e = e^2$.

Cuối cùng $ab \in I \Rightarrow e \equiv a^{2m} \equiv a \pmod{I}$ (đpcm)

3.21. Hệ quả:

Cho R là vành nửa địa phương để $I = \text{rad}R$ là một nil-đêan.

1) Nếu R không có các lũy đẳng không tầm thường và $R \neq (0)$ thì R là một vành địa phương.

2) Một đêan phải $N \subseteq R$ chứa một lũy đẳng khác 0 khi và chỉ khi N không là nil-đêan.

Chứng minh

1) Nếu R không có các lũy đẳng không tầm thường, theo (3.20) thì $\bar{R} = R/I$ cũng vậy.

Theo định lí Wedderbur-Artin suy ra $\bar{R}$ là một vành chia.

Vậy R là vành địa phương.

2) Giả sử N không nil, vì I là nil nên ảnh của N trong $\bar{R}$ chứa một lũy đẳng khác 0.

Đặt $a \in N : 0 \neq \bar{a} = \bar{a}^2 \in \bar{R}$.

Theo (3.20) tồn tại một lũy đẳng $e \in aR \subseteq N : \bar{e} = \bar{a} \neq 0$ (đpcm)

3.22. Định lí:

Cho k là một vành giao hoán noether nửa địa phương mà I -adically đầy đủ, $I = \text{rad}k$ và R là một k -đại số mà hữu hạn sinh như k -môđun thì mọi R -môđun trái hữu hạn sinh M có một phân tích Krull-Schmidt, tức là

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_r$$

trong đó mỗi M_i là một R -môđun con không phân tích được của M . Hiển nhiên r xác định duy nhất và dãy $M_1, M_2, \dots, M_r$ xác định duy nhất sai khác một hoán vị.

Chứng minh

Theo giả thiết suy ra các R -môđun con của M thỏa ACC.

Vậy một phân tích Krull-Schmidt $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_r$ tồn tại.

Xét k -đại số $E_i = \text{End}_R M_i$ mà không có các lũy đẳng không tầm thường.

Vì $E_i = \text{End}_R M_i$ là hữu hạn sinh như một k -môđun và k là vành noether nên E_i cũng là hữu hạn sinh như một k -môđun.

Thế thì E_i là một vành địa phương.

Vậy M_i là không phân tích được mạnh, $1 \leq i \leq r$.

Tính duy nhất của (3.22) suy ra từ định lí Krull-Schmidt-Azumaya.

Vậy ta có được đpcm.

PHẦN KẾT LUẬN

Trong luận văn này tôi đã nghiên cứu một lớp vành tương đối lớn và quan trọng đó là vành địa phương và vành nửa địa phương, đồng thời nêu một số ứng dụng của chúng trong việc phân tích và giảng ước các môđun. Cũng trong luận văn này nghiên cứu một cách có hệ thống các phần tử lũy đẳng trong vành. Sau đó quay trở lại với các vấn đề của vành địa phương, vành nửa địa phương và sự phân tích các môđun trên chúng.

Qua luận văn này, tác giả đã học tập và làm quen với một số công việc khởi đầu trong nghiên cứu, biết được phương pháp nghiên cứu một vấn đề dưới nhiều góc độ khác nhau. Tuy nhiên với sự hiểu biết còn hạn chế của tác giả cũng như thời gian ngắn của khóa học, tác giả rất mong nhận được sự đóng góp và chỉ bảo của quý thầy cô trong hội đồng.

PHẦN TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1].Ngô Thúc Lan (1987), Đại số và số học, Tập II, III, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [2].Z.I.Borevich and I.R.Shafarevich (1966), Number Thoery, Academic Press.
- [3].I.N. Herstein: Noncommutative Rings, Math., Assoc. of America, (1968),
- [4].T.Y.Lam , A First Course in Noncommutatative Rings.
- [5].Serge Lang (1978), Đại số, phần II, NXB Đại học và THCN, Hà Nội.
- [6].N. Jacobson: Structure of rings, Amer.Math.Soc., Providence, R.I., (1956),