

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

HUỲNH THÁI SƠN

**CẤP TĂNG VÀ SỰ PHÂN BỐ KHÔNG ĐIỂM
CỦA HÀM NGUYÊN**

Chuyên ngành: Toán Giải tích

Mã số: 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS.TS ĐẠU THẾ CẤP

MỤC LỤC

MỤC LỤC	2
MỞ ĐẦU.....	5
1. Lý do chọn đề tài.....	5
2. Mục đích nghiên cứu.....	5
3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu	5
4. Ý nghĩa khoa học, thực tiễn.....	5
Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	6
1.1. Hàm giải tích.....	6
1.1.1 Định nghĩa.....	6
1.1.2 Định lý	6
1.2. Tích phân phức, tích phân Stieljes.....	6
1.2.1 Định lý	6
1.3. Lý thuyết Cauchy	7
1.3.1 Định lý (Định lý Cauchy).....	7
1.3.2 Định lý (Sự tồn tại của nguyên hàm)	8
1.3.3 Định lý (Sự tồn tại logarit).....	8
1.3.4 Định lý (Công thức tích phân Cauchy).....	8
1.3.5 Định lý (Công thức tích phân Cauchy đối với đạo hàm).....	8
1.3.6 Định lý (Định lý Morera).....	9
1.3.7 Định lý (Bất đẳng thức Cauchy đối với đạo hàm).....	9
1.3.9 Định lý (Định lý Liouville)	9
1.3.10 Định lý (Định lý giá trị trung bình).....	9
1.4. Hàm điều hòa.....	9
1.4.1 Định nghĩa.....	9
1.4.2 Định lý	10
1.4.3 Định lý	10
1.5. Lý thuyết chuỗi.....	10
1.5.1 Định lý (Định lý Weierstrass)	10
1.5.2 Định lý (Định lý Taylor).....	10
1.5.3 Định lý (Định lý duy nhất).....	11
1.5.4 Định lý	11
1.5.5 Định lý (Định lý Laurent).....	12

1.5.6 Định nghĩa.....	12
1.6. Hàm nguyên và hàm phân hình.....	12
1.6.1 Định nghĩa.....	12
1.6.2 Định lý	13
1.6.3 Định nghĩa.....	13
Chương 2. CẤP TĂNG CỦA HÀM NGUYÊN.....	14
2.1 Cấp và loại của hàm nguyên.....	14
2.1.1 Định lý	14
2.1.2 Định nghĩa.....	14
2.1.3 Định nghĩa.....	15
2.2. Mối liên hệ của cấp , loại và hệ số Taylor của hàm nguyên	15
2.2.1 Bổ đề	15
2.2.2 Bổ đề	16
2.2.3 Định lý	17
2.2.4 Định lý	18
2.2.5 Ví dụ.....	19
2.3. Các công thức của hàm giải tích trên đĩa	20
2.3.1 Định lý (Công thức Schwarz)	20
2.3.2 Định lý (Công thức Poisson).....	20
2.3.3 Định lý (Công thức Poisson – Jensen).....	21
2.3.4 Định lý (Công thức Jensen).....	22
2.3.5 Định nghĩa.....	23
2.3.6 Hệ quả của Công thức Jensen.....	24
Chương 3. PHÂN BỐ KHÔNG ĐIỂM.....	25
3.1. Số mũ hội tụ và mật độ trên, mật độ dưới của dãy không điểm	25
3.1.1 Định nghĩa.....	25
3.1.2 Bổ đề	25
3.1.3 Bổ đề	26
3.1.4 Định lý (Định lý Hadamard).....	26
3.1.5 Định lý	27
3.2. Phân tích hàm nguyên thành nhân tử.....	28
3.2.1 Định nghĩa.....	28
3.2.2 Định lý (Định lý Hadamard).....	29

3.3. Đánh giá tích chính tắc	30
3.3.1 Bổ đề (Bổ đề đánh giá của Borel).....	30
3.3.2 Định lý	31
3.3.3 Định lý (Định lý Borel)	32
3.4. Phân bố không điểm của hàm nguyên có cấp không nguyên.....	33
3.4.1 Định lý	33
3.4.2.Định lý	33
3.5. Phân bố không điểm của hàm nguyên có cấp nguyên	34
3.5.1 Định lý (Định lý Lindelof)	35
3.5.2 Định lý (Định lý Lindelof)	36
KẾT LUẬN.....	39
TÀI LIỆU THAM KHẢO	40

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết hàm nguyên là một phần quan trọng và đặc sắc của giải tích phức. Lý thuyết này còn được phát triển như là một tổng quát của lý thuyết đa thức. Hàm nguyên không đồng nhất bằng không chỉ có đếm được không điểm. Luận văn này nhằm tìm hiểu, khảo sát phân bố dãy không điểm của hàm nguyên thông qua cấp tăng và loại của nó.

2. Mục đích nghiên cứu

Luận văn trình bày các tính chất của cấp tăng của hàm nguyên. Sau đó xem xét các tính chất liên quan đến phân bố không điểm của hàm nguyên.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu là cấp tăng và loại của hàm nguyên, công thức tích phân, đặc trưng Nevanlinna, hàm đếm không điểm, mật độ trên mật độ dưới của dãy không điểm.

4. Ý nghĩa khoa học, thực tiễn

Luận văn hệ thống lại các các nghiên cứu đã có về phân bố không điểm của hàm nguyên thông qua cấp và loại của nó. Luận văn có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho những người quan tâm đến lĩnh vực trên.

Mặc dù bản thân đã rất cố gắng và được thầy giáo hướng dẫn tận tình giúp đỡ, nhưng vì khả năng và thời gian có hạn nên luận văn chắc còn nhiều thiếu sót. Kính mong sự góp ý của quý thầy cô và các bạn đồng nghiệp.

Nhân dịp hoàn thành luận văn, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy giáo hướng dẫn, các thầy cô giáo đã giảng dạy lớp Cao học Toán khóa 18, các bạn học, gia đình và người thân.

Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm giải tích

1.1.1 Định nghĩa

Hàm f được gọi là giải tích (hay chỉnh hình) tại z_0 nếu tồn tại $r > 0$ sao cho f có đạo hàm tại mọi $z \in D(0, r), D(z_0, r)$ là đĩa tâm z_0 bán kính r .

Hàm f được gọi là giải tích trên miền Ω nếu nó giải tích tại mọi $z \in \Omega$.

1.1.2 Định lý

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}$ là một miền và $A(\Omega)$ là tập các hàm giải tích trên Ω . Khi đó

(i) Nếu $f \in A(\Omega)$ và $f(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$ thì $\frac{1}{f} \in A(\Omega)$.

(ii) Nếu $f \in A(\Omega)$ và f chỉ nhận giá trị thực thì f là hàm hằng.

1.2. Tích phân phức, tích phân Stieljes

Cho $\gamma(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$ là đường cong trong $\mathbb{C}$. Với giả thiết γ trơn từng khúc và f liên tục trên γ , ta định nghĩa tích phân của f trên γ là

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

1.2.1 Định lý

Cho f, g là các hàm liên tục trên đường cong trơn từng khúc $\gamma, \gamma(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$. Khi đó

$$i) \int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}.$$

$$ii) \int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz, \quad \gamma^- \text{ là đường cong ngược của } \gamma,$$

$$\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t), \quad t \in [a, b].$$

iii) Nếu $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ tức tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}, \gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$ thì

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

$$iv) \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| = \int_{\gamma} |f(z)| ds, \quad ds \text{ là vi phân độ dài cung}$$

$$|dz| = ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

v) Nếu $|f(z)| \leq M$ với mọi $z \in \gamma$ và l là độ dài đường cong γ thì

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq M \int_{\gamma} |dz| = Ml.$$

Cho f là hàm bị chặn trên đoạn $[a, b]$ và F là hàm thực không giảm trên đoạn $[a, b]$.

Ta gọi phép chia P là một dãy hữu hạn

$$P = \{t_j\}_{j=1}^n, \quad t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Với mỗi phép chia P , đặt

$$S_P^F(f) = \sum_{j=1}^n M_j (F(t_j) - F(t_{j-1})), \quad s_P^F(f) = \sum_{j=1}^n m_j (F(t_j) - F(t_{j-1})),$$

trong đó $M_j = \sup \{f(x) : x \in (t_{j-1}, t_j]\}$, $m_j = \inf \{f(x) : x \in (t_{j-1}, t_j]\}$.

Hàm f gọi là khả tích Stieljes theo hàm F nếu

$$\inf \{S_P^F(f) : P\} = \sup \{s_P^F(f) : P\}.$$

Khi f khả tích Stieljes thì ta gọi tích phân Stieljes của f theo F là

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \inf \{S_P^F(f) : P\} = \sup \{s_P^F(f) : P\}.$$

Nếu F là hàm không giảm trên $[a, \infty)$ thì ta gọi tích phân Stieljes của hàm f xác định trên $[a, \infty)$ theo hàm F là

$$\int_a^\infty f(x) dF(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dF(x).$$

1.3. Lý thuyết Cauchy

1.3.1 Định lý (Định lý Cauchy)

Cho Ω là miền bị chặn, có biên là hữu hạn các đường cong trơn từng khúc. Nếu f giải tích trên Ω và liên tục trên $\overline{\Omega}$ thì $\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0$.

Giả sử f là hàm giải tích trên miền đơn liên Ω và z_0, z là hai điểm trong Ω . Khi đó

tích phân $F(z) = \int_{z_0}^z f(\eta) d\eta$ không phụ thuộc vào đường cong nối z_0 và z trong Ω .

1.3.2 Định lý (Sự tồn tại của nguyên hàm)

Cho miền đơn liên Ω và hàm f giải tích trên Ω . Khi đó với mọi $z_0 \in \Omega$, hàm F xác định bởi $F(z) = \int_{z_0}^z f(\eta) d\eta$, ở đây tích phân lấy theo đường cong trơn từng khúc bất kỳ nối z_0 với z , là một nguyên hàm của f trên Ω .

1.3.3 Định lý (Sự tồn tại logarit)

Giả sử Ω là miền đơn liên, f giải tích trên Ω khác không tại mọi $z \in \Omega$. Khi đó tồn tại hàm g giải tích trên Ω sao cho $e^g = f$.

Hàm g gọi là một logarit của f , ký hiệu $g = \log f$.

Ta gọi đường tròn tâm z_0 , bán kính r , là đường cong có phương trình

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

được ký hiệu là C_{r, z_0} , C_r hoặc $|z - z_0| = r$.

Từ đây về sau ta hiểu đường cong là đường cong trơn từng khúc, chu tuyến là chu tuyến trơn từng khúc.

1.3.4 Định lý (Công thức tích phân Cauchy)

Cho Ω là miền bị chặn, có biên là hữu hạn đường cong. Nếu f giải tích trên Ω và liên tục trên $\overline{\Omega}$ thì với mọi $z_0 \in \Omega$ ta có

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Nhận xét

Trường hợp f giải tích trên Ω , $z_0 \in \Omega$ và γ là một chu tuyến sao cho $z_0 \in \Omega_\gamma \subseteq \Omega$ thì ta có $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$.

1.3.5 Định lý (Công thức tích phân Cauchy đối với đạo hàm)

Cho hàm f giải tích trên miền Ω . Khi đó hàm f có đạo hàm mọi cấp trên miền Ω và

đạo hàm cấp n của hàm f tại z_0 được biểu diễn bởi công thức

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

trong đó γ là một chu tuyến sao cho $z_0 \in \Omega_{\gamma} \Subset \Omega$.

1.3.6 Định lý (Định lý Morera)

Cho f là một hàm liên tục trên miền đơn liên Ω và tích phân của f theo mọi đường cong đóng trong Ω đều bằng 0. Khi đó f là hàm giải tích trên Ω .

1.3.7 Định lý (Bất đẳng thức Cauchy đối với đạo hàm)

Cho hàm f giải tích trên miền Ω , $z_0 \in \Omega$ và số $R > 0$ sao cho $D(z_0, R) \Subset \Omega$. Khi đó

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad \text{ở đây } M = \max_{z \in C_{R,z_0}} |f(z)|.$$

1.3.9 Định lý (Định lý Liouville)

Cho f là một hàm giải tích và bị chặn trên toàn mặt phẳng, tức tồn tại số dương M sao cho $|f(z)| \leq M$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Khi đó f là hàm hằng.

1.3.10 Định lý (Định lý giá trị trung bình)

Cho f là hàm giải tích trên miền Ω , $z_0 \in \Omega$ và số $R > 0$ sao cho $D(z_0, R) \Subset \Omega$. Khi đó giá trị của f tại z_0 bằng trung bình các giá trị của f trên đường tròn

$C_{R,z_0}(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, tức là

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt.$$

1.4. Hàm điều hòa

1.4.1 Định nghĩa

Hàm $u(x, y)$ của hai biến thực x, y trong miền Ω gọi là hàm điều hòa nếu các đạo hàm riêng cấp hai liên tục và thỏa mãn phương trình Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{với mọi } (x, y) \in \Omega.$$

1.4.2 Định lý

Cho $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ là một hàm giải tích trên miền $\Omega \in \mathbb{C}$. Khi đó $u(x, y)$ và $v(x, y)$ là hàm điều hòa trên miền Ω .

1.4.3 Định lý

Hàm hai biến thực trên miền đơn đơn liên Ω là hàm điều hòa khi và chỉ khi là phần thực hay phần ảo của một hàm giải tích nào đó trên Ω .

1.5. Lý thuyết chuỗi

Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ hội tụ trên miền Ω có tổng là $f(z)$. Chuỗi gọi là hội tụ đều trên tập con A của Ω nếu mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại n_0 sao cho mọi $n \geq n_0$, $z \in A$ đều có $\left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(z) \right| < \varepsilon$.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ hội tụ. Chuỗi hội tụ tuyệt đối là chuỗi hội tụ.

1.5.1 Định lý (Định lý Weierstrass)

Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ hội tụ đều trên miền Ω và có tổng là $f(z)$. Nếu mọi hàm $f_n(z)$ giải tích trên Ω thì $f(z)$ giải tích trên Ω và

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad \text{với mọi } k \in \mathbb{N}, z \in \Omega.$$

Chuỗi hàm có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ gọi là chuỗi Taylor tại z_0 .

Giả sử chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ hội tụ trong đĩa $D(z_0, R)$. Ký hiệu $f(z)$ là tổng của nó. Theo Định lý 1.5.1 hàm $f(z)$ khả vi vô hạn lần và

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n(z - z_0)^{n-k}.$$

Thay $z = z_0$ vào đẳng thức này ta được

$$f^{(k)}(z_0) = k!c_k \quad \text{hay} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

1.5.2 Định lý (Định lý Taylor)

Cho f là một hàm giải tích trên miền Ω và $z_0 \in \Omega$. Khi đó trong đĩa $D(z_0, R)$,

$R = d(z_0, \partial\Omega)$, ta có

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

các hệ số c_n là duy nhất và được tính theo công thức

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Nhận xét

Hàm f giải tích tại $z_0 \in \Omega$ nếu và chỉ nếu tồn tại $r > 0$ sao cho

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ với mọi } z \in D(z_0, r).$$

1.5.3 Định lý (Định lý duy nhất)

Cho f và g là các hàm giải tích trên miền Ω , $f(z_n) = g(z_n)$ với mọi n , ở đây $\{z_n\}$ là dãy các điểm phân biệt trong Ω sao cho $z_n \rightarrow z_0$, $z_0 \in \Omega$. Khi đó $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \Omega$.

Chuỗi có dạng $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ gọi là chuỗi Laurent theo lũy thừa của $z - z_0$ hay chuỗi Laurent tại z_0 .

1.5.4 Định lý

Nếu các hệ số c_n của chuỗi $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ thỏa mãn

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = r < R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \leq \infty$$

thì miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ là hình vành khăn

$$r < |z - z_0| < R$$

và tổng $f(z)$ của chuỗi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ là một hàm giải tích trong hình vành khăn

$$r < |z - z_0| < R.$$

1.5.5 Định lý (Định lý Laurent)

Cho $f(z)$ là hàm giải tích trong hình vành khăn $0 < r < |z - z_0| < R < \infty$. Khi đó $f(z)$ biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của chuỗi Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

các hệ số của chuỗi là duy nhất được xác định bởi công thức

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \dots,$$

trong đó γ_s là đường tròn bất kỳ $|\zeta - z_0| = s$, $r < s < R$.

1.5.6 Định nghĩa

Điểm z_0 gọi là điểm bất thường cô lập của hàm f nếu f không xác định tại z_0 nhưng xác định và giải tích trong hình vành khăn

$$0 < |z - z_0| < R, \quad R > 0.$$

Cho z_0 là một điểm bất thường cô lập của f ,

- a) z_0 gọi là điểm bất thường cốt yếu nếu không tồn tại $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.
- b) z_0 gọi là cực điểm nếu $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.
- c) z_0 gọi là C -điểm nếu $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C \in \mathbb{C}$.
- d) z_0 gọi là không điểm nếu $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$.

1.6. Hàm nguyên và hàm phân hình

1.6.1 Định nghĩa

Ta gọi hàm nguyên là hàm giải tích trên toàn mặt phẳng $\mathbb{C}$.

Theo Định lý Taylor, mọi hàm nguyên f đều khai triển được thành chuỗi lũy thừa hội tụ trên toàn mặt phẳng. Cụ thể là

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0.$$

Đối với hàm nguyên f có các trường hợp sau đây

- a) Tồn tại $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a \in \mathbb{C}$. Khi đó f bị chặn trên $\mathbb{C}$ nên theo Định lý Liouville $f = \text{const}$.
- b) Tồn tại $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$. Khi đó f là hàm đa thức và chỉ có hữu hạn hệ số trong khai triển

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ khác không.}$$

c) Không tồn tại $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$. Trường hợp này ta gọi f là hàm siêu việt.

1.6.2 Định lý

Cho f là hàm nguyên, f không đồng nhất bằng 0. Khi đó tập các không điểm của hàm f là tập đếm được.

Thật vậy mọi n , theo Định lý duy nhất, $\overline{D(0, n)}$ chỉ chứa hữu hạn không điểm của hàm f .

Do $\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{D(0, n)}$ nên trong $\mathbb{C}$ hàm f chỉ có đếm được không điểm.

1.6.3 Định nghĩa

Hàm giải tích trên miền Ω trừ ra một số các điểm bất thường là cực điểm gọi là hàm phân hình trên Ω .

Tập các cực điểm của hàm phân hình f là đếm được, hơn nữa là tập rời rạc trong Ω .

Chương 2. CẤP TĂNG CỦA HÀM NGUYÊN

2.1 Cấp và loại của hàm nguyên

Để mô tả một cách tổng quát về cấp tăng của hàm nguyên ta đưa vào hàm $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, hàm $M_f(r)$ là hàm đơn điệu tăng.

2.1.1 Định lý

Cho hàm nguyên $f(z)$ và λ không âm sao cho $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{M_f(r)}{r^\lambda} = 0$ khi đó f là đa thức có bậc không vượt quá λ .

Chứng minh.

Theo bất đẳng thức Cauchy đối với hàm $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ta có

$$|c_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n}.$$

Với mọi $n > \lambda$ ta có $|c_n| \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{M_f(r)}{r^n} = 0$. Vậy $c_n = 0$ với mọi $n > \lambda$.

Từ đó $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ là đa thức bậc $\leq \lambda$. $\square$

Theo Định lý 2.1.1,

mọi hàm nguyên khác đa thức đều có $M_f(r)$ tăng nhanh hơn mọi lũy thừa dương của r . Khái niệm bậc của f được đưa ra từ sự so sánh $M_f(r)$ với hàm e^{r^k} .

Nếu $M_f(r) < B(r)$ với mọi $r \geq r_0$ thì ta viết $M_f(r) < B(r)$ hoặc

$$M_f(r) < B(r) \quad (as.r).$$

2.1.2 Định nghĩa

Ta gọi cấp tăng của hàm nguyên $f(z)$ là

$$\rho = \inf \left\{ k : M_f(r) < e^{r^k}, \forall r > r_0 \right\}.$$

Nếu không tồn tại số k nào thì ta định nghĩa cấp của $f(z)$ là $\rho = \infty$, và $f(z)$ được gọi là hàm có cấp vô tận. Ta ký hiệu cấp của hàm nguyên $f(z)$ là $\rho = \rho_f$.

Theo định nghĩa cấp của hàm nguyên $f(z)$, ta có

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} < M_f(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

$$\rho - \varepsilon < \frac{\log \log M_f(r)}{\log r} < \rho + \varepsilon.$$

Do đó

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}.$$

2.1.3 Định nghĩa

Ta gọi loại của hàm nguyên $f(z)$ cấp ρ là

$$\sigma = \inf \left\{ A : M_f(r) < e^{Ar^\rho}, \forall r > r_0(A) \right\}.$$

Nếu không tồn tại số A nào thì ta đặt $\sigma = \infty$ và hàm $f(z)$ được gọi là hàm tối đại, nếu

$0 < \sigma < \infty$ thì hàm $f(z)$ được gọi là hàm trung bình, nếu $\sigma = 0$ thì $f(z)$ gọi là hàm tối thiểu.

Theo định nghĩa loại của hàm nguyên ta có

$$e^{(\sigma-\varepsilon)r^\rho} < M_f(r) < e^{(\sigma+\varepsilon)r^\rho}.$$

Lấy logarit ta có

$$\sigma - \varepsilon < \frac{\log M_f(r)}{r^\rho} < \sigma + \varepsilon.$$

Vậy có công thức

$$\sigma_f = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M_f(r)}{r^\rho}.$$

2.2. Mối liên hệ của cấp, loại và hệ số Taylor của hàm nguyên

2.2.1 Bổ đề

Nếu hàm nguyên $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ và thỏa mãn bất đẳng thức

$$M_f(r) < e^{Ar^k} \text{ thì } |c_n| < \left(\frac{ekA}{n} \right)^{\frac{n}{k}}.$$

Chứng minh.

Ta có $M_f(r) < e^{Ar^k}$

$$|c_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n} < e^{Ar^k - n \log r} \quad , \quad r \geq r_0$$

Đạo hàm của hàm $e^{Ar^k - n \log r}$ bằng không tại $r_n = \left(\frac{n}{kA}\right)^{\frac{1}{k}}$ và đạt cực tiểu tại đó. Thay $r = r_n = \left(\frac{n}{kA}\right)^{\frac{1}{k}}$

vào $|c_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n} < e^{Ar^k - n \log r}$ ta được

$$|c_n| \leq \frac{e^{Ar^k}}{r^n} = \frac{e^{A\left(\frac{n}{kA}\right)^{\frac{1}{k}}}}{\left(\frac{n}{kA}\right)^{\frac{n}{k}}} = \left(\frac{eAk}{n}\right)^{\frac{n}{k}}.$$

Vậy $|c_n| \stackrel{as.r}{<} \left(\frac{ekA}{n}\right)^{\frac{n}{k}}. \quad \square$

2.2.2 Bổ đề

Nếu hàm nguyên $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ và bất đẳng thức sau được thỏa mãn $|c_n| \stackrel{as.n}{<} \left(\frac{eAk}{n}\right)^{\frac{n}{k}}$ thì

$$M_f(r) \stackrel{as.r}{<} e^{(A+\varepsilon)r^k} \quad \text{với } \forall \varepsilon > 0.$$

Chứng minh.

Ta có thể giả thiết $c_0 = 0$ và $|c_n| < \left(\frac{eAk}{n}\right)^{\frac{n}{k}}$ đúng với mọi $n \geq 1$. Ta có

$$|f(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{eAk}{n}\right)^{\frac{n}{k}} r^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{eAr^k}{n/k}\right)^{\frac{n}{k}}, \quad |z| = r.$$

Đặt $m = [n/k]$. Với r đủ lớn ta có $\left(\frac{eAr^k}{n/k}\right)^{\frac{n}{k}} \leq \left(\frac{eAr^k}{m}\right)^{m+1}$. Do đó

$$|f(z)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{eAr^k}{m}\right)^{m+1}.$$

Áp dụng công thức Stirling $m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}$, $m \rightarrow \infty$ và bất đẳng thức

$$\sqrt{2\pi m} < C \left(\frac{A + \frac{\varepsilon}{2}}{A}\right)^{m+1}, \quad m \geq 1,$$

$$\begin{aligned}
\text{ta có } |f(z)| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{eAr^k}{m} \right)^{m+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{m+1}}{m^{m+1}} (Ar^k)^{m+1} \\
&< C_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^m}{m^m} (Ar^k)^{m+1} \quad (C_1 \text{ là hằng số}) \\
&< C_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C \left(\frac{A+\varepsilon/2}{A} \right)^{m+1} (Ar^k)^{m+1}}{m!} \\
&< C_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(A+\varepsilon/2)^{m+1} r^{k(m+1)}}{m!} \quad (C_2 \text{ là hằng số}) \\
&= C_2 \left(A + \frac{\varepsilon}{2} \right) r^k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\left(A + \frac{\varepsilon}{2} \right) r^k \right)^m}{m!} \\
&< C_3 e^{(A+\varepsilon/2)r^k} \quad (C_3 \text{ là hằng số})
\end{aligned}$$

Vậy $|f(z)| < e^{(A+\varepsilon)r^k}$. $\square$

Từ hai bổ đề trên, ta có thể biểu thị cấp và loại của một hàm nguyên qua hệ số trong khai triển Taylor.

2.2.3 Định lý

Đối với mọi hàm nguyên $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, cấp của $f(z)$ được xác định bởi công thức

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log(1/|c_n|)}.$$

Chứng minh.

Đặt $\rho_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log(1/|c_n|)}$, ta sẽ chứng minh $\rho = \rho_1$.

Theo định nghĩa cấp của hàm nguyên $f(z)$ thì mọi $k > \rho$, theo Bổ đề 2.2.1,

$M_f(r) < e^{r^k}$ thì $|c_n| < \left(\frac{ek}{n} \right)^{\frac{n}{k}}$. Lấy logarit bất đẳng thức này ta có

$$\log |c_n| < \frac{n}{k} \log \left(\frac{ek}{n} \right).$$

Do $f(z)$ là hàm nguyên nên $\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow 0$, từ đó với n đủ lớn thì $\log|c_n| < 0$. Ta có

$$\begin{aligned} k &> \frac{n \log \frac{ek}{n}}{\log|c_n|} = \frac{-\log \frac{ek}{n}}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}} \\ &= \frac{\log n}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}} - \frac{\log ek}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}} = \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|c_n|}} + \frac{\log \frac{1}{ek}}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}} . \end{aligned}$$

Vì $\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow 0$ nên ta có $k > \limsup \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|c_n|}}$.

Theo định nghĩa cấp của hàm nguyên thì ρ là infimum của k , do đó

$$\rho \geq \limsup \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|c_n|}} .$$

Vậy $\rho \geq \rho_1$.

Giả sử $\rho_1 < \infty$, khi đó với mọi $k > \rho_1$ ta có $k > \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|c_n|}}$ với n đủ lớn. Do đó

$$\frac{1}{|c_n|} > (n)^{\frac{n}{k}} \quad \text{hay} \quad |c_n| < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{k}} \quad \text{với } n \text{ đủ lớn.}$$

Áp dụng Bổ đề 2.2.1 với $eAk = 1$, ta có

$$M_f(r) < e^{\left(\frac{1}{k+\varepsilon}\right)r^k} \quad \text{với } r \text{ đủ lớn và } \varepsilon > 0.$$

Suy ra $\rho < k$, k là số tùy ý, $k \geq \rho_1$. Do đó $\rho_1 \geq \rho$ và $\rho = \rho_1$.

Vậy bậc của hàm nguyên cho bởi công thức

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|c_n|}} . \quad \square$$

2.2.4 Định lý

Loại của hàm nguyên $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ được xác định bởi công thức

$$\sigma = \frac{1}{\rho e} \limsup_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|c_n|}^{\rho}$$

Chứng minh.

Đặt $\sigma_1 = \frac{1}{\rho e} \limsup_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|c_n|}^{\rho}$, ta sẽ chứng minh $\sigma = \sigma_1$.

Loại hàm nguyên $f(z)$ có bậc ρ là infimum σ của các số A sao cho $M_f(r) < e^{Ar^\rho}$.

Áp dụng Bổ đề 2.2.1 với $k = \rho$,

$$M_f(r) < e^{Ar^\rho} \quad \text{nên} \quad |c_n| < \left(\frac{eA\rho}{n} \right)^{\frac{n}{\rho}}.$$

Suy ra $A > \frac{1}{e\rho} n^{\frac{1}{\rho}} |c_n|^\rho$. Từ đó

$$A > \frac{1}{e\rho} \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho}} |c_n|^\rho.$$

Do σ là infimum của các số A nên $\sigma \geq \frac{1}{e\rho} \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho}} |c_n|^\rho$. Vậy ta có $\sigma \geq \sigma_1$.

Bây giờ giả sử $A > \sigma_1$. Khi đó

$$A > \frac{1}{\rho e} n^{\frac{1}{\rho}} |c_n|^\rho \quad \text{với } n \text{ đủ lớn.}$$

Từ đó

$$n^{\frac{1}{\rho}} |c_n|^\rho < \frac{Ae\rho}{n} \quad \text{hay} \quad |c_n| < \left(\frac{Ae\rho}{n} \right)^{\frac{n}{\rho}} \quad \text{với } n \text{ đủ lớn.}$$

Do đó theo Bổ đề 2.2.2 ta có $M_f(r) < e^{(A+\varepsilon)r^\rho}$, suy ra $A > \sigma$. Do A tùy ý nên $\sigma_1 \geq \sigma$.

Vậy $\sigma = \sigma_1$. $\square$

2.2.5 Ví dụ

Sử dụng các Định lý 2.2.3 và 2.2.4 dễ dàng thấy rằng

a) Hàm nguyên $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e\sigma\rho}{n} \right)^{\frac{n}{\rho}} z^n$, $0 < \rho < \infty, 0 < \sigma < \infty$

có cấp ρ và loại σ .

b) Hàm nguyên $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{e\sigma\rho}{n \log n} \right)^{\frac{n}{\rho}} z^n$, $0 < \rho < \infty, \sigma < \infty$

có cấp ρ và loại tối thiểu.

c) Hàm nguyên $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{e\rho \log n}{n} \right)^{\frac{n}{\rho}} z^n$, $0 < \rho < \infty$

có cấp ρ và loại tối đại.

d) Hàm nguyên $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log n} \right)^n z^n$ có cấp vô hạn.

e) Hàm nguyên $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} z^n$ có cấp không.

Vậy ta có thể xây dựng các hàm nguyên có cấp và loại tùy ý.

2.3. Các công thức của hàm giải tích trên đĩa

Để tìm hiểu mối liên hệ giữa cấp tăng của hàm nguyên và không điểm của nó ta cần các công thức sau đây.

2.3.1 Định lý (Công thức Schwarz)

Cho $f = u + iv$ là hàm giải tích trên miền Ω và cho đĩa $D(0, R) \subseteq \Omega$. Khi đó với mọi $z \in D(0, R)$ ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\operatorname{Re}^{i\psi}) \frac{\operatorname{Re}^{i\psi} + z}{\operatorname{Re}^{i\psi} - z} d\psi + iv(0). \quad (1)$$

2.3.2 Định lý (Công thức Poisson)

Cho u là hàm điều hòa trên miền Ω và cho đĩa $D(0, R) \subseteq \Omega$. Khi đó với mọi $z \in D(0, R)$ ta có

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\operatorname{Re}^{i\psi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \theta) + r^2} d\psi, \quad z = re^{i\theta}.$$

Công thức trên có thể được viết dưới dạng

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\operatorname{Re}^{i\psi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|\operatorname{Re}^{i\psi} - z|^2} d\psi \quad (2)$$

Nếu $f(z) \neq 0$ trên đĩa $\overline{D(0, R)}$ thì $\log f(z)$ là hàm giải tích trên đĩa $\overline{D(0, R)}$, từ công thức (1) ta có

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| \frac{\operatorname{Re}^{i\psi} + z}{\operatorname{Re}^{i\psi} - z} d\psi + iC \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi \quad (4)$$

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là không điểm của $f(z)$ trên $D(0, R)$ và được sắp tăng dần theo

môđun, mỗi không điểm được viết số lần theo số bội của nó. Giả sử $f(z) \neq 0$ với $|z| = R$ và đặt

$$\varphi(z) = f(z) \prod_{m=1}^n \frac{R^2 - \bar{a}_m z}{R(z - a_m)}. \quad (5)$$

Khi đó $|\varphi(\operatorname{Re}^{i\psi})| = |f(\operatorname{Re}^{i\psi})|$ và $\varphi(z) \neq 0$ với $|z| \leq R$. Sử dụng công thức (3) cho $\varphi(z)$ ta có

$$\begin{aligned} \log \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\varphi(\operatorname{Re}^{i\psi})| \frac{\operatorname{Re}^{i\psi} + z}{\operatorname{Re}^{i\psi} - z} d\psi + iC \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| \frac{\operatorname{Re}^{i\psi} + z}{\operatorname{Re}^{i\psi} - z} d\psi + iC. \end{aligned}$$

Vậy $\log f(z) = \log \varphi(z)$. Từ đó

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| \frac{\operatorname{Re}^{i\psi} + z}{\operatorname{Re}^{i\psi} - z} d\psi + \sum_{|a_m| < R} \log \frac{R(z - a_m)}{R^2 - z\bar{a}_m} + iC. \quad (6)$$

Tách phần ảo của công thức (6) ta nhận được công thức sau

2.3.3 Định lý (Công thức Poisson – Jensen)

Cho hàm f giải tích trên miền Ω và đĩa $D(0, R) \Subset \Omega$. Khi đó với mọi $z \in D(0, R)$ ta có

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi \\ &\quad + \sum \log \left| \frac{R(z - a_m)}{R^2 - z\bar{a}_m} \right|, \quad z = re^{i\theta}. \end{aligned} \quad (7)$$

Giả sử $f(0) \neq 0$. Khi $z = 0$ từ công thức (7) ta có

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| d\psi + \sum_{|a_m| < R} \log \frac{|a_m|}{R}.$$

Với mỗi $t \geq 0$, ta gọi $n(t)$ là số không điểm a_m của f thỏa mãn $|a_m| \leq t$ (bội n được tính n lần). Hàm $n(t)$ gọi là hàm đếm số không điểm. Theo định nghĩa tích phân Stieltjes của hàm không giảm $n(t)$ ta có

$$\sum_{|a_m| < R} \log \frac{R}{a_m} = \int_0^R \log \frac{R}{t} dn(t) = n(t) \log \frac{R}{t} \Big|_0^R + \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt.$$

$$\text{Khi đó } \log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| d\psi - \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt.$$

Vì vậy ta có

2.3.4 Định lý (Công thức Jensen)

Cho hàm f giải tích trên miền Ω và đĩa $D(0, R) \in \Omega$. Khi đó ta có

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| d\psi - \log |f(0)|. \quad (8)$$

Nếu $f(0) = 0$, f không trùng 0, k là số bội của nghiệm $z = 0$, công thức (8) trở thành

$$\int_0^R \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + n(0) \log R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| d\psi - \log \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right|.$$

Giả sử f là hàm phân hình trên đĩa $\overline{D(0, R)}$, $\{a_m\}$, $\{b_m\}$ là không điểm và cực điểm của f trong $\{z: |z| < R\}$ và $f(0) \neq 0$, $f(0) \neq \infty$.

Đặt

$$\varphi(z) = f(z) \prod_{|b_m| < R} \frac{R(z - b_m)}{(R^2 - \bar{b}_m z)} \left(\prod_{|a_m| < R} \frac{R(z - a_m)}{R^2 - \bar{a}_m z} \right)^{-1}.$$

Công thức (6) được thay thế bởi

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| \frac{\operatorname{Re}^{i\psi} + z}{\operatorname{Re}^{i\psi} - z} d\psi \\ &+ \sum_{|a_m| < R} \log \frac{R(z - a_m)}{R^2 - z\bar{a}_m} - \sum_{|b_m| < R} \log \frac{R(z - b_m)}{R^2 - z\bar{b}_m} + iC, \end{aligned}$$

Công thức Poisson- Jensen (7) có dạng

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - Rr \cos(\theta - \psi)} d\psi \\ &+ \sum_{|a_m| < R} \log \left| \frac{R(z - a_m)}{R^2 - z\bar{a}_m} \right| - \sum_{|b_m| < R} \log \left| \frac{R(z - b_m)}{R^2 - z\bar{b}_m} \right|. \end{aligned} \quad (9)$$

Và công thức Jensen trở thành

$$\int_0^R \frac{n(t, 0)}{t} dt - \int_0^R \frac{n(t, \infty)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| d\psi - \log |f(0)|, \quad (10)$$

trong đó $n(t, 0)$ hàm đếm không điểm của f , $n(t, \infty)$ hàm đếm cực điểm của f . Đặt

$a^+ = \max(a, 0)$. Khi đó

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x, & x \geq 1 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

và $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$ với $x > 0$. Vậy

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| d\psi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(\operatorname{Re}^{i\psi})|} d\psi.$$

$$\text{Đặt } m(R, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| d\psi,$$

$$N(R, f) = \int_0^R \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt + n(0, \infty) \log R.$$

2.3.5 Định nghĩa

Ta gọi hàm $T(R, f) = m(R, f) + N(R, f)$ là hàm đặc trưng Nevanlinna.

Với các ký hiệu vừa đưa ra thì Công thức Jensen (10) trở thành

$$\log |f(0)| = m\left(R, \frac{1}{f}\right) - m\left(R, \frac{1}{f}\right) + N\left(R, \frac{1}{f}\right) - N\left(R, \frac{1}{f}\right)$$

$$m(R, f) + N(R, f) = m\left(R, \frac{1}{f}\right) + N\left(R, \frac{1}{f}\right) + \log |f(0)|$$

$$T(R, f) = T\left(R, \frac{1}{f}\right) + \log |f(0)|.$$

Hàm $T(R, f)$ có vai trò quan trọng trong nghiên cứu hàm nguyên và hàm phân hình.

Nếu $f(z)$ là hàm nguyên thì

$$T(R, f) = m(R, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| d\psi \leq \log^+ M_f(R).$$

Từ công thức Poisson – Jensen ta có

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| \frac{R^2 - r^2}{|\operatorname{Re}^{i\psi} - z|^2} d\psi \\ &\leq \frac{R+r}{R-r} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| d\psi \quad r = |z| \\ \log M_f(r) &\leq \frac{R+r}{R-r} m(R, f). \end{aligned}$$

Cho $R = 2r$ suy ra

$$\log M_f(r) \leq 3m(2r, f). \quad (13)$$

Trường hợp đặc biệt

$$m(r, f) \leq Ar^k \text{ thì } \log M_f(r) < 3.2^k Ar^k.$$

Vậy trong định nghĩa cấp của hàm nguyên ta có thể sử dụng hàm đặc trưng Nevanlinna $T(r, f)$ thay thế cho $\log M_f(r)$.

2.3.6 Hệ quả của Công thức Jensen

Giả sử f là hàm nguyên, từ Công thức Jensen ta có

$$\log |f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| d\psi \quad (14)$$

$$\text{vì } \sum_{|a_m| < R} \log \frac{|a_m|}{R} < 0.$$

$$\text{Nếu } |f(0)| = 1 \text{ thì } \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\psi})| d\psi$$

Với $r > 0$ ta có

$$\log M_f(er) \geq \int_0^{er} \frac{n(t)}{t} dt \geq \int_0^{er} \frac{n(t)}{t} dt \geq n(r).$$

Do đó

$$n(r) \leq \log M_f(er) . \quad (15)$$

Chương 3. PHÂN BỐ KHÔNG ĐIỂM

3.1. Số mũ hội tụ và mật độ trên, mật độ dưới của dãy không điểm

3.1.1 Định nghĩa

Cho dãy $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, $a_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Infimum của các số λ sao cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda}$

hội tụ gọi là số mũ hội tụ của dãy.

Ký hiệu $n(r)$ là hàm đếm của dãy $\{a_n\}$, tức là số các chỉ số n sao cho $a_n < r$. Ký hiệu

ρ_1 là cấp của $n(r)$, tức là

$$\rho_1 = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r}.$$

Ta gọi

Số $\overline{\Delta} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\rho_1}}$ là mật độ trên của dãy $\{a_n\}$,

Số $\underline{\Delta} = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\rho_1}}$ là mật độ dưới của dãy $\{a_n\}$.

3.1.2 Bổ đề

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda}$ hội tụ với $\lambda > 0$ nào đó thì tích phân $\int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt$ hội tụ và

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n(t)}{t^\lambda} = 0.$$

Chứng minh.

Vì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda} = \int_0^\infty \frac{dn(t)}{t^\lambda}$ nên lấy tích phân từng phần ta có

$$\int_0^r \frac{dn(t)}{t^\lambda} = \frac{n(r)}{r^\lambda} + \lambda \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt.$$

Vì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda} = \int_0^\infty \frac{dn(t)}{t^\lambda}$ hội tụ, suy ra $\frac{n(r)}{r^\lambda}$, $\lambda \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt$ bị chặn trên.

Từ đó $\lambda \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt$ không giảm và tiến đến giá trị hữu hạn khi $r \rightarrow \infty$.

Do $\frac{n(r)}{r^\lambda} \leq \lambda \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt$ nên ta có $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^\lambda} = 0$. $\square$

3.1.3 Bổ đề

Số mũ hội tụ của dãy $\{a_n\}$ bằng cấp ρ_1 của hàm đếm $n(r)$.

Chúng minh.

Giả sử k là số mũ hội tụ của dãy $\{a_n\}$, lấy $\lambda > k$ tùy ý. Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda}$ hội tụ và

theo Bổ đề 3.1.2 ta có $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^\lambda} = 0$. Từ đó $n(r) < r^\lambda$ với r đủ lớn.

Vì ρ_1 là cấp của $n(r)$ nên $r^{\rho_1 - \varepsilon} < n(r) < r^{\rho_1 + \varepsilon}$ (với r đủ lớn). Suy ra $\rho_1 \leq \lambda$. Do $\lambda > k$ tùy ý nên $\rho_1 \leq k$.

Mặt khác ta có $n(t) < t^{\rho_1 + \varepsilon/2}$, $\varepsilon > 0$. Chọn $\lambda = \rho_1 + \varepsilon$, ta có

$$n(t) < t^{\lambda - \varepsilon/2} = t^{\lambda + 1 - 1 - \varepsilon/2}, \quad \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} < \frac{1}{t^{1+\varepsilon/2}}.$$

Suy ra $\int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt$ hội tụ và $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n(t)}{t^\lambda} = 0$. Ta lại có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda} = \int_0^\infty \frac{dn(t)}{t^\lambda}, \quad \int_0^r \frac{dn(t)}{t^\lambda} = \frac{n(r)}{r^\lambda} + \lambda \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt.$$

Từ đó suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda}$ hội tụ và $\lambda > k$.

Do λ tùy ý thỏa mãn $\lambda = \rho_1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) nên $\rho_1 \geq k$.

Vậy $\rho_1 = k$. $\square$

3.1.4 Định lý (Định lý Hadamard)

Số mũ hội tụ của tập không điểm của hàm nguyên không vượt quá cấp tăng của nó.

Chúng minh.

Theo Hệ quả của Công thức Jensen 2.3.5 ta có

$$n(r) \leq \log M_f(er) + O(1).$$

Do đó

$$\begin{aligned}\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r} &\leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(er)}{\log r} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}.\end{aligned}$$

Vậy $\rho_1 \leq \rho$. $\square$

3.1.5 Định lý

Giả sử $f(z)$ là hàm nguyên có loại không lớn hơn σ tương ứng với cấp ρ , $\bar{\Delta}(\Lambda)$, $\underline{\Delta}(\Lambda)$ lần lượt mật độ trên và mật độ dưới của dãy Λ tương ứng với cấp ρ .

Nếu $f(z)$ triệt tiêu trên tập Λ và ít nhất một trong hai bất đẳng thức

$$\bar{\Delta}(\Lambda) > e\rho\sigma \text{ hoặc } \underline{\Delta}(\Lambda) > \rho\sigma \text{ thì } f(z) \equiv 0.$$

Chúng minh.

Giả sử $\underline{\Delta}(\Lambda) > \rho\sigma$. Đặt $n_\Lambda(r)$ là hàm đếm của dãy Λ , $n(r) = n_f(r)$.

Với mọi $\lambda > 1$ ta có

$$n_\Lambda(r) \leq n(r) < \frac{1}{\log \lambda} \int_r^{\lambda r} \frac{n(t)}{t} dt \leq \frac{1}{\log \lambda} N(\lambda r).$$

Theo Công thức Jensen với f không đồng nhất bằng 0 thì

$$N(\lambda r) \leq \log M_f(\lambda r) + O(1) < (\sigma + \varepsilon) \lambda^\rho r^\rho.$$

Do đó $n_\Lambda(r) < \frac{1}{\log \lambda} (\sigma + \varepsilon) \lambda^\rho r^\rho$, $\frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho} < \frac{1}{\log \lambda} (\sigma + \varepsilon) \lambda^\rho$. Suy ra

$$\bar{\Delta}(\Lambda) \leq \frac{\sigma \lambda^\rho}{\log \lambda}, \quad \min \left(\frac{\sigma \lambda^\rho}{\log \lambda} \right) = e\rho\sigma \quad (\text{đối với } \lambda).$$

Vậy $\bar{\Delta}(\Lambda) \leq e\rho\sigma$, mâu thuẫn.

Nếu $\underline{\Delta}(\Lambda) > \rho\sigma$, $\underline{\Delta}(\Lambda) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}$ thì

$$n(r) \geq n_\Lambda(r) > (\rho\sigma + 2\varepsilon) r^\rho.$$

Do đó $N(r) > \frac{1}{\rho} (\rho\sigma + \varepsilon) r^\rho$.

Sử dụng Công thức Jensen ta có

$$\log M_f(r) > \frac{1}{\rho} (\rho\sigma + \varepsilon) r^\rho, \quad \frac{\log M_f(r)}{r^\rho} > \frac{1}{\rho} (\rho\sigma + \varepsilon).$$

Suy ra $\sigma > \frac{1}{\rho} (\rho\sigma + \varepsilon)$, $\sigma\rho > (\rho\sigma + \varepsilon)$ mâu thuẫn.

Vậy $f \equiv 0$. $\square$

3.2. Phân tích hàm nguyên thành nhân tử

3.2.1 Định nghĩa

Tích vô hạn của các hàm nguyên $\prod_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ gọi là hội tụ tại z_0 nếu với mọi N , $\lim_{M \rightarrow \infty} \left(\prod_{n=N}^M g_n(z_0) \right)$ là một giá trị hữu hạn, khác không.

Tích vô hạn các hàm nguyên được gọi là hội tụ đều trên tập K , nếu tồn tại N sao cho $\prod_{n=N}^M g_n(z)$ hội tụ đều đến hàm $h_N(z)$, $z \in K$, khi $M \rightarrow \infty$.

Từ định nghĩa tích vô hạn hội tụ tổng quát, ta có tích của tích vô hạn hội tụ của các hàm nguyên là duy nhất.

Sự hội tụ (hội tụ đều) của tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ tương đương với sự hội tụ (hội tụ đều) của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \log g_n(z)$.

Cho $\{a_n\}$ là dãy các số phức khác không và tồn tại p là số nguyên không âm để

$\sum_n |a_n|^{-p-1} < \infty$. Ta ký hiệu tích vô hạn

$$\prod(z) = \prod_n G\left(\frac{z}{a_n}, p\right),$$

trong đó

$$G(z, p) = \begin{cases} 1 - z, & p = 0 \\ (1 - z) \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^p}{p} \right), & p > 0 \end{cases}.$$

Các hàm $G(z, p)$ được gọi là các nhân tử sơ cấp Weierstrass.

Chú ý rằng, nếu $|z| < 1$ thì $G(z, p) \rightarrow (1 - z) \exp[-\log(1 - z)] = 1$ khi $p \rightarrow \infty$. Vì vậy $G(z, p)$ hội tụ đều trên các tập compact trong đĩa đơn vị $D(0, 1)$, hơn nữa $G(z, p)$ là hàm nguyên và $G(z, p)$ có không điểm đơn tại $z = 1$ và không có không điểm nào khác.

Nếu $|u| \leq \frac{1}{2}$ thì $\prod(z)$ hội tụ tuyệt đối đều trên mọi đĩa $D(0, R)$.

$\prod(z)$ được gọi là tích chính tắc Weierstrass loại p .

3.2.2 Định lý (Định lý Hadamard)

Giả sử f là hàm nguyên, f không đồng nhất bằng không, f có cấp hữu hạn ρ . Khi đó f biểu diễn được dưới dạng

$$f(z) = z^m e^{P_q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right),$$

với $a_1, a_2, \dots$ là các không điểm của hàm f , $p \leq \rho$, $P_q(z)$ là đa thức bậc $q \leq \rho$ và m là số bội của nghiệm tại $z = 0$.

Chứng minh.

Giả sử $a_1, \dots, a_n$ là các không điểm của $f(z)$ trong $D(0, R)$. Khi đó theo (6), Chương II ta có

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(\operatorname{Re}^{i\psi}) \frac{\operatorname{Re}^{i\psi} + z}{\operatorname{Re}^{i\psi} - z} \right| d\psi + \sum_{|a_n| < R} \log \frac{R(z - a_n)}{R^2 - z\overline{a_n}} + iC.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $m = 0$, tức là $f(0) \neq 0$.

Đạo hàm $p+1$ lần hàm $\log f(z)$ với $p = [\rho]$ ta có

$$\begin{aligned} [\log f(z)]^{(p+1)} &= \frac{(p+1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(\operatorname{Re}^{i\psi}) \right| \frac{2 \operatorname{Re}^{i\psi}}{(\operatorname{Re}^{i\psi} - z)^{p+2}} d\psi \\ &\quad + \sum_{|a_n| < R} \frac{p! (\overline{a_n})^{p+1}}{(R^2 - \overline{a_n} \cdot z)^{p+1}} - \sum_{|a_n| < R} \frac{p!}{(a_n - z)^{p+1}}. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\left| [\log f(z)]^{(p+1)} + \sum_{|a_n| < R} \frac{p!}{(a_n - z)^{p+1}} \right| \leq \frac{(p+1)}{2\pi} \log M_f(R) \frac{4\pi R}{(R-r)^{p+2}} + \frac{p! n(R)}{(R-r)^{p+1}}, \quad r = |z|$$

Ta có đánh giá

$$\log M_f(R) < R^{\rho+\varepsilon},$$

$$n(R) \leq \log M_f(eR) < R^{\rho+\varepsilon}.$$

Lấy giới hạn khi $R \rightarrow \infty$ ta được $[\log f(z)]^{(p+1)} = -p! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n - z)^{p+1}}.$

Lấy tích phân theo đường từ 0 đến z và không đi qua các điểm $a_1, a_2, \dots$, ta có

$$\log f(z) - P_q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) + \frac{z}{a_n} + \dots + \frac{z^p}{pa_n^p} \right], \quad q \leq \rho.$$

$$\text{Vậy ta có } f(z) = e^{P_q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right). \quad \square$$

3.3. Đánh giá tích chính tắc

Cho $\{a_n\}$ là dãy số phức thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $n(r)$ là hàm đếm của dãy $\{a_n\}$,

$|a_n| \leq r$. Giả sử p là số nguyên không âm sao cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ hội tụ.

Với $\prod(z) = \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right)$, theo Công thức Jensen ta có đánh giá

$$n(r) \leq \log M_{\Pi}(er).$$

3.3.1 Bổ đề (Bổ đề đánh giá của Borel)

Với mọi $u \in \mathbb{C}$ có các đánh giá

$$\log G(u, p) \leq A_p \frac{|u|^{p+1}}{1+|u|}, \quad p > 0, \quad A_p = 3e(2 + \log p),$$

$$\log |G(u, 0)| \leq \log(1 + |u|).$$

Chứng minh.

Giả sử $p > 0$. Nếu $|u| < \frac{p}{p+1}$ thì

$$\log(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \dots - \frac{u^n}{n} - \dots,$$

$$\text{nên ta có } \log |G(u, p)| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{|u|^n}{n} \leq \frac{|u|^{p+1}}{(p+1)(1-|u|)} \leq |u|^{p+1}.$$

Nếu $|u| > \frac{p}{p+1}$ thì $\log(1+|u|) < |u|$, nên

$$\log |G(u, p)| \leq 2|u| + \frac{|u|^2}{2} + \dots + \frac{|u|^p}{p}$$

$$= |u|^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{|u|} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|u|^{p-2}} + 2 \cdot \frac{1}{|u|^{p-1}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq |u|^p \left(\frac{p+1}{p} \right)^{p-1} \left(2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} \right) \\
&< e(2 + \log p) |u|^p \frac{1+|u|}{1+|u|} \\
&= e(2 + \log p) \left(1 + \frac{1}{|u|} \right) \frac{|u|^{p+1}}{1+|u|} < A_p \frac{|u|^{p+1}}{1+|u|},
\end{aligned}$$

trong đó $A_p = 3e(1 + \log p)$. $\square$

3.3.2 Định lý

Cho $\{a_n\}$ là dãy số phức. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ hội tụ thì tích

$$\prod(z) = \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right)$$

hội tụ đều trên mọi tập compact và thỏa mãn điều kiện

$$\log |\prod(z)| < K_p r^p \left(\int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}} dt + r \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt \right),$$

trong đó $K_p = (p+1)A_p$, $r = |z|$.

Chúng minh.

Nếu $p \geq 0$ thì theo Bổ đề đánh giá của Borel ta có

$$\begin{aligned}
\log |\prod(z)| &\leq A_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{p+1}}{|a_n|^p (r + |a_n|)} = A_p r^{p+1} \int_0^{\infty} \frac{dn(t)}{t^p (t+r)} \\
&= A_p r^{p+1} \frac{n(t)}{t^p (t+r)} \Big|_0^{\infty} + A_p r^{p+1} \int_0^{\infty} \left[\frac{p}{t^{p+1} (t+r)} + \frac{1}{t^{p+1} (t+r)^2} \right] n(t) dt.
\end{aligned}$$

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ hội tụ nên ta có

$$\frac{n(t)}{t^{p+1}} \rightarrow 0 \text{ khi } t \rightarrow \infty, \quad \frac{n(t)}{t^p (t+1)} \leq \frac{n(t)}{t^{p+1}} \rightarrow 0 \text{ khi } t \rightarrow \infty.$$

Do đó

$$\log |\prod(z)| \leq A_p r^{p+1} \left(\int_0^r + \int_r^{\infty} \right) \left[\frac{p}{t^{p+1} (t+r)} + \frac{1}{t^p (t+r)^2} \right] n(t) dt$$

$$\leq K_p r^p \left(\int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}} dt + r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt \right), \quad r = |z|.$$

Khi $p = 0$ đánh giá của tích chính tắc được đơn giản là

$$\begin{aligned} \log |\prod(z)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{r}{|a_n|} \right) = \int_0^\infty \log \left(1 + \frac{r}{t} \right) n(t) dt \\ &= r \int_0^\infty \frac{n(t)}{t(t+r)} dt \leq \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt + r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^2} dt. \quad \square \end{aligned}$$

3.3.3 Định lý (Định lý Borel)

Cấp ρ của tích chính tắc $\prod(z)$ bằng với số mũ hội tụ của dãy không điểm của $\prod(z)$.

Chúng minh.

Giả sử p là số nguyên nhỏ nhất để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ hội tụ, $\{a_n\}$ là dãy không điểm của

tích chính tắc $\prod(z)$

Giả sử ρ_1 là số mũ hội tụ của dãy $\{a_n\}$ khi đó $p < \rho_1 < p+1$.

Xét trường hợp $\rho_1 < p+1$.

Chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $\rho_1 < \varepsilon < p+1$. Khi đó $n(t) \stackrel{as}{<} t^{\rho_1 + \varepsilon}$. Theo Định lý 3.3.2 ta có

$$\begin{aligned} \log |\prod(z)| &\leq K_p r^p \left(\int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}} dt + r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt \right) \\ &\leq K_p r^p \left(O(1) + \int_0^r t^{\rho_1 + \varepsilon - p - 1} dt + r \int_r^\infty t^{\rho_1 + \varepsilon - p - 2} dt \right) \\ &\leq K_p r^p \left(O(1) + \frac{r^{\rho_1 + \varepsilon - p}}{\rho_1 + \varepsilon - p} + \frac{r^{\rho_1 + \varepsilon - p}}{p + 1 - \rho_1 - \varepsilon} \right) < r^{\rho_1 + 2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Bây giờ xét trường hợp $\rho_1 = p+1$. Theo Bổ đề 3.1.2 ta có

$$\frac{n(r)}{r^{p+1}}, \quad \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt \text{ tiến về } 0 \text{ khi } r \rightarrow \infty.$$

Từ Định lý 3.3.2 ta có

$$\log M_\Pi(r) < \varepsilon r^{p+1} = \varepsilon r^{\rho_1}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Vậy $\rho \leq \rho_1$.

Do $\rho_1 = \limsup \frac{\log n(r)}{\log r}$ và $\prod(z) = 1$ nên theo Hệ quả Công thức Jensen 2.3.5, ta có

$\log M_{\Pi}(er) \geq n(r)$. Từ đó

$$\rho = \frac{\log \log M_{\Pi}(r)}{\log r}.$$

Vậy $\rho \geq \rho_1$ và ta có $\rho = \rho_1$. $\square$

3.4. Phân bố không điểm của hàm nguyên có cấp không nguyên

3.4.1 Định lý

Số mũ hội tụ của tập không điểm của hàm nguyên f có cấp không nguyên bằng với cấp tăng của f .

Chứng minh.

Giả sử f là hàm nguyên có cấp tăng ρ (không nguyên), ρ_1 là số mũ hội tụ của dãy không điểm của f , $\prod(z)$ là tích chính tắc tương ứng của tập các không điểm của f .

Theo phân tích Hadamard ta có

$$f(z) = z^m e^{P_q(z)} \prod(z), \deg P_q = q. \quad (1)$$

Sử dụng Định lý Borel 3.2.5 ta được

$$\log M_f(r) < C_1 r^q + r^{\rho_1 + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\log M_f(r) < r^{\lambda + 2\varepsilon}, \quad \lambda = \max(\rho_1, q).$$

Suy ra $\rho \leq \lambda$.

Ngược lại, theo Định lý Hadamard 3.1.4 ta có $\rho_1 \leq \rho$. Theo Định lý Hadamard 3.2.3 ta có

$q \leq \rho$. Suy ra $\rho \geq \max(\rho_1, q)$ và từ đó suy ra

$$\rho = \max(\rho_1, q).$$

Vì ρ không nguyên mà q nguyên nên $\rho_1 = \rho$. $\square$

3.4.2. Định lý

Nếu cấp ρ của hàm nguyên $f(z)$ là không nguyên thì loại σ_f và mật độ trên của không điểm $\overline{\Delta}_f$ của f hoặc đồng thời bằng không hoặc đồng thời bằng vô cực hoặc đồng thời là số

ương .

Chứng minh.

Theo Định lý 3.1.5 ta có đánh giá $\bar{\Delta}_f \leq e\rho\sigma_f$. Theo chứng minh Định lý 3.3.2 ta có

$$\log |\prod(r)| \leq K_p r^\rho \left(\int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}} dt + r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt \right).$$

Theo định nghĩa $\bar{\Delta}_f$ ta có $n(t) < (\bar{\Delta}_f + \varepsilon)t^\rho$, $\varepsilon > 0$. Suy ra

$$\log M_\Pi(r) \leq K_p r^\rho \left(O(1) + (\bar{\Delta}_f + \varepsilon) \int_0^r t^{\rho-p-1} dt + (\bar{\Delta}_f + \varepsilon) r \int_r^\infty t^{\rho-p-2} dt \right).$$

Do p không nguyên nên chọn p sao cho $p < \rho < p+1$ ta có

$$\begin{aligned} \log M_\Pi(r) &< r^\rho (\bar{\Delta}_f + \varepsilon) K_p \left(\int_0^r t^{\rho-p-1} dt + \int_r^\infty t^{\rho-p-2} dt \right) < C_\rho (\bar{\Delta}_f + \varepsilon) r^\rho \\ &< C_\rho (\bar{\Delta}_f + r\varepsilon) r^\rho. \end{aligned}$$

Theo biểu diễn Hadamard ta có

$$\begin{aligned} \log M_\Pi(r) &< a_0 r^q + C_\rho (\bar{\Delta}_f + \varepsilon) r^\rho \\ &< C_\rho (\bar{\Delta}_f + r\varepsilon) r^\rho. \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{\log M_f(r)}{r^\rho} < C_\rho (\bar{\Delta}_f + r\varepsilon)$ và $\sigma_f \leq C_\rho \bar{\Delta}_f$.

Vậy ta có $\bar{\Delta}_f \leq e\rho\sigma_f$ và $\sigma_f \leq C_\rho \bar{\Delta}_f$. $\square$

3.5. Phân bố không điểm của hàm nguyên có cấp nguyên

Chú ý rằng p được định nghĩa là số nguyên nhỏ nhất để chuỗi $\sum \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ hội tụ. Theo Định

lý Hadamard và Định lý Borel ta có $p \leq \rho \leq p+1$, do ρ là số nguyên nên $\rho = p$ hoặc $\rho = p+1$.

Nếu $\rho = p+1$ thì $\sum \frac{1}{|a_n|^\rho}$ hội tụ;

Nếu $\rho = p$ thì $\sum \frac{1}{|a_n|^\rho}$ phân kỳ.

Ta ký hiệu a_ρ là hệ số của z^ρ trong đa thức $P(z)$ của biểu diễn Hadamard.

3.5.1 Định lý (Định lý Lindelof)

Nếu $\rho = p+1$ thì $f(z)$ là hàm nguyên có loại tối thiểu ($\sigma = 0$) khi $a_\rho = 0$ và có loại trung bình ($0 < \sigma < \infty$) khi $a_\rho \neq 0$.

Chứng minh.

Theo Định lý Hadamard ta có

$$\log |f(z)| \leq \operatorname{Re}(a_\rho z^\rho) + \log |\Pi(z)| + o(|z|^{\rho-1}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Theo Định lý Borel ta có $\log M_\Pi(r) < \varepsilon r^{p+1}$. Do $\rho = p+1$ nên

$$\log M_\Pi(r) < \varepsilon r^\rho, \quad \varepsilon > 0. \quad (4)$$

Suy ra

$$\log M_f(r) < (|a_\rho| + 3\varepsilon) r^\rho. \quad (5)$$

Vì $f(z)$ là hàm nguyên, với $P(z) = a_\rho z^\rho + \dots + a_0$ ta có

$$m\left(r, \exp(a_\rho z^\rho + \dots + a_0)\right) = m\left(r, \frac{f}{\Pi}\right) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} m\left(r, \exp(a_\rho z^\rho + \dots + a_0)\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \exp(a_\rho (re^{i\psi})^\rho + \dots + a_0) \right| d\psi \\ &> \frac{1}{2\pi} |a_\rho| r^\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f}{\Pi}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{f(re^{i\psi})}{\Pi(re^{i\psi})} \right| d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\psi})| d\psi + \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{\Pi(re^{i\psi})} \right| d\psi \right) \\ &= m(r, f) + m\left(r, \frac{1}{\Pi}\right), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} |a_\rho| r^\rho < m\left(r, \exp(a_\rho z^\rho + \dots + a_0)\right) < m(r, f) + m\left(r, \frac{1}{\Pi}\right) + \log 2. \quad (7)$$

Theo Công thức Jensen

$$\int_0^R \frac{n(t, 0)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\Pi(re^{i\psi})| d\psi - \log |\Pi(0)|,$$

$$\int_0^r \frac{n(t,0)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |\Pi(re^{i\psi})| d\psi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{\Pi(re^{i\psi})} \right| d\psi - \log |\Pi(0)|,$$

$$\int_0^r \frac{n(t,0)}{t} dt + \log \Pi(0) + m\left(r, \frac{1}{\Pi}\right) = m(r, \Pi),$$

$$m(r, \Pi) \geq m\left(r, \frac{1}{\Pi}\right). \quad (8)$$

Từ (7), (8), (4) ta có

$$\frac{|a_\rho|}{2\pi} r^\rho < m(r, f) + m(r, \Pi) + 0(1) < \log M_f(r) + 3\varepsilon r^\rho, \quad \varepsilon > 0. \quad (9)$$

Từ (5), (9) ta có

$$\frac{\log M_f(z)}{r^\rho} < |a_\rho| + 3\varepsilon,$$

$$\frac{a_\rho}{2\pi} < \frac{\log M_f(r)}{r^\rho} + 3\varepsilon.$$

Định lý được chứng minh. $\square$

3.5.2 Định lý (Định lý Lindelof)

Giả sử $\rho = p$, đặt $\delta_f(r) = \left| a_\rho + \frac{1}{\rho} \sum \frac{1}{a_n^\rho} \right|$, $\bar{\delta}_f = \limsup_{r \rightarrow \infty} \delta_f(r)$,

$\gamma_f = \max(\bar{\Delta}_f, \bar{\delta}_f)$. Khi đó σ_f và γ_f đồng thời bằng không hoặc đồng thời bằng vô hạn hoặc đồng thời là số dương.

Chứng minh.

Ta có

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\psi})| \frac{Re^{i\psi} + z}{Re^{i\psi} - z} d\psi + \sum_{|a_n| < R} \log \frac{R(z - a_n)}{R^2 - z\bar{a}_n} + iC$$

$$[\log f(z)]^{(\rho)} = \frac{\rho!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\psi})| \frac{2Re^{i\psi}}{(Re^{i\psi} - z)^{\rho+1}} d\psi$$

$$+ \sum_{|a_n| < R} \frac{(\rho-1)! a_n^{-\rho}}{(R^2 - \bar{a}_n z)^\rho} - \sum_{|a_n| < R} \frac{(\rho-1)!}{(a_n - z)^\rho}.$$

Nếu $z=0$ ta có

$$[\log f(z)]_{z=0}^{(\rho)} + (\rho-1)! \sum_{|a_n| < R} a_n^{-\rho} = \frac{2\rho!}{2\pi R^\rho} \int_0^{2\pi} \log \left| f(Re^{i\psi}) e^{-i\rho\psi} \right| d\psi + \sum_{|a_n| < R} \frac{(\rho-1)! \bar{a}_n^\rho}{R^{2\rho}} d\psi$$

$$\left| \left[\log f(z) \right]_{z=0}^{(\rho)} + (\rho-1)! \sum_{|a_n| < R} a_n^{-\rho} \right| \leq \frac{2\rho!}{R^\rho} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \log \left| f \left(\operatorname{Re}^{i\psi} \right) \right| \right| d\psi + (\rho-1)! \frac{n(R)}{R^\rho} \quad (10)$$

Vì $\log \prod(z)$ có nghiệm bội $\rho+1$ tại $z=0$ nên

$$\left[\log \prod(z) \right]_{z=0}^{(\rho)} = 0 \quad \text{và} \quad \left[\log f(z) \right]_{z=0}^{(\rho)} = \rho! |a_\rho|, \quad (11)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \log \left| f \left(\operatorname{Re}^{i\psi} \right) \right| \right| d\psi = m(R, f) + m\left(R, \frac{1}{f}\right).$$

Theo Công thức Jensen

$$\int_0^R \frac{n(t, 0)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f \left(\operatorname{Re}^{i\psi} \right) \right| d\psi - \log |f(0)|,$$

$$\int_0^R \frac{n(t, 0)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f \left(\operatorname{Re}^{i\psi} \right) \right| d\psi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\left| f \left(\operatorname{Re}^{i\psi} \right) \right|} d\psi - \log |f(0)|$$

$$N(R, 0) = m(R, f) - m\left(R, \frac{1}{f}\right) - \log |f(0)|,$$

$$m\left(R, \frac{1}{f}\right) < m(R, f) + O(1).$$

Do đó

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \log \left| f \left(\operatorname{Re}^{i\psi} \right) \right| \right| d\psi \leq 2m(R, f) + O(1). \quad (12)$$

Theo Hệ quả của Công thức Jensen

$$n(R) \leq \log M_f(er) + O(1) \quad (13)$$

Thế (11), (13) vào (10) ta có

$$\left| \rho! a_\rho + (\rho-1)! \sum_{|a_n| < R} \frac{1}{a_n^\rho} \right| \leq 4 \frac{\rho!}{R^\rho} \log M_f(R) + (\rho-1) \frac{\log M_f(er)}{R^\rho} + o\left(\frac{1}{R^\rho}\right),$$

$$\left| a_\rho + \frac{1}{\rho} \sum \frac{1}{a_n^\rho} \right| \leq 4 \frac{\log M_f(R)}{R^\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\log M_f(er)}{R^\rho} + o\left(\frac{1}{R^\rho}\right),$$

$$\delta_f(R) < C \frac{\log M_f(er)}{R^\rho}, \quad C \text{ là hằng số,}$$

$$\delta_f(R) < C e^\rho \log \frac{M_f(er)}{(er)^\rho}.$$

Từ đó

$$\bar{\delta}_f = \limsup_{R \rightarrow \infty} \delta_f(R) \leq C e^\rho \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\log_f(eR)}{(eR)^\rho} \quad \text{và} \quad \bar{\delta}_f \leq C e^\rho \sigma_f.$$

Từ (13) suy ra

$$n(R) \leq \log M_f(eR) + O(1),$$

$$\frac{n(R)}{R^\rho} \leq e^\rho \frac{\log M_f(eR)}{(eR)^\rho} + \frac{O(1)}{R^\rho},$$

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{n(R)}{R^\rho} \leq \limsup_{R \rightarrow \infty} \left(e^\rho \frac{\log M_f(eR)}{(eR)^\rho} + \frac{O(1)}{R^\rho} \right),$$

$$\bar{\Delta}_f \leq e^\rho \sigma_f.$$

Từ đó ta có $\gamma_f = \max(\bar{\delta}_f, \bar{\Delta}_f) \leq C_1 \sigma_f$.

Ta viết phân tích Hadamard dưới dạng

$$f(z) = \exp \left[\left(a_\rho + \frac{1}{\rho} \sum a_n^{-\rho} \right) z^\rho \right] \exp P_{\rho-1}(z) \cdot \prod_{|a_n| < r} G \left(\frac{z}{a_n}, \rho-1 \right) \prod_{|a_n| \geq r} G \left(\frac{z}{a_n}, \rho \right),$$

$r = |z|$, $p_{\rho-1}$ là đa thức có bậc $\rho-1$.

Áp dụng Bổ đề 3.3.1 và Định lý 3.3.2 ta được

$$\log |f(z)| \leq \delta_f(r).r^\rho + A_\rho \left[r^\rho \int_0^r \frac{dn(t)}{t^{\rho-1}(t+r)} + r^{\rho+1} \int_r^\infty \frac{dn(t)}{t^\rho(t-r)} \right] + o(r^\rho).$$

Từ đó

$$\log M_f(r) \leq \delta_f(r).r^\rho + K_\rho \left(r^{\rho-1} \int_0^r \frac{n(t)}{t^\rho} dt + r^{\rho+1} \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{\rho+2}} dt \right) + o(r^\rho).$$

Áp dụng bất đẳng thức $n(t) < (\bar{\Delta} + \varepsilon)t^\rho$, $\varepsilon > 0$, ta nhận được

$$\log M_f(r) \leq \delta_f(r).r^\rho + 2K_\rho (\bar{\Delta}_f + \varepsilon) r^\rho.$$

Từ đó suy ra $\limsup \frac{\log M_f(r)}{r^\rho} \leq \bar{\delta}_f + 2K_\rho \bar{\Delta}_f$ hay

$$\sigma_f \leq C_\rho \gamma_f, \quad C_\rho \text{ là hằng số.}$$

Vậy có $\sigma_f \leq C_\rho \gamma_f$ và $\gamma_f = \max(\bar{\delta}_f, \bar{\Delta}_f) \leq C_1 \sigma_f$. $\square$

KẾT LUẬN

Trên cơ sở các tài liệu tham khảo, chúng tôi đã đọc, đã học và viết thành luận văn này với đề tài “Cấp tăng và sự phân bố không đều của hàm nguyên”.

Luận văn không có gì mới nhưng chúng tôi đã học được cách thu thập tài liệu, viết nó lại theo một chủ đề đã định sẵn theo sự hiểu biết của mình. Chúng tôi đã hiểu khá tường tận và chứng minh chi tiết nhiều vấn đề trong các tài liệu trình bày vấn đề hoặc bỏ qua chứng minh.

Thực hiện luận văn đã giúp chúng tôi thấy rõ thêm sự đồ sộ, mênh mông của toán học, cảm nhận thêm được vẻ đẹp của toán học. Chúng tôi cũng thấy được kiến thức quá ít ỏi và nông cạn của mình. Qua làm luận văn chúng tôi thấy mình hứng thú hơn trong học toán và giảng dạy toán. Chúng tôi sẽ truyền hứng thú này đến các em học sinh phổ thông, học trò của chúng tôi.

Thành phố Hồ Chí Minh, Tháng 4-2011

Huỳnh Thái Sơn

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Đâu Thế Cấp (2006), *Hàm phức và phép tính toán tử*, NXB Đại học Quốc gia TP.Hồ Chí Minh.
2. Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải (2006), *Hàm biến phức*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Tiếng Anh

3. M.Andersson(1997), *Topics in Complex Analysis*, Springer-Verlag New York.
4. R.B.Ash, W.P.Novinger(1971), *Complex Variables*, ebook.moet.gov.vn.
5. T. W.Gamelin(2001), *Complex Analysis*, Springer- Verlag , New York.
6. B.Ya. Levin, Yu. Lyubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko(1996), *Lectures on entire functions*, Translation of Mathematical Monographs, Vol.150, American Mathematical Society.
7. R.Nevanlinna, V.Paatero(1969), *Introduction to Complex Analysis*, Addison – Wesley Publishing Company.