THƯ VIỆN

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Đỗ Thị Thúy Vân

CASYOPÉE VÀ VIỆC DẠY HỌC KHÁI NIỆM HÀM SỐ TRONG MÔI TRƯỜNG TÍCH HỢP NHIỀU CÁCH BIỂU DIỄN HÀM SỐ

Chuyên ngành: **Lý luận và phương pháp giảng dạy Toán**
Mã số: **60 14 10**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. NGUYỄN CHÍ THÀNH

Thành phố Hồ Chí Minh - 2010

LỜI CẢM ƠN

Trước tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Nguyễn Chí Thành, người đã tận tình chỉ dẫn, động viên tôi, giúp tôi có đủ niềm tin và nghị lực để hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn: PGS. TS. Lê Thị Hoài Châu, PGS.TS. Lê Văn Tiến, TS. Lê Thái Bảo Thiên Trung, TS. Trần Lương Công Khanh, PGS. TS. Annie Bessot, TS. Alain Birebent đã nhiệt tình giảng dạy, giải đáp những thắc mắc giúp chúng tôi có thể tiếp thu một cách tốt nhất về chuyên ngành nghiên cứu rất thú vị - Didactic Toán.

Tôi xin chân thành cảm ơn:

- Ban lãnh đạo và chuyên viên phòng Khoa học công nghệ - Sau đại học, ban chủ nhiệm và giảng viên khoa Toán – Tin của trường ĐHSP TPHCM đã tạo thuận lợi cho chúng tôi trong suốt khoá học.
- Ban giám hiệu và các đồng nghiệp trong tổ Toán trường THPT An Nhơn Tây – TPHCM đã tạo điều kiện cho tôi trong suốt thời gian theo học cao học ở trường ĐHSP, đồng thời đã nhiệt tình hỗ trợ tôi tiến hành thực nghiệm 1 và thực nghiệm 2.

Lời cảm ơn chân thành đến các bạn cùng khóa đã luôn chia sẻ cùng tôi những buồn vui và khó khăn trong quá trình học tập.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến những người thân yêu trong gia đình, những người luôn là chỗ dựa vững chắc nhất cho tôi về mọi mặt.

ĐỖ THỊ THÚY VÂN

DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

SGK	: Sách giáo khoa
SBT	: Sách bài tập
SGV	: Sách giáo viên
GV	: Giáo viên
HS	: Học sinh

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài và câu hỏi xuất phát

*** Ghi nhận 1**

"*Khái niệm hàm số là khái niệm then chốt của toàn bộ toán học***"**

Trích Giải tích toán học những nguyên lý cơ bản và tính toán thực hành (tập một), Đinh Thế Lục - Phạm Huy Điển - Tạ Duy Phượng - Nguyễn Xuân Tấn, NXB Giáo dục 1998: "[…] Trong thực tế ta thường kết hợp cả ba phương pháp trên *(phương pháp giải tích, phương pháp bảng, phương pháp đồ thị)* để mô tả hàm số. Biểu thức giải tích cho phép ta nghiên cứu các tính chất định tính, đồ thị cho ta một hình ảnh trực quan và bảng cho ta một định lượng cụ thể của hàm số […]"

Trong SGK Toán Việt Nam, khái niệm hàm số được xây dựng qua nhiều cấp lớp nhưng hình thức biểu thức giải tích dường như luôn chiếm ưu thế. Hơn nữa, cả cấu trúc của SGK và cách tổ chức dạy học của GV đều xem nhẹ vai trò chủ thể của HS trong việc tiếp thu các kiến thức về hàm số.

Điều này dẫn đến hệ quả gì ?

Khi dạy chương hàm số, lớp 10, chúng tôi đặt ra câu hỏi "Em hiểu thế nào về hàm số ?" để nhắc lại kiến thức lớp dưới, câu trả lời thu được là :

- Hàm số là với mỗi giá trị của x có tương ứng một giá trị của y (3 HS)
- Hàm số có dạng $y = ax + b$ (5 HS)
- Hàm số có dạng $y = ax$ (hay $ax + b$) hay $y = ax^2$ (15 HS)
- Hàm số là y, biến số là x (2 HS)
- ... có những HS không trả lời được

Như vậy khái niệm hàm số được HS lưu giữ lại đa số dưới dạng biểu thức giải tích (hàm bậc nhất hay hàm bậc hai), không quan tâm đến các đặc trưng của khái niệm (tập xác định, sự tương ứng ...). Hơn nữa việc tính các giá trị hàm khi biết giá trị biến và ngược lại cũng gây không ít khó khăn cho HS.

Vậy có thể dạy học khái niệm hàm số vừa tích hợp nhiều cách biểu diễn vừa tạo điều kiện để HS tự xây dựng kiến thức (củng cố kiến thức đối với HS lớp 10) cho mình hay không ?

*** Ghi nhận 2 :**

Quá trình dạy và học luôn đòi hỏi phải có sự tương tác, nhất là trong môi trường có tích hợp công nghệ như phần mềm dạy học, Internet.

Theo didactic **"***Chủ thể học bằng cách thích nghi (đồng hóa và điều tiết) với môi trường (MT), nơi tạo ra những mâu thuẫn, khó khăn và mất cân bằng***"**

Theo Brousseau : *"Trong tình huống didactic, môi trường là hệ thống đối kháng với HS, tức là cái làm thay đổi tình trạng của kiến thức theo cách mà HS không kiểm soát được"*. Các yếu tố hình thành nên môi trường có thể là vật chất hoặc phi vật chất.

Một trong những môi trường tạo sự tương tác hiệu quả đó là môi trường máy tính tích hợp các phần mềm dạy học. Và phần mềm Casyopée là phần mềm dạy học hàm số do Lagrange (2002) và nhóm nghiên cứu thuộc trung tâm Nghiên cứu Didactic Diddirem (nay là trung tâm Nghiên cứu Didactic LDAR Đại học Paris VII) phát triển. Một đặc trưng nổi bật của phần mềm này là có hai môđun đại số và môđun hình học động và kết nối chặt chẽ với nhau. Đây là phần mềm duy nhất nghiên cứu quan hệ hàm có sự tích hợp của hai mođun đại số và hình học.

Những ghi nhận trên đưa chúng tôi đến với những câu hỏi xuất phát sau :

- Khái niệm hàm số được trình bày như thế nào trong chương trình toán phổ thông Việt Nam ?
- Cách trình bày của SGK ảnh hưởng thế nào đến quan niệm của HS về khái niệm hàm số ?
- Vai trò của phần mềm Casyopée đối với việc dạy và học khái niệm hàm số trong môi trường tích hợp nhiều cách biểu diễn ?

2. Khung lý thuyết tham chiếu

2.1 Lý thuyết nhân chủng học

Trước hết chúng tôi đặt nghiên cứu của mình trong phạm vi của *lý thuyết nhân chủng học*. Tại sao lại là lý thuyết nhân chủng học ? Bởi vì 3 câu hỏi của chúng tôi đều liên quan đến những khái niệm cơ bản của lý thuyết này : quan hệ cá nhân, quan hệ thể chế đối với một đối tượng tri thức, và tổ chức toán học. Dưới đây chúng tôi sẽ trình bày tóm tắt những khái niệm đó và cố gắng làm rõ tính thoả đáng của sự lựa chọn phạm vi lý thuyết của mình. Để trình bày các khái niệm này, chúng tôi dựa vào bài giảng didactic được công bố trong "Những yếu tố cơ bản của didactic Toán", sách song ngữ Việt – Pháp, NXBĐHQG TPHCM 2009.

. Quan hệ cá nhân đối với một đối tượng tri thức

Một đối tượng là một cái gì đó tồn tại ít nhất đối với một cá nhân. Quan hệ cá nhân của một cá nhân X với một đối tượng tri thức O, ký hiệu R(X,O), là tập hợp những tác động qua lại mà X có thể có với O. R(X,O) cho biết X nghĩ gì về O, X hiểu như thế nào về O, X có thể thao tác O ra sao.

Theo quan điểm này việc học tập của cá nhân X về đối tượng tri thức O là sự điều chỉnh mối quan hệ của X đối với O. Cụ thể, việc học tập xảy ra nếu quan hệ R(X,O) bắt đầu được thiết lập (nếu nó chưa từng tồn tại), hoặc bị biến đổi (nếu nó đã tồn tại).

. Quan hệ thể chế đối với một đối tượng tri thức

Thế nhưng, một cá nhân không thể tồn tại lơ lửng ở đâu đó mà luôn luôn phải ở trong ít nhất một thể chế. Như vậy việc thiết lập hay biến đổi quan hệ R(X,O) phải được đặt trong một thể chế I nào đó có sự tồn tại của X. Hơn thế giữa I và O cũng phải có một quan hệ xác định.

Hiển nhiên, trong một thể chế I, quan hệ R(X,O) hình thành hay thay đổi dưới các ràng buộc của R(I,O).

Với những định nghĩa trên thì trả lời cho các câu hỏi xuất phát chính là làm rõ quan hệ của thể chế I mà chúng tôi quan tâm đối với đối tượng O. Đối tượng O ở đây là ”khái niệm hàm số”, còn thể chế dạy học I thì với khuôn khổ luận văn chúng tôi chỉ giới hạn trong phạm vi lớp 10.

Một câu hỏi đặt ra ngay tức thì : làm thế nào để vạch rõ quan hệ thể chế R(I,O) và quan hệ cá nhân R(X,O) ?

. Tổ chức toán học

Hoạt động toán học là một bộ phận của hoạt động xã hội. Do đó, cũng cần thiết xây dựng một mô hình cho phép mô tả và nghiên cứu thực tế đó. Xuất phát từ quan điểm này mà Chevallard (1998) đã đưa vào khái niệm praxéologie.

Theo Chevallard, mỗi praxéologie là một bộ gồm 4 thành phần $[T,\tau,\theta,\Theta]$, trong đó : T là kiểu nhiệm vụ, τ là kỹ thuật cho phép giải quyết T, θ là công nghệ giải thích cho kỹ thuật τ, Θ là lí thuyết cho θ, nghĩa là công nghệ của công nghệ θ

Một praxeologie mà các thành phần đều mang bản chất toán học được gọi là một tổ chức toán học

Theo Bosch.M và Chevallard.Y, việc nghiên cứu mối quan hệ thể chế I với một đối tượng tri thức O có thể được tiến hành thông qua việc nghiên cứu các tổ chức toán học gắn liến với O :

”*Mối quan hệ thể chế với một đối tượng [...] được định hình và biến đổi bởi một tập hợp những nhiệm vụ mà cá nhân [chiếm một vị trí nào đó trong thể chế này] phải thực hiện, nhờ vào những kỹ thuật xác định (tham khảo Bosch và Chevallard, 1999)*”

Hơn thế , cũng theo Bosch và Chevallard, việc nghiên cứu các tổ chức toán học gắn liền với O còn cho phép ta hình dung được một số yếu tố của quan hệ cá nhân của một chủ thể X tồn tại trong O, bởi vì:

”Chính việc thực hiện những nhiệm vụ khác nhau mà cá nhân phải làm trong suốt cuộc đời mình trong những thể chế khác nhau, ở đó nó là một chủ thể (lần lượt hay đồng thời), dẫn tới làm nảy sinh mối quan hệ cá nhân của nó với đối tượng nói trên”.

Như thế, việc chúng tôi lấy lý thuyết nhân chủng học làm tham chiếu cho nghiên cứu của mình dường như là hoàn toàn thoả đáng.

2.2 Hợp đồng didactic

Hợp đồng didactic liên quan đến một đối tượng dạy – học là sự mô hình hoá các quyền lợi và nghĩa vụ ngầm ẩn của giáo viên cũng như của HS đối với đối tượng đó.

"[…] một tập hợp những quy tắc (thường không được phát biểu tường minh) phân chia và hạn chế trách nhiệm của mỗi thành viên, học sinh và giáo viên, về một tri thức được giảng dạy" (Bessot và các tác giả).

Những điều khoản của hợp đồng tổ chức nên các mối quan hệ giữa Thầy và Trò đối với một tri thức:

"Hợp đồng chi phối quan hệ giữa thầy và trò về các kế hoạch, các mục tiêu, các quyết định, các hoạt động và đánh giá sư phạm. Chính hợp đồng chỉ ra ở từng lúc vị trí tương hỗ của các đối tác đối với nhiệm vụ phải hoàn thành và chỉ rõ ý nghĩa sâu sắc của hoạt động đang được tiến hành, của các phát biểu hoặc những lời giải thích. Nó là quy tắc giải mã cho hoạt động sư phạm mà mọi sự học tập trong nhà trường phải trải qua**".** (Tài liệu đã dẫn)

Như vậy, khái niệm hợp đồng didactic cho phép ta "giải mã" các ứng xử của GV và HS, tìm ra ý nghĩa của những hoạt động mà họ tiến hành, từ đó có thể giải thích một cách rõ ràng và chính xác những sự kiện quan sát được trong lớp học.

Theo định nghĩa trên những yếu tố trả lời cho các câu hỏi xuất phát đều có thể được tìm thấy qua việc nghiên cứu các quy tắc hợp đồng didactic liên quan đến đối tượng khái niệm hàm số.

3. Trình bày lại câu hỏi luận văn

Giới hạn trong phạm vi lý thuyết didactic đã chọn, chúng tôi trình bày lại dưới đây những câu hỏi xuất phát mà việc tìm kiếm các yếu tố cho phép trả lời chúng là trọng tâm nghiên cứu của luận văn này. Hệ thống câu hỏi của chúng tôi xoay quanh những yếu tố cho phép xác định quan hệ thể chế I_1 (thể chế dạy học toán ở lớp 7), quan hệ thể chế I_2 (thể chế dạy học toán ở lớp 9), quan hệ thể chế I_3 (thể chế dạy học toán ở lớp 10) với đối tượng O – "khái niệm hàm số", và quan hệ cá nhân của HS lớp 10 với O.

- Câu hỏi 1 (Q1) : Trong các thể chế đã nêu, O xuất hiện như thế nào ? có những tính chất gì, cho phép giải quyết những kiểu nhiệm vụ gì ?

- Câu hỏi 2 (Q2) : Dưới tầm ảnh hưởng của các thể chế : trong môi trường giấy bút truyền thống , quan hệ cá nhân của học sinh với O diễn ra như thế nào, (cụ thể cá nhân vận hành O giải quyết những kiểu nhiệm vụ gì ?), bị chi phối bởi những quy tắc hợp đồng nào ?
- Câu hỏi 3 (Q3) : trong môi trường công nghệ thông tin, quan hệ cá nhân đó thay đổi ra sao ? Có những kĩ thuật và công nghệ toán học mới nào được đưa vào để giải quyết các kiểu nhiệm vụ thể chế đưa ra ?

4. Phương pháp nghiên cứu và cấu trúc luận văn

Luận văn chúng tôi nhắm đền việc tìm những yếu tố trả lời cho câu hỏi nêu trên.

- Đối với câu hỏi Q1, Q2 : chúng tôi sử dụng lại một số các kết quả phân tích quan hệ thể chế được trình bày trong hai luận văn của thạc sĩ Bùi Thị Ngát và Bùi Anh Tuấn
- Đối với câu hỏi Q3 : nghiên cứu phần mềm Casyopée

Chúng tôi sẽ trình bày trong chương 2 và thông qua thực nghiệm tìm hiểu mối tương quan của nó và việc dạy học khái niệm hàm số trong môi trường tích hợp nhiều cách biểu

Cụ thể , trong chương 1 chúng tôi sẽ tổng hợp điều tra khoa học luận về khái niệm hàm số trong hai luận văn đã đề cập trước đó. Chương 2 chúng tôi sẽ việc nghiên cứu mối quan hệ thể chế với khái niệm hàm số (qua các lớp 7, 9, 10). Chương 3 dành cho phần thực nghiệm và nghiên cứu về phần mềm Casyopée.

CHƯƠNG 1 : MỘT VÀI TỔNG HỢP ĐIỀU TRA KHOA HỌC LUẬN VỀ KHÁI NIỆM HÀM SỐ

Chúng tôi tổng hợp lại từ các nghiên cứu khoa học luận trong hai luận văn thạc sĩ của Bùi Anh Tuấn (2007) và Bùi Thị Ngát (2008).

1.Luận văn của Bùi Thị Ngát

Những giáo trình đại học chủ yếu được chọn để tham khảo trong luận văn này là :

- *Toán học cao cấp, tập 1,2,3*- của Nguyễn Đình Trí (chủ biên).

- *Tuyển tập bài tập toán dành cho các trường đại học kĩ thuật (1)*- Đại số tuyến tính và cơ sở giải tích toán học, NXB KHKT, do A.V.Ephimop, B.P.Đemiđovich biên tập.

Có thể tóm tắt một số điểm chính của luận văn như sau :

- Ba đặc trưng cơ bản của hàm số là : *tương ứng, phụ thuộc và biến thiên.*
- Biểu diễn hàm số : Trong lịch sử, người ta đã dùng các phương tiện khác nhau như bảng số, hình hình học, biểu thức giải tích và đồ thị. Kể từ thế kỷ 17, cách biểu diễn bằng hình học rất ít khi xuất hiện. Cách biểu diễn bằng bảng thường chỉ được áp dụng khi tập xác định của hàm số là hữu hạn và quy tắc tương ứng khó diễn đạt bằng một biểu thức giải tích. Hai cách biểu diễn còn lại vẫn luôn được ưu tiên.
- Ta có thể nghiên cứu hàm số thông qua đồ thị của nó vì các đặc trưng của hàm số đều được thể hiện thông qua đồ thị.

Hàm số được cho bằng biểu thức giải tích y = f(x)	**Đồ thị hàm số y = f(x)**
1- Là một phép tương ứng mỗi số thực $x \in X$ với một số thực f(x)	1- Là tập hợp những điểm có toạ độ cùng thoả mãn biểu thức xác định hàm số - Cắt những đường thẳng cùng phương với Oy tại không quá một điểm
2- Tập xác định của hàm số là tập rời rạc hay liên tục	2- Có thể là một tập hợp điểm rời rạc, một đường cong (liên tục hoặc không liên tục) - Trong trường hợp đồ thị là đường cong thì đó là một đường cong phẳng
3- Hàm số đồng biến (nghịch biến)	3- Đồ thị đi lên (xuống) từ trái sang phải
4- Hàm số chẵn	4- Đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng
- Hàm số lẻ	- Đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng
5- Hàm số tuần hoàn	5- Đồ thị gồm những phần "giống hệt nhau", mỗi phần có thể xem là ảnh của một phần nào đó qua một

6- Hàm số bị chặn trên trong (a;b) bởi số M. - Hàm số bị chặn dưới trong (a;b) bởi số m. - Hàm số bị chặn. 7- Hàm số liên tục trong khoảng (a;b) …	phép tịnh tiến. 6- Đồ thị trong khoảng đó nằm dưới đường thẳng y = M. - Đồ thị trong khoảng đó nằm dưới đường thẳng y = m. - Đồ thị hàm số nằm trong phần mặt phẳng giới hạn bởi các đường thẳng y = M và y = m. 7- Đồ thị mà một đường cong liền nét trong (a;b). ….

Ngược lại từ biểu thức giải tích ta cũng có thể suy ra tính lồi lõm, điểm uốn, dáng điệu của đồ thị, …

2 Luận văn của Bùi Anh Tuấn

- Hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của những đại lượng biến thiên này đối với những đại lượng biến thiên khác. Từ "đại lượng" được hiểu chung là phần tử của một tập hợp bất kì.
- Đặc trưng cơ bản của đồ thị là đường cong dùng biểu diễn đồ thị phải thỏa mãn tính chất : *cắt những đường thẳng cùng phương trục Oy tại không quá một điểm.*
- Để "dựng đồ thị hàm số" có ba kĩ thuật :

1. Dùng công cụ của giải tích để khảo sát hàm số, sau đó dựng đồ thị.
2. Dựng một phần đồ thị, sau đó dùng các phép biến đổi (tịnh tiến, song song, kéo dãn ra, nén co lại, biến đổi đối xứng) để dựng toàn bộ phần còn lại của đồ thị.
3. Dựa vào đồ thị một hàm số khác, dùng các phép biến hình để dựng đồ thị hàm số đã cho.

3 Kết luận

Chúng tôi sẽ tóm tắt lại dưới đây những điểm chính rút ra được từ tổng hợp trên.

- Đồ thị là một phương tiện biểu diễn thể hiện rõ 3 đặc trưng cơ bản của hàm số (phụ thuộc, tương ứng, biến thiên). Khi hàm số xác định bởi biểu thức y = f(x) thì đường cong biểu diễn hàm số (đồ thị) ***cắt những đường thẳng cùng phương với trục Oy tại không quá một điểm.***

- Tính chất của đồ thị được suy ra từ tính chất của hàm số. Ngược lại, các đặc trưng của hàm số đều được thể hiện trên đồ thị nên qua đồ thị, ta cũng có thể thấy lại một số tính chất của hàm số ứng với nó.

Phương pháp đồ thị thực chất là một biến thể của phương pháp bảng. Thay vì cho một bảng số liệu, người ta cho một tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ vuông góc (tức là mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes), và hàm số f được xác định bởi phép cho tương ứng hoành độ của mỗi điểm (trong tập điểm đã cho) với tung độ của nó. Như vậy, trong khuôn khổ luận văn này chúng tôi sẽ quan tâm đến dạy học khái niệm hàm số gắn với việc tích hợp hai cách biểu diễn bằng đồ thị và bằng biểu thức giải tích.

Trong luận văn của Bùi Anh Tuấn đưa ra 3 kĩ thuật để "dựng đồ thị hàm số", thực chất là vẽ thông qua khảo sát. Phương pháp này giúp cho việc vẽ đồ thị thủ công một cách dễ dàng. Tuy nhiên, lớp hàm mà người ta có thể vẽ được đồ thị theo phương pháp này không phải là rộng, và để tiến hành người vẽ phải nắm được những kiến thức cơ bản về khảo sát hàm số (kiến thức Toán 12). Vậy trước khi có được những kiến thức này, việc dạy học khái niệm hàm số được tiến hành như thế nào ?

Với nhận xét rằng một đường cong bình thường luôn có thể xấp xỉ được bằng đường gấp khúc nhỏ, đường gấp khúc này hoàn toàn được xác định bởi các điểm đỉnh, phương pháp vẽ trực tiếp đồ thị của hàm số (không cần kiến thức về khảo sát hàm số). Tuy vậy phương pháp này nếu thực hiện một cách thủ công sẽ rất vất vả, nhưng đối với máy tính thì điều này trở nên rất dễ dàng, và trên thực tế với sự trợ giúp của máy tính người ta vẽ được các đồ thị với độ chính xác cao tùy ý (bằng mắt thường không thể biết được đó chỉ là một hình ảnh xấp xỉ).

Và khi việc tính toán trên máy tính trở nên phổ biến thì phương pháp vẽ thông qua khảo sát chỉ còn là phương tiện để củng cố kiến thức lý thuyết về khảo sát hàm số.

CHƯƠNG 2 : QUAN HỆ THỂ CHẾ VỚI KHÁI NIỆM HÀM SỐ VÀ SỰ TÍCH HỢP NHIỀU CÁCH BIỂU DIỄN HÀM SỐ

Mở đầu

Chúng tôi chọn phân tích bộ SGK lớp 7, lớp 9 và lớp 10 theo chương trình cơ bản, theo chủ đề hàm số và các cách biểu diễn hàm số. Tài liệu phân tích:

+ SGK Toán 7 (tập 1, 2), Phan Đức Chính (tổng chủ biên), Tôn Thân (chủ biên), 2004, NXBGD

+ SBT Toán 7 (tập 1, 2), Tôn Thân (chủ biên), 2004, NXBGD

+ SGK Toán 9 (tập 1, 2), Phan Đức Chính (tổng chủ biên), Tôn Thân (chủ biên), 2005, NXBGD

+ SBT Toán 9 (tập 1, 2), Tôn Thân (chủ biên), 2005, NXBGD

+ SGK Đại số 10, Trần Văn Hạo (tổng chủ biên), Vũ Tuấn (chủ biên), 2006, NXBGD.

+ SBT Đại số 10, Vũ Tuấn (chủ biên), 2006, NXBGD.

+ Các SGV dùng kèm với bộ SGK trên

+ Trong phần phân tích dưới đây có sử dụng lại các kết quả phân tích được trình bày trong luận văn của thạc sĩ Bùi Thị Ngát.

Mục đích phân tích

- Tìm hiểu con đường hình thành khái niệm hàm số trong chương trình phổ thông Việt Nam (trải qua ba cấp lớp 7, 9, 10). Cụ thể :

+ Trong chương trình, SGK toán phổ thông trình bày khái niệm hàm số như thế nào ?

+ Có hay không sự tích hợp nhiều cách biểu diễn hàm số ?

+ Việc trình bày như vậy đem lại những thuận lợi và khó khăn gì ?

I. Phân tích chương trình

1. Lớp 7 :

* Phân phối chương trình :

Bài 5. Hàm số (1 tiết). Luyện tập (1 tiết)

Bài 7. Đồ thị của hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) (1 tiết). Luyện tập (2 tiết)

* Bài 5 : Hàm số

SGV trang 69, đã lưu ý ”Hàm số là một khái niệm khó, HS sẽ còn tiếp tục nghiên cứu ở các lớp trên nên GV chỉ cần làm cho HS đạt được các mục tiêu”

Với lưu ý như vậy, SGV trang 69, mục tiêu của bài được đề ra như sau :

”Học xong bài này HS cần phải :

- Biết được khái niệm hàm số
- Nhận biết được đại lượng này có phải là hàm số của đại lượng kia hay không trong những cách cho (bằng bảng, bằng công thức) cụ thể và đơn giản
- Tìm được giá trị tương ứng của hàm số khi biết giá trị của biến số.”

Để làm rõ mục tiêu trên, SGV trang 69 đã lưu ý :

”... để đại lượng y là hàm số của đại lượng x cần có ba điều kiện sau :

1. Các đại lượng x và y đều nhận các giá trị số.
2. Đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng x.
3. Với mỗi giá trị của x luôn tìm được giá trị tương ứng duy nhất của đại lượng y.”

Như vậy, chương trình qui định đại lượng ’y’ là hàm số của đại lượng ’x’; y ”phụ thuộc” vào x và có sự ”tương ứng duy nhất” mỗi giá trị x với giá trị của y.

Trong trường hợp hàm hằng, SGV trang 69 đã giải thích nghĩa của ”phụ thuộc” như sau :”[…] sự phụ thuộc thể hiện ở chỗ : với mỗi giá trị của x ta đều xác định được một giá trị của y”

Trong phần gợi ý dạy học, SGV trang 70, đã trình bày :

”[...] có hai loại đại lượng biến thiên (thay đổi) ; trong đó một đại lượng thay đổi phụ thuộc vào sự thay đổi của đại lượng kia. Khi đó, nếu thêm điều kiện ”giá trị tương ứng duy nhất” của đại lượng phụ thuộc thì đại lương đó là hàm số của đại lượng kia”.

Tóm lại, tuy xác định khái niệm hàm số là một khái niệm khó nhưng chương trình Toán 7 vẫn yêu cầu làm rõ cả ba đặc trưng ”tương ứng, phụ thuộc và biến thiên”. Hơn nữa, chương trình cũng chỉ đề cập đến hai cách biểu diễn hàm số bằng bảng và bằng biểu thức giải tích; kĩ năng ”tính” là một trong ba mục tiêu của bài để giúp HS nhận biết khái niệm một cách trực quan và dễ dàng hơn.

* Bài 7 : Đồ thị của hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$)

SGV trang 73 :

”Học xong bài này, HS cần phải :

- Hiểu được khái niệm đồ thị của hàm số, đồ thị của hàm số $y = ax$
- Biết được ý nghĩa của đồ thị trong thực tiễn và trong nghiên cứu hàm số.
- Biết cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax$”

Để ”hiểu được khái niệm đồ thị ...”, SGV trang 73 lưu ý GV phải làm rõ cho HS thấy : ”Đồ thị hàm số có thể là một số điểm rời rạc ”

Cũng trong phần này SGV đề cập :

" + Trong toán học (chương trình toán phổ thông), đồ thị của hàm số được cho bởi công thức thường là các đường (vô số điểm), nên ta cần phải biết hình dạng đồ thị của mỗi hàm số cụ thể. (Ví dụ : đồ thị của hàm số y = ax là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ, đồ thị của hàm số y = $\frac{a}{x}$ là một đường cong gọi là hyperbol, ...). Vì vậy HS cần nhớ rõ hình dạng đồ thị của các hàm số sẽ được học.

+ Trong thực tiễn, người ta thường chỉ vẽ một số điểm đặc biệt rồi nối lại với nhau để xem xét hình dạng của nó (chẳng hạn, bác sĩ theo dõi bệnh nhân chỉ đo nhiệt độ cơ thể của bệnh nhân mỗi ngày 1, 2 lần rồi nối các điểm lại với nhau sẽ có được đồ thị gần đúng của diễn biến nhiệt độ cơ thể của bệnh nhân theo thời gian)..."

Từ những gì được trình bày ở trên ta rút ra được rằng :

- Hình dạng đồ thị hàm số gắn với 1 dạng biểu thức giải tích biểu diễn hàm số nhất định, có thể chỉ bao gồm những điểm rời rạc. Như vậy chương trình không trình bày đồ thị với tư cách là một cách biểu diễn hàm số, điều này có thể dẫn đến sai lầm cho HS : 'tập hợp những điểm rời rạc là đồ thị của một hàm số' (được trình bày trong thực nghiệm A)

- Khái niệm đồ thị hàm số xuất phát từ thực tiễn, chương trình đưa ra một qui tắc hợp đồng : 'vẽ đồ thị hàm số là vẽ một số điểm đặc biệt rồi nối chúng lại với nhau' được các lớp trên (lớp 9, 10) chấp nhận và sử dụng

2. Lớp 9 :

*** Phân phối chương trình** :

- SGK toán 9 (tập 1)

Chương II : Hàm số bậc nhất

Bài 1 : Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số (1 tiết). Luyện tập (1 tiết)

Bài 2 : Hàm số bậc nhất (1 tiết). Luyện tập (1 tiết)

Bài 3 : Đồ thị của hàm số y = ax + b ($a \neq 0$) (1 tiết). Luyện tập (1 tiết)

Bài 4 : Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau (1 tiết). Luyện tập (1 tiết)

Bài 5 : Hệ số góc của đường thẳng y = ax + b ($a \neq 0$) (1 tiết). Luyện tập (1 tiết)

- SGK toán 9 (tập 2)

Chương IV : Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) _ Phương trình bậc hai một ẩn

Bài 1 : Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) (1 tiết)

Bài 2 : Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ (1 tiết). Luyện tập (1 tiết)

** (tập 1)*

SGV trang 52 lưu ý như sau :

”Các khái niệm về hàm số đã được học ở lớp 7, ... Trong tiết học chỉ đưa thêm khái niệm hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến. Khái niệm được hình thành thông qua ví dụ và đi đến định nghĩa tổng quát. Phần này học sinh phải trực tiếp tính toán thông qua ví dụ để tiếp cận dần khái niệm, ...”

Cụ thể trong phần gợi ý về dạy học SGV đề cập :

” Cho HS ôn lại các khái niệm về hàm số bằng cách đưa ra các câu hỏi :

+ Khi nào thì đại lượng y được gọi là hàm số của đại lượng thay đổi x ?

+ Em hiểu như thế nào về các kí hiệu y = f(x), y = g(x) ?

+ Các kí hiệu f(0), f(1), f(2), …, f(a) nói lên điều gì ? ”

... Đặc biệt về khái niện hàm số, GV cần nêu rõ như sau :

+ Đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x;

+ Với mỗi giá trị của x, ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y”

Ta có thể thấy rằng SGK lớp 9 có sự liên thông với SGK lớp 7 : nhắc lại khái niệm hàm số, 3 đặc trưng cơ bản của khái niệm, kĩ năng tính toán và cách biển diễn hàm số bằng biểu thức giải tích; dạy học khái niệm mới (hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến) dựa trên biểu thức giải tích và bảng giá trị của hàm số.

Thêm vào đó, việc nghiên cứu đồ thị hàm số (hàm số bậc nhất) được trình bày qua 3 bài, ngoài yêu cầu vẽ thành thạo đồ thị hàm số bậc nhất y = ax + b, biết đồ thị của nó là một đường thẳng, và từ đó xuất hiện sự kết nối giữa đại số và hình học (tính chu vi, diện tích của tam giác , chứng minh hình bình hành, tam giác vuông, góc, vị trí tương đối, ...)

SGV tr.30, giới thiệu chương này như sau :

” Tuy chỉ là mở đầu và chỉ là trường hợp đơn giản nhất của hàm số bậc hai song nó lại vô cùng quan trọng vì nó đã giải quyết gần hết mọi vấn đề cơ bản như : đồ thị là một đường cong gọi là parabol, nhận trục OY làm trục Oy làm trục đối xứng, có điểm thấp nhất nếu a > 0 (cao nhất nếu a < 0) gọi là đỉnh của parabol ”

Với vị trí quan trọng như vậy, SGV tr.35, bài “đồ thị của hàm số $y = ax^2$” có nêu :

” Mục tiêu : Nắm vững các tính chất của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đồ thị của nó. Biết dùng tính chất của hàm số để suy ra hình dạng của đồ thị và ngược lại. [..]

Những điểm cần lưu ý :

- Nên liên hệ chặt chẽ dạng của đồ thị với sự biến thiên của hàm số .
- Khi lập bảng giá trị tương ứng giữa x và y, ta nên lưu ý HS rằng vì $y = ax^2$ nên khi thay x bởi –x thì các giá trị tương ứng của y bằng nhau. Nhờ nhận xét này mà việc tính toán giảm có thể giảm đi một nửa. Qua đó chúng ta cũng thấy rõ tính đối xứng của đồ thị qua trục Oy
- Khi chọn các điểm để vẽ đồ thị cũng nên thường xuyên tận dụng tính chất đối xứng của đồ thị để công việc đơn giản hơn”

Qua phần trình bày trên, ta nhận thấy :

Các tính chất của hàm số có thể được nhận biết thông qua : công thức hàm số và đồ thị. Hình dạng của đồ thị có thể được suy ra từ tính chất của hàm số. Tính chất của hàm số và sự thể hiện nó trên đồ thị được tác giả SGK đặc biệt nhấn mạnh.

Khi vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$, tính đối xứng của đồ thị qua trục tung được đặc biệt lưu ý. HS tìm một vài điểm thuộc đồ thị và ảnh của chúng qua phép đối xứng trục Oy rồi nối lại. Đây chính là kỹ thuật mà thể chế mong đợi ở HS khi thực hiện kiểu nhiệm vụ: "Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$".

3. Lớp 10 :

3.1 Chương trình nâng cao

** Phân phối chương trình :*

Chương II : Hàm số bậc nhất và bậc hai

Bài 1 : Đại cương về hàm số (tiết)

Bài 2 : Hàm số bậc nhất (tiết)

Bài 3 : Hàm số bậc hai (tiết)

SGV trang 4 :

" Trong chủ đề này, điểm cần nhấn mạnh là yêu cầu về kĩ năng đọc đồ thị, nghĩa là khi cho đồ thị của một hàm số, HS phải lập được bảng biến thiên của hàm số đó và nêu được những tính chất đơn giản của nó. "

Và khi cho hàm số bằng đồ thị, HS cần :

" - Biết cách tìm giá trị của hàm số tại một điểm cho trước thuộc tập xác định và ngược lại, tìm giá trị của x để hàm số nhận một giá trị cho trước (nói chung là giá trị gần đúng, tuy nhiên, nếu kết hợp với các phương pháp khác thì có thể tìm được giá trị chính xác)

- Nhận biết được sự biến thiên và biết lập bảng biến thiên của một hàm số thông qua đồ thị của nó

- Bước đầu nhận biết một vài tính chất của hàm số như : giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của hàm số (nếu có), dấu của hàm số tại một điểm hoặc trên một khoảng

- Nhận biết được tính chẵn-lẻ của hàm số qua đồ thị " [SGV tr.69]

Qua phần trình bày trên ta nhận thấy:

Trong chương trình Đại số 10 nâng cao:

- Yêu cầu "đọc đồ thị" được đặc biệt đề cao.

- Vẽ đồ thị đóng vai trò quan trọng. Các kiến thức về đồ thị hàm số $y = ax^2$ đã biết ở các lớp dưới vẫn được kế thừa. Chúng không được trình bày chi tiết ở chương này, chỉ được nhắc lại. Đối với các hàm số khác, việc vẽ đồ thị của nó chủ yếu dựa vào những đồ thị đã biết và một số phép biến đổi đồ thị (phép tịnh tiến đồ thị). Sau đó từ đồ thị suy ra một số tính chất của các hàm số này. SGV tr.71 còn viết: "Do tính phức tạp của vấn đề, SGK chỉ trình bày sơ lược và rất trực giác để hs hiểu thế nào là tịnh tiến một đồ thị. Sau đó cho hs thừa nhận kết quả tổng quát về mối quan hệ giữa các hàm số mà đồ thị của hàm số này thu được bằng cách tịnh

tiến đồ thị của hàm số kia. Đây là sự chuẩn bị cho bài học sau, nhất là bài học về hàm số bậc hai". Điều này cho thấy việc đưa vào "phép tịnh tiến đồ thị" nhằm mục đích phục vụ cho yêu cầu "vẽ đồ thị" (một trong những yêu cầu chính của chương) và việc nghiên cứu hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ và đồ thị của nó.

Để rèn luyện kĩ năng "đọc đồ thị", ta thấy SGK luôn trình bày, song song tính chất của hàm số và tính chất của đồ thị tương ứng. Cụ thể:

"Để HS nắm vững khái niệm hàm số, GV cần nhấn mạnh yêu cầu về tính duy nhất của số thực y ứng với mỗi giá trị của x thuộc tập xác định. Điều đó được thể hiện qua đồ thị như sau: Nếu x_o thuộc tập xác định thì đường thẳng song song với trục tung và đường thẳng qua điểm $(x_o;0)$ bao giờ cũng cắt đồ thị của hàm số tại một điểm duy nhất (nếu x_o không thuộc tập xác định thì đường thẳng này không cắt đồ thị). Những hình không có tính chất, chẳng hạn đường tròn hay đường thẳng song song với trục tung không thể là đồ thị của một hàm số nào cả " [SGV tr.72].

Tính chất "*ứng với mỗi x, luôn có duy nhất một giá trị y*" của hàm số $y = f(x)$ được đặt tương ứng với tính chất của đồ thị "*cắt các đường thẳng cùng phương với Oy tại không qua một điểm*".

Hay "Khái niệm hàm số đồng biến hoặc nghịch biến cũng như hàm số chẵn, hàm số lẻ không phải là một khái niệm khó. Song GV nên phân tích cho HS thấy sự chuyển đổi giữa ba ngôn ngữ Giải tích, Đại số và Hình học, cụ thể như sau:

Giải tích	Đại số	Hình học
Hàm số f đồng biến	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	Đồ thị của hàm số đi lên
Hàm số f nghịch biến	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	Đồ thị của hàm số đi xuống
Hàm số f chẵn	f(-x) = f(x)	Đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng
Hàm số f lẻ	f(-x) = -f(x)	Đồ thị nhận gốc O làm tâm đối xứng

(Trong bảng trên ta bỏ qua các chi tiết phụ) [SGV,tr.72]

3.2 Chương trình cơ bản

** Phân phối chương trình :*

Bài 1 : Hàm số (2 tiết)

Bài 2 : Hàm số y = ax + b (1 tiết + 1 tiết luyện tập)

Bài 3 : Hàm số bậc hai (2 tiết)

Ôn tập chương II (1 tiết)

*

"Khái niệm hàm số được nhắc lại theo định nghĩa của SGK Toán 9 (sự tương quan phụ thuộc giữa hai đại lượng biến thiên) và có đưa thêm khái niệm tập xác định. Các khái niệm đồng biến, nghịch biến, hàm số chẵn, hàm số lẻ được đưa ra từ nhận xét trực giác trên đồ thị." [SGV tr. 51]

Cụ thể, SGV tr. 53 nêu ra :

"Một hàm số có thể được cho bằng bảng, biểu đồ hoặc bằng công thức.". SGV cũng nhấn mạnh trong thực tế gặp các hàm số cho bởi bảng hoặc biểu đồ, "SGK đưa ra những ví dụ thực về hàm số và qua các ví dụ này củng cố khái niệm tập xác định của hàm số, khái niệm giá trị của hàm số."; ngoài ra chú ý rằng SGK Toán thường chỉ xét các hàm số được cho bởi công thức, "điểm mới cần nhấn mạnh ở đây là quy ước về tập xác định của hàm số được cho bởi công thức"

=> kĩ năng "tìm tập xác định của hàm số"

Về đồ thị hàm số, SGV tr. 53 chỉ chú ý :

"Hoạt động 7 để HS tập "đọc" đồ thị (đọc xuôi, đọc ngược), nghĩa là dựa vào đồ thị để tìm f(x) theo các giá trị của x và ngược lại tìm x theo f(x)

Chẳng hạn, để tìm f(-2), từ điểm – 2 trên trục hoành ta kẻ một đường song song với trục Oy cắt đồ thị tại điểm M. Từ điểm M kẻ đường song song với trục Ox, cắt trục tung tại điểm – 1. Ta được f(- 2) = - 1"

=> kĩ năng "tính" bằng đồ thị hàm số, chú ý trên minh hoạ cho tính chất: " Khi hàm số xác định bởi biểu thức y = f(x) thì đường cong biểu diễn hàm số (đồ thị) ***cắt những đường thẳng cùng phương với trục Oy tại không quá một điểm.*** "

"Đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ được suy ra từ đường parabol $y = ax^2$ bằng các phép tịnh tiến song song với trục hoành và trục tung… . Tịnh tiến ở đây được hiểu một cách trực giác là dịch chuyển một hình song song với trục tung (trục hoành) lên trên hoặc xuống dưới (sang phải hoặc sang trái)… . Chiều biến thiên của hàm số bậc hai được rút ra một cách trực giác từ đồ thị của nó."

=> như vậy cũng như trong chương trình nâng cao phép tịnh tiến được đưa vào (không tường minh) phục vụ cho việc vẽ đồ thị và nghiên cứu một số tính chất hàm số bậc hai từ đồ thị

II. Phân tích SGK

1. SGK Toán 7 tập 1

Trong SGK toán 7 đề cập đến những kiểu nhiệm vụ sau :

Kiểu nhiệm vụ	SGK		SBT	Tổng cộng	Cách biểu diễn hàm số
	Vd – hđ	bt			
$T_{\text{nhận dạng}}^{(1)}$ Xác định y có là hàm số của x ?		4	7	11	- Bằng bảng (10) - Bằng biểu thức giải tích (1)
$T_{\text{tính}}$ Tính giá trị chưa biết của hàm số	3	15	18	36	- Bằng biểu thức giải tích (21), trong đó yêu cầu lập bảng (6) - Bằng đồ thị (15)

$T_{vẽ}$ Vẽ đồ thị hàm số	2	10	10	22	- Bằng bảng (1) _ đồ thị là các điểm rời rạc. - Bằng biểu thức giải tích (19) _ đồ thị hàm số có dạng y = ax - Diễn đạt bằng lời (2), biết điểm đầu và điểm cuối
$T_{liên\ thuộc}$ Xác định điểm thuộc đồ thị hàm số		2	3	5	- Bằng biểu thức giải tích
$T_{xđbths}$ Xác định biểu thức giải tích của hàm số		3	3	6	- Bằng đồ thị (có nêu rõ hay không dạng biểu thức giải tích) (4) - Diễn đạt bằng lời quan hệ giữa hàm số y và biến số x (2)
$T_{đọc}$ Xác định gtln – gtnn của hàm số ?		4	3	7	- Bằng đồ thị
T_{bpt} Tìm x để y dương hoặc âm		1	3	4	- Bằng biểu thức giải tích (2) - Bằng đồ thị (2)
Tổng cộng	5	39	47	91	- Bằng bảng (11) - Bằng biểu thức giải tích (48) - Bằng đồ thị (28)

Ghi chú: Vì một bài có nhiều câu thuộc những kiểu nhiệm vụ khác nhau nên chúng tôi thống kê trong bảng trên theo số câu trong các bài tập

Qua bảng thống kê trên chúng tôi nhận thấy nhiệm vụ $T_{tính}$ và $T_{vẽ}$ chiếm số lượng bài tập nhiều, và trong phạm vi nghiên cứu chúng tôi xem xét các nhiệm vụ có kết hợp nhiều cách biểu diễn hàm số :

*** Kiểu nhiệm vụ $T_{vẽ}$:**

+ **Kĩ thuật** τ_{ve}^{1} : (Vẽ đồ thị hàm số y = ax)

Tìm một điểm thuộc đồ thị và khác điểm gốc O, rồi nối với gốc toạ độ O

Công nghệ θ_{ve}^{1} : định nghĩa đồ thị hàm số, tính chất của hàm số bậc nhất y = ax

+ **Kĩ thuật** τ_{ve}^{2} : (Vẽ đồ thị hàm số cho bằng bảng)

Dựa vào bảng giá trị xác định các cặp số (x;y)

Lần lượt xác định các điểm có toạ độ là các cặp số trên. Tập hợp các điểm là đồ thị hàm số cần vẽ.

Công nghệ θ_{ve}^{2} : định nghĩa đồ thị hàm số

*** Kiểu nhiệm vụ T_{bpt}** : tìm các giá trị của x khi y dương; khi y âm

+ Kĩ thuật τ_{bpt} :

Dựa vào đồ thị

y > 0 ứng với phần đồ thị nằm phía trên trục hoành

y < 0 ứng với phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành

Công nghệ θ_{bpt} : mối liên hệ giữa tính chất của đồ thị hàm số và tính chất tương ứng của hàm số, định nghĩa đồ thị hàm số

+ Kĩ thuật τ'_{bpt} :

Dựa vào biểu thức giải tích y = ax

y nhận giá trị dương : nếu a > 0 thì x > 0, nếu a < 0 thì x < 0

y nhận giá trị âm : nếu a < 0 thì x > 0, nếu a > 0 thì x < 0

*** Kiểu nhiệm vụ T_{tinh}** : tính các giá trị chưa biết của một hàm số cho bằng đồ thị hoặc bằng biểu thức giải tích

+ Kĩ thuật τ_{tinh} : Dựa vào biểu thức giải tích

Với mỗi giá trị x thay vào biểu thức tính được giá trị của y tương ứng (và ngược lại)

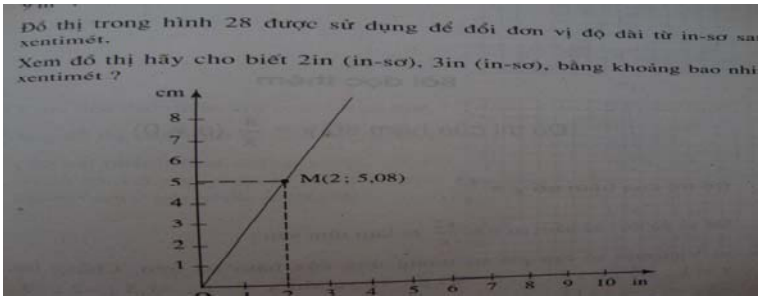
+ Kĩ thuật τ'_{tinh} :

Dựa vào đồ thị hàm số

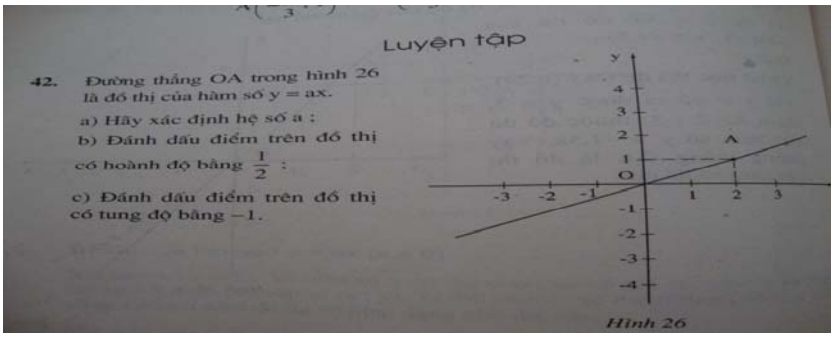
Với mỗi giá trị x trên trục Ox dựng đường thẳng song song trục Oy, cắt đồ thị tại một điểm. Qua điểm đó dựng đường thẳng song song trục Ox cắt Oy tại đâu, đó chính là giá trị y tương ứng của hàm số (và ngược lại với giá trị của y).

Để dễ theo dõi chúng tôi xin minh hoạ một số ví dụ thuộc các kiểu nhiệm vụ trên :

<table>
<tr><th>Kiểu nhiệm vụ</th><th>Một số ví dụ minh hoạ</th></tr>
<tr><td>T_{tinh}
(Tính giá trị chưa biết của hàm số)</td><td>Bài 28/64 :
Cho hàm số y = f(x) = $\frac{12}{x}$
a/ Tính f(5) ; f(- 3)
b/ Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số vào bảng sau :
<table>
<tr><td>x</td><td>- 6</td><td>- 4</td><td>- 3</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>12</td></tr>
<tr><td>f(x) = $\frac{12}{x}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Bài 31/65 :
Cho hàm số y = f(x) = $\frac{2}{3}x$. Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>- 0,5</td><td></td><td></td><td>4,5</td><td>9</td></tr>
<tr><td>f(x) = $\frac{2}{3}x$</td><td></td><td>- 2</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
</table>
Bài 44a,b/73 :
Vẽ đồ thị hàm số y = f(x) = - 0,5x. Bằng đồ thị hãy tìm :
a/ f(2); f(- 2); f(4); f(0)
b/ Giá trị của x khi y = - 1; y = 0; y = 2,5
Bài 46/73 :


</td>
</tr>
<tr>
<td>T_{bpt}
(Tìm x khi y dương hoặc âm)</td>
<td>Bài 44c/73 :
Vẽ đồ thị hàm số y = f(x) = - 0,5x. Bằng đồ thị hãy tìm :
c/ Các giá trị của x khi y dương, khi y âm.
Bài 43/49 SBT :
Cho hàm số y = - 6x. Tìm các giá trị của x sao cho :
a/ y nhận giá trị dương
b/ y nhận giá trị âm.</td>
</tr>
<tr>
<td>$T_{vẽ}$
(Vẽ đồ thị hàm số)</td>
<td>?1/69 :
Hàm số y = f(x) được cho bằng bảng sau :
<table>
<tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>0,5</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>y</td><td>3</td><td>2</td><td>-1</td><td>1</td><td>-2</td></tr>
</table>
a/ Viết tập hợp {(x ;y)} các cặp giá trị tương ứng của x và y xác định hàm số trên.
b/ Vẽ một hệ trục toạ độ Oxy và đánh dấu các điểm có toạ độ là các cặp số trên.
Bài 39/71 :
Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy đồ thị của các hàm số :
a/ y = x ; b/ y = 3x ; c/ y = - 2x ; d/ y = - x</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>$T_{nhandang}$
(Xác định y có là hàm số của x ?)</td>
<td>Bài 24/63 :
Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong bảng sau :
<table>
<tr><td>x</td><td>- 4</td><td>- 3</td><td>- 2</td><td>- 1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>y</td><td>16</td><td>9</td><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td></tr>
</table>
Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?
Bài 45/73 :
Hai cạnh của hình chữ nhật có độ dài là 3m và x(m).
Hãy viết công thức biểu diễn diện tích y (m^2) theo x. Vì sao đại lượng y là hàm số của đại lượng x ? [...]</td>
</tr>
<tr>
<td>T_{xdbths}
Xác định biểu thức giải tích của hàm số</td>
<td>Bài 42/72 :
 

Bài 45/73 :
Hai cạnh của hình chữ nhật có độ dài là 3m và x(m).
Hãy viết công thức biểu diễn diện tích y (m^2) theo x. […]</td>
</tr>
</table>

2. SGK Toán 9

Trong SGK Toán 9 xuất hiện các kiểu nhiệm vụ sau :

Kiểu nhiệm vụ	SGK		SBT	Tổng cộng	Cách biểu diễn hàm số
	Vd – Hđ	bt			
$T_{nhận\ dạng}^{(1)}$ Xác định y có là hàm số của x không ?	1		3	4	- Từ cách diễn đạt bằng lời đưa ra biểu thức giải tích (2) - Bằng bảng (2)
$T_{nhận\ dạng}^{(2)}$ Xác định hàm số bậc 1 ? vị trí tương đối ? tính biến thiên ? khi biết biểu thức giải tích của hàm số	1	3	3	7	- Bằng biểu thức giải tích (7)
$T_{tính}$ Tính giá trị chưa biết của	10	17	16	43	- Bằng biểu thức giải tích (37), trong đó yêu cầu lập bảng (13)

hàm số					- Bằng đồ thị (6)
$T_{vẽ}$ Vẽ đồ thị hàm số	5	18	15	38	- Bằng biểu thức giải tích (36)_ hs $y = ax + b$; $y = ax^2$ - Bằng đồ thị (2)
$T_{liên\ thuộc}$ Xác định điểm thuộc đồ thị hàm số		1	3	4	- Bằng biểu thức giải tích
$T_{xđbths}$ Xác định biểu thức giải tích của hàm số		28	44	72	- Diễn đạt bằng lời (2) - Bằng biểu thức giải tích (70)
$T_{đọc}$ - Xác định gtln-gtnn (điểm cao nhất, thấp nhất)? - Chứng minh tính chất hình học ? - Kiểm tra tính đối xứng của điểm trên đồ thị	4	10	5	19	- Bằng đồ thị (18) - Bằng biểu thức giải tích (1)
T_{bpt} - Tìm x để y dương hoặc âm ? - Khi x dương hoặc âm thì y ?	4				- Bằng đồ thị (2) - Bằng biểu thức giải tích (2)
$T_{đb-nb}$ Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số ?	3	3	2	8	- Bằng bảng (2) - Bằng biểu thức giải tích (3) - Bằng đồ thị (3)
$T_{giao\ điểm}$		12	8	20	- Bằng biểu thức giải tích (17) - Bằng đồ thị (3)
$T_{tập\ hợp\ điểm}$			5	5	- Bằng đồ thị (5)
$T_{điểm\ cố\ định}$			1	1	- Bằng biểu thức giải tích
Tổng cộng	28	92	105	22 1	- Dùng lời (2) - Bằng bảng (4) - Bằng biểu thức giải tích(179) - Bằng đồ thị (39)

Trong phần trình bày trên ta nhận thấy xuất hiện kiểu nhiệm vụ T_{db-nb} có sự tích hợp nhiều cách biểu diễn hàm số.

*** Kiểu nhiệm vụ T_{db-nb}**

+ Kĩ thuật τ^1_{db-nb} : Dựa vào đồ thị

Nếu đồ thị hàm số đi lên (xuống) trên khoảng K thì hàm số (đồng biến) nghịch biến trên K.

Công nghệ θ^1_{db-nb} : mối liên hệ giữa tính chất của đồ thị hàm số và tính chất tương ứng của hàm số, định nghĩa đồ thị hàm số.

+ Kĩ thuật τ^2_{db-nb} : Dựa vào bảng giá trị

Khi x lần lượt nhận các giá trị tăng lên thuộc khoảng K mà giá trị tương ứng của hàm số y tăng (giảm) thì hàm số đã cho đồng (nghịch) biến trên khoảng K.

Công nghệ θ^2_{db-nb} : khái niệm hàm số đồng biến, nghịch biến

+ Kĩ thuật τ^3_{db-nb} : Dựa vào biểu thức giải tích

Với $\forall$ $x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2$, ta có : $f(x_1) - f(x_2) < 0$ hay $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số đồng biến trên K.

Với $\forall$ $x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2$, ta có : $f(x_1) - f(x_2) > 0$ hay $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số nghịch biến trên K.

Công nghệ θ^3_{db-nb} : khái niệm hàm số đồng biến, nghịch biến

+ Kĩ thuật τ^3_{db-nb} : Dựa vào biểu thức giải tích

Hàm số cho bởi biểu thức y = ax : với a > 0 thì hàm số đồng biến trên R; với a < 0 thì hàm số nghịch biến trên R.

Ví dụ minh hoạ cho kiểu nhiệm vụ trên :

<table>
<tr><th>Kiểu nhiệm vụ</th><th>Ví dụ minh hoạ</th></tr>
<tr><td>T_{db-nb}</td><td>
Bài 2/45 (Toán 9 tập 1) :
Cho hàm số y = $\frac{-1}{2}x + 3$
a/ Tính các giá trị tương ứng của y theo các giá trị của x rồi điền vào bảng sau :
<table>
<tr><td>x</td><td>-2,5</td><td>-2</td><td>-1,5</td><td>-1</td><td>-0,5</td><td>0</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2</td><td>2,5</td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
b/ Hàm số đã cho là hàm số đồng biến hay nghịch biến ? Vì sao ?
Bài 3/45 (Toán 9 tập 1)
Cho hai hàm số y = 2x và y = - 2x
a/ Vẽ trên cùng một mặt phẳng toạ độ đồ thị của hai hàm số đã cho.
b/ Trong hai hàm số đã cho, hàm số nào đồng biến ? Hàm số nào nghịch biến ? Vì sao ?
Bài 7/46 (Toán 9 tập 1)
Cho hàm số y = f(x) = 3x
Cho x hai giá trị bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$
</td></tr>
</table>

	Hãy chứng minh $f(x_1) < f(x_2)$ rồi rút ra kết luận hàm số đã cho đồng biến trên R Bài 14a/48 (Toán 9 tập 1) Cho hàm số bậc nhất y = $\left(1-\sqrt{5}\right)x - 1$ a/ Hàm số trên là đồng biến hay nghịch biến trên R

3. SGK Đại số 10 cơ bản

Đối với kiểu nhiệm vụ T_{ve}: (Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$)

Thể chế mong muốn HS vẽ trực tiếp parabol chứ không sử dụng các phép tịnh tiến để tìm lại đồ thị của hàm số này thông qua đồ thị hàm số $y = ax^2$ giống như phần trình bày lý thuyết đã làm.

Cụ thể, SGK tr.44 có viết :

Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) , ta thực hiện các bước :

1) Xác định toạ độ đỉnh I $\left(-\frac{b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right)$

2) Vẽ trục đối xứng x = $-\frac{b}{2a}$

3) Xác định toạ độ các giao điểm của parabol với trục tung (điểm (0 ;c)) và trục hoành (nếu có).

Xác định thêm một số điểm thuộc đồ thị, chẳng hạn điểm đối xứng với điểm (0 ;c) qua trục đối xứng của parabol, để vẽ đồ thị chính xác hơn.

4) Vẽ parabol

Khi vẽ parabol cần chú ý đến dấu của hệ số a (a > 0 bề lõm quay lên trên, a < 0 bề lõm quay xuống dưới)

Và đây cũng chính là kỹ thuật mà noosphere mong muốn HS sử dụng để thực hiện kiểu nhiệm vụ kiểu nhiệm vụ T_{ve} : Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ này

Như vậy, phép tịnh tiến đồ thị chỉ dùng để tìm ra dáng điệu của đồ thị; giải thích tên gọi đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$; tọa độ đỉnh và phương trình trục đối xứng của đường cong này. Sau đó hs được phép sử dụng kết quả vừa tìm được để nghiên cứu đồ thị hàm số bậc hai, cụ thể là vẽ đồ thị hàm số, mà không cần phải dùng lại phép tịnh tiến đồ thị nữa.

Từ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ vừa được xây dựng, SGK lập bảng biến thiên cho hàm số này, sau đó đưa ra định lý về chiều biến thiên của hàm số bậc hai.

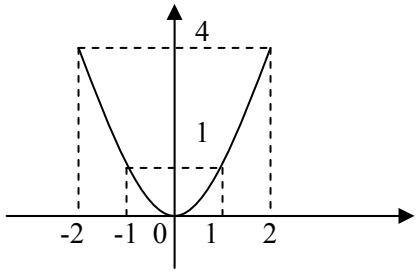
Các kiểu nhiệm vụ cụ thể trong SGK Đại số 10

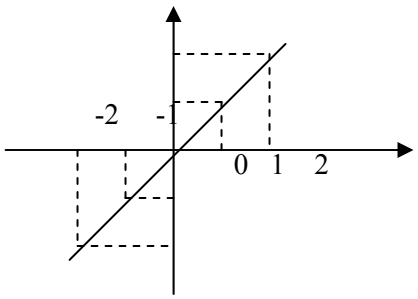
Kiểu nhiệm vụ	SGK		SBT	Tổng cộng	Biểu diễn hàm số
	Vd – Hđ	bt			
$T_{tính}$ Tìm giá trị chưa	4	7	7	18	- Bằng bảng (1) - Bằng biểu đồ (1)

biết của hàm số					- Bằng biểu thức giải tích (13) - Bằng đồ thị (2) - BT 19/41 cho hàm số bằng biểu thức giải tích và bằng đồ thị
$T_{\text{tập xác định}}$ Tìm tập xác định của hàm số ?	4	7	9	20	- Bằng biểu đồ (2) - Bằng biểu thức giải tích (16) - Bằng bảng giá trị (2)
$T_{\text{đb – nb}}$		12	15	27	- Bằng biểu thức giải tích (27)
$T_{\text{chẵn – lẻ}}$	1	4	12	17	- Bằng biểu thức giải tích (12) - Bằng đồ thị (5)
$T_{\text{liên thuộc}}$		3	4	7	- Bằng biểu thức giải tích (7)
$T_{\text{vẽ}}$	3	12	21	36	- Bằng biểu thức giải tích (36)
T_{xdbtgt} Xác định biểu thức giải tích của hàm số ?		13	23	46	- Bằng biểu thức giải tích (27) - Bằng đồ thị (9)
$T_{\text{giao điểm}}$ Tìm giao điểm của hai đồ thị hàm số ? của đồ thị hàm số với trục toạ độ ?		4	10	14	- Bằng biểu thức giải tích (11) - Bằng đồ thị (3)
Tổng cộng	12	62	101	185	- Bằng biểu thức giải tích (149) - Bằng biểu đồ (3) - Bằng bảng (3) - Bằng đồ thị (19)

Trong các kiểu nhiệm vụ trên chúng tôi quan tâm nhiều đến $T_{\text{chẵn – lẻ}}$, vì nó gắn với khái niệm mới và SGK trình bày khái niệm này bằng con đường sử dụng đồ thị (SGK tr.37):

"Xét đồ thị hai hàm số $y = f(x) = x^2$ và $y = g(x) = x$





Đường parabol $y = x^2$ có trục đối xứng là Oy. Tại hai giá trị đối nhau của biến số x, hàm số nhận cùng một giá trị

$f(-1) = f(1) = 1, f(-2) = f(2) = 4$ ...

Gốc toạ độ O là tâm đối xứng của đường thẳng y = x. Tại hai giá trị đối nhau của biến số x, hàm số nhận hai giá trị đối nhau :

$g(-1) = -g(1)$, $g(-2) = -g(2)$ ...

Hàm số $y = x^2$ là một ví dụ về hàm số chẵn

Hàm số y = x là một ví dụ về hàm số lẻ ”

*** Kiểu nhiệm vụ $T_{\text{chẵn – lẻ}}$:**

+ Kĩ thuật $\tau^1_{chan-le}$ **:** dựa vào đồ thị

Nếu đồ thị hàm số đối xứng qua trục tung (qua gốc toạ độ O) thì hàm số là chẵn (lẻ)….

Công nghệ $\theta^1_{chan-le}$ **:** mối liên hệ giữa tính chất của đồ thị hàm số và tính chất tương ứng của hàm số, định nghĩa đồ thị hàm số

+ Kĩ thuật $\tau^2_{chan-le}$ **:** dựa vào biểu thức giải tích

Hàm số y = f(x) với tập xác định D :

Nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$ thì hàm số chẵn

Nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$ thì hàm số lẻ

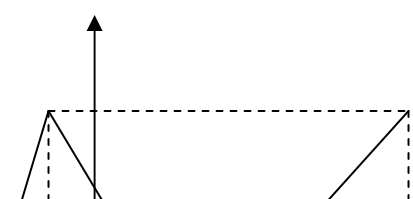
Công nghệ $\theta^2_{chan-le}$ **:** khái niệm hàm số chẵn, hàm số lẻ

Ví dụ minh hoạ

Kiểu nhiệm vụ	Ví dụ minh hoạ
	Bài 4 / 39 Xét tính chẵn lẻ của các hàm số a/ $y = \lvert x \rvert$ b/ $y = (x + 2)^2$ c/ $y = x^3 + x$ d/ $y = x^2 + x + 1$ Bài 7 / 34 SBT Vẽ đồ thị của các hàm số sau và xét tính chẵn lẻ của chúng a/ $y = \frac{-2}{3}x + 2$ b/ $y = \frac{4}{3}x - 1$ c/ $y = 3x$ d/ $y = 5$ e/ $y = \sqrt{2} - 1$

Cũng nói thêm rằng , trong SGK Toán 10 cơ bản không xuất hiện kiểu nhiệm vụ $T_{\text{đọc}}$,cụ thể là nhiệm vụ tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, nhưng có xuất hiện trong SGK Đại số 10 nâng cao. Ví dụ tr. 37, SGK Đại số 10 nâng cao :

Ví dụ 2 : Hàm số y = f(x) xác định trên đoạn [-3 ;8] được cho bằng đồ thị như trong hình



4

-3 0 8

-2

Dựa vào đồ thị đã cho, ta có thể nhận biết được (với độ chính xác nào đó) :

- Giá trị hàm số tại một số điểm, chẳng hạn f(-3) = - 2, f(1) = 0
- Các giá trị đặc biệt của hàm số, chẳng hạn, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn [-3 ;8] là – 2 ; ....

Qua ví dụ trên gợi ý cho chúng tôi như sau : đồ thị cho chúng ta hình ảnh trực quan của hàm số (thể hiện đủ 3 đặc trưng); dùng đồ thị tìm ra giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số là nhiệm vụ dễ dàng với HS bằng cách đọc đồ thị tìm ra vị trí điểm cao nhất hoặc thấp nhất (tuỳ thuộc những ràng buộc của bài toán).

III. Kết luận

* Khái niệm hàm số được trình bày theo quan điểm mô tả sự phụ thuộc lẫn nhau giữa hai đại lượng biến thiên (không theo quan điểm ánh xạ).

* Quá trình hình thành khái niệm hàm số :

+ *Lớp 7* : thông qua các ví dụ (hàm số biểu diễn bằng bảng giá trị) HS hiểu được rằng có một đại lượng thay đổi phụ thuộc vào sự thay đổi của đại lượng khác; nếu thêm điều kiện "giá trị tương ứng duy nhất" của đại lượng phụ thuộc thì đại lượng đó là hàm số của đại lượng kia.

+ *Lớp 9* : Khái niệm hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến được hình thành thông qua ví dụ : tính giá trị tương ứng của hàm số (hàm số biểu diễn bằng biểu thức giải tích) và điền vào bảng; nhận xét tính tăng, giảm của các giá trị của x và các giá trị tương ứng của y trong bảng; đưa ra khái niệm hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến.

+ *Lớp 10* : Khái niệm đồng biến, nghịch biến được đưa ra bắt đầu từ nhận xét trực giác về đồ thị của hàm số $y = x^2$ trong các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. Khái niệm hàm số chẵn, hàm số lẻ cũng được đưa ra từ nhận xét trực giác về đồ thị của hàm số $y = x^2$ và hàm số $y = x$.

* Trong tất cả các thể chế (lớp 7, 9, 10) đều không trình bày tường minh cách biểu diễn hàm số bằng đồ thị.

* Kiểu nhiệm vụ $T_{tính}$ được đặc biệt chú ý

+ *Lớp 7* : tính bằng công thức, tính bằng đồ thị

+ *Lớp 9* : tính bằng đồ thị (ước lượng), tính bằng công thức (tính hoặc dùng nó để kiểm tra kết quả tính bằng đồ thị).

+ *Lớp 10* : tính bằng bảng giá trị, tính bằng biểu đồ, tính bằng công thức.

Trong đó kĩ năng tính bằng công thức xuất hiện nhiều nhất.

=> Mối quan hệ cá nhân giữa HS và khái niệm hàm số dựa trên cách biểu diễn hàm số bằng biểu thức giải tích (công thức).

* Xuất hiện các quy tắc hợp đồng

R_1 (hợp đồng thể chế) : y kí hiệu dùng chỉ biến phụ thuộc, x kí hiệu dùng chỉ biến độc lập.

R_2 : vẽ đồ thị hàm số là vẽ một số điểm đặc biệt và nối chúng lại. (vì qui tắc này đã được kiểm chứng trong rất nhiều luận văn trước và được đề cập trong SGV nên trong luận văn này chúng tôi không thực hiện lại nhưng xem nó như là một kĩ thuật được sử dụng trong môi trường máy tính).

R_3 : HS phải ghi nhớ hình dạng của đồ thị hàm số (gắn với một biểu thức giải tích) đã học.

CHƯƠNG 3 : THỰC NGHIỆM

**** Giả thuyết nghiên cứu**

+ Mối quan hệ cá nhân giữa HS và khái niệm hàm số dựa trên cách biểu diễn hàm số bằng biểu thức giải tích. Ảnh hưởng của R_1 và R_3 đối với mối quan hệ này.

Để kiểm chứng chúng tôi với tiến hành thực nghiệm A : tìm hiểu quan hệ cá nhân của HS với khái niệm hàm số qua ba cách biểu diễn bằng bảng, bằng biểu thức giải tích, bằng đồ thị (trắc nghiệm trên môi trường giấy bút truyền thống), trên cơ sở đó củng cố lại khái niệm hàm số ở HS lớp 10.

+ Thể chế không trình bày cách biểu diễn hàm số bằng đồ thị, nhưng yêu cầu HS phải ghi nhớ hình dạng đồ thị của hàm số (R_3) và dùng đồ thị để giải quyết những bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Khi HS đối diện với các bài toán tìm cực trị với những biểu thức có dạng không quen thuộc => tìm kiếm công cụ hỗ trợ về đồ thị hàm số.

Tuy vậy SGK cũng có tính đến việc này bằng cách dạy học chủ đề bất đẳng thức (toán đại số 10 chương IV) và sử dụng nó để giải quyết nhiệm vụ trên và điều này có thực sự dễ dàng với HS không ?

Mặt khác, "c*ác khái niệm biến và khái niệm phụ thuộc chỉ mang nghĩa trong những tình huống biến thiên. Cách duy nhất để nhận thấy cái này phụ thuộc cái khác là làm cho chúng thay đổi lần lượt từng cái một để ghi nhận sự biến thiên có hiệu quả nào nhưng chừng nào mà không có sự biến thiên, gần như không thể biết có sự phụ thuộc hay không*" (Rene de Cotret, 1988) do đó chúng tôi tiến hành xây dựng thực nghiệm B trong môi trường máy tính, với lí do như sau :

+ Với môi trường máy tính chúng ta có thể tạo ra một môi trường hình học động. Hơn nữa "t*rong môi trường hình học động này , mô hình hoá các đại lượng biến được thực hiện bởi việc tạo ra các điểm di chuyển. Một điểm di động có thể mô hình hoá các đại lượng biến khác nhau (khoảng cách, diện tích, thời gian). Vì thế, việc thiết lập mô hình trung gian này nhờ vào hình học động cho phép cụ thể hoá các đại lượng biến bằng việc để lại cho học sinh trách nhiệm lựa chọn các đại lượng thích đáng trong tình huống được nghiên cứu. Chúng ta có thể đưa vào khái niệm điểm điều khiển một điểm khác, tiền đề của các khái niệm biến độc lập và biến phụ thuộc...* " (Bessot, 2010).

+ Phần mềm Casyopee có các đặc tính như sau :

- Là phần mềm nghiên cứu quan hệ hàm, có tích hợp hai môđun đại số và hình học. Có môi trường làm việc thân thiện vì nó có các biểu tượng dễ nhớ, hệ thống câu lệnh đơn giản, dễ thực hiện.

- Trong mô đun đại số : Các hàm số với biến số thực là trung tâm nghiên cứu của Casyopee. Casyopee cung cấp phương tiện để tạo ra các tập số thực có điều kiện (sử dụng đối tượng tham số) mà

các hàm, biểu thức xác định trên nó. Cần nhấn mạnh thêm các kĩ năng tính toán, khảo sát hàm số… đều được chương trình tự động thực hiện.

- Trong mô đun hình học : Có các công cụ dựng các đối tượng mới dựa trên cơ sở đối tượng đã có (như trung điểm của đoạn thẳng, giao điểm của hai đường thẳng, của đường thẳng và đường tròn). Khi thay đổi vị trí của điểm di động, các đối tượng trên vẫn bảo toàn cấu trúc của nó. Nhờ khả năng này mà HS có thể phát hiện ra một số tính chất của hình khi dịch chuyển điểm.

Xác định được miền xác định và công thức tính các đại lượng như diện tích, độ dài …, và tuỳ theo giá trị biến do người dùng tự chọn (theo quy ước riêng của Casyopee), nó chuyển các biểu thức này thành các hàm số trên mô đun đại số. Nhờ khả năng này, nó kiểm tra mối quan hệ giữa hai đại lượng biến thiên có là quan hệ hàm hay không ?

Qua một số tính năng của Casyopee mà chúng tôi trình bày ở trên chúng tôi nhận thấy chúng tỏ ra thích hợp với yêu cầu của chúng tôi trong việc tạo ra tình huống giúp HS nắm các đặc trưng bản chất của khái niệm hàm số.

I. Thực nghiệm A :

Câu 1 : Ở lớp 7 và 9 em đã được học về khái niệm hàm số , vậy theo em thế nào là hàm số (em hiểu thế nào về hàm số) ?

.....

.....

Câu 2 : Hãy đánh dấu ☒ vào các câu trả lời đúng. Trong các câu sau, câu nào cho ta một hàm số :

☐ a/

x	1	1	4	4
y	-1	1	-2	5

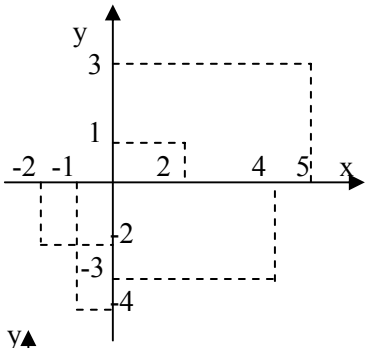
☐ b/

x	-5	-4	-3	-2
y	0	0	0	0

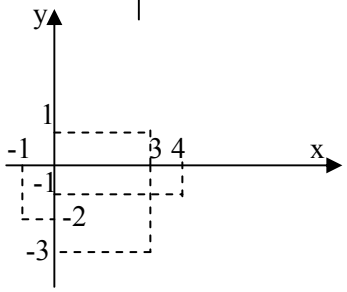
☐ c/

x	-2	-1	0	3
y	1	3	5	7

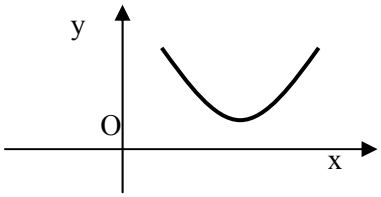
☐ d/



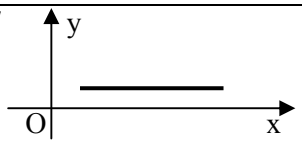
☐ e/



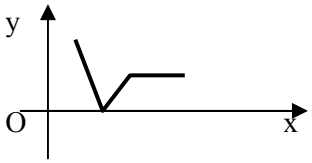
☐ f/



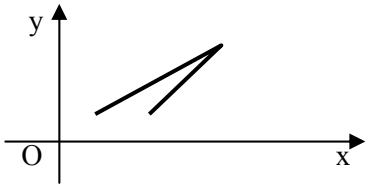
☐ g/



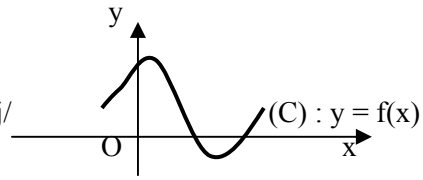
☐ h /



☐ i/



☐ j/



☐ k/ y = f(x) = 2x +1

☐ l/ $y = \begin{cases} 2x \text{ khi } x > 1 \\ -3x + 7 \text{ khi } x \le 1 \end{cases}$

☐ m/ $y = x^3 - 5x + 1$

☐ n/ y = 9

Câu 3 : Giải thích lí do em lựa chọn các câu trả lời ở câu 2?

.....

.....

I.1 Phân tích apriori thực nghiệm A

1. Biến tình huống và giá trị :

$\mathbf{V_1}$: Hình thức đặt câu hỏi : tự luận, trắc nghiệm

- Câu tự luận : nội dung tập trung vào một kiến thức cụ thể (khái niệm hàm số)
- Câu trắc nghiệm : kiểm tra bao quát kiến thức của HS (hàm số qua các cách biểu diễn)

$\mathbf{V_2}$: Phương thức làm việc : cá nhân, làm nhóm, tập thể

Làm việc cá nhân : tạo sản phẩm cá nhân

Làm việc theo nhóm : tăng cường trao đổi, thảo luận, tạo ra sự cạnh tranh trong học tập.

Làm việc tập thể cả lớp : cho phép thực hiện pha hợp thức hoá.

Với các phần sau chúng tôi sẽ phân tích câu 2 trong thực nghiệm (trình bày theo 3 cách biểu diễn hàm số)

2. Biến didactic :

$\mathbf{V'_1}$: Hình thức trình bày hàm số :

+ Bảng giá trị

x	
y	

B.1

y	
x	

B.2

HS lựa chọn dựa theo các hiểu biết về hàm số, dễ xuất hiện các chiến lược về bảng giá trị khi bảng giá trị được trình bày theo B.1

+ Đồ thị

- Dạng quen thuộc (tập hợp các điểm rời rạc, parabol, đường thẳng) : dễ xuất hiện chiến lược $S_{\text{dạng quen thuộc}}$
- Dạng không quen thuộc (đường gấp khúc, đường cong bất kì) : xuất hiện chiến lược $S_{\text{hàm số}}$

+ Biểu thức giải tích

- Hàm số cho bởi 1 biểu thức : dễ xuất hiện chiến lược $S_{\text{dạng quen thuộc}}$
- Hàm số cho bởi nhiều biểu thức : dễ xuất hiện chiến lược $S_{\text{hàm số}}$

3. Chiến lược giải

+ Bảng giá trị :

$S_{\textit{tương ứng 1 : 1}}$:

- Kiến thức làm nảy sinh : đặc trưng tương ứng của hàm số, 1 giá trị x cho 1 giá trị y
- Lựa chọn câu c

$S_{\textit{biến thiên}}$:

- Kiến thức làm nảy sinh : đặc trưng biến thiên của hàm số , x thay đổi dẫn đến y thay đổi (thay đổi với nghĩa là một lần xuất hiện trong bảng giá trị).

- Lựa chọn câu a, b, c.

$S_{hàm\ số}$:

- Kiến thức làm nảy sinh : khái niệm hàm số (3 đặc trưng hàm số)

- Lựa chọn câu b, c

+ Đồ thị :

$S_{hàm\ số}$:

- Kiến thức làm nảy sinh : đường cong dùng biểu diễn đồ thị phải thỏa mãn tính chất : *cắt những đường thẳng cùng phương trục Oy tại không quá một điểm.*

- Lựa chọn câu d, f, g, j, h

$S_{dạng\ quen\ thuộc}$:

- Kiến thức làm nảy sinh : kiến thức lớp 7, 9 về đồ thị hàm số (tập hợp điểm rời rạc, đường thẳng, parabol ...)

- Lựa chọn câu d, e, f, g,

+ Biểu thức giải tích :

$S_{hàm\ số}$:

- Kiến thức làm nảy sinh : khái niệm hàm số và ba đặc trưng cơ bản

- Lựa chọn câu k, l, m, n

$S_{dạng\ quen\ thuộc}$:

- Kiến thức làm nảy sinh : kiến thức lớp 7, 9 về đồ thị hàm số (tập hợp điểm rời rạc, đường thẳng, parabol ...)

- Lựa chọn câu k, n, (l)

I.2. Phân tích a posteriori

Thực nghiệm A, chúng tôi tiến hành với HS lớp 10A1 (sĩ số 46 HS), trường THPT An Nhơn Tây, thời gian 15 phút , tiết 5 chiều ngày 06/09/2010, trước khi học bài 1 **chương 2 : Hàm số**

Hãy đánh dấu ☒ vào các câu trả lời đúng. Trong các câu sau, câu nào cho ta một hàm số :

Cách biểu diễn hàm số		Câu trả lời	Số lần được lựa chọn
Bằng bảng giá trị		a	11
		b	8
		c	17
Bằng đồ	(Điểm rời rạc)	d	20

thị		e	15
	(Đường liền nét)	f	7
		g	7
		h	2
		i	5
Biểu thức giải tích		j	7
		k	39
		l	15
		m	16
		n	10

* Những câu được lựa chọn nhiều nhất

k	d	c	m	e	l	a	n
39	20	17	16	15	15	11	10

- Có sự nhất trí cao ở câu k, d; các câu c, m, e, l có tỉ lệ lựa chọn gần ngang nhau.
- Không có câu không được lựa chọn.

* Giải thích của HS về những lựa chọn trên (câu 3) :

Câu trả lời	Kiến thức làm nảy sinh câu trả lời
a	- Hàm số gồm hai đại lượng x, y mà dựa vào x cho sẵn để tìm y
b	- Hàm số có hai biến x, y. Biến y sẽ thay đổi theo biến x
c	- Khi cho giá trị x sẽ có giá trị y - Hàm số y = f(x), giá trị y tăng thì f(x) tăng , y giảm thì f(x) giảm (câu c)
d	- Đồ thị hàm số chứa ẩn x, y
e	- Hàm số là 1 biểu thức chứa biến có dạng y = f(x), khi biến thay đổi thì kết quả của hàm số thay đổi.
f	- Hàm số là một đường cong - Đồ thị hàm số chứa ẩn x, y
g	- Đồ thị hàm số có dạng đường thẳng
h	
i	- Biểu diễn hàm số trên hệ toạ độ dưới dạng đường thẳng đi qua gốc toạ độ - Hàm số có dạng y = ax, trong đó x là ẩn số, giá trị của phương trình tuỳ thuộc vào giá trị của ẩn x
j	- Hàm số có dạng y = f(x) - Hàm số f(x) là một phương trình ta biểu diễn trên hoành độ và tung độ.
k	- Hàm số gồm hai đại lượng x, y mà dựa vào x cho sẵn để tìm y

l	- Hàm số có dạng y = ax + b; y = ax
m	- Hàm số : khi thay một x vào phương trình ta được một giá trị y bất kì thoả mãn điều kiện
n	- Hàm số có dạng y = f(x), (f(x) = ax + b hay f(x) = số) - Hàm số là một biểu thức có biến x, có dạng y = f(x) = A, với A là một biểu thức chứa biến - Hàm số là một biểu thức chứa ẩn x và số - Hàm số là một đường thẳng được biểu diễn trên trục số xOy - Hàm số là những ẩn số luôn thay đổi, diễn tả sự biến thiên trên trục số, có dạng y = f(x)

I.3. Một số bài làm đáng chú ý của HS

1. Trần Thị Mỹ

+ Câu 1 : "Hàm số là phương trình có ẩn"

+ Câu 2 : chọn k, m

+ Câu 3 : giải thích " vì các câu còn lại là đồ thị … không phải hàm số"

=> hàm số phải gắn với một biểu thức giải tích, đặc biệt với giải thích ở câu 3 HS phân biệt giữa đồ thị và hàm số, cũng như có sự trùng lắp giữa bảng giá trị và đồ thị

2. Lê Thị Ngọc

+ Câu 1 : "Hàm số là biểu thức có dạng y = f(x)"

+ Câu 2 : chọn b, k, n

+ Câu 3 :

=> hàm số phải gắn với biểu thức giải tích hoặc có thể tìm ra biểu thức đó, tuy không có giải thích ở câu 3 nhưng với các lựa chọn ở câu hai thì biểu thức f(x) mà HS đề cập tập trung vào dạng ax + b

3. Nguyễn Thuỳ Trang

+ Câu 1 : "Hàm số là một biểu thức có chứa ẩn và số"

+ Câu 2 : chọn k, l, m

+ Câu 3 : giải thích "vì các biểu thức đó chứa ẩn x và số"

=>hàm số phải gắn với một biểu thức giải tích., có thể thấy dấu vết R_1 ở đây.

4. Phạm Thị Thuỷ Tiên

+ Câu 1 : "Hàm số là một đường thẳng được biểu diễn trên trục số xOy"

+ Câu 2 : chọn k

+ Câu 3 : giải thích "vì y = f(x) = 2x + 1 khi viết ra bảng giá trị và vẽ trên trục số xOy thì tạo ra một đường thẳng"

=> Với câu 1 ta thấy được hai điều : xuất hiện dấu vết của R_3, nhưng HS vẫn chỉ lựa chọn câu k, mà không lựa chọn câu g (đường thẳng). Như vậy với Tiên hàm số cũng vẫn gắn với biểu thức giải tích

5. Bùi Văn Tấn

+ Câu 1 : "Hàm số là biểu thức có dạng y = f(x) mà x là biến, giá trị của y phụ thuộc vào x."

+ Câu 2 : chọn b, f, g, k, l, m, n

+ Câu 3 :

=> hàm số gắn với một biểu thức giải tích, hoặc có thể tìm ra biểu thức giải tích (chọn b với y = 0), hoặc gắn với đồ thị có dạng quen thuộc (parabol, đường thẳng).

6. Nguyễn Thị Loan

+ Câu 1 : "Hàm số là phương trình có dạng y = ax, trong đó x là ẩn số, giá trị của phương trình tuỳ thuộc vào giá trị của ẩn x"

+ Câu 2 : chọn i

+ Câu 3 : giải thích "theo em hàm số được biểu diễn bằng đồ thị với đường thẳng"

=> hàm số gắn với biểu thức giải tích y = ax hoặc dạng đồ thị của nó (đường thẳng qua gốc toạ độ).

7. Nguyễn Minh Quang

+ Câu 1 : "Hàm số là một đại lượng được biểu diễn với dạng x, y. Giá trị của y phụ thuộc vào giá trị của x. Hàm số được biểu diễn dạng trục"

+ Câu 2 : chọn d, e, j, k, l, m

+ Câu 3 : giải thích "vì y được biểu diễn theo giá trị của x"

=> hàm số gắn với một biểu thức giải tích (cụ thể hoặc chỉ cần kí hiệu y = f(x)), hoặc là tập hợp những điểm rời rạc trên hệ trục toạ độ. Cách chọn cho thấy có sự *phụ thuộc* giá trị của y vào x.

8. Trần Phương Duy

+ Câu 1 : "Hàm số là phương trình có dạng y = ax + b. Trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$"

+ Câu 2 : chọn c, f, k, l

+ Câu 3 : giải thích "f/ vì hàm số là một đường cong, k vì có dạng y = ax + b"

=> hàm số gắn với biểu thức giải tích y = ax + b, hoặc hình dạng đồ thị (parabol), hoặc có sự *tương ứng* 1 giá trị x cho 1 giá trị y.

9. Hoàng Ngọc Long

+ Câu 1 : "Hàm số y = f(x) có nghĩa với mỗi giá trị x ta chỉ tìm được 1 giá trị y tương ứng"

+ Câu 2 : chọn c, k, l, m

+ Câu 3 : giải thích "vì với mỗi giá trị x chỉ được một giá trị y"

=> hàm số gắn với biểu thức giải tích (không có dạng y = b) hoặc bảng giá trị (1 giá trị x *tương ứng* với 1 giá trị y và ngược lại)

10. Võ Tấn Vũ

+ Câu 1 : "Hàm số là đẳng thức có dạng y = ax + b trong đó a, b hệ số và ta có thể biểu diễn nó trên hệ trục toạ độ bằng đồ thị"

+ Câu 2 : chọn c, k, l

+ Câu 3 : giải thích "chọn c vì khi vẽ 1 hàm số trên hệ trục toạ độ ta kẻ bảng như c; chọn k, l vì l, k có dạng của hàm số"

=> hàm số gắn với biểu thức giải tích cụ thể ($y = ax + b, b \neq 0$) hoặc bảng giá trị (lí do như trong giải thích và HS có quan tâm đến sự *tương ứng* 1 giá trị x với 1 giá trị y)

11. Châu Thị Tố Uyên

+ Câu 1 : "Hàm số là một đẳng thức chứa x và y và hàng số nhất định. Trong đó giá trị của y phụ thuộc vào từng giá trị của x và được biểu diễn bằng đồ thị hàm số, có dạng y = f(x)"

+ Câu 2 : chọn a, b, c, d, e, k, m

+ Câu 3 : giải thích "vì ở trên là cách phân tích giá trị của y theo x để vẽ đồ thị hàm số, câu k thì nó đã ghi lại đúng dạng của hàm số y = f(x)"

=> hàm số gắn với biểu thức giải tích cụ thể ($y = ax + b, b \neq 0$) hoặc bảng giá trị (lí do như trong giải thích và HS không quan tâm đến sự tương ứng mỗi giá trị x với 1 giá trị y)

12. Trần Quốc Khánh

+ Câu 1 : "Hàm số có dạng y = f(x), nếu ta cho một giá trị x thì ta sẽ nhận được một giá trị y. Hàm số có thể đồng biến hoặc nghịch biến. Hàm số bậc nhất có dạng $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Hàm số bậc hai có dạng $y = ax^2$ ($a \neq 0$)"

+ Câu 2 : a, b, c, d, e, k

+ Câu 3 : giải thích "Đây là bảng giá trị (a, b, c) khi ta cho x sẽ nhận được y. Được vẽ trên trục toạ độ Oxy, có giá trị chiếu lên trục hoành Ox và trục tung Oy (d, e). Có dạng $y = f(x) = ax + b$ ($a = 2, b = 1$), đây là hàm số bậc nhất (k)"

=> HS chỉ quan tâm cho x một giá trị thì xác định được giá trị y,

13. Phan Văn Đại

+ Câu 1 : "Hàm số y là hàm số biểu thị sự thay đổi đại lượng của nó theo biến x, theo dạng $y = ax + b$ hoặc $y = ax^2 + bx + c$"

+ Câu 2 : chọn a, c, d, e, g, j, k, m, n

+ Câu 3 : giải thích "em chọn các câu trả lời ở câu 2 vì có biến x và sự thay đổi của y theo x."

=> HS cũng chỉ quan tâm đến đặc trưng *phụ thuộc* của khái niệm hàm số , gắn hàm số với chỉ một biểu thức giải tích, khi hàm số cho bằng bảng giá trị thì kiểm tra tính chất 1 giá trị x cho chỉ 1 giá trị y.

14. Nguyễn Thị Ánh

+ Câu 1 : "Hàm số là những con số mà nó có thể biểu diễn trên hệ trục toạ độ"

+ Câu 2 : chọn b, c, d, e, k

+ Câu 3 : giải thích "lí do mà em chọn các câu trả lời ở câu 2 là hàm số là các số tự nhiên có thể biểu diễn trên hệ trục toạ độ hoặc trong bảng giá trị hoặc có thể viết thành 1 phép toán mà nghiệm của nó có thể biểu diễn trên hệ trục toạ độ"

=> HS ghi nhớ ba cách biểu diễn hàm số, tuy nhiên không ghi nhớ đặc trưng của hàm số.

I.4 Kết luận

Qua các ghi nhận trên chúng tôi đi đến những kết luận sau :

* Không có HS nào ghi nhớ ba đặc trưng của hàm số (tương ứng, biến thiên, phụ thuộc). R_1 ảnh hưởng mạnh lên tất cả HS, tuy vậy HS vẫn chưa phân biệt được sự khác nhau giữa biến độc lập x và biến phụ thuộc y. Vì vậy không có HS nào có bài làm chính xác ở câu 2

* Để xác định một hàm số, HS hoặc dựa vào biểu thức giải tích (một số HS xác định chỉ dựa vào một và chỉ một biểu thức giải tích), hoặc dựa vào bảng giá trị (đa phần chọn a, bỏ b trong khi kết quả phải ngược lại), hoặc dựa vào dạng đồ thị (parabol hay đường thẳng).

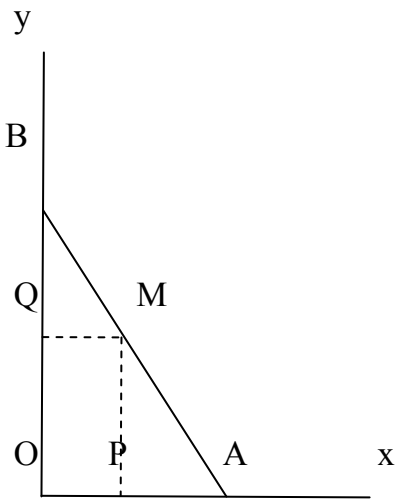
* Kết quả khảo sát lại nghiệm đúng với dự đoán về sai lầm HS mắc phải trong chương I : " đồ thị của hàm số có thể là tập hợp các điểm rời rạc" (chọn câu e).

* Kiến thức về hàm số mà HS còn lưu giữ lại gắn với biểu thức giải tích (98% HS đều có lựa chọn ở mục này k, l, m, n), và hình dạng đồ thị (ảnh hưởng của R_3 tuy đã được hạn chế bằng cách đưa ra các đồ thị parabol không có đỉnh ở O hay đường thẳng nằm ngang) của những hàm số đã được học chứ không phải là bản chất của khái niệm hàm số.

II. Thực nghiệm B

II.1 Bài toán thực nghiệm

Trong mặt phẳng cho hai tia Ox, Oy vuông góc với nhau và cho một điểm M cố định nằm trong góc xOy được xác định bởi OP = 1 và OQ = 2 (xem hình vẽ). Qua M dựng đường thẳng d cắt tia Ox ở A và tia Oy ở B. Hãy xác định vị trí của d sao cho tam giác vuông OAB có diện tích nhỏ nhất .



II.2 Phân tích apriori :

1. Biến tình huống và giá trị

V1. *Phương thức làm việc :*

Làm việc cá nhân : HS hiểu rõ thông báo bài toán, tạo sản phẩm cá nhân, chuẩn bị cho công việc làm nhóm hiệu quả hơn.

Làm việc theo nhóm : tăng cường trao đổi, thảo luận, tạo ra sự cạnh tranh trong học tập.

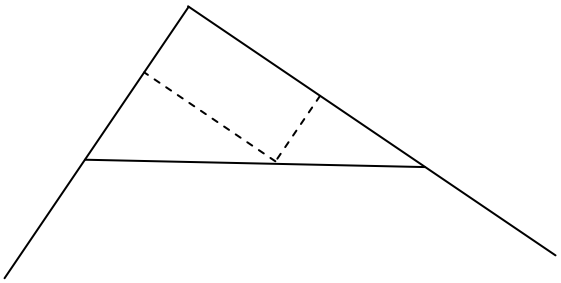
Làm việc tập thể cả lớp : cho phép thực hiện pha hợp thức hoá.

V2. *Bản chất số đo góc xOy, cách xác định điểm M, số đo cạnh :* góc vuông, nhọn, tù; phép chiếu vuông góc, song song, khoảng cách đến điểm… với số đo là một số chẵn hay lẻ.

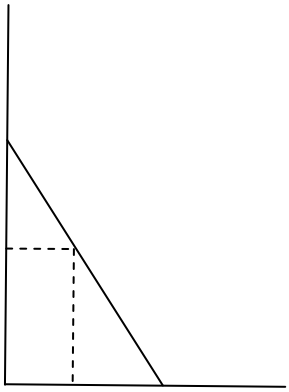
Việc lựa chọn góc xOy vuông; cách xác định M dựa vào các hình chiếu vuông góc trên Ox, Oy các số đo chẵn có mục đích làm dễ dàng các tính toán của học sinh.Thật vậy, tương ứng với mỗi vị trí của đường thẳng d quay quanh M và cắt Ox ở A, Oy ở B thì các đoạn OA, OB được tính dễ dàng bằng cách sử dụng các tỉ lệ thức trong tam giác.

2. Biến didactic

V3. *Hình vẽ* trong thông báo bài toán



H1



H2

Trường hợp hình H2, tạo điều kiện thuận lợi cho việc xuất hiện chiến lược có sử dụng đặt ẩn phụ.

V4. *Môi trường làm việc :* máy tính hay giấy bút

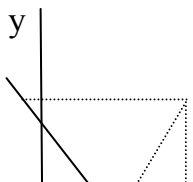
Với môi trường "giấy bút" HS phải tính được diện tích tam giác OAB, và khi đã có biểu thức tính diện tích thì HS phải vận dụng các kiến thức cá nhân (bất đẳng thức Cauchy,…) để tìm giá trị nhỏ nhất; còn với môi trường "máy tính", cụ thể là sử dụng phần mềm Casyopee, HS không trực tiếp tính toán để tìm biểu thức diện tích mà HS chỉ cần xác định cách chọn biến số để thông qua đó chương trình sẽ xác lập biểu thức diện tích (có thể được hay không tuỳ thuộc cách chọn biến của HS).

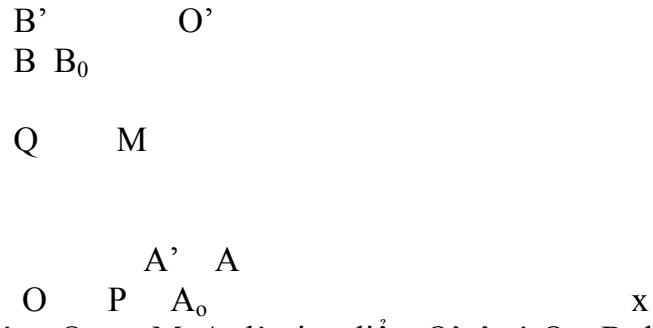
3. Chiến lược và cái có thể quan sát được, ảnh hưởng của biến

3.1 Các chiến lược

a/ $S_{\text{hình học}}$:

+ Kiến thức chỉ đạo chiến lược : kiến thức hình học lớp 7, 8 (diện tích tam giác, hai tam giác bằng nhau, điểm đối xứng …)





Lấy O’ đối xứng O qua M, A_o là giao điểm O’y’ và Ox, B_o là giao điểm của O’x’ và Ox (Oy // O’y’, Ox // O’x’).

Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng d bất kì qua M với Ox, Oy. Gọi A’, B’ là giao điểm của AB với O’y’ và O’x’.

Ta có $S_{OAB} = S_{O'A'B'}$

Suy ra $S_{OAB} = ½ (S_{OAO'B} + S_{BB'Bo} + S_{AA'Ao})$

Như vậy, diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất nếu $A \equiv A_o$ và $B \equiv B_o$, tức là đường thẳng phải dựng chính là đường thẳng đi qua A_o và B_o (M là trung điểm A_oB_o).

b/ $S_{\text{đại số}}$: chọn ẩn số thích hợp, thiết lập công thức tính S. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy (hoặc tính chất tích hai số không đổi thì tổng nhỏ nhất khi hai số bằng nhau), điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai, tìm giá trị nhỏ nhất của S.

+ Kiến thức chỉ đạo chiến lược : tỉ lệ thức trong tam giác (hình học lớp 8), bất đẳng thức Cauchy, phương trình bậc hai …(đại số lớp 9, 10).

+ *“chọn ẩn x = OA(1)”*

Ta có : $\frac{2}{OB} = \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow OB = \frac{2x}{x-1}$

$S_{OAB} = ½ OA.OB = ½ . x.\frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1} = 2 + x - 1 + \frac{1}{x-1}$

Vì $(x - 1).\frac{1}{x-1}$ không đổi (= 1) nên S_{OAB} nhỏ nhất khi $x - 1 = \frac{1}{x-1}$, tức là x = 2.

+ *“chọn ẩn x = OA(2)”*

Ta có : $\frac{2}{OB} = \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow OB = \frac{2x}{x-1}$

$S_{OAB} = ½ OA.OB = ½ . x.\frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$

$\Leftrightarrow x^2 - Sx + S = 0$ (với $S = S_{OAB}$) (3)

Khi đó (3) là phương trình bậc 2 có ẩn là x, (3) có nghiệm khi :

$\Delta = S^2 - 4S \geq 0 \Leftrightarrow S \geq 4$

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất là 4 khi x = S/2 = 2

+ *"chọn ẩn x = OB (1)"*

Ta có $\frac{1}{OA} = \frac{x-2}{x} \Leftrightarrow OA = \frac{x}{x-2}$

$2S_{OAB} = \frac{x^2}{x-2} = x - 2 + \frac{4}{x-2} + 4$

Vì $(x-2).\frac{4}{x-2}$ không đổi nên S_{OAB} nhỏ nhất khi $x - 2 = \frac{4}{x-2}$, tức là x = 4

+ *"chọn ẩn x = OB (2)"*

Ta có $\frac{1}{OA} = \frac{x-2}{x} \Leftrightarrow OA = \frac{x}{x-2}$

$2S_{OAB} = \frac{x^2}{x-2} \Leftrightarrow x^2 - 2Sx + 4S = 0$ (với $S = S_{OAB}$) (4)

Khi đó (4) là phương trình bậc 2 ẩn x, (4) có nghiệm khi :

$\Delta' = S^2 - 4S \geq 0 \Leftrightarrow S \geq 4$

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất là 4 khi x = S = 4

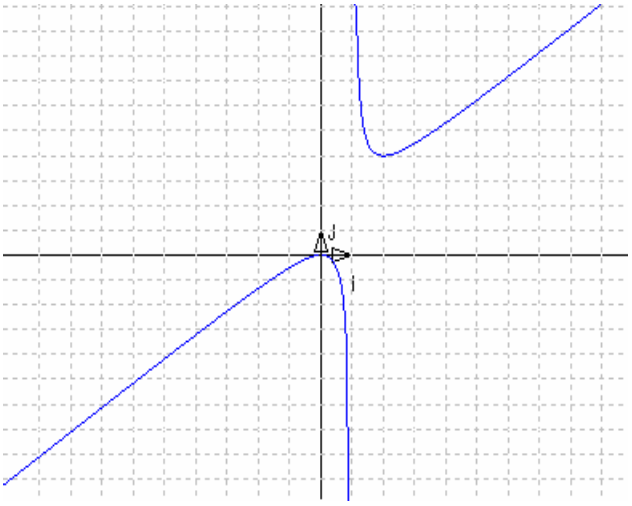
c/ $S_{\text{giải tích}}$: chọn biến, thiết lập công thức tính S = S(x), khảo sát và vẽ đồ thị hàm số, dựa vào đồ thị chỉ ra giá trị nhỏ nhất của S

+ Kiến thức chỉ đạo chiến lược : tỉ lệ thức trong tam giác (hình học lớp 8), đồ thị hàm số , giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số … (đại số và giải tích 10, 12)

+ *"chọn biến x = OA "*

$S_{OAB} = ½ OA.OB = ½ . x.\frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ với $x \geq 1$. Vẽ đồ thị hàm số

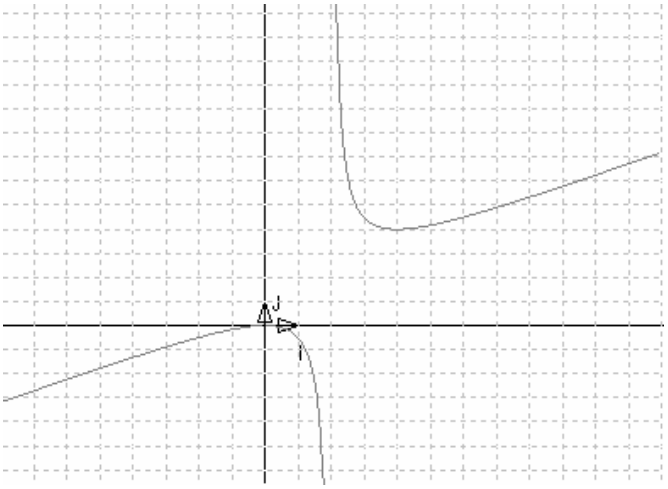


Dựa vào đồ thị hàm số ta có $\underset{x\geq 1}{Min}\, y = 4$ khi x = 2

+: *"chọn biến x = OB "*

S_{OAB} = ½ OA.OB = $\dfrac{x^2}{2(x-2)}$

Xét hàm số y = f(x) = $\dfrac{x^2}{2(x-2)}$ với x ≥ 2 . Vẽ đồ thị hàm số



Dựa vào đồ thị hàm số ta có $\underset{x\geq 2}{Min}\, y = 4$ khi x = 4

3.2 Ảnh hưởng của biến

Vì thực nghiệm áp dụng cho HS lớp 10 nên việc xuất hiện chiến lược $S_{\text{giải tích}}$ là khá khó khăn khi thực hiện trên môi trường giấy bút truyền thống, tuy vậy với sự trợ giúp của phần mềm Casyopée việc này thực hiện khá đơn giản. Hơn nữa còn làm xuất hiện chiến lược $S_{\text{hình học giải tích}}$ vì mô đun hình học trong Casyopee được xây dựng dựa trên hệ trục toạ độ Oxy.

* $S_{\text{hình học giải tích}}$

Ta có thể thiết lập hai công thức tính diện tích S = ½ OA.OB hoặc S = ½ OH.AB với OH là độ dài đoạn vuông góc hạ từ O xuống AB

Khi ta di chuyển điểm A, dẫn đến H và B di chuyển theo, và giá trị diện tích S cũng thay đổi. Quan sát các giá trị thay đổi ta thấy giá trị nhỏ nhất của S là 4 khi đó P là trung điểm của PA.

* $S_{\text{giải tích}}$

Tiếp tục sử dụng biểu thức đã được thiết lập trong chiến lược $S_{\text{hình học giải tích}}$ ta gặp vấn đề sau :

Với S = ½ OA.OB khi chọn biến là OA (hoặc OB) dùng công cụ thiết lập quan hệ hàm và biểu thức giải tích ta sẽ được các biểu thức giải tích tương tự như trong $S_{\text{giải tích}}$ đã trình bày ở trên.

Với S = ½ OH.AB khi chuyển qua quan hệ hàm ta không thể có được biểu thức hàm số theo biến x = OH (hoặc AB) nhưng vẫn thiết lập được quan hệ hàm.

II.3. Phân tích a posterriori thực nghiệm B

Thực nghiệm tiến hành đối với lớp 10A1 trường THPT An Nhơn Tây (sỉ số 46 HS), chia cả lớp làm 8 nhóm (4 → 6 HS/nhóm). Thời điểm tiến hành, sau khi học xong chủ đề bất đẳng thức (ứng dụng tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức)

*** Pha 1 :**

- GV thông báo nội dung bài toán trên bảng trước cả lớp
- HS làm việc theo nhóm thời gian 15 phút tại lớp mục đích tìm hiểu bài toán, phân chia nhiệm vụ, thoả thuận thời gian họp nhóm.
- HS tiến hành làm việc theo nhóm thời gian 5 ngày (09/12 đến 13/12/2010), viết thành bài thu hoạch

Kết quả chung các bài thu hoạch :

- Tuỳ theo cách hiểu câu hỏi của bài toán đặt ra 'vị trí của đường thẳng d để S_{OAB} nhỏ nhất' mà có ba kết quả trả lời : *1.* S_{OAB} nhỏ nhất khi M là trung điểm của AB; *2.* vị trí của AB, độ dài OA, OB hoặc toạ độ A, B; *3.* phương trình đường thẳng d
- Bài toán đặt ra trong phạm vi hình học nên để tìm giá trị nhỏ nhất của S_{OAB} các nhóm đều tiến hành thiết lập biểu thức diện tích trong phạm vi đó, dùng công cụ là bất đẳng thức Cauchy để tìm giá trị nhỏ nhất, có 6/8 nhóm xác định vị trí d bằng cách thiết lập phương trình (hình học giải tích)
- 2/8 nhóm có câu trả lời sai, như vậy tỉ lệ 6/8 nhóm trả lời đúng là khá cao. Tuy vậy nhìn vào phần đánh giá điểm cá nhân và khảo sát trực tiếp các nhóm trưởng thì trong nhóm chỉ khoảng 1 đến 2 HS đưa ra hướng giải còn các HS khác đóng vai trò là người kiểm định

Dưới đây là phần tóm tắt các kết quả thu được

<u>Nhóm 1</u> : (6 HS)

Đặt toạ độ điểm M(1;2), A(a; 0), B(0;b), viết phương trình d (phương trình đoạn chắn), đưa ra mối liên hệ a, b : *a.b=b + 2a (1)*

S_{OAB} = ½ a.b (a.b > 0)

Muốn S_{OAB} nhỏ nhất thì a.b phải bé nhất

(1) $\Leftrightarrow ab \geq 2\sqrt{b.2a}$ ... $\Leftrightarrow a.b \geq 8$

Dấu "=" xảy ra khi b = 2a

Kết hợp với (1) ta có *b = 4, a = 2*

Diện tích tam giác AOB nhỏ nhất khi a = 2 và b = 4

Vậy d đi qua hai điểm A(2 ;0), B(0 ;4).

Ptdt : d : $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ *hay M(1 ;2) là trung điểm AB*

=> Trong bài xuất hiện kiến thức chưa được học là phương trình đoạn chắn .

'S_{OAB} nhỏ nhất thì a.b phải bé nhất' → tích a.b thay đổi dẫn đến S_{OAB} thay đổi

3/8 nhóm lựa chọn cách này

Nhóm 7 : (6 HS)

Đặt toạ độ M(1 ;2), B(0 ;y), A(x ;0), O(0;0), P(1;0), Q(0;2)

Cách 1 :

Đk : y > 2, x > 1

$S_{BQM} + S_{MPA} = a_{(min)}$

$\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow$ ½ $\tan\alpha + \frac{2}{\tan\alpha} = a_{(min)} \geq 2\sqrt{\frac{\tan\alpha}{2}.\frac{2}{\tan\alpha}} = 2$

Dấu '=' xảy ra khi ½ $\tan\alpha = \frac{2}{\tan\alpha}$ $\Leftrightarrow \tan\alpha = 2$

Tính độ dài QB = tanα.QM = 2, suy ra toạ độ B(0;4). Viết phương trình d qua hai điểm B, M.

Cách 2 :

Xét hai tam giác BQM và MPA đồng dạng ... => PA.QB = 2

$S_{AOB} = S_{OQMP} + S_{QMB} + S_{PAM} = 2.1 + ½\ QM.QB + ½\ PA.PM = 2 + ½\ QB + PA$

$\geq 2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}QB.PA}$

≥ 4

Tính độ dài đoạn OB = 4, suy ra toạ độ điểm B. Viết phương trình d.

=> Với cách 1 HS đưa biểu thức diện tích về biểu thức một biến là tan α (**1/8** nhóm lựa chọn cách này)

Phân tích S_{AOB} để tìm những phần thay đổi trong biểu thức → có thể nhấn mạnh để dẫn đến khái niệm hàm số

3/8 nhóm lựa chọn cách 2

Nhóm 3 : (6 HS) có hai cách nhưng cách 1 gần giống với nhóm 1 nên dưới đây chỉ tóm tắt lại cách 2

Ta có hai tam giác đồng dạng BQM và MPA : ... => BQ.PA = 2

$S_{AOB} = ½\ OA.OB = ½\ (OP + PA)(OQ + QB) = ... = ½\ (4 + \frac{2}{PA} + 2PA) \geq 4$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{PA} = PA \Leftrightarrow PA = 1$ ...

Suy ra toạ độ A, B. Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm A, B.

=> HS đưa biểu thức diện tích về biểu thức một biến theo PA (**1/8** nhóm lựa chọn cách này)

Tiểu kết pha 1

- Qua các bài thu hoạch trên các nhóm đều nhận ra được rằng S_{OAB} thay đổi phụ thuộc vào một đại lượng thay đổi khác. Như vậy bài toán đưa ra tuy vượt khỏi phạm vi đại số và giải tích nhưng HS vẫn nhận biết được các đặc trưng của một hàm số, quan hệ giữa hai đại lượng biến thiên.
- R_1, R_3 ảnh hưởng mạnh lên HS trên môi trường giấy bút (7/8 nhóm đều xác định vị trí d bằng cách thiết lập nên phương trình với hệ trục toạ độ Oxy là góc vuông cho sẵn).
- Kết quả bài làm trên giấy đều phù hợp với chiến lược $S_{\text{đại số}}$, và với các kĩ năng tính toán đã được học, bài toán nằm trong khả năng của HS nhưng vẫn gây ra rất nhiều khó khăn đối với từng cá nhân HS. (bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức).
- Với các sai lầm HS gặp phải ở thực nghiệm A và khó khăn nảy sinh trong thực nghiệm B, chúng tôi sẽ thực hiện tiếp pha 2 với các mục đích cụ thể sau :

  + Tạo điều kiện HS giải quyết bài toán, nhận biết mô hình quan hệ hàm số bằng cách thiết lập lại bài toán trong mô đun hình học của Casyopée.

  + Kiểm chứng lại kết quả trên bằng mô đun đại số của Casyopée (qua nhiều cách biểu diễn hàm số)

*** Pha 2 :** thực nghiệm trên môi trường máy tính sử dụng phần mềm Casyopee.

Thực nghiệm tiến hành tại phòng máy trường THPT An Nhơn Tây, lớp 10A1 (46 HS chia thành 8 nhóm), thời gian 30 phút, ngày 28/12/2010

Kết quả thực nghiệm : mỗi nhóm lưu thành file trên máy kết quả bài làm; ghi tóm tắt lại kết quả trên bài làm giấy

Các bước tiến hành :

+ GV phát trở lại cho HS các bài làm trên giấy của các nhóm, yêu cầu ghi lại các kết quả nhóm thực hiện sau tiết học.

+ Mô đun hình học :

GV cung cấp hình vẽ bài toán trong mô đun hình học, lí do : hình vẽ khó thực hiện trong khoảng thời gian ngắn trên lớp (vẽ đường thẳng d thay đổi thì phải đi qua hai điểm một là M hai là một trong hai điểm thay đổi là A hoặc B, A di chuyển trên Ox kể từ P trở đi, B di chuyển trên Oy kể từ Q trở đi)

Nhiệm vụ của HS : thiết lập biểu thức tính diện tích tìm giá trị nhỏ nhất (phần mềm cho kết quả); với giá trị nhỏ nhất đó tìm vị trí của d.

Kết quả thu được :

- Thiết lập biểu thức (chọn biểu tượng AM) : có hai kết quả S_{OAB} = ½ OA.OB; S_{OAB} = QO.QM + ½ QM.QB + ½ PA.PM

- Bước 1 : khi dịch chuyển điểm A dẫn đến d thay đổi vị trí, 8/8 nhóm đều tìm được kết quả S_{AOB} nhỏ nhất bằng 4 , khi đó d cắt Ox tại điểm A với OA = 2, cắt Oy tại điểm B với OB = 4 (kết quả OA , OB được tìm ra bằng cách nhìn trên hình vẽ bài toán)

- Bước 2 : các nhóm tiến hành chọn biến (chọn biểu tượng x_M) tuỳ theo bài làm của mỗi nhóm.

- Bước 3 : thiết lập biểu thức trong mô đun đại số (chọn biểu tượng x_M → AM), các nhóm đều gặp khó khăn vì tập xác định trên mô đun hình học với bài toán này đều xác định trên miền dương nên khi chuyển biểu thức qua mô đun đại số buộc phải lựa chọn Auto để Casyopée tự xác định lại tập xác định của hàm số.

<u>Nhóm 1 :</u>

S_{OAB} = ½ OA.OB

Xác định có hai biến thay đổi => chọn biến là A trên trục hoành hoặc B trên trục tung (abscisse)

Thiết lập được biểu thức trong mô đun đại số.

<u>Nhóm 3 :</u>

Cách 1 giống như nhóm 1, cách 2 thiết lập biểu thức theo một biến PA

Thiết lập được biểu thức trong mô đun đại số

<u>Nhóm 7 :</u>

Các lỗi gặp phải : (bài ghi và câu trả lời của HS nhóm 7, phần chữ nghiêng)

+ Tạo một phương trình cho hai biến

=> HS không biết cách chọn biến, GV hướng dẫn :

- Hàm số được học trong chương trình theo mấy biến (biến độc lập) ? *(HS : 1 biến)*

- Theo bài làm đã có PA.QB = 2 ta có thể tính PA theo QB hoặc ngược lại được không ? *(HS : được)*

- Vậy với bài này em có thể chọn biến như thế nào ? *(HS : là PA hoặc QB)*

+ Sử dụng tỉ số lượng giác thì phải dùng đường tròn

Vì với cách 1 thiết lập biểu thức theo tanα HS không thực hiện được trên Casyopée (qui ước trên Casyopée đặt biến bằng góc chỉ áp dụng trên đường tròn; không có kí hiệu tan; không có cách chọn biến đặt theo một tỉ số)

+ Biểu thức không thể copy

Vì với cách 2 : S_{OAB} = QO.QM + ½ QM.QB + ½ PA.PM (= 2 + ½ QB + PA) => chọn hai biến là PA hoặc QB, HS phải gõ hai lần biểu thức đó.

Thiết lập được biểu thức trong mô đun đại số.

<u>Nhóm 8 :</u>

Kết quả làm trên giấy bị sai

S_{OAB} = ½ OA.OB

(bài ghi lại trên giấy của nhóm 8, chữ in nghiêng)

Chọn 2 biến => là OA hoặc OB

Ghi chú : chỉ chọn một biến thay đổi

Vì khi chọn biến nhóm chọn là AB (biến kiểu distance) với lí luận "*d thay đổi thì A và B cùng thay đổi*" do đó khi không thể thực hiện được nhóm ghi trong bài "*khó khăn : lỗi hình điểm B không di động*". GV yêu cầu HS xem lại qui ước đặt biến trong Casyopée về đặt biến kiểu distance, HS mới chấp nhận là không thể lựa chọn biến như vậy.

+ Mô đun đại số :

Với biểu thức giải tích được thiết lập, vẽ đồ thị hàm số , dịch chuyển điểm trên đồ thị kiểm tra kết quả bài toán

Kết quả thu được :

- Click chọn hàm số, Casyopée cung cấp đồ thị tương ứng. Dựa vào đồ thị HS xác định 2 điều : tập xác định bài toán cung cấp vẽ nên phần đồ thị ở phía trên (xem thêm các file bài làm của HS), có thể trực tiếp kiểm tra bằng cách click chọn điểm trên đồ thị và dịch chuyển nó thì tương ứng trên mô đun hình học d cũng thay đổi vị trí, do đó khi điểm trên đồ thị dịch chuyển qua phần đồ thị ở dưới thì trên

mô đun hình học không có kết quả; giá trị nhỏ nhất của hàm số xét trên phần đồ thị đã xác định đó là đỉnh của đồ thị.

- Để xác định chính xác giá trị, HS click chọn điểm trên đồ thị, khi dịch chuyển các điểm này phần mềm sẽ tính các giá trị của biến và hàm tương ứng (hình thức bảng giá trị).

- Với Casyopee HS đều nhận ra chỉ có thể dịch chuyển điểm trên đồ thị hoặc điểm tương ứng trên trục nằm ngang (trục hoành) => Hình ảnh trực quan để GV nhấn mạnh ba đặc trưng của khái niệm hàm số : tương ứng, phụ thuộc, biến thiên

Tiểu kết pha 2 :

- Các chiến lược $S_{\text{giải tích}}$ và $S_{\text{hình học giải tích}}$ đều xuất hiện trong kết quả thực nghiệm. Như vậy bằng cách chọn biến thì với Casyopée, HS đã làm xuất hiện chiến lược mới không xuất hiện trong môi trường giấy bút, nhưng cũng làm hạn chế các cách giải mà HS tìm ra trong môi trường đó.
- Với Casyopée chúng ta đã giải quyết phần khó nhất là vẽ đồ thị hàm số (có biểu thức bất kì) trong kĩ thuật giải quyết nhiệm vụ tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong $T_{\text{đọc}}$.
- Với những ghi nhận trong thực nghiệm ta rút ra được một số nhận xét sau về phần mềm Casyopée :

Thuận lợi :

Với mô đun đại số tích hợp nhiều cách biểu diễn hàm số nhờ đó cung cấp những hình ảnh trực quan giúp học sinh khắc sâu kiến thức.

Có sự liên kết của hai mô đun hình học và đại số nhờ đó thiết lập được biểu thức giải tích, kiểm tra tập xác định... giúp giải quyết những bài toán phức tạp trong hình học bằng phương pháp giải tích.

Thích hợp cho việc dạy học các khái niệm ví dụ khái niệm hàm số, tạo môi trường học sinh nhận biết khái niệm và không đề cao kĩ năng tính toán

Khó khăn :

Casyopée qui ước sẵn một số cách chọn biến, do đó xuất hiện những cách giải đúng của HS không thể áp dụng trên chương trình được .

Chương trình tính toán sẵn kết quả cho người dùng, dẫn đến một bộ phận HS không hứng thú vì không rèn luyện kĩ năng tính toán cho HS, một kĩ năng quan trọng trong các kì thi cử tại Việt Nam.

Khó khăn cho người dùng khi vẽ lại các bài toán trên mô đun hình học (ví dụ như bài toán trong thực nghiệm).

III. Kết luận

Từ thực nghiệm trên HS lớp 10 chúng tôi thu được một số kết quả sau :

+ Với môi trường giấy bút :

HS vẫn chưa có kiến thức về khái niệm hàm số một cách toàn diện, đầy đủ. Cụ thể với thực nghiệm A không có HS có lựa chọn chính xác, chỉ dựa vào một đặc trưng hàm số (biến thiên, tương ứng, hay phụ thuộc)

Thực nghiệm A cho phép chúng tôi khẳng định tính thoả đáng của giả thuyết nghiên cứu được nêu

Các qui tắc R_1, R_3 ảnh hưởng mạnh lên từng cá nhân mỗi HS. Thể hiện rõ nhất là trong pha 1 của thực nghiệm B, với góc vuông xOy và yêu cầu tìm vị trí của d thì 7/8 nhóm đều tìm cách xác định phương trình của d

+ Với môi trường máy tính _ phần mềm Casyopée

Qui tắc R_3 không có môi trường sống trong Casyopée. Qui tắc R_1 chỉ có ảnh hưởng trên mô đun đại số.

Bài toán thực nghiệm tạo điều kiện đơn giản hóa kĩ thuật sẵn có để giải quyết nhiệm vụ được đề ra trong thể chế (liên quan đến việc tích hợp nhiều cách biểu diễn)

KẾT LUẬN

Kết quả của chúng tôi được trình bày trong ba chương của luận văn :

* Chương 1

- Đồ thị là một phương tiện biểu diễn thể hiện rõ 3 đặc trưng cơ bản của hàm số (phụ thuộc, tương ứng, biến thiên), tính chất của đồ thị được suy ra từ tính chất của hàm số và ngược lại

- Vẽ đồ thị hàm số thông qua khảo sát hay vẽ trực tiếp nhưng nhờ máy tính việc vẽ trực tiếp sẽ dễ dàng hơn

* Chương 2 : chúng tôi đã làm rõ tiến trình và cách tổ chức đưa vào khái niệm hàm số gắn với các cách biểu diễn hàm số (bằng bảng, đồ thị, biểu thức giải tích)

- Kiểu nhiệm vụ $T_{tính}$ được đặc biệt chú ý, trong đó kĩ năng tính bằng công thức xuất hiện nhiều nhất.

Mối quan hệ cá nhân giữa HS và khái niệm hàm số dựa trên cách biểu diễn hàm số bằng biểu thức giải tích

- Thể chế không tạo điều kiện cho việc dạy học khái niệm hàm số trong môi trường tích hợp nhiều cách biểu diễn hàm số, cũng như không trình bày tường minh cách biểu diễn hàm số bằng đồ thị.

* Chương 3 : chúng tôi đã hợp thức hoá được quy tắc hợp đồng đã nêu, khẳng định được giả thuyết nghiên cứu với thực nghiệm A và pha 1 của thực nghiệm B trong môi trường giấy bút truyền thống ; với pha 2 của thực nghiệm B chúng tôi tiến hành trên môi trường máy tính tạo điều kiện củng cố lại kiến thức về khái niệm hàm số bằng các hình ảnh trực quan thể hiện đủ ba đặc trưng của hàm số, đồng thời rút ra được một số kết luận sau :

- Với môi trường máy tính ta có thể đơn giản hóa các kĩ thuật giải quyết các kiểu nhiệm vụ trong thể chế.

- Với thực nghiệm trên môi trường máy tính đưa đến cho chúng ta một giải pháp trong việc dạy học khái niệm hàm số tích hợp nhiều cách biểu diễn trên một mô hình động, tạo tiền đề thuận lợi cho HS tiếp thu kiến thức.

* Những hạn chế và hướng mở của luận văn :

+ Hạn chế :

- Bài toán thực nghiệm đưa ra nhằm mục đích tận dụng tối đa các tính năng của phần mềm Casyopée, nhưng chưa đáp ứng hoàn toàn cho việc dạy học khái niệm hàm số trong môi trường tích hợp nhiều cách biểu diễn hàm số.

+ Hướng mở của luận văn

Trên cơ sở của những kết quả đạt được, chúng tôi nhận thấy có thể tiếp tục nghiên cứu theo hướng xây dựng một hệ thống tình huống dạy học khái niệm hàm số nhằm giúp HS nhận rõ các đặc trưng hàm số trên các mô hình động (môi trường máy tính).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ANNIE BESSOT và CLAUDE COMITI (Đại học Joseph Fourrier – Grenoble I) – LÊ THỊ HOÀI CHÂU và LÊ VĂN TIẾN (Đại học Sư phạm TPHCM) (2009) – *Những yếu tố cơ bản của didactic toán, elements fondamentaux de didactique des mathematiques – NXB Đại học Quốc gia TPHCM*
2. ĐINH THẾ LỤC – PHẠM HUY ĐIỂN – TẠ DUY PHƯỢNG – NGUYỄN XUÂN TẤN (1998) – *Giải tích toán học, những nguyên lý cơ bản và tính toán thực hành (tập 1) – NXB Giáo Dục*
3. LÊ VĂN TIẾN (2005) – *Phương pháp dạy học môn toán ở trường phổ thông (các tình huống dạy học điển hình)* – NXB Đại học QUốc gia TPHCM
4. CONNALLY, HUGHES-HALLETT, GLEASON, ET AL. (2000) – *Functions modeling change, a preparation for calculus*
5. CLAIRE CAZES, JEAN – MICHEL GELIS, TRẦN KIẾM MINH (ICTM1 9 - 2009) – *Instrumentation process of a digital environment inthe study of functions at upper secondary level : a case study over two years*
6. JEAN-BAPTISTE LAGRANGE, NGUYỄN CHÍ THÀNH (ICTMT 9 – 2009) – *Casyopee an open environment for learning about function at upper secondary level*
7. NGUYỄN CHÍ THÀNH AND AL. (PCMI 2009) – *Teacher professional development in the teaching and lerning of functions*

PHỤ LỤC

CASYOPÉE AN OPEN ENVIRONMENT FOR LEARNING ABOUT FUNCTIONS AT UPPER SECONDARY LEVEL

Jean-Baptiste Lagrange, Nguyen Chi Thanh

DIDIREM, Université Paris 7

Modelling geometrical dependencies by way of algebraic functions, and studying the geometrical properties of curves representing functions are essential mathematical activities that Casyopée makes very accessible for students. They allow students a better link between syntactical and semantic points of view in algebra and an easy introduction into calculus. Casyopée has two main windows closely linked. The first one, (called the symbolic window) provides students with symbolic computing and representation capabilities as well as facilities for proving. The second one is a Dynamic Geometry (DG) window. Casyopée uses the Maxima kernel and can be freely installed on Windows based systems (http://casyopee.eu). Participants in the workshop will be introduced to Casyopée's main features and to learning situations for their classes.

CASYOPÉE : OBJECTS AND CAPABILITIES

Real functions of one real variable are the central objects of Casyopée. A function is defined by a formula involving a function variable and a domain. This definition is a distinctive feature in Casyopée. It allows being consistent with the mathematical definition as well as providing realistic modelling: when designing a function as a model of a situation, often the function is not defined on the whole set of real numbers and often not on the whole set of existence of the formula. Casyopée provides means for creating sets of ordered real numbers, possibly including parameters, in order to define domains. The parameters can be treated both formally and numerically by way of animation. Constraints can be set on parameters in order to adapt to all situations: for instance if the parameter is intended to model a measure, it can be defined as positive. Functions can depend on parameters. Expressions (that is to say formulas not involving a function variable) can also be defined and treated.

A wide range of construction capabilities is available within a Dynamic Geometry (DG) window to build a figure including free points. Curves of functions can be drawn using the algebraic definition of functions (domain and formula). Because Casyopée is a DG system based on an underlying symbolic kernel, if offers constructions, like the intersection of a line and a curve, and the facility for exporting geometrical functions or expressions: Casyopée can compute a domain and a formula for "geometrical" expressions or functions related to measures, providing a capability to express algebraically geometrical dependencies. This "export" capability, explained below, is a great help for students when modelling algebraically geometrical functional dependencies or expressions.

THE SYMBOLIC WINDOW OF CASYOPÉE

Figure 1 displays the symbolic window. Each panels deals with specific objects:

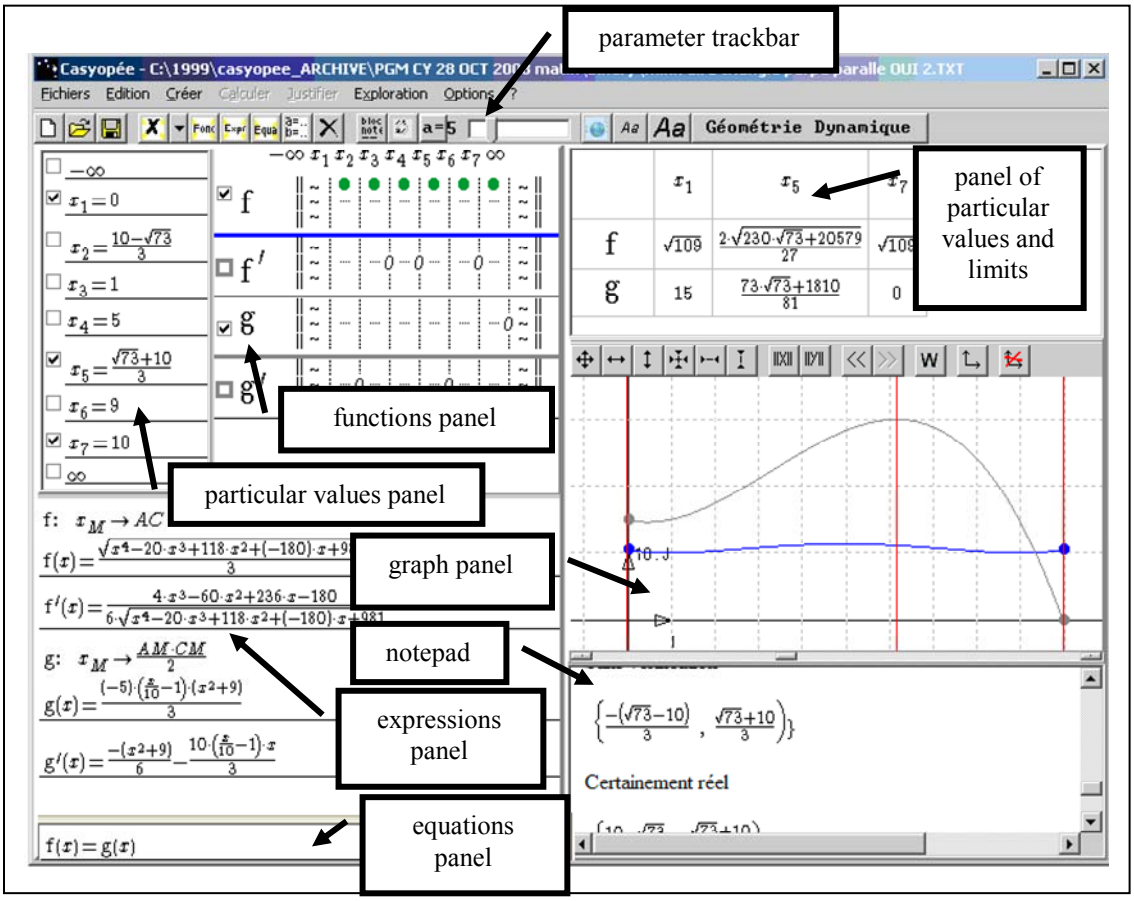


Figure 1: the main window.

- The **particular values panel**: this part of the window displays an ordered set of particular values of a function variable, entered by the user or computed by the environment (for example when automatically specifying geometrical functions); several variable identifiers (*x, y, t*…) allow different sets of values.
- The **expressions panel**: this part includes the formulas for all functions and expressions, geometrical ones exported from the DG window as well as functions directly created by the user.
- The **equation panel:** equations of four types can be created and solved. 1) f(x)=k 2)f(x)=g(x) 3)f(x)=k g(x) 4) k=0, where f and g are functions and k is a formula possibly depending on parameters. Casyopée solves the first three types in x, and the fourth in a parameter. The existence and consistency with the domain of the functions and parameters are checked by the kernel.
- The **functions panel**: a table displays the properties (sign, variation) of the functions after they have been proved;
- **Particular values and limits** of functions for chosen values are also available on demand in the right part of the window;
- **The graph panel:** this panel contains graphs of selected functions; it is possible to zoom, translate, modify the axis scale, resize the representation of the window with the mouse…
- **Notepad:** all the actions activated by the user are recorded in this part using Latex. Users have consequently at their disposition a record of their actions. They can reorganise this NotePad in order to obtain a well written report and/or exporting this as an html file;

- **Parameters' trackbars:** they are used to animate parameters. Constraints on parameters (intervals) can be modified by a special menu entry.

Casyopée also includes facilities to prove properties of functions by way of theorems. Students have to express the conditions for application of one of these theorems before applying them. The property and the theorem have to be chosen in the corresponding menu.

THE DYNAMIC GEOMETRY WINDOW

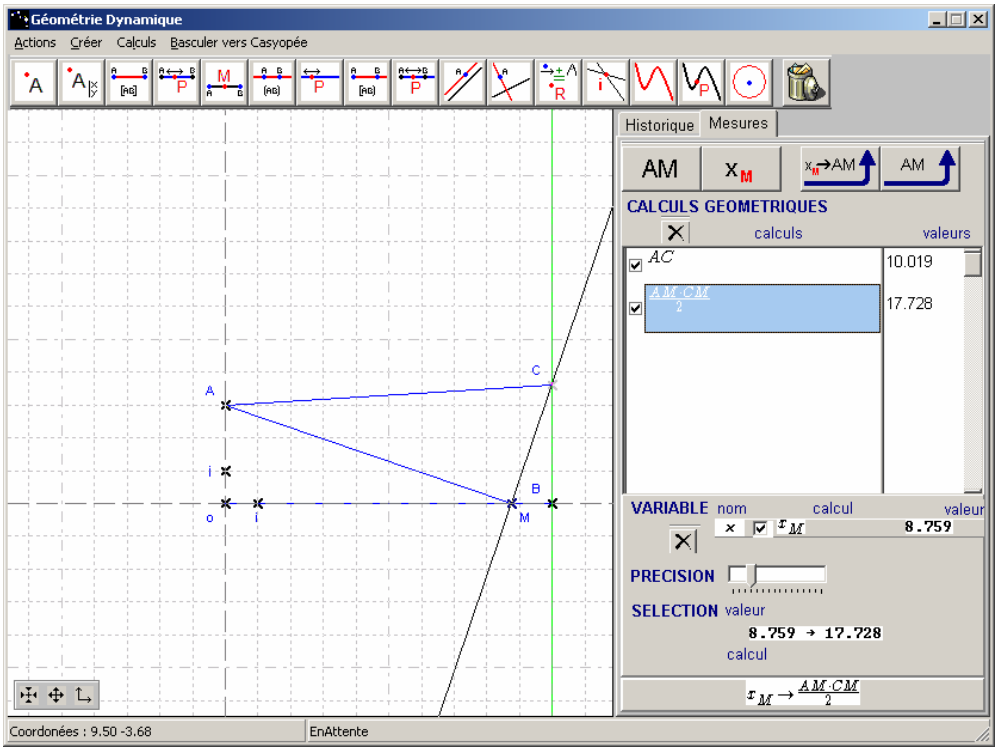


Figure 2: the DG window

Casyopée provides students with dynamic geometry capabilities like in other software, but also specific features helping students make sense of the algebraic modelisation. A figure constructed within Casyopée may include different types of points and various geometrical objects. Note especially the possibility of creating curves of function defined on a domain (not necessarily the whole set of real numbers) and of creating an intersection point between a curve and a line. Thanks to the symbolic definition of geometrical objects, Casyopée can easily know whether a point belongs to a line, a circle or a curve, or test the equality of objects.

The DG window of Casyopée (figure 2) includes also the measures panel that allows creating geometrical calculations, choosing a variable, exploring (co-)variations and exporting geometrical expressions and functions. A geometrical calculation is a well-formed formula that contains distances or coordinates of points and possibly algebraic objects (parameters, expressions, functions…) A variable is a particular measure, more precisely a distance between 2 points or any coordinate of a free point, or a coordinate of a vector, or an angle in case of a free point on a circle. A valid variable depends univocally on a free point. Internally, this is checked by Casyopée by verifying that the variable can be expressed as a reversible function of a geometrical hidden parameter - emanating from a free point.

When a valid variable has been chosen and a geometrical calculation has been selected, then it defines a geometrical co-variation that can be explored numerically. If it is a consistent

dependency, it can be exported as a geometrical function towards the symbolic window. Casyopée verifies the consistency of the dependency between the 2 measures and if consistent, computes and exports the relevant function. This exportation of a geometrical function or expression is designed to help students during the modelling process. It allows them to concentrate on strategic decisions, like choosing a variable or creating a calculation even when they have not great ability in algebraic manipulations. In ordinary settings (without Casyopée, or with another software), the students cannot operate by themselves this part of the modelling process.

THE CASYOPÉE PROJECT

Casyopée is a long-term project initiated ten years ago by a group of teachers and researchers after experimenting standard Computer Algebra Systems. Recent development has been possible thanks to the European Project ReMath (Project IST4-26751). Scenarios of use have been created and documented for an easy use by teachers. They are accessible via the ReMath platform (http://remath.cti.gr). Disseminating Casyopée among teachers in connection with the other outcomes of Remath is an important perspective. We selected a region of France (Brittany) where local authorities are specially interested by Casyopée's features. A group of teachers has been set up with the help of the French INRP (National Institute for Pedagogical Research) and the IREM (Institute for Research in Mathematics Teaching) of Rennes. Although already interested by digital technology, these teachers were not involved before in Casyopée's design and experimentation. We expect them to bring a fresh vision of Casyopée's features and to prepare scenarios of use that will be disseminated to other mathematics teachers together with Casyopée on the professional digital workspace for teachers in Brittany. We plan to set up a regional community of users, and later to extend further this community.

References

Lagrange, J-B. and Gelis, J-M. (2008) 'The Casyopée project: a Computer Algebra Systems environment for students' better access to algebra', *Int. J. Continuing Engineering Education and Life-Long Learning,* Vol. 18,Nos. 5/6, pp.575–58

THỰC NGHIỆM A

Chân thị tố quyên
10A1

Câu 1 : Ở lớp 7 và 9 em đã được học về khái niệm hàm số , vậy theo em thế nào là hàm số (em hiểu thế nào về hàm số) ?

Hàm số là 1 dạng thức chứa x và y. Trong đó và ~~x~~ hàng số nhất định). Trong đó giá trị của y phụ thuộc vào từng giá trị của x và được biểu diễn bằng đồ thị hàm số. có dạng $y = f(x)$

Câu 2 : Hãy đánh dấu ☒ vào các câu trả lời đúng. Trong các câu sau, câu nào cho ta một hàm số :

☒ a/

x	1	1	4	4
y	-1	1	-2	5

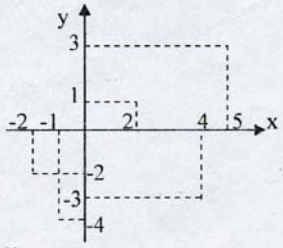
☒ b/

x	-5	-4	-3	-2
y	0	0	0	0

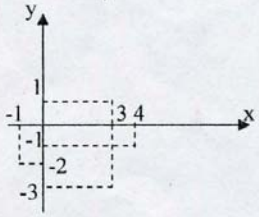
☒ c/

x	-2	-1	0	3
y	1	3	5	7

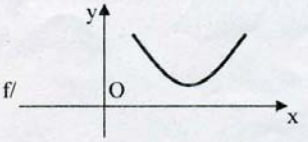
☒ d/



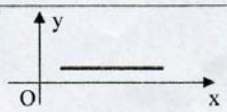
☒ e/



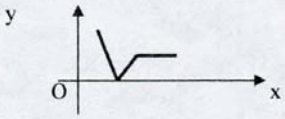
☐ f/



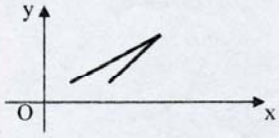
☐ g/



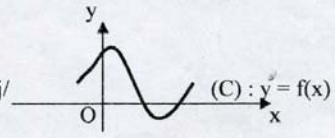
☐ h /



☐ i/



☐ j/



☒ k/ $y = f(x) = 2x + 1$

☐ l/ $y = \begin{cases} 2x \text{ khi } x > 1 \\ -3x + 7 \text{ khi } x \le 1 \end{cases}$

☒ m/ $y = x^3 - 5x + 1$

☐ n/ $y = 9$

Câu 3 : Giải thích lí do em lựa chọn các câu trả lời ở câu 2?

- Vì ở trên là cách phân tích giá trị của y theo x để vẽ đồ thị hàm số và.
- ở câu k) thì nó đã ghi lại dưới dạng của hàm số $y = f(x)$

Đỗ Quốc Khánh
10A1

Câu 1 : Ở lớp 7 và 9 em đã được học về khái niệm hàm số , vậy theo em thế nào là hàm số (em hiểu thế nào về hàm số) ?

Hàm số có dạng $y = f(x)$, nếu ta cho một giá trị x thì ta sẽ nhận được một giá trị của y. Hàm số có thể đồng biến hoặc nghịch biến. Hàm số bậc nhất có dạng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. Hàm số bậc 2 có dạng $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Câu 2 : Hãy đánh dấu ☒ vào các câu trả lời đúng. Trong các câu sau, câu nào cho ta một hàm số :

☒ a/

x	1	1	4	4
y	-1	1	-2	5

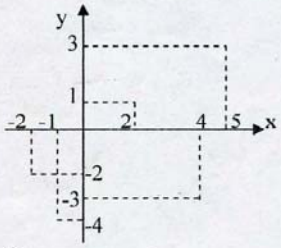
☒ b/

x	-5	-4	-3	-2
y	0	0	0	0

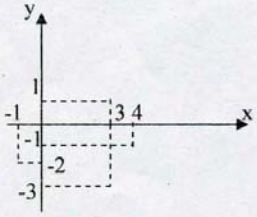
☒ c/

x	-2	-1	0	3
y	1	3	5	7

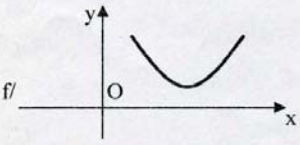
☒ d/



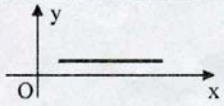
☒ e/



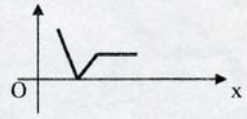
☐ f/



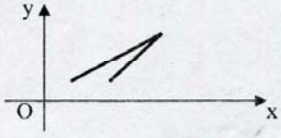
☐ g/



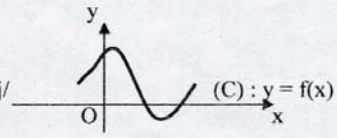
☐ h /



☐ i/



☐ j/



☒ k/ $y = f(x) = 2x + 1$

☐ l/ $y = \begin{cases} 2x \text{ khi } x > 1 \\ -3x + 7 \text{ khi } x \leq 1 \end{cases}$

☐ m/ $y = x^3 - 5x + 1$

☐ n/ $y = 9$

Câu 3 : Giải thích lí do em lựa chọn các câu trả lời ở câu 2?

Bảng là bảng giá trị (a, b, c) khi ta cho x sẽ nhận được y được vẽ trên trục hoành xOy, có giá trị chiếu lên trục hoành Ox và trục tung Oy. (d, e)

Có dạng $y = f(x) = ax + b$ $(a = 2; b = 1)$ đây là hàm số bậc nhất. (k)

Ng~ Thị Nga Anh .

Câu 1 : Ở lớp 7 và 9 em đã được học về khái niệm hàm số , vậy theo em thế nào là hàm số (em hiểu thế nào về hàm số) ?

~~Hàm số là phần ấn mà ta chưa biết, hàm số thêm vào phép toán để làm tăng sự~~ Hàm số là những con số mà nó có thể biểu diễn trên trục hệ trục tọa độ .

Câu 2 : Hãy đánh dấu ☒ vào các câu trả lời đúng. Trong các câu sau, câu nào cho ta một hàm số :

☐ a/

x	1	1	4	4
y	-1	1	-2	5

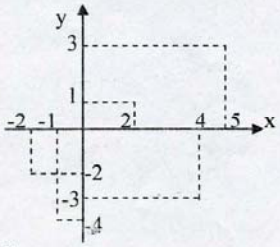
☒ b/

x	-5	-4	-3	-2
y	0	0	0	0

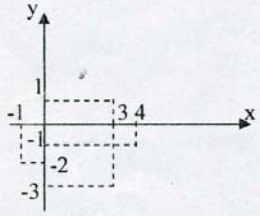
☒ c/

x	-2	-1	0	3
y	1	3	5	7

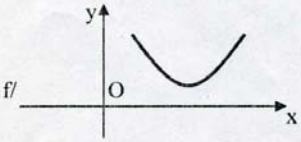
☒ d/



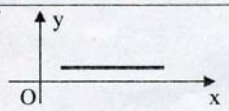
☒ e/



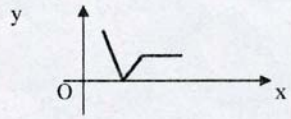
☐ f/



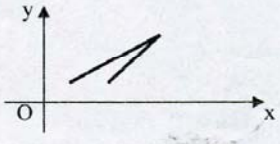
☐ g/



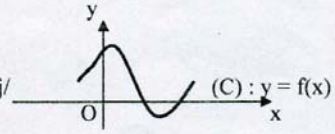
☐ h /



☐ i/



☐ j/



☒ k/ $y = f(x) = 2x + 1$

☐ l/ $y = \begin{cases} 2x \text{ khi } x > 1 \\ -3x + 7 \text{ khi } x \le 1 \end{cases}$

☐ m/ $y = x^3 - 5x + 1$

☐ n/ $y = 9$

Câu 3 : Giải thích lí do em lựa chọn các câu trả lời ở câu 2?

~~Giải thích~~ : lí do mà em lựa chọn các câu trả lời ở câu 2 là hàm số là các số tự nhiên có thể biểu diễn trên hệ trục tọa độ hoặc trong bản giá trị hoặc có thể viết thành 1 phép toán mà nghiệm của nó có thể ~~có~~ biểu diễn trên hệ trục tọa độ .

Tên: Đỗ Hoàng Ngọc Hồng.

A.

Câu 1 : Ở lớp 7 và 9 em đã được học về khái niệm hàm số , vậy theo em thế nào là hàm số (em hiểu thế nào về hàm số) ?

Hàm số $y = f(x)$: có nghĩa với mỗi giá trị x ta chỉ tìm được 1 giá trị y tương ứng

Câu 2 : Hãy đánh dấu ☒ vào các câu trả lời đúng. Trong các câu sau, câu nào cho ta một hàm số :

☐ a/

x	1	1	4	4
y	-1	1	-2	5

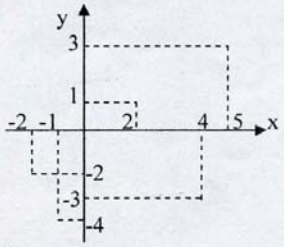
☐ b/

x	-5	-4	-3	-2
y	0	0	0	0

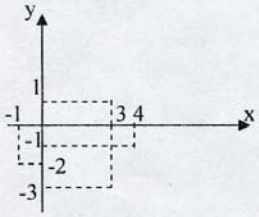
☒ c/

x	-2	-1	0	3
y	1	3	5	7

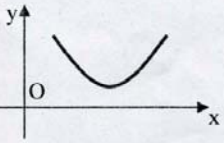
☐ d/



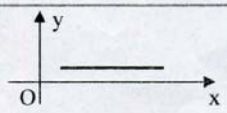
☐ e/



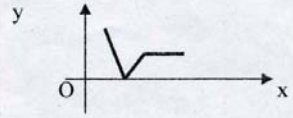
☒ f/



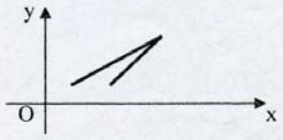
☐ g/



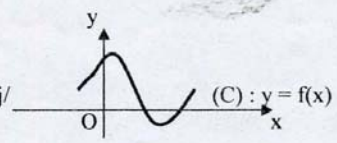
☐ h /



☐ i/



☐ j/



☒ k/ $y = f(x) = 2x + 1$

☒ l/ $y = \begin{cases} 2x \text{ khi } x > 1 \\ -3x + 7 \text{ khi } x \le 1 \end{cases}$

☒ m/ $y = x^3 - 5x + 1$

☐ n/ $y = 9$

Câu 3 : Giải thích lí do em lựa chọn các câu trả lời ở câu 2?

Vì với mỗi giá trị x ta chỉ tìm được một giá trị y

Võ Tuấn Vũ
10A1

Câu 1 : Ở lớp 7 và 9 em đã được học về khái niệm hàm số , vậy theo em thế nào là hàm số (em hiểu thế nào về hàm số) ?

Hàm số là hà đẳng thức có dạng $y = ax + b$. trong đó a, b là số và ta có thể biểu diễn nó trên hệ trục tọa độ bằng đồ thị

Câu 2 : Hãy đánh dấu ☒ vào các câu trả lời đúng. Trong các câu sau, câu nào cho ta một hàm số :

☐ a/

x	1	1	4	4
y	-1	1	-2	5

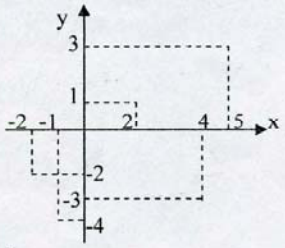
☐ b/

x	-5	-4	-3	-2
y	0	0	0	0

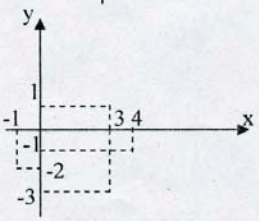
☒ c/

x	-2	-1	0	3
y	1	3	5	7

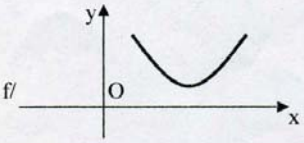
☐ d/



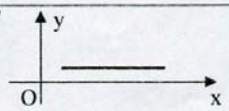
☐ e/



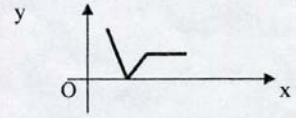
☐ f/



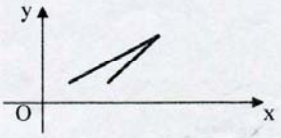
☐ g/



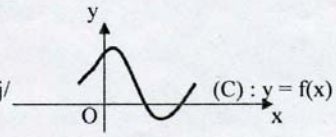
☐ h /



☐ i/



☐ j/



☒ k/ $y = f(x) = 2x + 1$

☒ l/ $y = \begin{cases} 2x \text{ khi } x > 1 \\ -3x + 7 \text{ khi } x \le 1 \end{cases}$

☐ m/ $y = x^3 - 5x + 1$

☐ n/ $y = 9$

Câu 3 : Giải thích lí do em lựa chọn các câu trả lời ở câu 2?

Ví Ex: Chọn C : vì khi vẽ 1 hàm số trên hệ trục tọa độ ta vẽ bằng như C.

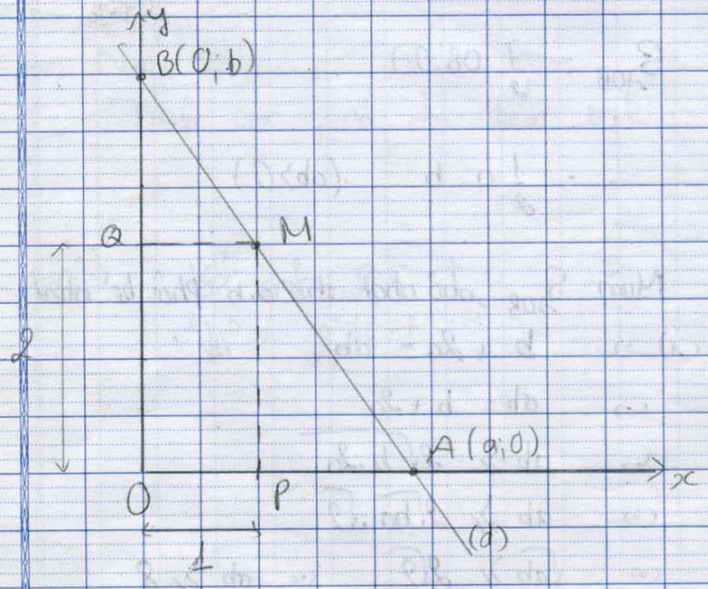
• Chọn K, L: vì K, L có dạng của hàm số.

THỰC NGHIỆM B

Nhóm 1

Thứ ..... Ngày..... Tháng..... Năm.....

Cho góc xOy vuông. M cố định trong góc xOy
OP = 1 ; OQ = 2. (d) đi qua M cắt Ox tại A, Oy tại B
Tìm vị trí của (d) sao cho S_{AOB} nhỏ nhất.



Giả sử điểm M(1;2)

pt đt (d) đi qua A(a;0) và B(0;b) là pt đt theo đoạn chắn có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$ pt đi qua điểm M(1;2)

Thay M(1;2) vào pt

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1.$$

YPBOOK

$\Leftrightarrow \dfrac{b+2a}{ab} = 1$

$\Leftrightarrow ab = b + 2a \quad (1)$

$S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2} OB.OA.$

$= \dfrac{1}{2} a.b \quad (ab > 0)$

Muốn $S_{\Delta OAB}$ nhỏ nhất thì $a.b$ phải bé nhất

$(1) \Rightarrow b + 2a = ab$

$\Leftrightarrow ab = b + 2a$

$\hookrightarrow ab \geq 2\sqrt{b.2a}$

$\Leftrightarrow ab \geq 2\sqrt{ba}.\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow ab \geq 8$

Dấu "=" xảy ra chỉ $b = 2a$

$\Leftrightarrow b - 2a = 0 \quad (*)$

Mặt khác: $a.b = 8 \quad (**)$

Kết hợp $(*)(**) \Rightarrow \begin{cases} b - 2a = 0 \\ a.b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 2 \end{cases}$

Dựng nên ΔAOB nhỏ nhất chỉ $a = 2$ và $b = 4$

Vậy (d) đi qua 2 điểm A cắt tia Ox tại $A(2;0)$; $B(0;4$

YPBOOK

Thứ .... Ngày........ Tháng........ Năm........

pt đt: $d = \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$

Hay: M (1; 2) là trung điểm AB.

* Nhận xét.
- Tính cẩn, có đọc thêm sgk.

Điểm: Tối đa 2,5 đ
Vũ: 2,75 đ.

000E4B4C

20293833

YPBOOK

- Thiết lập biểu thức tính $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB$

- Chọn biến. $\boxed{x_{n1}}$

+ biến A trên trục hoành, ~~tọa~~ ~~tọa độ~~ A để $S_{\Delta OAB}$ nhỏ nhất $= 4$

$\Rightarrow$ tọa độ ~~A (0; 2)~~ A (2; 0).

Xuất ra hàm số

$$y(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

+ biến B trên trục tung, $S_{\Delta OAB}$ min

$\Rightarrow$ tọa độ B(0; 4)

Xuất ra hàm số.

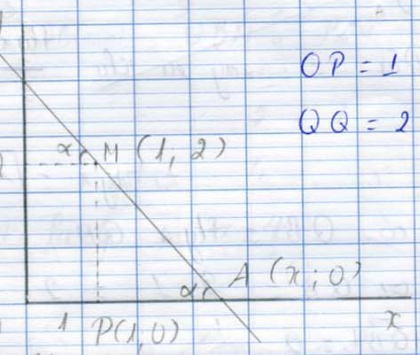
$$g(x) = \frac{(3x-6)\left(\frac{6}{3x-6}+1\right)^2}{6}$$

Kết wả đúng: $S_{\Delta AOB}$ min khi A(2;0)
B(0;4)

YPBOOK

Nhóm 7: Trần Đức Vượng — Nguyễn Nhật Trường
Nguyễn Thị Minh Thư — Trịnh Minh Trung
Trần Nhật Anh — Bùi Văn Tuấn

Góc xOy. M cố định nằm trong góc xOy



$OP = 1$

$QQ = 2$

$S_{OQMP} = OQ.OP$
$= 2.1 = 2$

qua M

(d) và cắt Ox tại A, Oy tại B

(C_1) Tìm vị trí của (d) để S_{AOB} là nhỏ nhất

ĐK: $y > 2$, $x > 1$

$S_{BQM} + S_{MPA} = a_{(min)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} BQ.QM + \frac{1}{2}.MP.PA = a_{(min)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\tan\alpha.QM.QM + \frac{1}{2}.MP.\frac{MP}{\tan\alpha} = a_{(min)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\tan\alpha.1.1 + \frac{1}{2}.2.\frac{2}{\tan\alpha} = a_{(min)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\tan\alpha + \frac{2}{\tan\alpha} = a_{(min)}$

$\geq 2\sqrt{\frac{\tan\alpha}{2}.\frac{2}{\tan\alpha}}$

FAHASA

Ý 2

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{\tan\alpha}{2} = \frac{2}{1}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{4} = 2$

Ta có: $QB = \tan\alpha . QM$

$\Leftrightarrow QB = 2 . 1 = 2$

$\Rightarrow |\vec{QB}| = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_B - x_Q)^2 + (y_B - y_Q)^2} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{0 + (y_B - y_Q)^2} = 2$

$\Leftrightarrow (y_B - y_Q)^2 = 4$

$\Leftrightarrow y_B^2 - 4y_B + 4 = 4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_B = 0 \ (L) \\ y_B = 4 \ (N) \end{array}\right.$

$\Rightarrow B(0; 4)$

Vì (d) $y = ax + b$ qua $B \times M$ nên ta thay $B \times M$ vào:

$$\begin{cases} 2 = a + b \\ 4 = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$$

FAHASA

=> d thẳng (d) là $y = -2x + 4$

* KL: $S_{AOB(min)} = S_{QBM} + S_{PAM} + S_{OPMQ}$

$= 2 + 2$

$= 4$

Khi (d) là $y = -2x + 4$

C_2)

Xét ΔBQM và ΔMPA có:

$\widehat{QMB} = \widehat{PAM}$ (2 góc đồng vị)

$\widehat{QBM} = \widehat{PMA}$ (2 góc đồng vị)

$\Rightarrow \Delta BQM \backsim \Delta MPA$ (gg)

$\Rightarrow \frac{QM}{PA} = \frac{BQ}{MP}$

$\Rightarrow \frac{1}{PA} = \frac{BQ}{2}$

$\Rightarrow PA \cdot QB = 2$

Ta lại có:

$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB$

$= \frac{1}{2}(OQ + QA)(OP + PA)$

$= \frac{1}{2}(2 + QA)(1 + PA)$

FAHASA

$$\cancel{= \left(1 + \frac{QA}{2}\right)\left(1 + PA\right).}$$

$$\cancel{= 1 + PA + \frac{QA}{2} +}$$

Ta lại có:

$$S_{AOB} = S_{OQMP} + S_{QMB} + S_{PAM}$$

$$= QO \cdot QM + \frac{1}{2} QM \cdot QB + \frac{1}{2} PA \cdot PM$$

$$= 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} QB + PA.$$

$$\geq 2 + 2\sqrt{\frac{1}{2} QB \cdot PA}$$

$$\geq 2 + 2\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2}$$

$$\geq 2 + 2 = 4.$$

Vậy $S_{AOB\ min} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{2} QB = PA.$

$\Rightarrow QB = 2PA.$

Ta có: $QM \cdot PA = 2$ (cmt)

$\Rightarrow$ hpt: $\begin{cases} QB - 2PA = 0 \\ QB \cdot PA = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} QB = 2 \\ PA = 1 \end{cases}$

$\cancel{\Rightarrow PA = |\overrightarrow{PA}| = 1.}$

FAHASA

gt Nhóm 7:

Ta có: $OA + OB = 2 + 2 = 4$

$\Rightarrow OB = 4$

$\Rightarrow B = (0; 4)$

đt²: (d) $y = ax + b$ qua (M) và (B).

Thay (M) và (B) vào (d):

$$\begin{cases} 2 = a + b \\ 4 = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy đt² (d): $y = -2x + 4$.

+ Nhận xét

- Sử dụng phương pháp tích cạnh bằng các tam giác đồng dạng vì dễ làm việc
- Sử dụng tỉ số lượng giác phức tạp, khó thực hiện.
- Các lỗi gặp:
  + Tạo 8 ẩn phương trình cho 8 biến
  + Sử dụng tỉ số lượng giác phải dùng đường tròn.
  + Biểu thức không thể copy.
- Không có cách làm sai

Gray Màu xám | Green Màu xanh lá | Pink Màu hồng | Purple Màu tím | Brown Màu nâu | VIBOOK