

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN QUANG BÌNH

CẤU TRÚC ĐẠI SỐ
CỦA NHÓM CON MỜ

LUẬN VĂN THẠC SỸ KHOA HỌC

Đà Nẵng- 2011

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN QUANG BÌNH

CẤU TRÚC ĐẠI SỐ CỦA NHÓM CON MỜ

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60. 46. 40

LUẬN VĂN THẠC SỸ KHOA HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Nguyễn Gia Định

Đà Nẵng- 2011

MỤC LỤC

MỤC LỤC

Trang phụ bìa	
MỤC LỤC	i
MỞ ĐẦU	1
Chương 1. TẬP CON MỜ VÀ NHÓM CON MỜ	4
1.1 Tập con mờ	4
1.2 Nhóm con mờ	5
1.3 Nhóm con mờ chuẩn tắc	7
1.4 Đồng cấu và đẳng cấu	11
1.5 Cấp mờ đối với nhóm con mờ	13
Chương 2. ĐỊNH LÝ CAYLEY MỜ VÀ ĐỊNH LÝ LAGRANGE MỜ	15
2.1 Các tính chất của nhóm con mờ chuẩn tắc	15
2.2 Định lý Cayley mờ, định lý Lagrange mờ và nhóm con mờ Abel	17
Chương 3. NHÓM CON MỜ LŨY LINH VÀ NHÓM CON MỜ GIẢI ĐƯỢC	19
3.1 Nhóm con mờ lũy linh	19
3.2 Nhóm con mờ giải được	21
KẾT LUẬN	25
TÀI LIỆU THAM KHẢO	26

MỞ ĐẦU

1. LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Lịch sử phát triển của lý thuyết các cấu trúc đại số (trong đó có nhóm-vành-trường) đã trải qua những thời kỳ huy hoàng từ thế kỷ trước do nhu cầu nghiên cứu phát sinh từ nhiều lĩnh vực của toán học, vật lý, tin học, ... và ngày càng tỏ rõ vai trò quan trọng của nó trong nhiều công trình cho tới nay.

Năm 1965 Lofti A. Zadeh đưa ra khái niệm tập con mờ của một tập hợp như là một phương pháp biểu diễn tình trạng không chắc chắn hay không rõ ràng. Lý thuyết nhóm con mờ có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực như tự động hoá, điều khiển tối ưu, hệ chuyên gia, mạng nơ-ron, ... Trong hành trình phát triển kỳ diệu của nó, phải kể đến lý thuyết đại số mờ và trong những thập kỷ vừa qua nhiều nhà nghiên cứu đã làm việc qua các khái niệm như nhóm mờ, vành mờ, idêan mờ, trường mờ, ...

Năm 1971 Zadeh và Rosenfield đưa ra khái niệm tập con mờ. Trong những năm gần đây (1998-2005), có nhiều nhà toán học nghiên cứu về nhóm mờ như Rosenfield, Vasantha, Kim, Kyung Ho, Jun, ... Năm 1982 Liu đã định nghĩa và nghiên cứu vành con mờ cũng như idêan mờ. Sau đó Zhang đã có những đóng góp tích cực cho việc phát triển lĩnh vực vành và trường mờ. Vasantha, Xia, Xiang-yun, Mordeson, Kim, Chang Bum, ... đã có những công trình sáng giá đóng góp cho lĩnh vực này từ đầu thế kỷ 21 đến nay. Tuy nhiên, một điều cần lưu ý là không phải khái niệm nào trong nhóm - vành - trường đều có thể làm mờ hoá được, nghĩa là một số khái niệm và kết quả trong nhóm - vành - trường không thể chuyển qua được trong hệ mờ tương ứng. Những điều chuyển được đều có những ứng dụng thiết thực trong lĩnh vực rõ cũng như mờ. Gần đây, người ta đã tìm được những ứng dụng của một số cấu trúc đại số mờ như là nhóm mờ, vành mờ

và trường mờ chủ yếu vào trong lĩnh vực ô tômat mờ mà ô tômat mờ lại có những ứng dụng thú vị trong hệ chuyên gia, mạng nơ-ron, lý thuyết nhận dạng, ...

Xuất phát từ nhu cầu phát triển của lý thuyết nhóm mờ và những ứng dụng của nó, chúng tôi quyết định chọn đề tài với tên gọi: "**Cấu trúc đại số của nhóm con mờ**" để tiến hành nghiên cứu.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu cấu trúc đại số của nhóm con mờ: Tổng quan về nhóm con mờ, nhóm con mờ chuẩn tắc, lớp kề mờ, đồng cấu giữa các nhóm con mờ, cấp mờ đối với nhóm con mờ, Định lý Caley mờ và Định lý Lagrange mờ, nhóm con mờ lũy linh và nhóm con mờ giải được.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu các tính chất của nhóm con mờ, nhóm thương mờ, con mờ đặc trưng, nhóm con mờ liên hợp. Nghiên cứu xích tâm giảm của một nhóm con mờ, nhóm con mờ lũy linh, dãy tâm giảm của một nhóm con mờ và nhóm con mờ giải được.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

1. Thu thập các bài báo khoa học của các tác giả nghiên cứu liên quan đến Lý thuyết nhóm con mờ.

2. Chúng tôi đã sử dụng phương pháp nghiên cứu là tìm các tính chất của nhóm con mờ tương tự các tính chất của nhóm trong lý thuyết nhóm thông thường.

3. Tham gia các buổi seminar hàng tuần để trao đổi các kết quả đang nghiên cứu.

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

Tạo được một tài liệu tham khảo bổ ích cho những người bắt đầu tìm hiểu về Lý thuyết nhóm mờ.

6. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Luận văn gồm 3 chương và phần mở đầu, kết luận.

– Trong Chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở về tập con mờ của một tập hợp. Tiếp đến, giới thiệu nhóm con mờ của một nhóm và phát triển một số khái niệm như là nhóm con mờ chuẩn tắc, đồng cấu và đẳng cấu của những nhóm con mờ. Ngoài ra, cấp mờ của một phần tử của một nhóm cũng sẽ được đề cập đến.

– Trong Chương 2, chúng tôi trình bày các tính chất của nhóm con mờ chuẩn tắc, định nghĩa nhóm con mờ đặc trưng và các tính chất liên quan và tiếp cận hai định lý quan trọng đối với các nhóm con mờ là Định lý Cayley mờ và Định lý Lagrange mờ và nhóm con mờ Abel. Chúng tôi cũng xét đến nhóm thương mờ, nhóm con mờ đặc trưng và nhóm con mờ liên hợp.

– Trong Chương 3, chúng tôi trình bày khái niệm xích tâm giảm của một nhóm con mờ và dùng để định nghĩa tính lũy linh của một nhóm con mờ. Khái niệm dãy tâm giảm của một nhóm con mờ cũng được trình bày. Khái niệm giao hoán tử sinh ra dãy dẫn xuất của một nhóm con mờ đã được giới thiệu và dùng để định nghĩa một nhóm con mờ giải được.

Chương 1

TẬP CON MỜ VÀ NHÓM CON MỜ

1.1 Tập con mờ

Định nghĩa 1.1.1. Cho X là một tập hợp khác rỗng. Hàm $\mu : X \longrightarrow [0, 1]$ được gọi là một tập con mờ của X .

Kí hiệu $\mathcal{FP}(X)$ là tập hợp tất cả các tập con mờ của tập hợp X và được gọi là tập lũy thừa mờ của X .

Định nghĩa 1.1.2. Cho $\mu \in \mathcal{FP}(X)$. Tập hợp $\mu^* := \{x \in X | \mu(x) > 0\}$ được gọi là giá của μ . Đặc biệt, μ được gọi là tập con mờ hữu hạn nếu μ^* là tập hữu hạn, và μ được gọi là tập con mờ vô hạn nếu μ^* là tập vô hạn.

Định nghĩa 1.1.3. Cho $\mu, \nu \in \mathcal{FP}(X)$.

- ν được gọi là chứa trong μ (hay μ chứa ν) kí hiệu $\nu \subseteq \mu$, nếu $\nu(x) \leq \mu(x); \forall x \in X$.
- $\nu = \mu$ nếu $\nu(x) = \mu(x); \forall x \in X$.

Định nghĩa 1.1.4. Cho $\mu \in \mathcal{FP}(X)$. Tập hợp $\mu_a := \{x \mid x \in X, \mu(x) \geq a\}$, với $a \in [0, 1]$ được gọi là tập mức hay lát cắt của μ .

Định nghĩa 1.1.5. Cho $X \neq \emptyset, Y \subseteq X$ và $a \in [0, 1]$. $a_Y \in \mathcal{FP}(X)$ được định nghĩa như sau:

$$a_Y(x) = \begin{cases} a & \text{nếu } x \in Y \\ 0 & \text{nếu } x \in X \setminus Y \end{cases}$$

Đặc biệt, nếu $Y = \{y\}$, thì $a_{\{y\}}$ được gọi là một điểm mờ và ta còn kí hiệu

$$\text{là } a_y. \text{ Kí hiệu } 1_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in Y \\ 0 & \text{nếu } x \in X \setminus Y \end{cases} \text{ là hàm đặc trưng của } Y.$$

Định nghĩa 1.1.6. Cho $\mu, \nu \in \mathcal{FP}(X)$. Khi đó:

- Phép toán giao $\cap$.

$$\mu \cap \nu : X \longrightarrow [0, 1] : (\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x) := \min\{\mu(x), \nu(x)\}.$$

- Phép toán hợp $\cup$.

$$\mu \cup \nu : X \longrightarrow [0, 1] : (\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x) := \max\{\mu(x), \nu(x)\}.$$

- Phép lấy phần bù.

$$\nu \text{ được gọi là phần bù của } \mu \text{ nếu } \nu(x) = 1 - \mu(x), \forall x \in X.$$

Bằng qui nạp ta có thể mở rộng các phép toán hợp và giao cho nhiều hơn hai tập con mờ: $\mu_1 \cap \mu_2 \cap \dots \cap \mu_n$ và $\mu_1 \cup \mu_2 \cup \dots \cup \mu_n$, với μ_i là các tập con mờ của $X, i = 1, 2, \dots, n$. Một cách tổng quát, với hợp bất kì $\{\mu_i \mid i \in I\}$ các tập con mờ của X , với I là tập chỉ số khác rỗng, ta định nghĩa:

$$(\cup_{i \in I} \mu_i)(x) = \vee_{i \in I} \mu_i(x) := \sup_{i \in I} \mu_i(x),$$

$$(\cap_{i \in I} \mu_i)(x) = \wedge_{i \in I} \mu_i(x) := \inf_{i \in I} \mu_i(x).$$

1.2 Nhóm con mờ

Định nghĩa 1.2.1. Cho $(G, \circ)$ là một nhóm, e là đơn vị của G và $\mu \in \mathcal{FP}(G)$. Nếu μ thỏa mãn hai điều kiện sau:

- $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$,
- $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

với mọi $x, y \in G$, thì μ được gọi một nhóm con mờ của G .

Kí hiệu là $\mathcal{F}(G)$ là tập hợp tất cả các nhóm con mờ của G .

Rõ ràng, nếu H là một nhóm con của G và $\mu \in \mathcal{F}(G)$ thì $\mu|_H \in \mathcal{F}(H)$.

Ví dụ 1.2.1. Xét nhóm $(\mathbb{Z}, +)$ và hàm $\mu : \mathbb{Z} \longrightarrow [0, 1]$ được xác định như sau:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x = 2n \\ \frac{1}{2} & \text{nếu } x = 2n + 1 \end{cases}$$

với $n \in \mathbb{Z}$. Khi đó $\mu \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$.

Định nghĩa 1.2.2. Cho $(G, \circ)$ là một nhóm, e là đơn vị của G và $\mu, \nu \in \mathcal{FP}(G)$. Ta định nghĩa tích của hai tập con mờ và nghịch đảo của một tập con mờ như sau: $(\mu \circ \nu)(x) = \vee \{\mu(y) \wedge \nu(z) | y, z \in G, yz = x\}$ và $\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1})$.

Khi đó $\mu \circ \nu$ và $\mu^{-1} \in \mathcal{FP}(G)$.

Mệnh đề 1.2.1. ([18]) Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Ta có

1. $\mu(e) \geq \mu(x), \forall x \in G$.
2. $\mu(x) = \mu(x^{-1}), \forall x \in G$.

Mệnh đề 1.2.2. ([16]) Cho $\mu \in \mathcal{FP}(G)$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

1. $\mu \in \mathcal{F}(G)$.
2. $\mu(x^{-1}y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$, với $x, y \in G$.
3. μ_a là nhóm con của G , $\forall a \in \mu(G) \cup \{b \in [0, 1] | b \leq \mu(e)\}$.

Hệ quả 1.2.1. Nếu $\mu \in \mathcal{F}(G)$ thì μ_* và μ^* là các nhóm con của G . Trong đó

$$\mu_* = \{x \in G | \mu(x) = \mu(e)\}, \quad \mu^* = \{x \in G | \mu(x) > 0\}$$

là các tập hợp được xét khác rỗng.

Mệnh đề 1.2.3. Cho $\mu \in \mathcal{FP}(G)$. Khi đó: $\mu \in \mathcal{F}(G) \Leftrightarrow \mu \circ \mu \subseteq \mu$ và $\mu^{-1} \supseteq \mu$.

Mệnh đề 1.2.4. ([18]) Cho $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó: $\mu \circ \nu \in \mathcal{F}(G) \Leftrightarrow \mu \circ \nu = \nu \circ \mu$.

Mệnh đề 1.2.5. ([16]). Cho $f : G \longrightarrow H$ là một đồng cấu nhóm, $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó $f(\mu) \in \mathcal{F}(H)$, trong đó $f(\mu)$ được xác định như sau: với mọi $y \in H$,

$$f(\mu)(y) := \begin{cases} \vee \{\mu(x) | x \in G, f(x) = y\} & \text{nếu } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Mệnh đề 1.2.6. ([16]) Cho H là một nhóm và $\nu \in \mathcal{F}(H)$. Cho $f : G \longrightarrow H$ là một đồng cấu nhóm. Khi đó $f^{-1}(\nu) \in \mathcal{F}(G)$, trong đó $f^{-1}(\nu)$ được xác định như sau: $\forall x \in G, f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x))$.

Cũng như lý thuyết nhóm ta có định nghĩa nhóm con mờ sinh bởi một tập.

Mệnh đề 1.2.7. ([18]) Cho $\{\mu_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{F}(G)$. Khi đó $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in \mathcal{F}(G)$.

Định nghĩa 1.2.3. Cho $\mu \in \mathcal{FP}(G)$. Nhóm con mờ

$$\langle \mu \rangle = \bigcap \{ \nu | \mu \subseteq \nu, \nu \in \mathcal{F}(G) \}$$

được gọi là nhóm con mờ của G sinh bởi μ .

Rõ ràng $\langle \mu \rangle$ là một nhóm con mờ nhỏ nhất của G chứa μ .

1.3 Nhóm con mờ chuẩn tắc

Định nghĩa 1.3.1. Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$. μ được gọi là nhóm con mờ chuẩn tắc của G nếu μ là tập con mờ Abel của G , nghĩa là $\mu(xy) = \mu(yx), \forall x, y \in G$.

Kí hiệu $\mathcal{NF}(G)$ là tập hợp tất cả các nhóm con mờ chuẩn tắc của G .

Ví dụ 1.3.1. (1) $1_G : G \longrightarrow [0, 1], \quad x \longmapsto 1$, với G là một nhóm nhân.

Ta có $1_G(xy) = 1 = 1_G(yx), \forall x, y \in G \Rightarrow 1_G \in \mathcal{NF}(G)$.

(2) Xét G là một nhóm nhân. Ta xét $1_{\{e\}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x = e \\ 0 & \text{nếu } x \neq e, \forall x \in G. \end{cases}$

Khi đó $1_{\{e\}}(xy) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } xy = e \\ 0 & \text{nếu } xy \neq e, \forall x, y \in G. \end{cases}$

Do $xy = e \Leftrightarrow yx = e$, nên ta có $1_{\{e\}}(yx) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } yx = e \\ 0 & \text{nếu } yx \neq e, \forall x, y \in G. \end{cases}$

Do đó $1_{\{e\}}(xy) = 1_{\{e\}}(yx), \forall x, y \in G$ hay $1_{\{e\}} \in \mathcal{NF}(G)$.

(3) Nếu G là một nhóm nhân Abel thì mọi nhóm con mờ của G đều là nhóm con mờ chuẩn tắc của G .

Mệnh đề 1.3.1. ([15]) Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:

1. μ là nhóm con mờ chuẩn tắc của G .
2. $\mu(xyx^{-1}) = \mu(y), \forall x, y \in G$.
3. μ_a là nhóm con chuẩn tắc của $G, \forall a \in \mu(G) \cup \{b \in [0, 1] | b \leq \mu(e)\}$.
4. $\mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y), \forall x, y \in G$.
5. $\mu(xyx^{-1}) \leq \mu(y), \forall x, y \in G$.
6. $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu, \forall \nu \in \mathcal{FP}(G)$.

Mệnh đề 1.3.2. ([18]) Cho $\mu \in \mathcal{NF}(G)$. Khi đó μ_* và μ^* đều là nhóm con chuẩn tắc của G .

Nhận xét 1.3.1. Chiều ngược lại của Mệnh đề 1.3.2 là không đúng. Thật vậy, ta xét ví dụ sau đây:

Cho G là nhóm nhân với phần tử đơn vị e . H là một nhóm con không chuẩn tắc của G . Ta xây dựng $\mu \in \mathcal{FP}(G)$ như sau:

$$\mu(e) = 1, \mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{nếu } x \in H \setminus \{e\}, \\ \frac{1}{4} & \text{nếu } x \in G \setminus H. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \mu \in \mathcal{F}(G) \text{ vì } \mu_a = \begin{cases} G & \text{nếu } 0 \leq a \leq \frac{1}{4} \\ H & \text{nếu } \frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{2} \\ \{e\} & \text{nếu } a > \frac{1}{2} \end{cases} \text{ là một nhóm con của}$$

G (theo Mệnh đề 1.2.2) và $\mu_* = \{x \in G | \mu(x) = \mu(e)\} = \{e\}$, $\mu^* = \{x \in G | \mu(x) > 0\} = G$. Vì thế μ_*, μ^* là các nhóm con chuẩn tắc của G nhưng $\mu_{\frac{1}{2}} = H$ không phải là nhóm con chuẩn tắc của G . Theo Mệnh đề 1.3.1 thì $\mu \notin \mathcal{NF}(G)$.

Mệnh đề 1.3.3. ([18]) Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Đặt

$$N(\mu) = \{x \in G : \mu(xy) = \mu(yx), \forall y \in G\}.$$

Khi đó $N(\mu)$ là nhóm con của G và $\mu|_{N(\mu)}$ là nhóm con mờ chuẩn tắc của $N(\mu)$.

Nhóm con $N(\mu)$ được gọi là chuẩn hóa tử của μ trong G , và $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ khi $N(\mu) = G$.

Định nghĩa 1.3.2. Cho $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$. Nếu tồn tại $u \in G$ sao cho $\mu(x) = \nu(xux^{-1}), \forall x \in G$ thì μ và ν được gọi là các nhóm con mờ liên hợp, kí hiệu $\mu = \nu^u$, với $\nu^u(x) = \nu(uxu^{-1}), \forall x \in G$.

Mệnh đề 1.3.4. ([18]) Cho $\nu \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó lực lượng của tập $\{\nu^u | u \in G\}$ bằng chỉ số $[G : N(\nu)]$ của chuẩn hóa tử của ν trong G .

Mệnh đề 1.3.5. ([18]) Cho $\nu \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó $\cap_{u \in G} \nu^u \in \mathcal{NF}(G)$ và là nhóm con mờ chuẩn tắc lớn nhất của G chứa trong ν .

Định nghĩa 1.3.3.

- Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$ và $x \in G$. Tập con mờ $\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu$ và $\mu \circ \mu(e)_{\{x\}}$ lần lượt được gọi là lớp kề trái và lớp kề phải của μ theo x và được viết là $x\mu$ và μx tương ứng. Ở đây, $\mu(e)_{\{x\}}(z) = \begin{cases} \mu(e) & \text{nếu } z = x, \\ 0 & \text{nếu } z \neq x, \end{cases}$ và $\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu(z) = \vee \{\mu(e)_{\{x\}}(u) \wedge \mu(v) | uv = z\} = \mu(e)_{\{x\}}(x) \wedge \mu(x^{-1}z) = \mu(x^{-1}z)$.
- Nếu $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ thì $x\mu = \mu x$ (theo Mệnh đề 1.3.1). Vì vậy trong trường hợp này ta gọi $x\mu$ là một lớp kề.

Mệnh đề 1.3.6. ([19]) Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó với mọi $x, y \in G$,

$$(1) \quad x\mu = y\mu \Leftrightarrow x\mu_* = y\mu_*.$$

$$(2) \quad \mu x = \mu y \Leftrightarrow \mu_* x = \mu_* y.$$

Mệnh đề 1.3.7. ([19]) Cho $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ và $x, y \in G$. Nếu $x\mu = y\mu$ thì $\mu(x) = \mu(y)$.

Mệnh đề 1.3.8. ([19]) Cho $\mu \in \mathcal{NF}(G)$. Đặt $G/\mu = \{x\mu \mid x \in G\}$. Khi đó

1. $(x\mu) \circ (y\mu) = (xy)\mu, \forall x, y \in G$.
2. $(G/\mu, \circ)$ là một nhóm.
3. $G/\mu \cong G/\mu_*$
4. Cho $\mu^{(*)} \in \mathcal{FP}(G/\mu)$ xác định bởi $\mu^{(*)}(x\mu) = \mu(x), \forall x \in G$. Khi đó $\mu^{(*)} \in \mathcal{NF}(G/\mu)$.

Định nghĩa 1.3.4. Nhóm G/μ được gọi là nhóm thương của G với nhóm con mờ chuẩn tắc μ của nó.

Mệnh đề 1.3.9. ([6]) Cho $\nu \in \mathcal{F}(G)$ và N là một nhóm con chuẩn tắc của nhóm G . Ta định nghĩa $\xi \in \mathcal{FP}(G/N)$ như sau:

$$\xi(xN) = \vee \{\nu(z) \mid z \in xN\}, \forall x \in G.$$

Khi đó $\xi \in \mathcal{F}(G/N)$.

Định nghĩa 1.3.5. Nhóm con mờ ξ xác định trong Mệnh đề 1.3.9 được gọi là nhóm con mờ thương của nhóm con mờ ν của G theo nhóm con chuẩn tắc N của G và được kí hiệu là ν/N .

Mệnh đề 1.3.10. ([6]) Cho $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ và H là một nhóm. Giả sử f là một toàn cấu từ G lên H . Khi đó $f(\mu) \in \mathcal{NF}(H)$.

Mệnh đề 1.3.11. ([6]) Cho H là một nhóm và $\nu \in \mathcal{NF}(H)$. Nếu f là một toàn cấu từ G vào H thì $f^{-1}(\nu) \in \mathcal{NF}(G)$.

Định nghĩa 1.3.6. Cho $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ và $\mu \subseteq \nu$. Khi đó μ được gọi là nhóm con mờ chuẩn tắc của nhóm con mờ ν , kí hiệu là $\mu \triangleleft \nu$, nếu

$$\mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y) \wedge \nu(x), \forall x, y \in G.$$

Nhận xét 1.3.2.

1. Nếu G_1 và G_2 là các nhóm con của G thì $G_1 \triangleleft G_2$ khi và chỉ khi $1_{G_1} \triangleleft 1_{G_2}$. Do đó ta cũng có $1_G \triangleleft 1_G$ và $1_{\{e\}} \triangleleft 1_G$.
2. Nếu $\mu \in \mathcal{NF}(G)$, $\nu \in \mathcal{F}(G)$ và $\mu \subseteq \nu$ thì $\mu \triangleleft \nu$.
3. Mỗi nhóm con mờ là một nhóm con mờ chuẩn tắc của chính nó.
4. $\mu \in \mathcal{FP}(G)$ là nhóm con mờ chuẩn tắc của G khi và chỉ khi $\mu \triangleleft 1_G$.
Thật vậy, ta luôn có $\mu \subseteq 1_G$.

Mệnh đề 1.3.12. ([15]) Cho $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ và $\mu \subseteq \nu$. Các mệnh đề sau là tương đương:

1. $\mu \triangleleft \nu$.
2. $\mu(yx) \geq \mu(xy) \wedge \nu(y), \forall x, y \in G$.
3. $\mu_a \triangleleft \nu_a, \forall a \in \{b \in [0, 1] \mid b \leq \mu(e)\}$.
4. $\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu \supseteq (\mu \circ \mu(e)_{\{x\}}) \cap \nu, \forall x \in G$.

Mệnh đề 1.3.13. ([15]) Cho $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ và $\mu \triangleleft \nu$. Khi đó $\mu_* \triangleleft \nu_*$ và $\mu^* \triangleleft \nu^*$.

Trong lý thuyết nhóm, nếu N và H là hai nhóm con của nhóm G và $N \triangleleft G$ thì $N \cap H \triangleleft H$. Ta cũng có điều tương tự trong nhóm con mờ.

Mệnh đề 1.3.14. ([15]) Cho $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ và $\nu \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó $\mu \cap \nu \triangleleft \nu$.

Mệnh đề 1.3.15. ([15]) Cho $\mu, \nu, \xi \in \mathcal{F}(G)$ sao cho $\mu, \nu \triangleleft \xi$. Khi đó $\mu \cap \nu \triangleleft \xi$.

Mệnh đề 1.3.16. ([15]) Cho $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$, $\mu \triangleleft \nu$ và $f : G \longrightarrow H$ là đồng cấu nhóm. Khi đó $f(\mu) \triangleleft f(\nu)$.

Mệnh đề 1.3.17. ([15]) Cho H là một nhóm, $\mu, \nu \in \mathcal{F}(H)$ và $\mu \triangleleft \nu$, $f : G \longrightarrow H$ là đồng cấu nhóm. Khi đó $f^{-1}(\mu) \triangleleft f^{-1}(\nu)$.

1.4 Đồng cấu và đẳng cấu

Định nghĩa 1.4.1. Cho G và H là các nhóm và $\mu \in \mathcal{F}(G)$, $\nu \in \mathcal{F}(H)$.

1. Một toàn cấu $f : G \longrightarrow H$ được gọi là một đồng cấu yếu từ μ và ν nếu $f(\mu) \subseteq \nu$. Khi đó ta nói μ đồng cấu yếu với ν , kí hiệu $\mu \overset{f}{\sim} \nu$ hoặc $\mu \sim \nu$.
2. Một đẳng cấu $f : G \longrightarrow H$ được gọi là một đẳng cấu yếu từ μ và ν nếu $f(\mu) \subseteq \nu$. Khi đó ta nói μ đẳng cấu yếu với ν , kí hiệu $\mu \overset{f}{\simeq} \nu$ hoặc $\mu \simeq \nu$.
3. Một toàn cấu $f : G \longrightarrow H$ được gọi là một đồng cấu từ μ và ν nếu $f(\mu) = \nu$. Khi đó ta nói μ đồng cấu với ν , kí hiệu $\mu \overset{f}{\approx} \nu$ hoặc $\mu \approx \nu$.
4. Một đẳng cấu $f : G \longrightarrow H$ được gọi là một đẳng cấu từ μ và ν nếu $f(\mu) = \nu$. Khi đó ta nói μ đẳng cấu với ν , kí hiệu $\mu \overset{f}{\cong} \nu$ hoặc $\mu \cong \nu$.

Cho $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ và $\mu \triangleleft \nu$. Theo Mệnh đề 1.3.13, $\mu^* \triangleleft \nu^*$. Rõ ràng, $\nu|_{\nu^*}$ là một nhóm con mờ của ν^* . Theo Mệnh đề 1.3.9, nhóm con mờ thương của $\nu|_{\nu^*}$ theo nhóm con chuẩn tắc μ^* là tồn tại, kí hiệu $(\nu|_{\nu^*})/\mu^* := \nu/\mu$ và gọi là nhóm thương của μ theo ν .

Mệnh đề 1.4.1. ([18]) Cho $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ và $\mu \triangleleft \nu$. Khi đó $\nu|_{\nu^*} \approx \nu/\mu$.

Bổ đề 1.4.1. Nếu $f : G \longrightarrow Y$ và $\mu \in \mathcal{FP}(G)$ thì $(f(\mu))^* = f((\mu)^*)$.

Mệnh đề 1.4.2. ([18]) Cho $\nu \in \mathcal{F}(G)$, H là một nhóm và $\xi \in \mathcal{F}(H)$ sao cho $\nu \approx \xi$. Khi đó tồn tại một nhóm con mờ $\mu \triangleleft \nu$ sao cho $\nu/\mu \cong \xi|_{\xi^*}$.

Tương tự như Định lý đẳng cấu thứ hai trong lý thuyết nhóm ta có:

Mệnh đề 1.4.3. ([18]) Cho $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ và $\nu \in \mathcal{F}(G)$ sao cho $\mu(e) = \nu(e)$. Khi đó

$$\nu/(\mu \cap \nu) \simeq (\mu \circ \nu)/\mu$$

Tương tự như Định lý đẳng cấu thứ 3 trong lý thuyết nhóm ta có:

Mệnh đề 1.4.4. ([18]) Cho $\mu, \nu, \xi \in \mathcal{F}(G)$ sao cho μ và ν là các nhóm con mờ chuẩn tắc của ξ và $\mu \subseteq \nu$. Khi đó $(\xi/\mu)/(\nu/\mu) \cong \xi/\nu$.

Định nghĩa 1.4.2. Cho f là đồng cấu từ nhóm G vào nhóm H . Khi đó, một tập con mờ μ của G được gọi là f - bất biến nếu $(\forall x, y \in G, f(x) = f(y) \Rightarrow \mu(x) = \mu(y))$.

Nhận xét 1.4.1. Lưu ý rằng μ là f - bất biến khi và chỉ khi $\forall x \in G : f(\mu)(f(x)) = \mu(x)$.

Thật vậy, giả sử $\forall x \in G : f(\mu)(f(x)) = \mu(x)$ và $f(x) = f(y)$ thì ta cũng có

$$f(\mu)(f(y)) = \mu(y) \Rightarrow \mu(x) = \mu(y).$$

Ngược lại, nếu μ là f - bất biến. Khi đó $f(\mu)(f(x)) = \bigvee_{y \in G \{f(x)=f(y)\}} \mu(y)$ nên áp dụng giả thiết ta có ngay $f(\mu)(f(x)) = \mu(x)$.

1.5 Cấp mờ đối với nhóm con mờ

Định nghĩa 1.5.1. Cho G là một nhóm, $\mu \in \mathcal{F}(G)$ và $x \in G$. Nếu tồn tại số nguyên dương n sao cho $\mu(x^n) = \mu(e)$ thì số nguyên dương nhỏ nhất như thế được gọi là cấp mờ của x đối với μ và được kí hiệu $FO_\mu(x)$. Nếu không tồn tại n như thế thì ta nói x có cấp mờ vô hạn đối với μ .

Ví dụ 1.5.1. Cho nhóm $G = \langle a, b | a^2 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$. Hàm $\mu : G \rightarrow [0, 1]$ được xác định như sau: $\mu(e) = \mu(ab) = 1/2; \mu(a) = \mu(b) = 1/3$. Khi đó $\mu \in \mathcal{F}(G); FO_\mu(a) = FO_\mu(b) = 2; FO_\mu(ab) = 1$.

Giống như cấp của phần tử của một nhóm, cấp mờ của một phần tử của nhóm có các tính chất sau:

Mệnh đề 1.5.1. ([18]) Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$, $x \in G$ và $FO_\mu(x) = n$. Khi đó:

1. Nếu m là số nguyên dương thỏa mãn $\mu(x^m) = \mu(e)$ thì $n \mid m$.
2. Với m là số nguyên dương thì $FO_\mu(x^m) = \frac{n}{(n, m)}$.
3. Nếu $x, y \in G$ sao cho $xy = yx$ và $(FO_\mu(x), FO_\mu(y)) = 1$ thì $FO_\mu(xy) = FO_\mu(x).FO_\mu(y)$.

Nhận xét 1.5.1. Với $x \in G$, kí hiệu $o(x)$ là cấp của phần tử x trong nhóm G . Nếu $o(x)$ là hữu hạn thì $FO_\mu(x)$ là hữu hạn đối với mọi nhóm con mờ μ của G và $FO_\mu(x) | o(x)$ (theo Mệnh đề 1.5.1, 1)). Nếu $o(x)$ là vô hạn thì với mỗi số nguyên dương n , tồn tại một nhóm con mờ μ_n của G sao cho $FO_{\mu_n}(x) = n$.

Mệnh đề 1.5.2. ([18]) Nếu $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ thì $FO_\mu(x) = FO_\mu(yxy^{-1}), \forall x, y \in G$.

Bổ đề 1.5.1. ([18]) Cho G là một nhóm cyclic, a và b là hai phần tử sinh của G , $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó $FO_\mu(a) = FO_\mu(b)$.

Mệnh đề 1.5.3. ([18]) Cho G là nhóm cyclic cấp n và $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó với mọi $x, y \in G$ ta có:

1. Nếu $o(x) | o(y)$ thì $FO_\mu(x) | FO_\mu(y)$.
2. Nếu $o(x) = o(y)$ thì $FO_\mu(x) = FO_\mu(y)$.
3. Nếu $o(x) > o(y)$ thì $FO_\mu(x) \geq FO_\mu(y)$.

Mệnh đề 1.5.4. ([18]) Cho G là nhóm cyclic cấp hữu hạn và $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó với mọi $x, y \in G$ ta có:

1. Nếu $FO_\mu(x) | FO_\mu(y)$ thì $\mu(x) \geq \mu(y)$.
2. Nếu $FO_\mu(x) = FO_\mu(y)$ thì $\mu(x) = \mu(y)$.

Chương 2

ĐỊNH LÝ CAYLEY MỜ VÀ ĐỊNH LÝ LAGRANGE MỜ

2.1 Các tính chất của nhóm con mờ chuẩn tắc

Bổ đề 2.1.1. ([18]) Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$ và $x \in G$. Khi đó

$$\mu(xy) = \mu(y), \forall y \in G \Leftrightarrow \mu(x) = \mu(e).$$

Mệnh đề 2.1.1. Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ khi và chỉ khi

$$\mu([x, y]) \geq \mu(x), \forall x, y \in G,$$

trong đó $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ là giao hoán tử của x và y .

Mệnh đề 2.1.2. ([18]) Cho $\mu \in \mathcal{NF}(G)$. Một tập con mờ $\mu^\#$ của nhóm G/μ_* được định nghĩa như sau: $\mu^\#(x\mu_*) = \mu(x), \forall x\mu_* \in G/\mu_*$. Khi đó $\mu^\# \in \mathcal{NF}(G/\mu_*)$. Mặt khác, nếu $N \triangleleft G$ và $\mu_1^\# \in \mathcal{NF}(G/N)$ sao cho $\mu_1^\#(xN) = \mu_1^\#(N)$ chỉ khi $x \in N$ thì tồn tại $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ thỏa mãn $\mu_* = N$ và $\mu^\# = \mu_1^\#$.

Mệnh đề 2.1.3. ([18]) Nếu $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ thì: $\forall x \in G, x\mu(xz) = x\mu(zx) = \mu(z), \forall z \in G$.

Mệnh đề 2.1.4. Cho $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ và ánh xạ $\theta : G \longrightarrow G/\mu : \theta(x) = x\mu, \forall x \in G$. Khi đó θ là một đồng cấu với $\ker\theta = \mu_*$.

Định nghĩa 2.1.1. Cho μ là một nhóm con mờ của nhóm hữu hạn G . Khi đó lực lượng của $G/\mu = \{x\mu | x \in G\}$ được gọi là chỉ số của μ trong G , kí hiệu $[G : \mu]$.

Nhận xét 2.1.1. Từ Mệnh đề 2.1.4, nếu $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ thì $G/\mu_* \simeq G/\mu$.

Từ các Mệnh đề 1.3.10, 1.3.11 và 1.3.17, nếu $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ thì mọi nhóm con mờ (chuẩn tắc) của G/μ tương ứng một cách tự nhiên với một nhóm con mờ (chuẩn tắc) của G .

Bây giờ cho μ là một nhóm con mờ của một nhóm hữu hạn G . Khi đó rõ ràng G/μ là một tập hữu hạn. Đặc biệt khi $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ thì $[G : \mu]$ là một ước của $|G|$. Trong mục 2.3, ta sẽ chứng minh rằng chỉ số của một nhóm con mờ bất kỳ của một nhóm hữu hạn chia hết cấp của nhóm này.

Định nghĩa 2.1.2. Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$. μ được gọi là nhóm con mờ đặc trưng của G nếu $\mu = \mu^\theta$ với mọi $\theta \in \text{Aut}(G)$, trong đó $\mu^\theta(x) = \mu(x^\theta)$, $\forall x \in G$, với $x^\theta = \theta(x)$.

Mệnh đề 2.1.5. ([16]) Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó:

1. Nếu $\theta : G \longrightarrow G$ là một đồng cấu thì $\mu^\theta \in \mathcal{F}(G)$.
2. Nếu μ là một nhóm con mờ đặc trưng của G thì μ là một nhóm con mờ chuẩn tắc của G .

Bổ đề 2.1.2. Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$, G hữu hạn và $K = \{x \in G \mid x\mu = e\mu\}$. Khi đó K là một nhóm con của G và $K = \mu_*$.

Trong lý thuyết nhóm ta có định lý sau: "Một nhóm con của một nhóm hữu hạn có chỉ số bằng số nguyên tố p là nhóm con chuẩn tắc.". Tương tự ta cũng có kết quả này trong lý thuyết nhóm mờ.

Mệnh đề 2.1.6. ([16]) Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$, $|G| = n$ sao cho $[G : \mu] = p$ với p là số nguyên tố bé nhất là ước của n . Khi đó, $\mu \in \mathcal{NF}(G)$.

Hệ quả 2.1.1. Nếu $\mu \in \mathcal{F}(G)$ sao cho $[G : \mu] = 2$ thì $\mu \in \mathcal{NF}(G)$.

Trong lý thuyết nhóm ta có định lý: "Cho θ là tự đồng cấu của G , $N \triangleleft G$ sao cho $\theta(N) \subseteq N$. Khi đó θ sẽ cảm sinh một tự đồng cấu của G/N ". Tương tự trong lý thuyết nhóm mờ ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.1.7. ([16]) Cho $\mu \in \mathcal{NF}(G)$, θ là một tự đồng cấu của G thỏa mãn $\theta(\mu_*) \subseteq \mu_*$ sao cho $\mu^\theta = \mu$. Khi đó θ cảm sinh một tự đồng cấu $\bar{\theta}$ của G/μ xác định bởi $\bar{\theta} : G/\mu \longrightarrow G/\mu : \bar{\theta}(x\mu) = \theta(x)\mu$.

Hệ quả 2.1.2. Với cùng giả thiết như trong Mệnh đề 2.1.7, ta có:

1. Nếu θ là một tự đẳng cấu và G là hữu hạn thì $\bar{\theta}$ là một tự đẳng cấu.
2. Nếu $\bar{\theta}$ là một tự đẳng cấu và $\mu_* = \{e\}$ thì θ là một tự đẳng cấu.

2.2 Định lý Cayley mờ, định lý Lagrange mờ và nhóm con mờ Abel

Các khái niệm về cấp của nhóm con mờ, nhóm con Abel mờ cùng các kết quả liên quan và các định lý Cayley và Lagrange mờ có thể xem ở các tài liệu [12], [16], [18].

Định lý 2.2.1. (Định lý Cayley mờ) ([18]) Cho $\mu \in \mathcal{NF}(G)$. Khi đó tồn tại một tác động π của G lên G/μ cảm sinh một biểu diễn hoán vị tự nhiên của G/μ . Hơn nữa, $\text{Ker}\pi = \mu_*$.

Trong lý thuyết nhóm ta có Định lý Lagrange:

$$|G| = [G : H] \cdot |H|$$

trong đó H là nhóm con của nhóm hữu hạn G . Tương tự trong lý thuyết nhóm con mờ ta cũng có Định lý Lagrange.

Định nghĩa 2.2.1. Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$, với G là một nhóm hữu hạn. Khi đó cấp của μ , ký hiệu $o(\mu)$, được xác định là

$$o(\mu) = \frac{|G|}{[G : \mu]}$$

Nhận xét 2.2.1. Theo Mệnh đề 1.3.6 ta suy ra $[G : \mu] = [G : \mu_*]$, vì vậy:

$$o(\mu) = \frac{|G|}{[G : \mu_*]} = |\mu_*|.$$

Bây giờ ta sẽ đưa ra khái niệm nhóm con Abel mờ và các tính chất của nó.

Định nghĩa 2.2.2. Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$, với G là nhóm hữu hạn. Khi đó μ được gọi là nhóm con Abel mờ nếu μ_* là nhóm con Abel của G .

Ví dụ 2.2.1. Nhóm $G = \{-1, 1, i, -i\}$ có đơn vị là $e = 1$. Xác định ánh xạ μ như sau: $\mu : G \longrightarrow [0; 1] : \mu(1) = \mu(-1) = \frac{1}{2}, \mu(i) = \mu(-i) = \frac{1}{3}$. Khi đó $\mu \in \mathcal{F}(G), \mu_* = \{1, -1\}$. Do μ_* là nhóm con Abel của G nên μ là nhóm con Abel mờ của G .

$$o(\mu) = \frac{|G|}{[G : \mu_*]} = |\mu_*| = 2$$

Ví dụ 2.2.2. Nhóm $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}^* \right\}$.

Ta xác định ánh xạ μ như sau: $\mu : G \longrightarrow [0; 1]$ cho bởi $\mu(x) = 1, \forall x \in G$. Khi đó $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ và $\mu_* = G$. Ta thấy G là nhóm không giao hoán nên μ không là nhóm Abel mờ.

Mệnh đề 2.2.1. ([14]) Cho $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ sao cho $\nu \subseteq \mu; \mu(e) = \nu(e)$ và μ là nhóm con Abel mờ. Khi đó, ν là nhóm con Abel mờ.

Mệnh đề 2.2.2. Cho $\mu \in \mathcal{F}(G)$ sao cho $o(\mu) = p^2, p$ là số nguyên tố. Khi đó μ là nhóm con Abel mờ.

Định nghĩa 2.2.3. Cho $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ sao cho $\nu \subseteq \mu$. Chỉ số của ν trong μ ; ký hiệu $[\mu : \nu]$, được xác định là

$$[\mu : \nu] = [\mu_* : \nu_*].$$

Định lý 2.2.2. (Định lý Lagrange) ([12]) Cho $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$, với G là nhóm hữu hạn, $\nu \subseteq \mu$ và $\mu(e) = \nu(e)$. Khi đó $o(\nu) \mid o(\mu)$ và $o(\mu) = o(\nu) \cdot [\mu : \nu]$.

Chương 3

NHÓM CON MỜ LŨY LINH VÀ NHÓM CON MỜ GIẢI ĐƯỢC

3.1 Nhóm con mờ lũy linh

Nhận xét 3.1.1. Cho λ là tập con mờ của G . Như đã biết nhóm con mờ của G sinh bởi λ , ký hiệu $\langle \lambda \rangle$, đó là $\langle \lambda \rangle = \cap \{ \mu | \lambda \subseteq \mu, \mu \in \mathcal{F}(G) \}$ nhóm con mờ nhỏ nhất chứa λ . Do đó chứng minh được $\langle \lambda \rangle(x) = \vee \{ \sigma(x_1) \wedge \sigma(x_2) \wedge \dots \wedge \sigma(x_n) | x = x_1.x_2\dots x_n, x_i \in G, i = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N} \}$, trong đó $\sigma(y) = \lambda(y) \vee \lambda(y^{-1})$, với $y \in G$.

Định nghĩa 3.1.1. Cho $\lambda, \mu \in \mathcal{FP}(G)$. Khi đó tập con mờ (λ, μ) của G được xác định như sau:

$$(\lambda, \mu)(x) = \begin{cases} \vee \{ \lambda(a) \wedge \mu(b) | x = [a, b], a, b \in G \} & \text{nếu} \\ & x \text{ là một giao hoán tử của } G, \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Giao hoán tử của λ và μ là nhóm con mờ của G , ký hiệu $[\lambda, \mu]$, được sinh bởi tập con mờ (λ, μ) , tức là $[\lambda, \mu] = \langle (\lambda, \mu) \rangle$.

Định nghĩa 3.1.2. Ký hiệu $D = \{ f : G \longrightarrow G | f \text{ là đồng cấu} \}$. Một tập con mờ λ của G được gọi là ổn định dưới D hay D - ổn định nếu $f(\lambda) \subseteq \lambda, \forall f \in D$.

Rõ ràng $f(\lambda) \subseteq \lambda \Leftrightarrow \lambda \subseteq f^{-1}(\lambda)$.

Mệnh đề 3.1.1. ([18]) Cho A và B là các tập con của G . Khi đó $[1_A, 1_B] = 1_{[A, B]}$.

Mệnh đề 3.1.2. ([18]) Nếu $\lambda, \mu \in \mathcal{FP}(G)$ và λ, μ là D -ổn định thì (λ, μ) và $[\lambda, \mu]$ là D -ổn định.

Mệnh đề 3.1.3. ([18]) Nếu $\lambda, \mu \in \mathcal{NF}(G)$ thì $[\lambda, \mu] \in \mathcal{NF}(G)$ và $\lambda \cap \mu \supseteq [\lambda, \mu]$.

Mệnh đề 3.1.4. ([18]) Cho λ, μ là hai tập con mờ của G . Khi đó:

1. $[\lambda, \mu]^* = [\lambda^*, \mu^*]$.
2. Nếu r, s lần lượt là chóp của λ và μ thì $t = r \wedge s$ là chóp của $[\lambda, \mu]$. Ở đây, với $\mu \in \mathcal{FP}(G)$ thì $\mu(e)$ được gọi là chóp của μ .

Mệnh đề 3.1.5. ([18]) Cho λ, μ là hai tập con mờ của G sao cho $\lambda \subseteq \mu$. Khi đó $[\lambda, \sigma] \subseteq [\mu, \sigma], \forall \sigma \in \mathcal{FP}(G)$.

Mệnh đề 3.1.6. ([18]) Cho $\lambda, \mu \in \mathcal{FP}(G)$. Khi đó $[\lambda, \mu] = [\mu, \lambda]$.

Mệnh đề 3.1.7. ([18]) Cho $\lambda, \mu \in \mathcal{NF}(G)$ và $\sigma \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó $[\lambda \circ \sigma, \mu] \subseteq [\lambda, \mu] \circ [\sigma, \mu]$. Với dấu bằng xảy ra nếu $\lambda(e) = \sigma(e)$.

Mệnh đề 3.1.8. ([18]) Cho $f : G \longrightarrow K$ là một đồng cấu và $\lambda \in \mathcal{FP}(G)$. Khi đó $f(\langle \lambda \rangle) = \langle f(\lambda) \rangle$.

Hệ quả 3.1.1. Cho $f : G \longrightarrow K$ là một đồng cấu và $\lambda, \mu \in \mathcal{FP}(G)$. Khi đó $f([\lambda, \mu])$ là nhóm con mờ của K sinh bởi $f((\lambda, \mu))$.

Mệnh đề 3.1.9. ([18]) Cho $f : G \longrightarrow K$ là đồng cấu và $\lambda, \mu \in \mathcal{FP}(G)$. Khi đó $[f(\lambda), f(\mu)] = f([\lambda, \mu])$ trong $\mathcal{F}(K)$.

Cho λ là một nhóm con mờ của một nhóm G , ký hiệu $Z_0(\lambda) = \lambda, Z_1(\lambda) = [\lambda, \lambda]$. Giả sử $Z_{n-1}(\lambda)$ đã được xác định với $n \in \mathbb{N}$. Định nghĩa $Z_n(\lambda) = [Z_{n-1}(\lambda), \lambda], n \in \mathbb{N}$.

Mệnh đề 3.1.10. Nếu H là một nhóm con của G thì $Z_n(1_H) = 1_{Z_n(H)}$.

Mệnh đề 3.1.11. Cho $\lambda \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó $Z_n(\lambda) \subseteq Z_{n-1}(\lambda), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Định nghĩa 3.1.3. Cho $\lambda \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó dãy $\lambda = Z_0(\lambda) \supseteq Z_1(\lambda) \supseteq \dots \supseteq Z_n(\lambda) \supseteq \dots$ các nhóm con mờ của G được gọi là xích tâm giảm của λ .

Định nghĩa 3.1.4. Cho $\lambda \in \mathcal{F}(G)$. Dãy $\lambda = \lambda_0 \supseteq \lambda_1 \supseteq \dots \supseteq \lambda_n \supseteq \dots$ các nhóm con mờ của G được gọi là xích tâm của λ nếu $\forall n \in \mathbb{N}, [\lambda_n, \lambda] \subseteq \lambda_{n+1}$. Nếu t là chóp của λ và $\lambda_n = e_t$ với $n \in \mathbb{N}$ nào đó thì xích tâm được gọi là dãy tâm của λ .

Định nghĩa 3.1.5. Cho $\lambda \in \mathcal{F}(G)$ với chóp t và một xích tâm giảm của λ . Nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $Z_n(\lambda) = e_t$ thì λ được gọi là nhóm con mờ lũy linh. Nếu n là số nguyên dương bé nhất thỏa mãn $Z_n(\lambda) = e_t$ thì λ được gọi là nhóm con mờ lũy linh lớp n . Trong trường hợp này thì xích tâm giảm của λ , $\lambda = Z_0(\lambda) \supseteq Z_1(\lambda) \supseteq \dots \supseteq Z_n(\lambda) = e_t$ được gọi là dãy tâm giảm của λ .

Mệnh đề 3.1.12. ([13]) Cho H là nhóm con của G . Khi đó H là nhóm con lũy linh khi và chỉ khi 1_H là nhóm con mờ lũy linh.

Mệnh đề 3.1.13. ([13]) Cho $\lambda \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó λ là nhóm con mờ lũy linh khi và chỉ khi λ có dãy tâm.

Mệnh đề 3.1.14. ([13]) Nhóm con mờ của một nhóm lũy linh là nhóm con mờ lũy linh. Một nhóm không lũy linh chứa nhóm con mờ không tầm thường mà không lũy linh.

Mệnh đề 3.1.15. ([13]) Mọi nhóm con mờ Abel là một nhóm con mờ lũy linh.

Mệnh đề 3.1.16. ([16]) Cho λ là nhóm con mờ lũy linh của G và μ là nhóm con mờ của G sao cho $\mu \subseteq \lambda$. Khi đó, μ là nhóm con mờ lũy linh của G .

Mệnh đề 3.1.17. ([17]) Cho $f : G \longrightarrow K$ là đồng cấu nhóm. Nếu λ là nhóm con mờ lũy linh của G thì $f(\lambda)$ là nhóm con mờ lũy linh của K .

3.2 Nhóm con mờ giải được

Định nghĩa 3.2.1. Cho $\lambda \in \mathcal{F}(G)$. Đặt $\lambda^{(0)} = \lambda$. Giả sử $\lambda^{(n-1)}, n \geq 1$ đã được xác định. Ta định nghĩa $\lambda^{(n)} = [\lambda^{(n-1)}, \lambda^{(n-1)}]$. Khi đó, xích $\lambda =$

$\lambda^{(0)} \supseteq \lambda^{(1)} \supseteq \dots \supseteq \lambda^{(n)} \supseteq \dots$ của các nhóm con mờ của G được gọi là xích dẫn xuất của λ .

Mệnh đề 3.2.1. Cho H là nhóm con của G . Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}$, $(1_H)^{(n)} = 1_{H^{(n)}}$.

Mệnh đề 3.2.2. ([17]) Cho $\lambda \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $\lambda^{(n)} \subseteq \lambda^{(n-1)}$.

Mệnh đề 3.2.3. Nếu $\lambda \in \mathcal{NF}(G)$ thì mọi nhóm con mờ trong xích dẫn xuất của λ là chuẩn tắc trong G .

Định nghĩa 3.2.2. Cho $\lambda \in \mathcal{F}(G)$ với chóp t . Nếu xích dẫn xuất $\lambda = \lambda^{(0)} \supseteq \lambda^{(1)} \supseteq \dots \supseteq \lambda^{(n)} \supseteq \dots$ của λ thỏa mãn tồn tại số nguyên không âm m sao cho $\lambda^{(m)} = e_t$ thì λ được gọi là nhóm con mờ giải được.

Nếu k là số nguyên không âm nhỏ nhất sao cho $\lambda^{(k)} = e_t$ thì dãy $\lambda = \lambda^{(0)} \supseteq \lambda^{(1)} \supseteq \dots \supseteq \lambda^{(k)} = e_t$ được gọi là dãy dẫn xuất của λ .

Mệnh đề 3.2.4. ([17]) Cho H là nhóm con của G . Khi đó H giải được khi và chỉ khi 1_H giải được.

Định nghĩa 3.2.3. Cho $\lambda \in \mathcal{F}(G)$ với chóp t . Dãy $\lambda = \lambda_0 \supseteq \lambda_1 \supseteq \dots \supseteq \lambda_n = e_t$ các nhóm con mờ của G được gọi là dãy giải được đối với λ nếu với mọi $i = 0, 1, \dots, n-1$ thì $[\lambda_i, \lambda_i] \subseteq \lambda_{i+1}$.

Mệnh đề 3.2.5. ([17]) Cho $\lambda \in \mathcal{F}(G)$. Khi đó λ là nhóm con mờ giải được nếu và chỉ nếu λ có một dãy giải được.

Mệnh đề 3.2.6. ([17]) Mỗi nhóm con mờ của nhóm giải được là giải được.

Mệnh đề 3.2.7. ([17]) Nếu λ là nhóm con mờ giải được và $\mu \in \mathcal{F}(G)$ sao cho $\mu \subseteq \lambda$ thì μ là nhóm con mờ giải được.

Mệnh đề 3.2.8. ([17]) Cho $f : G \longrightarrow K$ là đồng cấu nhóm. Nếu λ là nhóm con mờ giải được của G thì $f(\lambda)$ là nhóm con mờ giải được của K .

Bổ đề 3.2.1. ([17]) Cho $f : G \longrightarrow K$ là đồng cấu nhóm. Khi đó, với mọi $\nu, \rho \in \mathcal{FP}(H)$, $[f^{-1}(\nu), f^{-1}(\rho)] \subseteq f^{-1}[\nu, \rho]$.

Mệnh đề 3.2.9. ([17]) Cho $f : G \longrightarrow K$ là đồng cấu nhóm. Giả sử $\text{Ker } f$ giải được. Nếu μ là nhóm con mờ giải được của K thì $f^{-1}(\mu)$ là nhóm con mờ giải được của G .

KẾT LUẬN

Qua một thời gian tìm hiểu, tiếp cận và nghiên cứu lý thuyết nhóm con mờ, luận văn đã hoàn thành và đạt được mục tiêu nghiên cứu của đề tài với những kết quả cụ thể sau:

Tổng quan và hệ thống một cách đầy đủ các khái niệm và đặc trưng về nhóm con mờ, nhóm con mờ chuẩn tắc, lớp kề mờ, đồng cấu giữa các nhóm con mờ, cấp mờ đối với nhóm con mờ và chứng minh chi tiết một số tính chất của chúng vốn đã được trình bày một cách vắn tắt hoặc chỉ nêu hướng chứng minh trong các tài liệu. Sau khi trình bày các khái niệm cơ bản về nhóm con mờ, chúng tôi tiếp cận hai định lý quan trọng đối với các nhóm con mờ là Định lý Cayley mờ và Định lý Lagrange mờ. Cũng trong luận văn này chúng tôi trình bày hai lớp nhóm con mờ có cấu trúc khá đặc biệt là nhóm con mờ lũy linh và nhóm con mờ giải được.

Trong quá trình đó, ngoài việc hiểu và trình bày chi tiết các chứng minh đã có chúng tôi đã tìm tòi và tự chứng minh một số tính chất. Cụ thể là Hệ quả 1.2.1, Mệnh đề 1.2.3, Bổ đề 1.4.1, Bổ đề 2.1.2, Mệnh đề 3.1.10, Mệnh đề 3.2.1, Mệnh đề 3.2.3. Đây là các kết quả được phát biểu nhưng chưa chứng minh. Tuy là các kết quả nhỏ nhưng với việc tự tìm cách chứng minh, chúng cho phép chúng tôi tìm hiểu sâu hơn về các đặc trưng của nhóm con mờ.

Một phương pháp nghiên cứu của chúng tôi đã sử dụng là tìm các tính chất của nhóm con mờ tương tự các tính chất của nhóm trong lý thuyết nhóm thông thường. Vì thế, chúng tôi hy vọng rằng bằng cách này đề tài có thể được tiếp tục nghiên cứu các đặc trưng đối với vành con mờ và trường con mờ.

Trong quá trình làm luận văn, mặc dầu đã có rất nhiều cố gắng song luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được những góp ý chân thành của quý thầy cô và bạn đọc để có thể tiếp tục tìm hiểu, nghiên cứu và phát triển luận văn sau này.

KẾT LUẬN

TÀI LIỆU THAM KHẢO

TIẾNG VIỆT

- [1] Nguyễn Gia Định (2008), “Bài giảng logic mờ”, (*dành cho cao học*), Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế.
- [2] Nguyễn Gia Định (2008), Võ Văn Tuấn Dũng, “Bài tập Đại số đại cương”, NXB Đại học Huế.
- [3] Nguyễn Hữu Việt Hưng (2004), “Đại số đại cương”, NXB Giáo dục, Hà Nội.

TIẾNG ANH

- [4] M.T.Abu Osman (1986), "On the direct product of fuzzy subgroups", *Fuzzy Sets and Systems*, 19, 177-191.
- [5] Ajmal, Naseem, K.V.Thomas (1994), "Lattices of fuzzy subgroups and fuzzy normal subgroups", *Inform. Sci.*, 76, 1-11.
- [6] Ajmal, Naseem (1994), "Homomorphism of fuzzy subgroups correspondence theorem and fuzzy quotient groups", *Fuzzy Sets and Systems*, 61, 329-339.
- [7] Ajmal, Naseem(2000), "Fuzzy group theory: A comparison of different notions of product of fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems*, 110, 437-446.
- [8] J.M. AnthonyANTHONY, H. Sherwood (1982), "A characterization of fuzzy subgroups", *Fuzzy Sets and Systems*, 7, 297-305.
- [9] Asaad, Mohammed (1991), "Groups and fuzzy subgroups", *Fuzzy Sets and Systems*, 39, 323-328.

- [10] P.S. Das (1989), "Fuzzy groups and level subgroups", *J. Math. Anal. Appl.*, 84, 264- 269.
- [11] Khalid Abdul-Aziz Holayan Al-Shammari (1998), "An Annalus Approach to Fuzzy Subgroup", *Master of Science in Mathematics, King Fahd University of Petroleum, Minerals*.
- [12] J.G. Kim (1994), "Orders of fuzzy subgroups and p- subgroups", *Fuzzy sets and systems* 01, 225 - 230.409,58.
- [13] J. G. Kim (1995)," Commutative fuzzy sets and nilpotent fuzzy groups", *inform.Sci.*83,161 - 174.61.
- [14] Malik, S. Davender, J.N. Mordeson (1992), "Fuzzy subgroups of abelian groups", *Chinese J. of Math.*, 19, 129-145.
- [15] Malik, S. Davender, J.N. Mordeson, and P.S.Nair (1992), "Fuzzy normal subgroups in fuzzy subgroups", *J. Korean Math. Society*, 29, 1-8.
- [16] D. Meiyappan (1998), "Studies on fuzzy subgroups", *Ph.D. Thesis, IIT (Madras), June 1998. Research Guide: W. B. Vasantha Kandasamy*.
- [17] B.K.Sarma (1999), "Solvable fuzzy groups", *Fuzzy Sets and Systems*. 106, 463- 467.61.83
- [18] J.N. Mordeson, K.R. Bhutani, A. Rosenfeld (2005), "Fuzzy Group Theory", *Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York*.
- [19] N.P. Mukherjee, P. Bhattacharya (1984), "Fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets", *Inform. Sci.*, 34, 225-239.
- [20] Rajesh Kumar(1998), "Fuzzy Algebra", *University of Delhi Press, New Delhi*.
- [21] A. Rosenfeld (2000), "Fuzzy groups", *J. Math. Anal Appl.*, 35, 512-517.

- [22] W.B.Vasantha Kandasamy (2003), "Smarandach Fuzzy Algebra", *Indian Institute of Technology Madras*.
- [23] W.B.Vasantha Kandasamy, D. Meiyappan (1997), "D., Note on lower and upper approximations in a fuzzy group", *Ganita Sandesh*, 11, 85-90.
- [24] W.B.Vasantha Kandasamy, D. Meiyappan (1997), "Pseudo fuzzy cosets of fuzzy subsets", *Fuzzy subgroups and their generalization*, Vikram Math. J., 17, 33-44.
- [25] W.B.Vasantha Kandasamy, D. Meiyappan (1998), "Fuzzy symmetric subgroups and conjugate fuzzy subgroups of a group", *J. Fuzzy Math., IFMI*, 6, 905-913.
- [26] L.A. Zadeh (1965), "Fuzzy sets", *Inform. and Control*, 8, 338-353.

