BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Trần Nguyên Thanh Hà

CHUỖI LAURENT P-ADIC

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 60 46 05

LUẬN VĂN THẠC SĨ ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS Mỵ Vinh Quang

Thành phố Hồ Chí Minh - 2010

LỜI CẢM ƠN

Trong quá trình thực hiện luận văn tôi đã gặp không ít khó khăn do thời gian không nhiều và kiến thức còn hạn chế, tuy nhiên tôi luôn nhận được sự quan tâm, giúp đỡ và động viên của các thầy cô, bạn bè và gia đình.

Do vậy tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Phó Giáo sư - Tiến sĩ Mỵ Vinh Quang, thầy đã dành nhiều thời gian và công sức để trực tiếp hướng dẫn tôi không chỉ về nội dung mà còn cả cách trình bày luận văn.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến Giáo sư William Cherry đã nhiệt tình giúp đỡ tôi trong việc tìm ra cách chứng minh định lí về số không điểm của một chuỗi Laurent p -adic.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến thầy Trịnh Thanh Đèo đã giúp tôi sử dụng Latex để soạn thảo luận văn một cách rõ ràng, sáng sủa.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán - Tin, đặc biệt là các thầy cô bộ môn Đại số đã trực tiếp trang bị cho tôi không chỉ những kiến thức Toán mà cả phương pháp tự học và nghiên cứu.

Ngoài ra, để sử dụng cho luận văn, tôi đã tham khảo một số tài liệu và bài viết, xin cảm ơn các tác giả.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn đến các thầy cô, anh chị ở phòng Khoa học công nghệ sau đại học, gia đình và bạn bè đã luôn động viên và giúp đỡ tôi khi tôi gặp khó khăn.

Tp.HCM, ngày 25 tháng 5 năm 2010

Tác giả

Trần Nguyên Thanh Hà

MỘT SỐ KÍ HIỆU

* Q_p: Trường các số p-adic.
* Q_p^a: Bao đóng đại số của Q_p.
* C_p: Cái đầy đủ của Q_p^a - Trường các số phức p-adic.
* $C_p[z]$: Vành các đa thức trên C_p.
* $C_p[[z]]$: Vành các chuỗi lũy thừa hình thức trên C_p.
* $\mathcal{A}[r]$: Vành các hàm giải tích $p-$adic trên $A[r]$.
* $\mathcal{A}[r_1, r_2]$: Vành các chuỗi Laurent p-adic trên hình vành khăn $A[r_1, r_2]$ (vành các hàm giải tích $p-$adic trên $A[r_1, r_2]$).
* $|f|_r$: Chuẩn của f theo r.
* $K(f, r)$: Chỉ số tối đại của f (tại r).
* $k(f, r)$: Chỉ số tối tiểu của f (tại r).
* $N(f, 0, r)$: Hàm đếm của f tại r.

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Giải tích p-adic đứng một chân trong Giải tích cổ điển và chân còn lại trong Đại số và lý thuyết số, do vậy nó cho ta một cái nhìn thú vị về sự kết hợp giữa hai lĩnh lực lớn này của toán học.

Hơn thế, trong 40 năm trở lại đây, nhờ việc phát hiện những mối liên quan sâu sắc với những vấn đề lớn của số học và hình học đại số mà giải tích p-adic được phát triển mạnh mẽ và trở thành một chuyên ngành độc lập.

Trong giải tích p-adi, các hàm giải tích p-adic (tức là các hàm khai triển được thành chuỗi lũy thừa trong một đĩa) đã được nghiên cứu rất nhiều và thu được nhiều kết quả đáng kể. Trong khi đó, chuỗi Laurent p-adic tức là các hàm khai triển được thành chuỗi lũy thừa trên một hình vành khăn) là một mở rộng khá thú vị của các hàm giải tích p-adic lại chưa được nghiên cứu nhiều.

Vì là mở rộng của các hàm giải tích p-adic nên khi nghiên cứu về chuỗi Laurent p-adic, một cách tự nhiên, ta sẽ đặt ra các câu hỏi: Nó có những tính chất gì và liệu nó còn giữ lại những tính chất đã biết của hàm giải tích p-adic hay không? Không điểm của một chuỗi Laurent p-adic xác định như thế nào và có tính được số không điểm của nó hay không? Có thể đem một chuỗi Laurent p-adic chia cho một đa thức hay không? Nếu được thì kết quả sẽ như thế nào và nó có còn bảo toàn các tính chất trong phép chia đa thức (như là: tính duy nhất của thương và dư, bậc của đa thức dư nhỏ hơn bậc của đa thức thương, ...) hay không?

Triển khai đề tài: Chuỗi Laurent p-adic , luận văn này sẽ lần lượt làm sáng tỏ những vấn đề nêu trên .

Ngoài phần mở đầu và kết luận, nội dung chính của luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị :

Trình bày các kiến thức cơ bản cần cho các chương sau: Chuẩn phi Archimede, số phức p-adic, trường số phức p-adic C_p,...

Chương 2: Xây dựng chuỗi Laurent p-adic :

Trình bày thêm một số khái niệm: Chuỗi Laurent p-adic, vành các chuỗi

Laurent p-adic, chuẩn của một chuỗi Laurent p-adic, chỉ số tối đại, chỉ số tối tiểu, đa thức $r - dominant$, đa thức $r - extremal$, ... sau đó qua các mệnh đề trình bày chi tiết hơn về chuỗi Laurent p-adic: Điều kiện khả nghịch, số bán kính tới hạn,...

Chương 3: Các định lí quan trọng :
Chương này sẽ sử dụng phần kiến thức chuẩn bị ở chương 1 và các tính chất ở chương 2 để chứng minh những định lí quan trọng về chuỗi Laurent p-adic: Định lí về phép chia Euclide, định lí Weierstrass. Cuối cùng là một số ứng dụng của định lí Weierstrass: Định lí về số không điểm và một số ví dụ cụ thể để tính số không điểm của một chuỗi Laurent p-adic, định lí Poisson - Jensen.

Vì thời gian không nhiều và kiến thức còn hạn chế nên luận văn sẽ không tránh khỏi những sai sót. Rất mong nhận được những góp ý của quý thầy cô để luận văn hoàn chỉnh hơn.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này sẽ trình bày những kiến thức cơ bản cần cho các chương sau.

Bắt đầu từ Q, như đã biết là không đầy đủ và không đóng đại số, để thuận tiện nghiên cứu, ta sẽ xây dựng một trường "đẹp" hơn - vừa đóng đại số vừa đầy đủ.
Từ Q xây dựng cái đầy đủ của nó là Q_p nhưng Q_p dù đầy đủ lại không đóng đại số, do vậy tiếp tục xét bao đóng đại số của Q_p là Q_p^a, tuy nhiên nó lại không đầy đủ, cuối cùng phải xây dựng cái đầy đủ của Q_p^a để được trường số phức p-adic C_p "đẹp" như mong muốn.

$$Q \to Q_p \to Q_p^a \to C_p$$

Do vậy, ở chương này, ngoài các khái niệm cơ bản như chuẩn phi Archimede, nhóm giá trị, trường thặng dư của một trường -đã trang bị trên đó một chuẩn phi Archimede- và các tính chất của nó, ... ta sẽ đi xây dựng trường các số p - adic Q_p để sau đó xây dựng trường số phức p-adic C_p.

Vì phần chính sẽ là chương 2 và đặc biệt là chương 3 nên ở chương 1, nhiều kết quả chỉ nêu ra chứ không chứng minh hoặc chỉ nêu tóm tắt chứ không đi vào chi tiết cụ thể.

1.1 Định nghĩa chuẩn phi Archimede

Cho F là một vành, một chuẩn phi Archimede trên F là một ánh xạ:
$| \ | : \quad F \to R_+$ thỏa các điều kiện:

$$
\begin{array}{cl}
(i) & |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0. \\
(ii) & |a.b| = |a||b|, \forall a, b \in F. \\
(iii) & |a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}, \forall a, b \in F.
\end{array}
$$

Nếu F là một trường và $| \ |$ là một chuẩn phi Archimede trên F thì ta sẽ gọi cặp $(F, | \ |)$ là trường phi Archimede.

1.2 Một số tính chất của chuẩn phi Archimede

Cho F là một trường với chuẩn phi Archimede $| \ |$.
Chuẩn phi Archimede có các tính chất cơ bản như trị tuyệt đối thông thường:
$|-x| = |x|, \qquad |1| = 1, \qquad |\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|}.$
Ngoài ra chuẩn phi Archimede còn có các tính chất sau đây:

Tính chất 1.2: Nếu $|x| \neq |y|$ thì $|x+y| = max\{|x|, |y|\}$.
Tính chất này có thể phát biểu thành lời như sau: Trong F mọi tam giác đều cân.

Thật vậy, giả sử $max\{|x|, |y|\} = |x|$, mà $|x| \neq |y|$ nên

$$|x| > |y| \tag{1.1}$$

Theo tính chất của chuẩn phi Archimede và (1.1):

$$|x+y| \leq max\{|x|, |y|\} = |x|$$

$$|x| = |(x+y) - y| \leq max\{|x+y|, |y|\} = |x+y|$$

Suy ra: $|x+y| = |x|$.

1.3 Nhóm giá trị, trường thặng dư

Cho F là một trường, $|\ \ |$ là một chuẩn trên F, đặt $F^* = F \setminus \{0\}$.
Nhóm giá trị của $(F, |\ \ |)$ là: $|F^*| = \{|x| : \ x \in F^*\}$
Đặt: $A = \{x \in F : \ |x| \leq 1\}$
Và: $M = \{x \in F : \ |x| < 1\}$
Dễ dàng chứng minh được rằng A là một vành con của F và M là một ideal tối đại của A.
Do vậy $\widetilde{F} = A/M$ là một trường.
Ta gọi $\widetilde{F}$ là trường thặng dư của F.

1.4 Tính chất đặc biệt của dãy trong trường với chuẩn phi Archimede

Cho F là một trường với chuẩn phi Archimede $|\ \ |$. Ta có:

a) (x_n) là dãy Cauchy khi và chỉ khi $(x_{n+1} - x_n) \to 0$.
Chiều $(\Leftarrow)$ là hiển nhiên, ta sẽ chứng minh chiều $(\Rightarrow)$.
Giả sử $(x_{n+1} - x_n) \to 0$, khi đó:
$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n, n > N \Rightarrow |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ (1.2)
Do vậy, $\forall m, n, m > N, n > N$, giả sử $m \geq n, m = n + k$, ta có:
$|x_m - x_n| = |x_{n+k} - x_n|$
$= |(x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + ... + (x_{n+1} - x_n)|$
$\leq max\{|x_{n+k} - x_{n+k-1}|, |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}|, ..., |x_{n+1} - x_n|\} < \varepsilon$
(Do (1.2))
Vậy (x_n) là dãy Cauchy.

b) (x_n) là dãy Cauchy và $x_n \nrightarrow 0$ thì dãy $|x_n|$ là dãy dừng,
nghĩa là tồn tại N sao cho: $|x_n| = |x_N|, \forall n \geq N$
Vì $x_n \nrightarrow 0$ nên:
$\exists \varepsilon > 0$ sao cho $\exists (n_k)_k$ để $|x_{n_k}| \geq \varepsilon$ (1.3)
Vì (x_n) là dãy Cauchy nên với ε ở trên, $\exists N : \forall m, n, n > N, m > N$
$\Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$
Chọn n_{K_0} sao cho $n_{K_0} > N$, khi đó:
$$\forall m > N \Rightarrow |x_m - x_{n_{K_0}}| < \varepsilon \quad (1.4)$$

Vậy $\forall m > N$
$\Rightarrow |(x_m - x_{n_{K_0}}) + x_{n_{K_0}}| = max\{|x_m - x_{n_{K_0}}|, |x_{n_{K_0}}|\} = |x_{n_{K_0}}|$.
(Do (1.3), (1.4))

c) Cho $(F, |\ \ |)$ là một trường phi Archimede, đóng đại số và đầy đủ. Khi đó, ta có:

$$\textbf{Nếu } \lim_{|n|\to+\infty} |a_n| = 0 \textbf{ thì } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \textbf{ hội tụ trong } F \textbf{ .}$$

Chứng minh:

$\star$ Trước hết ta chứng minh: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ hội tụ trong F khi và chỉ khi $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$

Mỗi $n > 0$, đặt : $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$.

Do F là đầy đủ và theo nên:

$$\begin{aligned} (s_n)_n \text{ hội tụ } &\Leftrightarrow (s_n)_n \text{ là dãy Cauchy} \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |s_n - s_{n-1}| = 0 \qquad \text{(theo } b) \\ &\Leftrightarrow \lim_{|n|\to+\infty} |a_n| = 0 \end{aligned}$$

$\star$ Tiếp đó, ta chứng minh: Nếu $\lim_{|n|\to+\infty} |a_n| = 0$ thì $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$ hội tụ trong F

Ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \qquad \text{với } m = -n,\ \ b_m = a_{-m} = a_n \end{aligned}$$

Do vậy:

$$\lim_{|n|\to+\infty} |a_n| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{m\to+\infty} |b_m| = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{và} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \quad \text{hội tụ trong } F$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \text{ hội tụ trong } F$$

1.5 Cái đầy đủ của một trường

Lấy $(F, |\ |)$ là một trường phi Archimede.

Đặt S là tập tất cả các dãy Cauchy trong F với chuẩn $|\ |$.

Trên S ta xét một quan hệ 2 ngôi " $\sim$ " như sau:

$$(x_n) \sim (y_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x_n - y_n) \longrightarrow 0 \text{ khi } n \longrightarrow \infty.$$

Dễ thấy rằng quan hệ " $\sim$ " là một quan hệ tương đương (thỏa các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu). Quan hệ tương đương này chia S thành các lớp tương đương.

Kí hiệu lớp tương đương chứa dãy (x_n) là $\overline{(x_n)}$.

Đặt: $\overline{F} = \{\overline{(x_n)} : (x_n) \in S\}$ là tập tất cả các lớp tương đương của S trên quan hệ tương đương " $\sim$ ".

Như vậy:

$$\overline{(x_n)} = \overline{(x'_n)} \Leftrightarrow (x_n) \sim (x'_n) \Leftrightarrow (x_n - x'_n) \longrightarrow 0$$
$$\Leftrightarrow |x_n - x'_n| \longrightarrow 0 \text{ khi } n \to +\infty.$$

Trên $\overline{F}$ ta định nghĩa các phép toán cộng và nhân như sau:

$$(i) \qquad \overline{(x_n)} + \overline{(y_n)} = \overline{(x_n + y_n)}$$

$$(ii) \qquad \overline{(x_n)}.\overline{(y_n)} = \overline{(x_n.y_n)}$$

- Ta dễ dàng chứng minh phép toán cộng và nhân định nghĩa ở trên là hợp lí.
- Phần tử 0 trong $\overline{F}$ là lớp các dãy số hội tụ đến 0 trong F, kí hiệu $\overline{0}$.
- Mọi $x \in \overline{F}, x \neq 0$, ta chứng minh rằng x có nghịch đảo trong $\overline{F}$.

  Thật vậy, giả sử $x = \overline{(x_n)} \neq \overline{0} \Rightarrow x_n \nrightarrow 0$.

  Theo tính chất 1.3 b, ta có: $|x_n|$ là dãy dừng, tức là:

  $$\exists N : |x_n| = a, \forall n > N \qquad \text{với } a > 0.$$

  Suy ra: $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n>N}$ là dãy Cauchy và $\overline{(x_n)}\overline{\left(\dfrac{1}{x_n}\right)} = \overline{\left(x_n\dfrac{1}{x_n}\right)} = \overline{1}$.

  Do đó:

  $$x^{-1} = \left(\frac{1}{x_n}\right)_{n>N} \text{ là nghịch đảo của} x \text{trong } \overline{F}$$

  Vậy $\overline{F}$ với hai phép toán cộng và nhân trên lập thành một trường.

- **Chuẩn phi Archimede trên trường $\overline{F}$:**

  $\forall x = \overline{(x_n)} \in \overline{F}$, ta định nghĩa $|x| = lim|x_n|$.
  Dễ dàng chứng minh được rằng $(\overline{F}, |\ |)$ là một trường phi Archimede đầy đủ.

  Hơn nữa có thể xem F là một trường con của $\overline{F}$ do phép nhúng:

  $$i : F \longrightarrow \overline{F}$$

  $$a \longmapsto \overline{(a_n)} \text{ với } a_n = a, \forall n$$

  Chuẩn phi Archimede trên $\overline{F}$ được gọi là mở rộng của chuẩn trên F.

Ta gọi $\overline{F}$ là **cái đầy đủ của** F.

1.6 Bao đóng đại số của một trường

Định nghĩa: Cho F là trường con của trường K, ta gọi trường đóng đại số nhỏ nhất trong K còn chứa F là bao đóng đại số của F, kí hiệu là: F^a.

Chuẩn trên F^a : Lấy bất kì $\alpha \in F^a$.
Do F^a là bao đóng đại số của F nên α là nghiệm của một đa thức nào đó trên $F[z]$, ta gọi đa thức có hệ số cao nhất bằng 1 và có bậc nhỏ nhất trong các đa thức trên $F[z]$ nhận α làm nghiệm là đa thức tối tiểu của α trên F.
Giả sử đa thức tối tiểu của α trên F là $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ bậc n.
Khi đó ta định nghĩa chuẩn của α trên F^a như sau:

$|\alpha| = |a_0|^{1/n}$ với $|a_0|$ là chuẩn của a_0 trên F.

Ta chứng minh được chuẩn định nghĩa ở trên là một chuẩn trên trường F^a, hơn nữa nó là mở rộng của chuẩn trường trên F.

1.7 Q_p- Cái đầy đủ của Q

- **Chuẩn phi Archimede trên Q** :

Cho p là một số nguyên tố.

$\star$ Với $n \in Z, n \neq 0 : n = p^\alpha k$ với $(k,p) = 1$, ta đặt: $ord_p(n) = \alpha$.

Như vậy: $ord_p(n) = \alpha \Leftrightarrow p^\alpha | n$ và $p^{\alpha+1} \nmid n$.

Dễ thấy: $ord_p(m.n) = ord_p(m) + ord_p(n), \forall m, n \in Z$.

Hơn nữa: $ord_p(m+n) \geq min\{ord_p(m), ord_p(n)\}$

Thật vậy, giả sử: $min\{ord_p(m), ord_p(n)\} = \alpha$

$\Rightarrow ord_p(m) \geq \alpha$ và $ord_p(n) \geq \alpha \Rightarrow p^\alpha | n$ và $p^\alpha | m \Rightarrow p^\alpha | (m+n)$

$\Rightarrow \alpha \leq ord_p(m+n)$.

$\star$ Với $n = 0$, ta quy ước $ord_p(0) = +\infty$.

$\star$ Với $x \in Q, x \neq 0$, giả sử $x = \dfrac{m}{n}$ với $(m,n) = 1$.

Ta định nghĩa: $ord_p(x) = ord_p(m) - ord_p(n)$.

Tương tự như trường hợp số nguyên, ta có thể chứng minh được:

$$ord_p(x.y) = ord_p(x) + ord_p(y), \forall x, y \in Q.$$

và $ord_p(x+y) \geq min\{ord_p(x), ord_p(y)\}$

$\star$ Định nghĩa chuẩn phi Archimede trên Q:

$$|\ \ |_p : \quad Q \longrightarrow R$$
$$0 \longmapsto |0|_p = 0$$

$$x \neq 0, x \longmapsto |x|_p = p^{-ord_p(x)}$$

Dễ thấy $|\ \ |_p$ thỏa các điều kiện $(i), (ii)$ và (iii) trong định nghĩa của chuẩn phi Archimede.

- **Chuẩn phi Archimede trên trường Q_p** :

$\forall x = \overline{(x_n)} \in Q_p$, ta định nghĩa $|x| = lim|x_n|$ (Với $|\ \ | = |\ \ |_p$)

$(\star)$ Dễ thấy $|\ \ |$ là một chuẩn phi Archimede trên Q_p.

$(\star)$ Chuẩn $|\ \ |$ trên Q_p là mở rộng của chuẩn $|\ \ |$ trên Q.

Thật vậy, với $a \in Q$, ta xem $a = \overline{(a_n)} \in Q_p$, trong đó $a_n = a, \forall n$.

Mà: $|a| = lim|a_n| = lim|a| = |a|$.

- **Mệnh đề: Mô tả Q_p :**
  Mỗi $x \in Q_p$ đều có khai triển duy nhất:
  $$x = \sum_{n=m}^{+\infty} b_n p^n, \ \ m \in Z \text{ với } 0 \leq b_n < p, \ \ \forall n \text{ và } b_m \neq 0$$
  Và khi đó: $|x| = p^{-m}$.

- **Nhóm giá trị, trường thặng dư của $(Q_p, \ | \ |)$:**
  Ta có:
  Nhóm giá trị của $(Q_p, | \ \ |)$ là: $|Q_p^*| = \{|x| : \ \ x \in Q_p^*\} = \{p^m : \ \ m \in Z\}$
  Đặt: $Z_p = \{x \in Q_p : \ \ |x| \leq 1\}$
  Và: $M = \{x \in Q_p : \ \ |x| < 1\} = pZ_p$
  Trường thặng dư của $(Q_p, | \ \ |)$ là: $\widetilde{Q_p} = Z_p/pZ_p$.

- **Mệnh đề:** : *Q_p không đóng đại số.*
  Do vậy, ta sẽ xây dựng bao đóng đại số của Q_p là Q_p^a.

1.8 Q_p^a : Bao đóng đại số của Q_p

Nhóm giá trị của $(Q_p^a, | \ \ |)$ là: $|(Q_p^a)^*| = \{|x| : | \ \ |x \in (Q_p^a)^*\} = \{p^\alpha : \ \ \alpha \in Q\}$.
Thật vậy:

$\star$ Với mọi $x \in Q_p^a$, ta chứng minh $|x| \in \{p^\alpha : \ \ \alpha \in Q\}$.
Giả sử đa thức tối tiểu của x trên Q_p là $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$.
Khi đó chuẩn của x trên $(Q_p^a)^*$:
$|x| = |a_0|^{1/n}$ với $|a_0|$ là chuẩn của a_0 trên Q_p.
Vì $a_0 \in Q_p$ nên $|a_0| \in |Q_p^*| = \{p^m : m \in Z\}$.
Suy ra: $|x| \in \{p^\alpha : \alpha \in Q\}$

$\star$ Ngược lại, lấy $p^\alpha, \alpha \in Q$, ta chứng minh $p^\alpha \in |(Q_p^a)^*|$.
Ta có $\alpha \in Q$, do vậy $\alpha = \dfrac{m}{n}$ với $m, n \in Z, n > 0, (m, n) = 1$.
Vì $|Q_p^*| = \{p^m : m \in Z\}$ nên $\exists b \in Q_p$ để $|b| = p^m$.
Xét $g(z) = z^n - b \in Q_p[z]$, do Q_p^a là bao đóng đại số của Q_p nên $g(z)$ có một nghiệm thuộc Q_p^a, giả sử là y.
Khi đó: $y^n - b = 0 \Rightarrow |y|^n = |b| = p^m$
$$\Rightarrow |y| = p^{m/n} = p^\alpha$$
Suy ra: $p^\alpha = |y| \in |(Q_p^a)^*|$

Mệnh đề: *Q_p^a không đầy đủ.*
Do vậy, ta sẽ đi xây dựng cái đầy đủ của Q_p^a.

1.9 C_p: Cái đầy đủ của Q_p^a

Việc xây dựng C_p là cái đầy đủ của Q_p^a tương tự như xây dựng Q_p là cái đầy đủ của Q.

Mệnh đề: *C_p vừa đóng đại số vừa đầy đủ.*

Nhóm giá trị, trường thặng dư của C_p :

Dễ thấy:
Nhóm giá trị của $(C_p, |\ \ |)$ là:
$|C_p^*| = \{|x| : \ \ x \in C_p^*\} = |(Q_p^a)^*| = \{p^\alpha : \ \ \alpha \in Q\}$
Đặt: $\mathcal{O} = \{x \in C_p : \ \ |x| \leq 1\}$
Và: $\mathcal{M} = \{x \in C_p : \ \ |x| < 1\}$
Trường thặng dư của $(C_p, |\ \ |)$ là: $\widetilde{C_p} = \mathcal{O}/\mathcal{M}$.

1.10 Một số kí hiệu

Cho các số thực $r > 0, r_1 \geq 0, r_2 \geq r_1$

$$A[r] = \{z \in C_p : \quad |z| \leq r\}$$

$$A(r) = \{z \in C_p : \quad |z| < r\}$$

$$A[r_1, r_2] = \{z \in C_p : \quad r_1 \leq |z| \leq r_2\}$$

$$A(r_1, r_2] = \{z \in C_p : \quad r_1 < |z| \leq r_2\}$$

$$A[r_1, r_2) = \{z \in C_p : \quad r_1 \leq |z| < r_2\}$$

Chương 2

XÂY DỰNG CHUỖI LAURENT P-ADIC

Từ những kiến thức chuẩn bị ở chương 1, chương này tiếp tục trình bày thêm một số khái niệm: Hàm giải tích p-adic, chuỗi Laurent p-adic, vành các chuỗi Laurent p-adic, chuẩn của một chuỗi Laurent p-adic, chỉ số tối đại, chỉ số tối tiểu, đa thức $r - dominant$, đa thức $r - extremal$, ... sau đó trình bày chi tiết hơn về chuỗi Laurent p-adic. Từ mệnh đề 2.2.1 đến mệnh đề từ 2.2.9 sẽ mô tả các tính chất cơ bản của chuỗi Laurent p-adic và các tính chất này sẽ được sử dụng rất nhiều ở chương 3. Do vậy, các mệnh đề này sẽ được chứng minh rất rõ ràng, chi tiết.

2.1 Một số khái niệm

2.1.1 Hàm giải tích $p-$ adic

Đặt:

$$C_p[[z]] = \left\{ f = \sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n z^n \mid c_n \in C_p \right\}$$

Trên $C_p[[z]]$ ta trang bị phép toán cộng và nhân như sau:
Với:

$$f = \sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n z^n \quad , \quad g = \sum_{n=0}^{n=+\infty} b_n z^n$$

thì:

$$f+g=\sum_{n=0}^{n=+\infty}(c_n+b_n)z^n$$

và:

$$f.g=\sum_{n=0}^{n=+\infty}a_nz^n \qquad \text{trong đó} \qquad a_n=\sum_{i+j=n}c_ib_j$$

Dễ thấy $C_p[[z]]$ với các phép toán cộng và nhân ở trên lập thành một vành, ta thường gọi là vành các chuỗi lũy thừa hình thức trên C_p.
Cho r là một số thực dương, ta đặt:

$$\mathcal{A}[r]=\left\{f=\sum_{n=0}^{n=+\infty}c_nz^n \mid c_n\in C_p, \lim_{n\to+\infty}|c_n|r^n=0\right\}$$

Khi đó, $\mathcal{A}[r]$ cùng với các phép toán cộng và nhân ở trên lập thành một vành con của vành các chuỗi lũy thừa hình thức $C_p[[z]]$, và được gọi là vành các hàm giải tích $p-$adic trên hình cầu $A[r]$.

Mỗi $f=\sum_{n=0}^{n=+\infty}c_nz^n\in\mathcal{A}[r]$ được gọi là một hàm giải tích $p-$ adic trên $A[r]$.

Tương tự, ta chứng minh được:

$$\mathcal{A}(r)=\left\{f=\sum_{n=0}^{n=+\infty}c_nz^n \mid c_n\in C_p, \lim_{n\to+\infty}|c_n|r^n=0, \forall r<r\right\}$$

Với các phép toán cộng và nhân ở trên lập thành một vành con của vành $C_p[[z]]$.

2.1.2 Chuỗi Laurent $p-$ adic

Đặt:

$$\mathcal{A}[r_1,r_2]=\left\{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}c_nz^n \mid c_n\in C_p, \lim_{|n|\to+\infty}|c_n|r^n=0, \forall r: r_1\le r\le r_2\right\}$$

Trên $\mathcal{A}[r_1,r_2]$ ta trang bị phép toán cộng và nhân như sau:
Với:

$$f=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}c_nz^n \qquad , \qquad g=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}b_nz^n$$

Ta định nghĩa:

$$f + g = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (c_n + b_n) z^n$$

và:

$$f.g = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n z^n \quad \text{với:} \quad a_n = \sum_{i+j=n} c_i b_j$$

Dễ dàng chứng minh được rằng $\mathcal{A}[r_1, r_2]$ cùng với phép toán cộng và nhân trên lập thành một vành.

Thật vậy, với các kí hiệu ở trên, có thể thấy $f + g \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$ do bất đẳng thức tam giác của chuẩn phi Archimede.

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng $f.g \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$

⋆ Thật vậy, mỗi $n \in Z$ cố định, ta sẽ chứng minh a_n định nghĩa như trên là hợp lí hay $\sum_{i+j=n} c_i b_j$ hội tụ.

Chọn $r > 0, r_1 \le r \le r_2$, ta có: $\sum_{i+j=n} c_i b_j = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i b_{n-i}$

Mà $|i| \to +\infty$ thì $|n - i| \to +\infty$ do n là số cố định.

Do đó: Khi $|i| \to +\infty$ thì $|c_i b_{n-i}| = (|c_i| r^i)(|b_{n-i}| r^{n-i}) r^{-n} \to 0$ (Vì $f, g \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$)

Hay: $\lim_{|i| \to +\infty} |c_i b_{n-i}| = 0$ khi $|i| \to +\infty$

$$\Rightarrow \sum_{i+j=n} c_i b_j \text{ hội tụ} \qquad \text{(theo mệnh đề 1.4).}$$

⋆ Tiếp đó ta sẽ chứng minh: $\lim_{|n| \to +\infty} a_n r^n = 0$

Với mọi $r : r_1 \le r \le r_2$, ta có:

$$a_n r^n = \sum_{i+j=n} (c_i r^i)(b_j r^j)$$

Xét i, j mà $i + j = n$, nếu $|n| \to +\infty$ thì $|i| \to +\infty$ hoặc $|j| \to +\infty$.

Giả sử $|i| \to +\infty$, ta có:

$$|c_i| r^i |b_j| r^j \le |c_i| r^i |g|_r \to 0, \text{ do } f \in \mathcal{A}[r_1, r_2].$$

Trường hợp $|j| \to +\infty$ ta cũng có kết quả như trên.
Do đó:

$$|a_n|r^n = \left|\sum_{i+j=n} (c_i r^i)(b_j r^j)\right| \leq \max_{i+j=n} \{|c_i|r^i|b_j|r^j\} \to 0 \text{ khi } \quad |n| \to +\infty$$

Phần tử không là: $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} 0.z^n$**,** viết gọn là 0.

Phần tử đơn vị là: $1 + \sum_{n\in Z, n\neq 0} 0.z^n$**,** viết gọn là 1.

$\mathcal{A}[r_1, r_2]$ **được gọi là vành các chuỗi Laurent p- adic trên** $A[r_1, r_2]$**.**

Mỗi $f \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$ được gọi là một **chuỗi Laurent p - adic trên** $A[r_1, r_2]$ hay f là giải tích trên $A[r_1, r_2]$.

Tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\mathcal{A}(r_1, r_2] = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n \mid c_n \in C_p, \lim_{|n|\to+\infty} |c_n|r^n = 0, \forall r : r_1 < r \leq r_2 \right\}$$

$$\mathcal{A}[r_1, r_2) = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n \mid c_n \in C_p, \lim_{|n|\to+\infty} |c_n|r^n = 0, \forall r : r_1 \leq r < r_2 \right\}$$

với phép toán cộng và nhân trên là các vành .

2.1.3 Chuẩn của một chuỗi Laurent $p-$adic

Cho vành $\mathcal{A}[r_1, r_2]$ và số $r : r_1 \leq r \leq r_2$.
Khi đó: Với mọi

$$f = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$$

ta định nghĩa:

$$|f|_r = \max_{n\in Z} |c_n|r^n$$

Ta sẽ chứng minh định nghĩa trên là hợp lí, vì nếu $r = 0$ **thì** $\max_{n\in Z}|c_n|r^n = 0$ **nên chỉ cần chứng minh** $\max_{n\in Z}|c_n|r^n$ **tồn tại với** $r > 0$**.**

Thật vậy, xét 2 trường hợp:

$\star$ Trường hợp 1: $c_k = 0, \forall k$ thì $\max\limits_{n \in Z} |c_n| r^n = 0$.

$\star$ Trường hợp 2 : Giả sử tồn tại k sao cho $c_k \neq 0$.

Khi đó, do $\lim\limits_{|n| \to \infty} |c_n| = 0$ nên $\exists N > 0 : \forall n, |n| > N \Rightarrow |c_n| r^n < |c_k| r^k$
Suy ra:

$$\sup_{n \in Z} |c_n| r^n = \sup_{-N \leq n \leq N} |c_n| r^n = \max_{-N \leq n \leq N} |c_n| r^n = \max_{n \in Z} |c_n| r^n$$

Như vậy, trong cả 2 trường hợp, ta đều chứng minh được $\max\limits_{n \in Z} |c_n| r^n$ tồn tại.

Ngoài ra, từ chứng minh trên ta cũng suy ra rằng:
Trong trường hợp $f \neq 0$ và một trong 2 điều kiện hoặc $r > 0$ hoặc $f(0) \neq 0$ thì tập $\{n \in Z : |c_n| r^n = |f|_r\}$ **chỉ có hữu hạn phần tử.**

Hơn thế, ta còn có :

Mệnh đề: *Nếu f và g là các chuỗi Laurent p-adic trên $A[r_1, r_2]$ và với mỗi $r : r_1 \leq r \leq r_2$ thì:*

$$|f+g|_r \leq max\{|f|_r, |g|_r\}$$

$$|fg|_r = |f|_r|g|_r$$

Hơn nữa: Nếu $r > 0$ thì $|\ \ |_r$ là một chuẩn phi Archimede trên $\mathcal{A}[r_1, r_2]$

Chứng minh:

Giả sử

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n z^n \qquad \text{và} \qquad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b_n z^n$$

⋆ **Chứng minh** $|f+g|_r \leq max\{|f|_r, |g|_r\}$

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (a_n + b_n) z^n$$

Vậy: $$\begin{aligned} |f+g|_r = \max_n |a_n + b_n| r^n &\leq \max_n \{max\{|a_n|, |b_n|\} r^n\} \\ &\leq \max_n \{max\{|a_n| r^n, |b_n| r^n\}\} \\ &\leq max\{\max_n |a_n| r^n, \max_n |b_n| r^n\} \\ &\leq max\{|f|_r, |g|_r\} \end{aligned}$$

⋆ **Chứng minh** $|fg|_r = |f|_r|g|_r$

$$(f.g)(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n \qquad \text{với} \qquad c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Đặt: $K_1 = K(f, r), \qquad K_2 = K(g, r)$ (2.1)

Nếu $f = 0$ hoặc $g = 0$ thì hiển nhiên ta có tính chất trên, ta xét trường hợp $f \neq 0$ và $g \neq 0$, khi đó: $K1, K2$ là hữu hạn.

Xét $c_{K_1+K_2} = \sum_{i+j=K_1+K_2} a_i b_j$

Trong các số hạng của $c_{K_1+K_2}$, có $a_{K_1} b_{K_2}$.

Nếu $i > K_1$ thì $|a_i| r^i < |a_{K_1}| r^{K_1}$ (do (2.1))

và vì: $|b_j|r^j \leq |b_{K_2}|r^{K_2}, \forall j \in Z$
Nên:

$$|a_{K_1}b_{K_2}|r^{K_1+K_2} = |a_{K_1}|r^{K_1}|b_{K_2}|r^{K_2} > |a_i|r^i|b_j|r^j$$

$$\Rightarrow |c_{K_1+K_2}|r^{K_1+K_2} = \max_{i+j=K_1+K_2} |a_i|r^i|b_j|r^j = |a_{K_1}||b_{K_2}|r^{K_1+K_2}$$

(Tính chất của chuẩn phi Archimede).

Tương tự, nếu $i < K_1$ thì $j > K_2$ và chứng minh như trên ta cũng có:

$$|c_{K_1+K_2}|r^{K_1+K_2} = |a_{K_1}||b_{K_2}|r^{K_1+K_2}$$

Vậy:

$$|fg|_r \geq |c_{K_1+K_2}|r^{K_1+K_2} = |a_{K_1}||b_{K_2}|r^{K_1+K_2} = |f|_r|g|_r \tag{2.2}$$

Hơn nữa, $\forall n \in Z, c_n = \sum_{i+j=n} c_n z^n$, ta có:

$$|c_n|r^n = \left|\sum_{i+j=n} a_i b_j r^n\right| \leq \max_{i+j=n} |a_i||b_j|r^n \leq \max_{i+j=n} |a_i|r^i|b_j|r^j$$

$$\leq |a_{K_1}|r^{K_1}|b_{K_2}|r^{K_2} = |c_{K_1+K_2}|r^{K_1+K_2}$$

$$\Rightarrow |fg|_r \leq |c_{K_1+K_2}|r^{K_1+K_2} = |f|_r|g|_r \tag{2.3}$$

Từ (2.2) và (2.3) suy ra: $|fg|_r = |f|_r|g|_r$

Trong trường hợp $r > 0$ ta thấy ngay: $|f|_r = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Do vậy, $|\ |_r$ là một chuẩn phi Archimede trên $\mathcal{A}[r_1, r_2]$.

Nhận xét:

Mỗi f cố định, $|\quad|_r$ là hàm liên tục theo $r, |f|_r$ không giảm theo r.

2.1.4 Chỉ số tối đại $K(f,r)$, chỉ số tối tiểu $k(f,r)$ và bán kính tới hạn (điểm tới hạn)

Cho:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$$

Với mỗi $r : r_1 \leq r \leq r_2$
Nếu $f = 0$, ta định nghĩa:
Chỉ số tối đại $K(f,r) = +\infty$ và chỉ số tối tiểu: $k(f,r) = -\infty$
Nếu $f \neq 0$ và một trong 2 điều kiện hoặc $r > 0$ hoặc $f(0) \neq 0$ khi định nghĩa $|\ |_r$ ta đã chứng minh tập $\{n \in Z : |c_n|r^n = |f|_r\}$ chỉ có hữu hạn phần tử, do đó:
$min\{n \in Z : |c_n|r^n = |f|_r\}$
và $max\{n \in Z : |c_n|r^n = |f|_r\}$ tồn tại.

Khi $r \neq 0$ hoặc $f(0) \neq 0$, ta định nghĩa:

Chỉ số tối đại:

$$K(f,r) = max\{n \in Z : |c_n|r^n = |f|_r\}$$

Chỉ số tối tiểu:

$$k(f,r) = min\{n \in Z : |c_n|r^n = |f|_r\}$$

Khi $r = 0$ và $f(0) = 0$, ta quy ước:

$$K(f,r) = min\{n \in Z : |c_n| \neq 0\} \quad \text{và} \quad k(f,r) = 0$$

Một bán kính r mà $K(f,r) > k(f,r)$ được gọi là một bán kính tới hạn (điểm tới hạn).

Nhận xét:
Cho trước

$$f = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$$

khi đó: $K(f,r)$ không giảm theo $r, \forall r \in [r_1, r_2]$.

Chứng minh:

Giả sử $r_1, r_2 \in [r_1, r_2]$ và $r_1 < r_2$, ta sẽ chứng minh: $K(f, r_1) \leq K(f, r_2)$.
Thật vậy, giả sử ngược lại $K(f, r_1) > K(f, r_2)$.
Đặt $K_1 = K(f, r_1), K_2 = K(f, r_2)$, ta có: $K_1 > K_2$ và:

$$|a_{K_1}|r_2^{K_1} < |a_{K_2}|r_2^{K_2} \quad \text{và} \quad |a_{K_1}|r_1^{K_1} \geq |a_{K_2}|r_1^{K_2}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
|a_{K_1}|r_2^{K_1} &= |a_{K_1}|r_1^{K_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{K_1} \\
&\geq |a_{K_2}|r_1^{K_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{K_1} \\
&= |a_{K_2}|r_2^{K_1}r_1^{K_2-K_1} = |a_{K_2}|r_2^{K_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{K_1-K_2} \\
&> |a_{K_1}|r_2^{K_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{K_1-K_2} > |a_{K_1}|r_2^{K_1} \\
&\qquad (\text{Do } r_2 > r_1 \text{ và } K_1 > K_2)
\end{aligned}$$

Tức là: $|a_{K_1}|r_2^{K_1} > |a_{K_1}|r_2^{K_1}$ - vô lí.

Vậy ta phải có: $K_1 \leq K_2$ hay $K(f, r_1) \leq K(f, r_2)$

2.1.5 Đa thức $r-$dominant và đa thức $r-$extremal

Định nghĩa: Cho r là một số thực dương.
Đa thức P được gọi là $r-$dominant nếu $K(P,r) = deg(P)$ và được gọi là $r-$extremal nếu P là $r-$dominant và $k(P,r) = 0$.

Mệnh đề: Một số tính chất:
a) Với $f(z) \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$ *và mọi* $r : r_1 \leq r \leq r_2$*, ta có:* $|f(z)|_r = |f(z^{-1})|_{r^{-1}}$.
b) Nếu $P(z)$ *là đa thức* $r - extremal$ *thì* $z^{deg(P)}P(z^{-1})$ *là đa thức* $r^{-1} - extremal$.
c) Nếu $r_2 \geq r$ *và* $P(z)$ *là đa thức* $r - dominant$ *thì* $P(z)$ *là đa thức* $r_2 - dominant$.

Chứng minh:

a) Với $f(z) \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$ và mọi $r : r_1 \leq r \leq r_2$, ta có: $|f(z)|_r = |f(z^{-1})|_{r^{-1}}$.

Thật vậy: Giả sử $f(z) = \sum_{n \in Z} a_n z^n$.

Khi đó: $f(z^{-1}) = \sum_{n \in Z} a_n z^{-n}$

$$\Rightarrow |f(z^{-1})|_r^{-1} = \max_{n \in Z} |a_n|(r^{-1})^{-n} = \max_{n \in Z} |a_n| r^n = |f(z)|_r.$$

b) Nếu $P(z)$ là đa thức $r - extremal$ thì $z^{deg(P)}P(z^{-1})$ là đa thức $r^{-1} - extremal$.

Vì: Nếu $P(z) = \sum_{n=0}^{n=m} a_n z^n$, tức là: $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_m z^m$

thì $z^{deg(P)}P(z^{-1}) = a_0 z^m + ... + a_{m-1} z + a_m = \sum_{n=0}^{n=m} b_n z^n = Q(z)$

(với $b_n = a_{m-n}$) cũng là một đa thức bậc m.

Hơn nữa: $|Q(z)|_r^{-1} = \max_{0 \leq n \leq m} |b_n| r^{-n} = \max_{0 \leq n \leq m} |a_{m-n}| r^{-n}$

$$= r^{-m} \max_{0 \leq n \leq m} |a_{m-n}| r^{m-n} = r^{-m} \max_{0 \leq n \leq m} |a_n| r^n.$$

Nhưng vì $P(z)$ là $r - extremal$ nên $\max\limits_{0 \leq n \leq m} |a_n|r^n = |a_m r^m = |a_0|$.

Do đó: $|Q(z)|_r^{-1} = |b_0| = |b_m|(r^{-1})^m)$
hay $K(Q, r^{-1}) = m$ và $k(Q, r^{-1}) = 0$.

Vậy: $Q(z)$ là $r^{-1} - extremal$.

c) Nếu $r_2 \geq r$ và $P(z)$ là đa thức $r - dominant$ thì $P(z)$ là đa thức $r_2 - dominant$.

Vì $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{n=m} a_n z^n$ là đa thức $r - dominant$ nên $K(P, r) = m$.

Mà với P cố định thì $K(P, s)$ không giảm theo s nên $K(P, r_2) \geq K(P, r)$.

Do đó: $m \geq K(P, r_2) \geq K(P, r) = m$ nên $K(P, r_2) = m$.
Vậy $P(z)$ là đa thức $r_2 - dominant$.

2.1.6 Hàm đếm

Định nghĩa: Cho $f \in \mathcal{A}[r_1, r_2], f \neq 0$ và số $r : r_1 \leq r \leq r_2$.
Ta định nghĩa hàm đếm $N(f, 0, r)$ như sau:

Nếu $r_1 = 0$ thì $N(f, 0, r) = K(f, 0) logr$.

Nếu $r_1 > 0$ thì $N(f, 0, r) = \sum\limits_{0 \neq z \in A[r_1, r]: f(z) = 0} log \dfrac{r}{|z|}$.

2.2 Một số tính chất

Mệnh đề 2.2.1: *Vành các chuỗi Laurent p-adic $\mathcal{A}[r_1, r_2]$ là đầy đủ với chuẩn:*

$$|f|_{sup} = \sup_{r_1 \leq r \leq r_2} |f|_r$$

Chứng minh:

Lấy $(f_n)_n$ là một chuỗi Cauchy trong $\mathcal{A}[r_1, r_2]$, giả sử:

$$f_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_{n,m} z^m$$

Khi đó, với n, n' đủ lớn, ta có:

$$\varepsilon > |f_n - f_{n'}|_{sup} = \sup_{r_1 \leq r \leq r_2} \left(\sup_m |a_{n,m} - a_{n',m}| r^m \right) \tag{2.4}$$

Điều này suy ra rằng với mỗi m cố định thì dãy $(a_{n,m})_n$ là một dãy Cauchy, do đó nó hội tụ tới b_m nào đó.
Đặt:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m z^m$$

Ta có: $a_{n,m} \to b_m$ khi $|n| \to +\infty$ nên $|a_{n,m}| = |b_m|$ với n đủ lớn.
Suy ra $|b_m| r^m = |a_{n,m}| r^m \to 0$ khi $|n| \to +\infty$ hay $f \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$

Ngoài ra, cho $|n'| \to +\infty$ ở (2.4), ta có:

$$\varepsilon > |f_n - f|_{sup} = \sup_r \left(\sup_m |a_{n,m} - b_m| r^m \right)$$

với n đủ lớn, tức là $f_n \to f$ với chuẩn sup ở trên.

Mệnh đề 2.2.2: *Tập tất cả các bán kính tới hạn của một chuỗi Laurent p-adic là rời rạc.*

Chứng minh:

Giả sử $f = \sum\limits_{n \in Z} a_n z^n$ là một chuỗi Laurent p-adic với bán kính tới hạn r', ta có: $K(f, r') > k(f, r')$.
Đặt $K = K(f, r')$, $\quad k = k(f, r')$.
Nếu $n > k$ thì hoặc $a_n = 0$ hoặc $|a_n|(r')^n \leq |a_k|(r')^k$.

⋆ **Nếu** $r < r'$ **thì:**

$$|a_n|r^n = \left(\frac{r}{r'}\right)^n |a_n|(r')^n \leq \left(\frac{r}{r'}\right)^n |a_k|(r')^k = \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-k} |a_k|r^k < |a_k|r^k$$

Vì vậy: $K(f, r) \leq k$. (2.5)

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $a_n = 0, \forall n < k$ thì $K(f, r) = k(f, r) = k$ với mọi $r < r'$. Do đó không có bán kính tới hạn nào nhỏ hơn r'.

Trường hợp 2: Tồn tại số $n < k$ thỏa điều kiện $a_n \neq 0$, ta chọn m là số nguyên lớn nhất còn nhỏ hơn k sao cho $a_m \neq 0$..
Do $a_m \neq 0$ nên $|a_k| \neq 0$ và thương $\dfrac{|a_m|}{|a_k|}$ xác định, nên ta chọn được:

$$r'' = \left(\frac{|a_m|}{|a_k|}\right)^{k-m}$$

Khi đó: $\quad |a_m|(r'')^m = |a_k|(r'')^k$ (2.6)

Mà $\quad |a_m|(r')^m < |a_k|(r')^k$ (2.7)

Lấy (2.7) chia (2.6) theo vế rồi rút gọn ta được: $1 < (\dfrac{r'}{r''})^{k-m}$ và vì $k > m$ nên $r'' < r'$.

Với mọi $r : r'' < r < r'$, do (2.5) ta có: $K(f, r) \leq k$. (2.8)

Mặt khác: $\dfrac{|a_m|}{|a_k|} = (r'')^{k-m} < r^{k-m}$ (Do $r'' < r$).

$\Rightarrow |a_m|r^m < |a_k|r^k \Rightarrow |a_n|r^n < |a_k|r^k, \forall n < k$ (Do cách chọn m).

$$\Rightarrow k(f,r) \geq k. \tag{2.9}$$

Từ $(2.8), (2.9)$ suy ra: $K(f,r) = k(f,r) = k$.
(Do $k \leq k(f,r) \leq K(f,r) \leq k$).

Tức là không có bán kính tới hạn nào nằm giữa r'' và r'.

$\star$ **Lập luận tương tự với $r > r'$:**

Ta có $k(f,r) \leq K$.
Và nếu gọi M là số nguyên nhỏ nhất còn lớn hơn K sao cho $a_M \neq 0$ thì ta cũng có: $K(f,r) = k(f,r) = K$ và $|a_M|s^M = |a_K|s^K$ với mọi số $r : r' < r < s$ với $s > r'$.

Nghĩa là cũng không có bán kính tới hạn nào nằm giữa r' và s.

Mệnh đề 2.2.2: *Cho $f \in \mathcal{A}[r_1, r_2], f \neq 0$. Khi đó: f chỉ có hữu hạn bán kính tới hạn.*

Chứng minh:

⋆ Lấy r là một bán kính tới hạn bất kì của f trong đoạn $[r_1, r_2]$.
Vì $f \neq 0$ nên $k = k(f, r_1)$ và $K = K(f, r_2)$ đều hữu hạn.
Mà $K(f, r), k(f, r)$ không giảm theo r nên:
$k = k(f, r_1) \leq k(f, r) < K(f, r) \leq K(f, r_2) = K$.
Do đó:
$(k(f, r), K(f, r)) \in \{(i, j) : k \leq i < j \leq K\} = I$ - là tập hữu hạn (2.10)

⋆ Giả sử r, r' là 2 bán kính tới hạn của f, $r < r'$ và giả sử: $f = \sum_{n \in Z} a_n z^n$.
Khi đó, nếu đặt $k = k(f, r')$ thì với mọi $n : n > k$, ta có:

$$|a_n|r^n = \left(\frac{r}{r'}\right)^n |a_n|(r')^n \leq \left(\frac{r}{r'}\right)^n |a_k|(r')^k = \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-k} |a_k|r^k < |a_k|r^k$$

Vì vậy: $K(f, r) \leq k$ hay $K(f, r) \leq k(f, r')$ (2.11)

⋆ Bây giờ ta sẽ chứng minh tập các bán kính tới hạn của f chỉ có hữu hạn phần tử.
Giả sử ngược lại, có vô hạn bán kính tới hạn, do (2.10) nên phải tồn tại hai bán kính tới hạn $r, r', r \neq r'$ sao cho:
$$(k(f, r), K(f, r)) = (k(f, r'), K(f, r')) \in I.$$
Suy ra: $k(f, r) = k(f, r') < K(f, r') = K(f, r)$ (2.12)

Vì $r \neq r'$ nên có thể giả sử $r < r'$, trường hợp còn lại ta chứng minh tương tự.
Theo chứng minh ở (2.11), ta có: $K(f, r) \leq k(f, r')$ - điều này mâu thuẫn với (2.12).
Vậy f chỉ có hữu hạn bán kính tới hạn trong $[r_1, r_2]$.

Mệnh đề 2.2.4: *Cho* $r : r_1 \leq r \leq r_2$ *và* $f, g \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$ *. Khi đó :*

$$K(fg, r) = K(f, r) + K(g, r)$$
$$k(fg, r) = k(f, r) + k(g, r)$$

Chứng minh:

Dễ thấy mệnh đề đúng cho trường hợp $f = 0$ hoặc $g = 0$, ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $f \neq 0$ và $g \neq 0$, khi đó $K(f, r)$ và $K(g, r)$ đều hữu hạn. Trước tiên ta chứng minh định lí đúng với K, tương tự, bằng cách thay z bởi z^{-1}, ta chứng minh định lí cũng đúng cho k.
Giả sử:

$$f(z) = \sum_{n \in Z} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n \in Z} c_n z^n$$

và

$$fg(z) = \sum_{n \in Z} c_n z^n, \qquad c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j, \forall n \in Z$$

Lấy $m = K(f, r) + K(g, r)$ thì :

$$c_m = \sum_{i+j=m} a_i b_j$$

Một trong những số hạng của tổng này là $a_s b_t$ với $s = K(f, r), t = K(g, r)$. Ta có:

$$|a_s b_t| = \frac{|a_s| r^s |b_t| r^t}{r^{s+t}} = \frac{|f|_r |g|_r}{r^m} = \frac{|fg|_r}{r^m} \qquad (2.13)$$

$\star$ Xét các số hạng khác trong tổng c_m, nếu $i < s$ thì $j > t$ nên:

$$|a_i| \leq \frac{|f|_r}{r^i} \text{ và} |b_j| < \frac{|g|_r}{r^j}$$

do đó:

$$|a_i b_j| < \frac{|f|_r |g|_r}{r^m} = \frac{|fg|_r}{r^m}$$

Tương tự:

$$|a_i b_j| < \frac{|f|_r |g|_r}{r^m} = \frac{|fg|_r}{r^m} \text{ nếu } i > s$$

Tức là:

$$|a_i b_j| < \frac{|fg|_r}{r^m}, \forall i \neq s \qquad (2.14)$$

Từ $(2.13),(2.14)$ và tính chất của chuẩn phi Archimede, ta có:

$$|c_m| = \frac{|fg|_r}{r^m} \text{ hay} |c_m| r^m = |fg|_r$$

Do vậy: $K(fg,r) \geq m.$ (2.15)

$\star$ Nhưng nếu lại xét các số hạng khác $c_n = \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j$ mà $n > m$

thì $i + j > m$ nên $i > s$ hoặc $j > t$.

Nếu $i > s$ thì $|a_i| < \dfrac{|f|_r}{r^i}$ và $|b_j| \leq \dfrac{|g|_r}{r^j}$, do đó: $|a_i b_j| < \dfrac{|fg|_r}{r^n}$.

Tương tự trong trường hợp $j > s$ ta cũng có: $|a_i b_j| < \dfrac{|fg|_r}{r^n}$

$\Rightarrow |c_n| \leq \max\{|a_i b_j| : i + j = n\} < \dfrac{|fg|_r}{r^n}$.

Tức là: $|c_n| r^n < |fg|_r \forall n > m$.

Do vậy: $K(fg,r) \leq m.$ (2.16)

Từ (2.15) và (2.16) suy ra: $K(fg,r) = m$, nghĩa là:

$K(fg,r) = K(f,r) + K(g,r).$

Mệnh đề 2.2.1: *Cho $f \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$ và số thực $r : r_1 \leq r \leq r_2$*
Khi đó: Nếu $K(f, r) = k(f, r)$ thì f khả nghịch trong $\mathcal{A}[r, r]$

Chứng minh:

Dễ thấy: $K(fz^m, r) = K(f, r) + m$, và tương tự $k(fz^m, r) = k(f, r) + m$.
Do vậy, nếu đặt $g = fz^{-k(f,r)}$ thì $K(g, r) = k(g, r) = 0$. (2.17)
Giả sử:

$$g(z) = \sum_{n \in Z} c_n z^n \quad \text{thì: } g - c_0 = \sum_{n \in Z, n \neq 0} c_n z^n$$

Từ (2.17) suy ra: $|c_n| r^n < |c_0|, \forall n \neq 0$.

Mà $|c_n| r^n \to 0$ khi $|n| \to +\infty$ nên:

$$|g - c_0|_r = \sup\{|c_n| r^n : |n| \leq N, n \neq 0\} \text{ với } N \text{ đủ lớn.}$$

Vậy: $|g - c_0|_r < |c_0|$ hay: $\dfrac{|c_o|}{|g - c_0|_r} < 1$.
$\Rightarrow |c_0^{-1} g - 1|_r < 1$.

Như vậy: $g^{-1} = (c_0 - (c_0 - g))^{-1} = c_0^{-1}(1 - (1 - c_0^{-1} g))^{-1}$

$$= c_0^{-1}[1 + (1 - c_0^{-1} g) + (1 - c_0^{-1} g)^2 + ... + (1 - c_0^{-1} g)^n + ...].$$

Như vậy, g khả nghịch trong $\mathcal{A}[r, r]$, mà $z^{-k(f,r)}$ cũng khả nghịch trong $\mathcal{A}[r, r]$ và $g = fz^{-k(f,r)}$ do đó f khả nghịch trong $\mathcal{A}[r, r]$.

Mệnh đề 2.2.6: *Đa thức $P \in C_p[z]$ có $K(P,r) - k(P,r)$ không điểm (tính cả bội) với chuẩn bằng r.*

Chứng minh:

Đặt $K = K(P,r), k = k(P,r)$
Không mất tổng quát, ta có thể giả sử P là đa thức đơn khởi.
Ta sẽ đi chứng minh mệnh đề bằng quy nạp theo bậc của P.

- **Xét** $n = 1 : P(z) = z + b_0$
  $|b_0| = r \Rightarrow |P|_r = |b_0| = r \Rightarrow K = 1, k = 0$
  $\Rightarrow P$ có 1 nghiệm là $-b_0$ có chuẩn bằng r.
  Vậy $K - k =$ Số nghiệm của P có chuẩn bằng r.
  $|b_0| > r$ hoặc $|b_0| < r \Rightarrow K = k = 0$ và P không có nghiệm mà chuẩn bằng r.
  $\Rightarrow K - k =$ Số nghiệm của P có chuẩn bằng r.

- **Giả sử mệnh đề đúng với mọi đa thức có bậc nhỏ hơn n, ta sẽ chứng minh mệnh đề cũng đúng với đa thức P bậc n.**
  Giả sử: $P(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$ và z_1 là một nghiệm của $P(z)$.
  Ta có:

$$P(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$$
$$= (z - z_1)(z^n + a_{n-1}z^{n-2} + ... + a_1 z + a_0) = (z - z_1)Q(z)$$

Với $Q(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-2} + ... + a_1 z + a_0$
Đặt $K_1 = K(Q,r), k_1 = k(Q,r)$.
Theo giả thiết quy nạp, $Q(z)$ có đúng $K_1 - k_1$ không điểm (tính cả bội) có chuẩn là r.

(2.18)

$\star$ **Bây giờ ta sẽ đi xét từng trường hợp cụ thể:**
$b_0 = -z_1 a_0 \Rightarrow |b_0| = |a_0||z_1|$
Nếu $k_1 > 0$ thì $|a_0| < |a_{K_1}|r^{K_1}$

$$\Rightarrow |a_0||z_1| < |z_1||a_{K_1}|r^{K_1} \text{ nên } |b_0| < \frac{|z_1|}{r}|a_{K_1}|r^{K_1+1} \tag{2.19}$$

Nếu $k_1 = 0$ thì $|a_0| = |a_{K_1}|r^{K_1}$

$$\Rightarrow |a_0||z_1| = |z_1||a_{K_1}|r^{K_1} \text{ nên } |b_0| = \frac{|z_1|}{r}|a_{K_1}|r^{K_1+1} \tag{2.20}$$

Với $j : 0 < j < k_1$ hoặc $K_1 + 1 < j \leq n$:
$|b_j|r^j = |a_{j-1} - z_1 a_j|r^j$ (do $|b_j| = |a_{j-1} - z_1 a_j|$)

$$\leq max\{|a_{j-1}|r^{j-1}, \frac{|z_1|}{r}|a_j|r^j\}r$$
$$< max\{1, \tfrac{|z_1|}{r}\}|a_{K_1}|r^{K_1+1} \qquad (2.21)$$

(do : $|a_{j-1}|r^{j-1} < |a_{K_1}|r^{K_1}$ & $|a_j|r^j < |a_{K_1}|r^{K_1}$

với mọi $j : 0 < j < k_1$ hoặc $K_1 + 1 < j \leq n$)

Với $j = k_1 > 0$ và $|z_1| < r$ thì:

$$|b_{k_1}|r^{k_1} = |a_{k_1-1} - z_1 a_{k_1}|r^{k_1}$$
$$\leq max\{|a_{k_1-1}|r^{k_1-1}, \frac{|z_1|}{r}|a_{k_1}|r^{k_1}\}r$$
$$< (|a_{k_1}|r^{k_1})r = |a_{K_1}|r^{K_1+1} \qquad (2.22)$$

Với $j = k_1 > 0$ và $|z_1| > r$ thì:

$$|b_{k_1}|r^{k_1} = |a_{k_1-1} - z_1 a_{k_1}|r^{k_1} = max\{|a_{k_1-1}|r^{k_1-1}, \frac{|z_1|}{r}|a_{k_1}|r^{k_1}\}r$$
$$= \frac{|z_1|}{r}|a_{K_1}|r^{K_1+1} \qquad (2.23)$$

(Vì: $|a_{k_1}|r^{k_1} \geq |a_{k_1-1}|r^{k_1-1}$ và $|z_1| < r$
$\Rightarrow \frac{|z_1|}{r}|a_{k_1}|r^{k_1} > |a_{k_1-1}|r^{k_1-1}$)

Với $j : k_1 + 1 \leq j \leq K_1$ thì:

$$|b_j|r^j = |a_{j-1} - z_1 a_j|r^j \leq max\{|a_{j-1}|r^{j-1}, \frac{|z_1|}{r}|a_j|r^j\}r$$
$$\leq max\{1, \frac{|z_1|}{r}\}|a_{K_1}|r^{K_1+1} \qquad (2.24)$$

Với $j = k_1 + 1$ và $|z_1| < r$ thì:

$$|b_{k_1+1}|r^{k_1+1} = |a_{k_1} - z_1 a_{k_1+1}|r^{k_1+1}$$
$$= max\{|a_{k_1}|r^{k_1}, \frac{|z_1|}{r}|a_{k_1+1}|r^{k_1+1}\}r = |a_{K_1}|r^{K_1+1} \qquad (2.25)$$

(Vì: $|a_{k_1}|r^{k_1} \geq |a_{k_1+1}|r^{k_1+1}$ và $|z_1| < r$
$\Rightarrow |a_{k_1}|r^{k_1} > \frac{|z_1|}{r}|a_{k_1+1}|r^{k_1+1}$)

Với $j = K_1$ và $|z_1| > r$ thì:

$$|b_{K_1}|r^{K_1} = |a_{K_1-1} - z_1 a_{K_1}|r^{K_1}$$
$$= max\{|a_{K_1-1}|r^{K_1-1}, \frac{|z_1|}{r}|a_{K_1}|r^{K_1}\}r = \frac{|z_1|}{r}|a_{K_1}|r^{K_1+1}$$

$$(2.26)$$

$$(\text{Vì: } |a_{K_1}|r^{K_1} \geq |a_{K_1-1}|r^{K_1-1} \text{ và } |z_1| > r$$
$$\Rightarrow \frac{|z_1|}{r}|a_{K_1}|r^{K_1} > |a_{K_1-1}|r^{K_1-1})$$

Với $j = K_1 + 1 < n$ và $|z_1| > r$ thì:

$$|b_{K_1+1}|r^{K_1+1} = |a_{K_1} - z_1 a_{K_1+1}|r^{K_1+1}$$
$$\leq max\{|a_{K_1}|r^{K_1}, \frac{|z_1|}{r}|a_{K_1+1}|r^{K_1+1}\}r$$
$$< \tfrac{|z_1|}{r}|a_{K_1}|r^{K_1+1} \quad (2.27)$$

$$(\text{Vì: } |a_{K_1}|r^{K_1} > |a_{K_1+1}|r^{K_1+1} \text{ và } |z_1| > r$$
$$\Rightarrow \frac{|z_1|}{r}|a_{K_1}|r^{K_1} > |a_{K_1+1}|r^{K_1+1})$$

Với $j = K_1 + 1 < n$ và $|z_1| \leq r$ thì:

$$|b_{K_1+1}|r^{K_1+1} = |a_{K_1} - z_1 a_{K_1+1}|r^{K_1+1}$$
$$= max\{|a_{K_1}|r^{K_1}, \frac{|z_1|}{r}|a_{K_1+1}|r^{K_1+1}\}r$$
$$= |a_{K_1}|r^{K_1+1} \quad (2.28)$$

$$(\text{Vì: } |a_{K_1+1}|r^{K_1+1} < |a_{K_1}|r^{K_1} \text{ và } |z_1| \leq r$$
$$\Rightarrow \frac{|z_1|}{r}|a_{K_1+1}|r^{K_1+1} < |a_{K_1}|r^{K_1})$$

Với $K_1 = n - 1$ thì:

$$|b_n|r^n = r^n = |a_{K_1}|r^{K_1+1} \quad (2.29)$$
$$(\text{Vì: } b_n = 1, a_{K_1} = a_{n-1} = 1)$$

⋆ **Từ các kết quả ở trên, ta xét 3 trường hợp:**

Trường hợp 1: $|z_1| = r$:

Lúc này, P có thêm một nghiệm là z_1 so với Q và $|z_1| = r$, do vậy số không điểm có chuẩn bằng r của P = Số không điểm có chuẩn bằng r của $Q + 1 = K_1 - k_1 + 1$.

Do $(2.19), (2.21)$:

$$|b_j|r^j < |a_{K_1}|r^{K_1+1}, \forall j : 0 \leq j < k_1 \text{ hoặc } K_1 + 1 < j \leq n.$$

Do $(2.20), (2.23), (2.28), (2.29)$:

$$|b_{k_1}|r^{k_1} = |b_{K_1+1}|r^{K_1+1} = |a_{K_1}|r^{K_1+1}.$$

Do (2.24):

$$|b_j|r^j \leq |a_{K_1}|r^{K_1+1} = |b_{K_1+1}|r^{K_1+1}, \forall j : k_1 + 1 \leq j \leq K_1 \ .$$

Vậy $K = K_1 + 1$ và $k = k_1$

$\Rightarrow K - k = K_1 + 1 - k_1 = K_1 - k_1 + 1$

= Số không điểm của P có chuẩn bằng r.

Trường hợp 2: $|z_1| < r$**:**

Lúc này số không điểm có chuẩn bằng r của P = Số không điểm có chuẩn bằng r của Q là $K_1 - k_1$.

Do $(2.19), (2.21)$:

$$|b_j|r^j < |a_{K_1}|r^{K_1+1}, \forall j : 0 \leq j < k_1 \text{ hoặc } K_1 + 1 < j \leq n.$$

Do $(2.20), (2.22)$:

$$|b_{k_1}|r^{k_1} < |a_{K_1}|r^{K_1+1}.$$

Do $(2.28), (2.29), (2.25)$:

$$|b_{K_1+1}|r^{K_1+1} = |a_{K_1}|r^{K_1+1} = |b_{k_1+1}|r^{k_1+1}.$$

Do (2.24) :

$$|b_j|r^j \leq |a_{K_1}|r^{K_1+1} = |b_{K_1+1}|r^{K_1+1}, \forall j : k_1 + 1 \leq j \leq K_1 \ .$$

Vậy $K = K_1 + 1$ và $k = k_1 + 1$

$\Rightarrow K - k = K_1 + 1 - (k_1 + 1) = K_1 - k_1$

= Số không điểm của P có chuẩn bằng r.

Trường hợp 3: $|z_1| < r$**:**

Lúc này số không điểm có chuẩn bằng r của P = Số không điểm có chuẩn bằng r của Q là $K_1 - k_1$.

Do $(2.19), (2.21), (2.27), (2.29)$:

$$|b_j|r^j < \frac{|z_1|}{r}|a_{K_1}|r^{K_1+1}, \forall j : 0 \leq j < k_1 \text{ hoặc } K_1 + 1 < j \leq n.$$

Do (2.24):

$$|b_j|r^j \leq \frac{|z_1|}{r}|a_{K_1}|r^{K_1+1}, \forall j : k_1 + 1 \leq j \leq K_1 - 1 \ .$$

Do $(2.20), (2.23, (2.26)$:

$$|b_{k_1}|r^{k_1} = |b_{K_1}|r^{K_1} = \frac{|z_1|}{r}|a_{K_1}|r^{K_1+1}.$$

Vậy $K = K_1$ và $k = k_1$

$\Rightarrow K - k = K_1 - k_1$

= Số không điểm của P có chuẩn bằng r.

Mệnh đề 2.2.7: *Cho r là một số thực dương. Khi đó, tập gồm tất cả các đa thức $r-extremal$ bậc d và đa thức không là tập đóng trong $C_p[z]$.*

Chứng minh:

Giả sử (P_n) là một dãy các đa thức $r-extremal$ bậc d,

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{d} a_{nk} z^k, \quad a_{nd} \neq 0$$

và giả sử $P_n \to P$ trong $C_p[z]$, $\quad P(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k, \quad a_m \neq 0$

Nếu $P \neq 0$, ta sẽ chứng minh P là đa thức $r-extremal$ bậc d.
Thật vậy, xét dãy các hệ số tự do của dãy đa thức $(P_n)_n$ là $(a_{n0})_n$, vì $P_n \to P$ nên $P_n(0) \to P(0)$ hay $a_{n0} \to a_0$..
Tiếp đó, ta xét dãy các hệ số bậc nhất của dãy đa thức (P_n)là $(a_{n1})_n$, ta có:

$$\frac{P_n - a_{n0}}{z} \to \frac{P - a_0}{z}$$

Hay: $$f_1(z) = a_{n1} + \sum_{k=2}^{d} a_{nk} z^{k-1} \quad \to \quad a_1 + \sum_{k=1}^{m} a_k z^{k-1} = g_1(z)$$

Do đó: $f_1(0) \quad \to \quad g_1(0)$ hay $a_{n1} \quad \to \quad a_1$.
Tương tự, ta có:

$$f_2(z) = \frac{f_1 - a_{n1}}{z} \quad \to \quad \frac{g_1 - a_1}{z} = g_2(z)$$

Suy ra $f_2(0) \quad \to \quad g_2(0)$ nên $a_{n2} \quad \to \quad a_2$.
... ...

Mặt khác, nếu $m > d$, thì tiếp tục lập luận như trên ta có: $a_{nm} \to a_m$, vì (P_n) là dãy các đa thức bậc d nên $a_{nm} = 0, \forall n$, do vậy: $a_m = 0$ - Trái giả thiết.

Nhưng nếu $m < d$ thì tiếp tục lập luận như trên, ta có:
$a_{nm} \to a_m$ và $a_{nd} \to 0 \Rightarrow |P_n|_r = |a_{nd}| r^d \to 0$ (P_n là đa thức $r-extremal$ bậc d).
Mà $P_n \to P$ nên $|P|_r = lim |P_n|_r = 0 \Rightarrow P = 0$ - Vô lí.

Vậy $m = d$ nên P là đa thức bậc d, theo lập luận trên, ta có:

$$a_{nk} \to a_k, \forall k, 0 \leq k \leq d, \text{ đặc biệt } a_{nd} \to a_d \text{ và } a_{n0} \to a_0 \tag{2.30}$$

Ngoài ra, lại do P_n là đa thức $r - extremal$ bậc d nên:
$|P_n|_r = |a_{nd}|r^d = |a_{n0}|$.

$$\Rightarrow |P|_r = lim|P_n|_r = lim|a_{nd}|r^d = lim|a_{n0}| \tag{2.31}$$

Từ (2.30), (2.31) suy ra:
$|P|_r = |a_d|r^d = |a_0|$, hay P là đa thức $r - extremal$ bậc d.

Mệnh đề 2.2.8: *Cho $f \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$ và $r \in [r_1, r_2]$.*
Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho: $K(f,s) = K(f,r), \forall s \in [r, r+\varepsilon)$
và tồn tại $\delta > 0$ sao cho: $k(f,s) = k(f,r), \forall s \in (r-\delta, r]$.
Do vậy, nếu r không là bán kính tới hạn của f thì tồn tại $\xi > 0$ sao cho:
$K(f,s) = k(f,s) = K(f,r) = k(f,r), \forall s \in (r-\xi, r+\xi)$.

Chứng minh:

Trong mệnh đề này ta sẽ sử dụng kết quả sau:
Nếu $r < s$ thì $K(f,r) \leq k(f,s)$ (Chứng minh tương tự mệnh đề 2.2.2 (2.5)).

△ Đặt: $K = K(f,r)$, giả sử: $f = \sum\limits_{n \in Z} a_n z^n$.
Với mọi $j > K$, ta có: $|a_j| r^j < |a_K| r^K$.

- Nếu $a_j = 0, \forall j > k$ thì vì $\forall s \geq r, K(f,s) \leq K(f,r) = K$ nên : $K(f,s) = K$, tức là ta có điều cần chứng minh.

- Nếu tồn tại $l > K : a_l \neq 0$, thì do f giải tích tại r nên có một chỉ số $i > K$ sao cho: $|a_i| r^i \geq |a_j| r^j, \forall j > K$.
  Thật vậy:
  Do f giải tích tại r, tức là $\lim\limits_{|n| \to +\infty} |a_n| r^n = 0$, nên:

$$\exists N > 0 : \forall n, |n| > N, |a_n| r^n < |a_l| r^l$$

$$\Rightarrow \forall j > N, |a_j| r^j < |a_l| r^l.$$

  Do định nghĩa của K, ta phải có: $K \leq N$

  * Trường hợp $K < N$:
    Đặt: $|a_i| r^i = max\{\max\limits_{K < j \leq N} |a_j| r^j, |a_l| r^l\}$.

  * Trường hợp $K = N$, đặt: $i = l$, ta có:
    $\forall j > K \Rightarrow j > N$ nên : $|a_j| r^j \leq |a_l| r^l = |a_i| r^i$.

  Như vậy trong cả hai trường hợp ta đều chỉ ra được một chỉ số $i > K$ sao cho:

$$|a_i| r^i \geq |a_j| r^j, \forall j > K \tag{2.32}$$

⋆ Tồn tại $s_r > r$ thỏa: $\forall s \in [r, s_r)$ thì : $|a_i| s^i < |a_K| s^K$ (2.33)
Thật vậy, ta đã biết:

$$|a_i|r^i < |a_K|r^K \Rightarrow r < \left(\frac{|a_K}{|a_i|}\right)^{\frac{1}{i-K}} \text{ (vì } i > K).$$

Chọn $s_r : r < s_r < \left(\frac{|a_K}{|a_i|}\right)^{\frac{1}{i-K}}$ thì: $\forall s \in [r, s_r)$ ta có:

$$s < s_r < \left(\frac{|a_K}{|a_i|}\right)^{\frac{1}{i-K}} \Rightarrow |a_i|s^i < |a_K|s^K.$$

Hơn nữa: $|a_i|s_r^i < |a_K|s_r^K$ (2.34)

⋆ Vì f cũng giải tích tại s_r nên chỉ có hữu hạn chỉ số $j > K$ sao cho:

$$|a_j|s_r^j \geq |a_i|s_r^i \quad (2.35)$$

Thật vậy, vì f giải tích tại s_r, tức là: $\lim\limits_{|n|\to+\infty} |a_n|s_r^n = 0.$

$\Rightarrow \exists N : \forall n, |n| > N, |a_n|s_r^n < |a_i|s_r^i$

$\Rightarrow \forall j, |j| > N, |a_j|s_r^j < |a_i|s_r^i.$

Do vậy, nếu $|a_j|s_r^j \geq |a_i|s_r^i$ thì $-N \leq j \leq N$, tức là chỉ có hữu hạn chỉ số j thỏa mãn $|a_j|s_r^j \geq |a_i|s_r^i$.

⋆ Do (2.35) nên có thể giả sử: $\{j > K : |a_j|s_r^j \geq |a_i|s_r^i\} = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$.
Với mỗi j_n $(n = 1, 2, ..., m)$, chứng minh tương tự (2.33), ta có: $s_n > r$ thỏa mãn:

$$|a_{j_n}|s^{j_n} < |a_K|s^K, \forall s \in [r, s_n)$$

Vì chỉ có hữu hạn j_n nên có thể đặt: $[r, r+\varepsilon) = \left(\bigcap\limits_{1\leq n\leq m} [r, s_n)\right) \bigcap [r, s_r).$

Khi đó, $|a_{j_n}|s^{j_n} < |a_K|s^K, \forall s \in [r, r+\varepsilon), \forall j_n$ (2.36)

⋆ Với $j > K, j \notin \{j_1, j_2, ..., j_m\}$ thì lại do (2.34) : $|a_i|s_r^i < |a_K|s_r^K$

Mà: $|a_j|s_r^j \geq |a_i|s_r^i$ (Do (2.35))

$$\Rightarrow |a_j|s_r^j < |a_K|s_r^K \Rightarrow s_r < \left(\frac{|a_K}{|a_j|}\right)^{\frac{1}{j-K}}.$$

Do vậy: $\forall s \in [r, r+\varepsilon) \Rightarrow s < s_r < \left(\frac{|a_K}{|a_j|}\right)^{\frac{1}{j-K}} \Rightarrow |a_i|s^j < |a_K|s^K.$

Từ kết quả này và (2.36), ta có: $\forall s \in [r, r+\varepsilon), \forall j > K : |a_j|s^j < |a_K|s^K.$

Suy ra: $K(f,s) \leq K$.

Mà: $K(f,s) \geq K(f,r) = K$, do $s \leq r$.

Như vậy: $K(f,s) = K, \forall s \in [r, r+\varepsilon)$.

$\triangle$ Chứng minh tương tự cho: $k(f,r)$, ta cũng có:
Tồn tại $\delta > 0$ sao cho: $k(f,s) = k(f,r), \forall s \in (r-\delta, r]$.

$\triangle$ Do vậy, nếu r không là bán kính tới hạn của f thì:
$K(f,r) = k(f,r)$ (2.37)
Mặt khác, theo chứng minh ở trên:
Tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho: $K(f,s) = K(f,r), \forall s \in [r, r+\varepsilon)$
và tồn tại $\delta > 0$ sao cho: $k(f,s) = k(f,r), \forall s \in (r-\delta, r]$.
Đặt: $\xi = \min\{\varepsilon, \delta\}$, ta có:
$\forall s \in [r, r+\xi), K(f,s) = K(f,r)$ mà $K(f,r) \leq k(f,s) \leq K(f,s)$ (do $s \geq r$) nên:

$$K(f,r) = k(f,s) = K(f,s) \tag{2.38}$$

và: $\forall s \in (r-\xi, r], k(f,s) = k(f,r)$ mà $k(f,r) \geq K(f,s) \geq k(f,s)$ (do $s \leq r$) nên:

$$k(f,r) = K(f,s) = k(f,s) \tag{2.39}$$

Từ (2.37), (2.38) và (2.39), ta có:

$$K(f,s) = k(f,s) = K(f,r) = k(f,r), \forall s \in (r-\xi, r+\xi)$$

Từ mệnh đề này, ta sẽ chứng minh một mệnh đề rất quan trọng cho việc chứng minh các định lí ở chương 3 - mệnh đề 2.2.9. Nhờ nó mà ta có thể thấy rõ sự nối tiếp của các chỉ số tối đại và chỉ số tối tiểu của một chuỗi Laurent p-adic: Nếu lấy 2 điểm tới hạn liên tiếp nhau thì chỉ số tối đại tại bán kính tới hạn nhỏ hơn sẽ bằng với chỉ số tối tiểu tại bán kính tới hạn lớn hơn.

Mệnh đề 2.2.9: *Cho $f \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$, $r \in [r_1, r_2]$ và s là bán kính tới hạn nhỏ nhất trong $[r_1, r_2]$ còn lớn hơn r.*
Khi đó: $k(f, s) = K(f, r)$.
Tương tự, nếu t là bán kính tới hạn lớn nhất trong $[r_1, r_2]$ còn nhỏ hơn r thì: $K(f, t) = k(f, r)$.

Chứng minh:

Đặt: $K = K(f, r)$ và $k = k(f, s)$.

Vì $s > r$ nên theo mệnh đề 2.2.8, ta có: $K(f, r) \leq k(f, s)$ hay $K \leq k$. Ta sẽ chứng minh: $K = k$.
Giả sử ngược lại $K < k$.

- Vì $\forall t \in [r, s)$ thì theo mệnh đề 2.2.8 $K \leq K(f, t) \leq k$ nên tập hợp:
  $A = \{K(f, t) : t \in [r, s)\}$ chỉ có hữu hạn phần tử.
  Giả sử $A = \{m_1, m_2, ..., m_l\}$ với $K \leq m_i \leq m_{i+1} \leq k, \forall i = 1, 2, ..., l$.

- Ta chứng minh $l = 1$, thật vậy vì nếu $l \geq 2$ thì mỗi $i = 1, 2, ..., l$, ta đặt:

$$I_i = \{t \in [r, s) : K(f, t) = m_i\}$$

Thì $I_i \cap I_j = \varnothing, \forall i, j : i \neq j$ và $[r, s) = \bigcup_{i=\overline{1,l}} I_i$ (2.40)

⋆ Vì $\forall t_i \in I_i$ và $\forall t_{i+1} \in I_{i+1}$ thì: $K(f, t_i) = m_i < m_{i+1} = K(f, t_{i+1})$
Mà $K(f, t)$ không giảm theo t nên: $t_i < t_{i+1}$.
Suy ra: $\sup I_i \leq \inf I_{i+1}$ và do đó: $\sup I_i \leq \inf I_j, \forall i < j$ (2.41)

⋆ Đặt $t_1 = \sup I_1$ và $t_2 = \inf I_2$ thì theo $(2.40), (2.41)$ ta có:
$r \leq t_1 \leq t_2 \leq s$.
Ta lại có: $t_1 = t_2$ vì nếu $t_1 < t_2$ thì tồn tại $t : t_1 < t < t_2$ (2.42)
Tức là: $t \in [r, s)$ mà $t \notin I_1$ và $t \notin I_2$.
Theo (2.40), tồn tại $j > 2$ để: $t \in I_j$ nhưng từ điều này ta lại có: $t_2 \leq t$ (theo (2.41)) - mâu thuẫn với (2.42).
Như vậy: $\sup I_1 = t_1 = t_2 = \inf I_2 = t_0$.

⋆ Nếu t_0 là một bán kính tới hạn của f thì $t_0 = s$ vì $r \leq t_0 \leq s$ và s là bán kính tới hạn nhỏ nhất của f còn lớn hơn r.

⋆ Nếu t_0 không là bán kính tới hạn của f thì theo mệnh đề 2.2.8:
Tồn tại $\xi > 0$ sao cho:
$K(f, t) = k(f, t) = K(f, t_0) = k(f, t_0), \forall t \in (t_0 - \xi, t_0 + \xi)$ (2.43)
Vì $\sup I_1 = t_1 = t_0$ nên với $\xi > 0$, tồn tại $s_1 \in I_1$ sao cho: $s_1 \in (t_0 - \xi, t_0]$.

Do $s_1 \in I_1$ nên $K(f, s_1) = m_1$ và $s_1 \in (t_0 - \xi, t_0]$ nên
$K(f, s_1) = K(f, t_0)$ (Do (2.43)).
Vậy nên: $K(f, t_0) = m_1$ (2.44)
Vì $\inf I_2 = t_2 = t_0$ nên với $\xi > 0$, tồn tại $s_2 \in I_2 : s_2 \in [t_0, t_0 + \xi)$.
Do $s_2 \in I_2$ nên $K(f, s_2) = m_2$ và $s_2 \in [t_0, t_0 + \xi)$ nên
$K(f, s_2) = K(f, t_0)$ (Do (2.43)).
Vậy nên: $K(f, t_0) = m_2$ (2.45)
Từ $(2.44), (2.45)$ suy ra: $m_1 = m_2$ - Mâu thuẫn với giả thiết $m_1 < m_2$.

Như vậy: $l = 1$ hay $\{K(f, t) : t \in [r, s)\} = K$ (2.46)

- Lại do mệnh đề 2.2.8, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho:

$$k(f, t) = k(f, s) = k, \forall t \in (s - \varepsilon, s]. \tag{2.47}$$

Lấy $t = s - \varepsilon/2$, ta có: $k(f, t) = k$ (Do (2.47)).
Nhưng khi đó, do $r \leq t < s$ hay $t \in [r, s)$ nên $K(f, t) = K$.
Vậy: $K = k$.

Tương tự, nếu t là bán kính tới hạn lớn nhất trong $[r_1, r_2]$ còn nhỏ hơn r thì:
$K(f, t) = k(f, r)$.

2.3 Định lí Weierstrass cho hàm giải tích p - adic

Định lí Weierstrass cho hàm giải tích p - adic :
Cho $r > 0$ *và* $f \in \mathcal{A}[r], f \neq 0$ *và* $d = K(f,r)$. *Khi đó, tồn tại một đa thức* $r-dominant$ *bậc* d *là* $P \in C_p[z]$ *và một hàm giải tích*

$$h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}[r]$$

thỏa mãn:
(i) $f = P.h.$
(ii) $|h-1|_r < 1$ *hay* $K(h,r) = k(h,r) = 0.$
(iii) $|f-P|_r < |f|_r.$

Chương 3

CÁC ĐỊNH LÍ QUAN TRỌNG

Chương này sẽ sử dụng phần kiến thức chuẩn bị ở chương 1 và các tính chất ở chương 2, đặc biệt là mệnh đề 2.2.3 và các mệnh đề từ 2.2.5 đến mệnh đề 2.2.9 để chứng minh những định lí quan trọng về chuỗi Laurent p-adic: Định lí về phép chia Euclide, định lí Weierstrass. Cuối cùng là một số ứng dụng của định lí Weierstrass: Định lí về số không điểm của một chuỗi Laurent p-adic và định lí Poisson - Jensen.

3.1 Định lí chia Euclide cho hàm giải tích p-adic

Định lí: :*Cho một số thực $r > 0$, hàm f giải tích trên $A[r]$ và P là một đa thức trong $C_p[z]$ với $P \neq 0$ và là $r - dominant$.*
Khi đó, tồn tại duy nhất một cặp (q, R), R là một đa thức, q giải tích trên $A[r]$ thoả mãn:

(i) $f = Pq + R$

(ii) $deg(R) < deg(P)$

(iii) $|R|_r \leq |f|_r$

(iv) $|q|_r \leq |f|_r/|P|_r$.

Chứng minh:

Nếu $f = 0$ thì hiển nhiên định lí đúng, ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $f \neq 0$.

△ **Đầu tiên ta chứng minh cho trường hợp f là một đa thức**

Giả sử:

$$f = \sum_{n=0}^{l} c_n z^n \qquad \text{và} \qquad P = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$$

Khi đó, ta đã có sự tồn tại duy nhất của của cặp (q, R) và (i), (ii). Bây giờ ta chứng minh các tính chất (iii), (iv).

⋆ **Trường hợp r = 1:**

Giả sử tất cả các hệ số của f và P đều có chuẩn không vượt quá 1, trong đó có ít nhất một hệ số có chuẩn bằng 1, tức là hệ số của f và P đều nằm trong $\mathcal{O}$ và $|f|_1 = 1$, $|P|_1 = 1$.

Vì P là r-dominant nên hệ số cao nhất của P có chuẩn bằng 1, do tính chất của phép chia Euclide trong trường hợp này, tất cả các hệ số của q và R phải nằm trong $\mathcal{O}$.

Suy ra: $|R|_1 \leq 1, |q|_1 \leq 1$.

Nghĩa là: $|R|_1 \leq |f|_1$ và $|q|_1 \leq |f|_1/|P|_1$, ta có tính chất (iii) và (iv)

Nếu $|f|_1 \neq 1$ hoặc $|P|_1 \neq 1$.

$$|f|_1 = \max_n |c_n| 1^n = \max_n |c_n|$$

Giả sử: $|f|_1 = |c_k|$, do $f \neq 0$ nên $c_k \neq 0$.

Đặt

$$f' = f.c_k^{-1} = \sum_{n \in Z} (c_k^{-1}.c_n) z^n$$

$$|f'|_1 = \max_{n \in Z} |c_k^{-1}|.|c_n|.1^n = \frac{1}{|c_k|} \max_n |c_n| = \frac{1}{|c_k|} |c_k| = 1$$

Tương tự: P là $1-$dominant nên $|P|_1 = |a_m| \neq 0$

Đặt

$$P' = P.a_m^{-1} = \sum_{n=0}^{m} (a_m^{-1}.a_n) z^n$$

$$|P'|_1 = \max_{0 \leq n \leq m} |a_m^{-1}|.|a_n|.1^n = \frac{1}{|a_m|} \max_{0 \leq n \leq m} |a_n| = \frac{1}{|a_m|}.|a_m| = 1$$

Như vậy: $|f'|_1 = 1$, $|P'|_1 = 1$

Do ta đã chứng minh bổ đề đúng cho f, P trường hợp $|f|_1 = 1$, $|P|_1 = 1$ nên ta có bổ đề đúng cho f', P'.

Tức là tồn tại duy nhất cặp $(q', R'), R'$ là đa thức bậc nhỏ hơn m , q giải tích trên $A[1]$ thoả:

(i) $f' = P'q' + R'$
(ii) $deg(R') < deg(P')$
(iii) $|R'|_1 \leq |f'|_1$
(iv) $|q'|_1 \leq |f'|_1/|P'|_1$

(i) $f' = P'q' + R' \Rightarrow f.c_k^{-1} = P.a_m^{-1}q' + R'$
$\Rightarrow f = P.(a_m^{-1}.c_k q') + (R'.c_k)$

Đặt $q = a_m^{-1}.c_k q', \quad R = R'.c_k$, ta có: $f = P.q + R$
và

$$|g|_1 = |c_k||a_m^{-1}||g'|_1 \leq |c_k|\frac{1}{|a_m|}.1 = \frac{|f|_1}{|P|_1}$$

$$|R|_1 = |R'|_1|c_k| \leq |f'|_1|c_k| = |f|_1|c_k^{-1}||c_k| = |f|_1$$

$$degR = degR' < degP$$

(Tức là ta có (ii),(iii),(iv))

⋆ **Trường hợp 2:** r **bất kì**

(∗) **Trường hợp 2a:** $r \in |C_p^*|$ Chọn số $a \in C_p$ sao cho $|a| = r$.
Thay biến z bởi biến $a^{-1}z$, ta đưa về trường hợp trên, thật vậy:

$$f = \sum_{n=0}^{l} c_n a^n (a^{-1}z)^n$$

$$|f|_1 = \max_n |c_n||a|^n 1^n = \max_n |c_n|r^n = |f|_r$$

Do vậy, ta có thể xem như $r = 1$.

(∗) **Trường hợp 2b:** $r \notin |C_p^*|$
Do Q trù mật trong R nên tồn tại một dãy $(r_i)_i \subset Q$ mà
$r_i \geq r, \forall i$ và $\lim\limits_{i\to+\infty} r_i = r$.
Theo mệnh đề 2.1.5, P là $r_i - dominant, \forall i$.
Khi đó, nếu định lí đúng với $r_i, \forall i$ thì ta có:

$$|R|_{r_i} \leq |f|_{r_i} \qquad \text{và} \qquad |q|_{r_i} \leq \frac{|f|_{r_i}}{|P|_{r_i}}$$

Lấy giới hạn khi $i \to +\infty$ của biểu thức trên ta có:

$$|R|_r \leq |f|_r \qquad \text{và} \qquad |q|_r \leq \frac{|f|_r}{|P|_r} \qquad \text{(đccm)}$$

$\triangle$ **Bây giờ ta chứng minh cho trường hợp f bất kì**

Nếu f không là đa thức, ta có thể tìm thấy một dãy các đa thức $\{f_n\}$ sao cho $|f - f_n| \to 0$. Thật vậy, có thể chọn ngay dãy các đa thức $\{f_n\}$ là biểu diễn chuỗi luỹ thừa của f với bậc tăng dần.
Với mỗi $n \in N$, lấy q_n và R_n lầ lượt là thương và dư của phép chia f_n cho P.
Chúng ta chứng minh được rằng q_n và R_n là các dãy trong $A[r]$ hơn thế, chúng còn là các dãy Cauchy với chuẩn $|\quad|_r$.
Do đó chúng hội tụ đến q và R trong $A[r]$.
Vì $degR_n < degP$ nên R_n phải hội tụ đến một đa thức bậc nhỏ hơn bậc của P.
Ta có tính chất (i) đến (iv) vẫn đúng khi lấy giới hạn $n \to \infty$.
Tính chất (iv) bảo đảm rằng thương q là giải tích trong $A[r]$.

$\triangle$ **Chứng minh tính duy nhất của cặp (q, R):**

Giả sử: $q_1P + R_1 = q_2P + R_2 \to P(q_1 - q_2) = R_2 - R_1$
Nếu $q_1 \neq q_2$ thì:

$$\begin{aligned} K(R_2 - R_1, r) &= K(P, r) + K(q_1, q_2, r) \\ &= degP + K(q_1 - q_2, r) \geq degP \end{aligned}$$

Điều này trái với giả thiết R_2, R_1 đều là các đa thức bậc nhỏ hơn bậc của P.

Bây giờ ta tiếp tục với hệ quả của định lí 3.1 - định lí chia Euclide cho chuỗi Laurent p-adic

3.2 Định lí chia Euclide cho chuỗi Laurent p-adic:

Định lí: *Cho số thực* $r > 0 : r_1 \leq r \leq r_2$.
f là một chuỗi Laurent p-adic trên $A[r_1, r_2]$ ($f \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$)*, P là một đa thức* $r - extremal$.
Khi đó, tồn tại duy nhất một cặp (q, R)*, R là một đa thức,* $q \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$ *thoả mãn:*

(i) $f = Pq + R$
(ii) $deg(R) < deg(P)$
(iii) $|R|_r \leq |f|_r$
(iv) $|q|_r \leq |f|_r/|P|_r$

Chứng minh:

Cũng giống như ở định lí 3.1, ta chỉ chứng minh cho trường hợp $f \neq 0$.

△ **Trước tiên ta chứng minh tính duy nhất của cặp** (q, R).
Giả sử tồn tại hai cặp (q, R) và $(\widetilde{q}, \widetilde{R})$ đều thỏa mãn các điều kiện trên mà $q \neq \widetilde{q}$ hoặc $R \neq \widetilde{R}$.

⋆ Nếu $R \neq \widetilde{R}$ thì: tồn tại bậc $deg(R - \widetilde{R})$ và

$$K(\widetilde{R}-R, r) - k(\widetilde{R}-R, r) \leq deg(R-\widetilde{R}) < deg(P). \quad (3.1)$$

(Do $R, \widetilde{R}$ là các đa thức bậc nhỏ hơn $deg(P)$)

Ta có: $Pq + R = f = P\widetilde{q} + \widetilde{R} \Rightarrow P(q - \widetilde{q}) = \widetilde{R} - R.$ (3.2)

Suy ra:

$$K(\widetilde{R}-R, r) = K(P, r) + K(q-\widetilde{q}, r) = deg(P) + K(q-\widetilde{q}, r) \quad (3.3)$$

và:

$$k(\widetilde{R}-R, r) = k(P, r) + k(q-\widetilde{q}, r) = 0 + k(q-\widetilde{q}, r) \quad (3.4)$$

(Do P là $r - extremal$.)

Lấy (3.3) – (3.4) theo vế ta được:

$$K(\widetilde{R}-R, r) - k(\widetilde{R}-R, r) = deg(P) + K(q-\widetilde{q}, r) - k(q-\widetilde{q}, r)$$

$$\Rightarrow K(\widetilde{R}-R, r) - k(\widetilde{R}-R, r) \leq deg(P).$$

Điều này mâu thuẫn với (3.1) (Do: $K(q-\widetilde{q}, r) - k(q-\widetilde{q}, r) \geq 0$).

$\star$ Nếu $q \neq \widetilde{q}$ thì từ (3.2) suy ra: $R \neq \widetilde{R}$ và tương tự như trên ta cũng dẫn tới điều mâu thuẫn.
Như vậy cặp (q, R) thỏa các điều kiện của mệnh đề là duy nhất.

$\triangle$ **Bây giờ ta chứng minh sự tồn tại của cặp (q, R):**

Giả sử
$$f = \sum_{n \in Z} a_n z^n$$

Ta viết:
$$f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n<0} a_n z^n = f_1 + f_2.$$

Với
$$f_1 = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \qquad f_2 = \sum_{n<0} a_n z^n$$

Khi đó, f_1 là hàm giải tích p-adic nên có thể áp dụng thuật chia Euclide (định lí 3.1) trong phép chia f_1 cho P, ta được thương là q_1 và dư R_1 thỏa các điều kiện của định lí 3.1.

Ta có: $f_1 = Pq_1 + R_1$, $deg(R) < deg(P), |q_1|_r < \dfrac{|f_1|_r}{|P|_r}$
và $\quad |R|_r \leq |f_1|_r$ (3.5)

Vì $r_2 \leq r$ nên P cũng là $r_2 - dominant \Rightarrow q_1 \in \mathcal{A}[r_2]$.

$\star$ Theo mệnh đề 2.1.6 ta có: $z^{deg(P)}P(z^{-1})$ là $r^{-1} - extremal.$

$\dfrac{f_2(z^{-1})}{z} = \sum_{n<0} a_n z^{-n-1} = \sum_{m \geq 0} b_m z^m$ là một chuỗi lũy thừa hội tụ

với $|z| = r^{-1}$ ($m = -n-1, b_m = a_n, \forall m \geq 0$)

hay: $\quad \dfrac{f_2(z^{-1})}{z} \in \mathcal{A}[r^{-1}] \quad \Rightarrow \quad z^{deg(P)}\dfrac{f_2(z^{-1})}{z} \in \mathcal{A}[r^{-1}]$

Do vậy, lấy $\dfrac{f_2(z^{-1})}{z}$ chia cho $z^{deg(P)}P(z^{-1})$ được thương là q_2 và dư R_2 thỏa các điều kiện của định lí 3.1.
Tức là: $deg(R_2) < deg(P)$ và

$$z^{deg(P)}\frac{f_2(z^{-1})}{z} = z^{deg(P)}P(z^{-1})q_2(z) + R_2(z)$$

$$\Rightarrow f_2(z^{-1}) = zP(z^{-1})q_2(z) + z^{1-deg(P)}R_2(z)$$
$$\Rightarrow \quad f_2(z) = P(z)(z^{-1}q_2(z^{-1})) + z^{deg(P)-1}R_2(z^{-1})$$

⋆ Từ định lí 3.1 ta cũng có:

$$|R_2(z)|_{r^{-1}} \leq |z^{deg(P)}\frac{f_2(z^{-1})}{z}|_{r^{-1}} = |z^{deg(P)-1}f_2(z^{-1})|_{r^{-1}}$$
$$\Rightarrow |z^{1-deg(P)}R_2(z)|_{r^{-1}} \leq |f_2(z^{-1})|_{r^{-1}}$$
$$\Rightarrow |z^{deg(P)-1}R_2(z^{-1})|_r \leq |f_2(z)|_r$$

(Do mệnh đề 2.1.6). (3.6)

Và:

$$|q_2(z)|_{r^{-1}} \leq |z^{deg(P)}\frac{f_2(z^{-1})}{z}|_{r^{-1}}/|z^{deg(P)}P(z^{-1})|_{r^{-1}}$$
$$\Rightarrow |zq_2(z)|_{r^{-1}} \leq \frac{|f_2(z^{-1})|_{r^{-1}}}{|P(z^{-1})|_{r^{-1}}}$$
$$\Rightarrow |z^{-1}q_2(z^{-1})|_r \leq \frac{|f_2(z)|_r}{|P(z)|_r} \tag{3.7}$$

Bởi vì $r_1 \leq r$ và $z^{deq(P)}P(z^{-1})$ là $r^{-1} - dominant$ nên theo định lí 3.1, ta có:

$$z^{-1}q_2(z^{-1}) \in \mathcal{A}[r_1, \infty) \Rightarrow z^{-1}q_2(z^{-1}) \in \mathcal{A}[r_1, r_2]. \tag{3.8}$$

Hơn nữa:

$$|f|_r = \max_{n\in Z}|a_n|r^n \geq \max_{n\geq 0}|a_n|r^n = |f_1|_r$$

và: $|f|_r = \max_{n\in Z}|a_n|r^n \geq \max_{n<0}|a_n|r^n = |f_2|_r$

Vậy: $$|f|_r \geq max\{|f_1|_r, |f_2|_r\}. \tag{3.9}$$

⋆ Đặt:

$$q(z) = q_1(z) + z^{-1}q_2(z^{-1}) \quad , \quad R(z) = R_1(z) + z^{deg(P)-1}R_2(z^{-1})$$

Ta có:

(i) $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$
$= P(z)q_1(z) + R_1(z) + P(z)(z^{-1}q_2(z^{-1})) + z^{deg(P)-1}R_2(z^{-1})$

$= P(z)(q_1(z) + (z^{-1}q_2(z^{-1})) + (R_1(z) + z^{deg(P)-1}R_2(z^{-1}))$

$= P(z)q(z) + R(z).$

(ii) $R_2(z)$ là đa thức bậc nhỏ hơn $deg(P)$ nên $z^{deg(P)-1}R_2(z^{-1})$ là đa thức bậc nhỏ hơn $deg(P)$ và vì (3.5) nên bậc của đa thức $R(z) = R_1(z) + z^{deg(P)-1}R_2(z^{-1})$ cũng nhỏ hơn $deg(P)$.

(iii) $|R(z)|_r = |R_1(z) + z^{deg(P)-1}R_2(z^{-1})|_r$

$$\leq max\{|R_1(z)|_r, |z^{deg(P)-1}R_2(z^{-1})|_r\}$$

$$\leq max\{|f_1|_r, |f_2|_r\} \qquad \text{(Do(3.5) và (3.6)).}$$

$$\leq |f|_r \qquad \text{. (Do (3.9))}$$

(iv) Từ (3.5) và (3.8) ta có: $q(z) \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$.

và: $|q(z)|_r = |q_1(z) + z^{-1}q_2(z^{-1})|_r$

$$\leq max\{|q_1(z)|_r, |z^{-1}q_2(z^{-1})|_r\}$$

$$\leq \max\{\frac{|f_1(z)|_r}{|P(z)|_r}, \frac{|f_2(z)|_r}{|P(z)|_r}\} \qquad \text{(Do 3.5 và 3.7).}$$

$$\leq \frac{1}{|P(z)|_r}\max\{|f_1(z)|_r, |f_2(z)|_r\}.$$

$$\leq \frac{1}{|P|_r}|f|_r \qquad \text{(Do 3.9)}$$

$$\leq \frac{|f|_r}{|P|_r}$$

3.3 Định lí Weierstrass

Định lí Weierstrass: *Cho $f \neq 0$ là một chuỗi Laurent trên $A[r_1, r_2]$, tức là $f \in \mathcal{A}[r_1, r_2] \setminus \{0\}$.*

Khi đó với mỗi số $r > 0 : r_1 \leq r \leq r_2$, đặt:

$d = K(f, r) - k(f, r)$.

Thì: Tồn tại duy nhất cặp (P, u) thỏa: $f = P.u$ và:

- *P là đa thức bậc d.*
- *$P(0) = 1, k(P, r) = 0, K(P, r) = d$.*
- *$u \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$ và $k(u, r) = K(u, r)$.*

Chứng minh:

(i) Không mất tổng quát, ta có thể giả sử: k(f, r) = 0:

Thật vậy, nếu

$$f = \sum_{n \in Z} a_n z^n$$

Đặt $k = k(f, r)$, ta có: $|f|_r = |a_k| r^k$

Và đặt:

$$f_1 = z^{-k}.f = \sum_{n \in Z} a_n z^{n-k}$$

$$\Rightarrow |f_1|_r = \max_n |a_n| r^{n-k} = (\max_n |a_n| r^n) r^{-k} = |a_k| r^k . r^{-k} = |a_k|$$

Đặt

$$b_{n-k} = a_n \Rightarrow f_1 = \sum_{n \in Z} b_{n-k} z^{n-k}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k(f_1, r) &= \min\{n \in Z| \quad |b_n| r^n = |f_1|_r\} \\ &= \min\{n \in Z| \quad |a_{n+k}| r^n = |a_k|\} \\ &= \min\{n \in Z| \quad |a_{n+k}| r^{n+k} = |a_k| r^k\} = 0 \end{aligned}$$

(Do $n + k = k$ nên $n = 0$).

Nếu $f_1 = P.u_1 \Rightarrow z^{-k} f = P.u_1$ thì :

$f = P.(u_1.z^k) = P.u$, với: $u = u_1.z^k$.

Dễ thấy P, u thoả các điều kiện của định lí.

(ii) Cũng không mất tổng quát, có thể giả sử: $|f|_r = 1$

Theo chứng minh trên, ta có thể xem: $k(f, r) = 0$ và do đó: $|f|_r = |a_0|$.

Thật vậy, đặt: $f_2 = a_0^{-1} f$
($a_0 \neq 0$ vì nếu $a_0 = 0$ thì do $|f|_r = |a_0| \Rightarrow f = 0$ - trái giả thiết).

$$\Rightarrow f_2 = \sum_{n \in Z} (a_n a_0^{-1}) z^n$$

$$\Rightarrow |f_2|_r = \max_{n \in Z} |a_n a_0^{-1}| r^n = (\max_{n \in Z} |a_n| r^n) |a_0^{-1}| = |a_0||a_0|^{-1} = 1$$

Nếu định lí được chứng minh cho f_2, tức là: $f_2 = P.u_2$ với P, u_2 thoả các điều kiện của định lí thì:
$f = a_0 f_2 = P.(a_0 u_2) = Pu$ với P, u thoả điều kiện định lí.

(iii) Hơn nữa, ta cũng có thể giả sử: $P(0) = a = 1$

Thật vậy, giả sử: $a \neq 1$.
Do $a \neq 0$ (như chứng minh ở phần (ii)) nên tồn tại $a^{-1} \in C_p$.
Đặt:
$P_0 = a^{-1} P, u_0 = au$, ta có: $P_0(0) = a^{-1} P(0) = a^{-1} a = 1$.

Giả sử định lí đã chứng minh đúng cho P , tức là: $f = Pu$ với P và u thoả các điều kiện của định lí (trừ điều kiện $P(0) = 1$) thì:
$f = Pu = (a^{-1} P)(au) = P_0 u_0$ với P_0, u_0 thoả các điều kiện của định lí và $P_0(0) = 1$.

(iv) Như vậy, theo các chứng minh trên, ta có thể chứng minh định lí với giả thiết:
$|f|_r = 1, \ \ k(f, r) = 0, P(0) = 1$**, và do đó:** $K(f, r) = d$

Giả sử: $f = \sum_{n \in Z} a_n z^n$, ta đặt: $P_1(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n$

Ta có: P_1 là $r-$extremal.
Thật vậy: $k(P_1, r) = \min\{0 \leq n \leq d : |a_n| r^n = |P_1|_r\} = 0$
(do $k(f, r) = 0$).
$K(P_1, r) = d = degP$ và $|P_1|_r = 1$

$$|f - P_1|_r = |\sum_{n<0} a_n z^n + \sum_{n>0} a_n z^n| \leq 1$$

$\star$ **Ta sẽ chứng minh:** $|f - P_1|_r < 1$
Giả sử: $|f - P_1|_r = 1$, suy ra: $\max_{n<0 \vee n>d} |a_n| r^n = 1$

$$\Rightarrow \exists m < 0 \vee n > d : |a_m| r^m = 1 = |f|_r$$

$*$ Nếu $m < 0$ thì $0 = k(f, r) \leq m < 0-$Vô lí.

$*$ Nếu $m > d$ thì $d = K(f, r) \geq m > d-$Vô lí.
Vậy:$|f - P_1|_r < 1$.

$\star$ Gọi q_1 và R_1 lần lượt là thương và dư của phép chia f cho P_1 do định lí 3.2, ta có: $f = P_1 q_1 + R_1$
$\Rightarrow f - P_1 = P_1(q_1 - 1) + R_1$
Do tính duy nhất của của phép chia Euclide (Định lí 3.2), ta có: $q_1 - 1$ và R_1 lần lượt là thương và dư của phép chia $f - P_1$ cho P_1.
Đặt: $|f - P_1|_r = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$
Suy ra: $|R_1|_r \leq |f - P_1|_r = \alpha < 1$
Cũng theo định lí 3.2:

$$|q_1 - 1| \leq \frac{|f - P_1|_r}{|P_1|_r} = \alpha/1 = \alpha$$

$$|q_1|_r \leq \frac{|f|_r}{|P_1|_r} = 1/1 = 1 \tag{3.10}$$

(v) Giả sử rằng ta đã xây dựng được một dãy $(P_i, Q_i, R_i), \quad i = 1, 2, ..., n$
Với:

- P_i là các đa thức $r - extremal$ bậc $d, |P_i|_r = 1$.
- R_i là các đa thức có bậc nhỏ hơn d.
- $f = P_i q_i + R_i$

Thoả các bất đẳng thức sau:

$$\begin{array}{ll} a) & |R_i|_r \leq \alpha^i, \quad i = 1, 2, ..., n \\ b) & |P_i - P_{i-1}|_r \leq \alpha^{i-1}, \quad i = 2, 3, ..., n \\ c) & |q_i - q_{i-1}|_r \leq \alpha^i, \quad i = 2, 3, ..., n \end{array}$$

Theo chứng minh ở (iv), các giả thiết này đúng cho trường hợp $n = 1$.

Ta sẽ xây dựng dãy $(P_{n+1}, Q_{n+1}, R_{n+1})$ thoả các giả thiết ở trên.

$\star$ Đặt: $P_{n+1} = P_n + R_n \quad \Rightarrow P_{n+1}, P_n$ có cùng bậc là d
và: $|R_n|_r < 1 = |P_n|_r \quad \Rightarrow R_n|_r \neq |P_n|_r$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |P_{n+1}|_r &= max\{|P_n|_r, |R_n|_r\} \\ &= max\{1, \alpha\} = 1 \qquad (\text{ do } \alpha < 1) \end{aligned}$$

$$|R_n(0)| \le |R_n|_r < 1 = |P_n|_r = |P_n(0)|$$

⋆ Ta sẽ chứng minh P_{n+1} là $r - dominant$.
Thật vậy, giả sử R_n có bậc là s $(s < d)$,

$$R_n = \sum_{m=0}^{s} b_m z^m, P_n = \sum_{m=0}^{d} a_m z^m,$$

khi đó:

$$P_{n+1} = P_n + R_n = \sum_{m=0}^{s}(a_m + b_m)z^m + \sum_{l=s+1}^{d} a_l z^l$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 1 = |P_{n+1}|_r &= \max_{0\le m\le s,\ \ s+1\le l\le d}\{|a_m + b_m|r^m, |a_l|r^l\} \\
&\le \max_{0\le m\le s,\ \ s+1\le l\le d}\{\max\{|a_m|r^m, |b_m|r^m\}, |a_l|r^l\} \\
&\le |a_d|r^d
\end{aligned}$$

(Do: $|a_i|r^i \le |P_n|_r = |a_d|r^d, \forall i = 0, 1, ..., d$
$|b_m|r^m \le |R_n|_r = \alpha, \forall m = 0, 1, ..., s$)

$$\Rightarrow K(P_{n+1}, r) = d = degP_{n+1}$$

⋆ Tương tự ta cũng chứng minh được: $k(P_{n+1}, r) = 0$
$\Rightarrow P_{n+1}$ là $r - extremal$.

⋆ Lấy q_{n+1} và R_{n+1} là thương và dư của phép chia f cho P_{n+1}, khi đó:

$|P_{n+1} - P_n|_r = |R_n|_r \le \alpha^n$ (Giả thiết quy nạp)
và $b)$ thoả mãn với $i = n + 1$.

⋆ Sắp lại phương trình:
$P_n q_n + R_n = f = P_{n+1}q_{n+1} + R_{n+1} = (P_n + R_n)q_{n+1} + R_{n+1}$

Ta nhận được:

$$-R_n q_{n+1} = P_n(q_{n+1} - q_n) + R_{n+1} - R_n \tag{3.11}$$

$$R_n(1 - q_{n+1}) = P_n(q_{n+1} - q_n) + R_{n+1} \tag{3.12}$$

$\Rightarrow q_{n+1} - q_n$, $R_{n+1} - R_n$ lần lượt là thương và dư của phép chia $-R_n q_{n+1}$ cho P_n; $q_{n+1} - q_n$, R_{n+1} lần lượt là thương và dư của phép chia $R_n(1 - q_{n+1})$ cho P_n.

Do định lí 3.2:

$$f = P_{n+1}q_{n+1} + R_{n+1} \Rightarrow |q_{n+1}|_r \leq \frac{|f|_r}{|P_{n+1}|_r} = 1$$

Và:

$$(1) \Rightarrow |q_{n+1} - q_n|_r \leq \frac{|R_n|_r.|q_{n+1}|_r}{|P_n|_r} \leq \frac{\alpha^n.1}{1} < 1$$

Hơn nữa:

$$\begin{aligned} |1 - q_{n+1}|_r &= |(1 - q_1) + (q_1 - q_2) + ... + (q_n - q_{n+1})|_r \\ &\leq \max\{|1 - q_1|_r, |q_i - q_{i+1}|_r, 1 \leq i \leq n\} \\ &\leq \max\{\alpha, \alpha^{i+1}, 1 \leq i \leq n\} = \alpha \\ &\qquad\qquad (\text{Do } \alpha < 1). \end{aligned}$$

Từ (3.12) suy ra:

$$|q_{n+1} - q_n|_r \leq \frac{|R_n|_r.|1 - q_{n+1}|_r}{|P_n|_r} = \frac{\alpha^n.\alpha}{1} = \alpha^{n+1}$$

Và:

$$|R_{n+1}|_r \leq |R_n|_r|1 - q_{n+1}|_r = \alpha^n.\alpha = \alpha^{n+1}$$

Tức là $c), a)$ thoả mãn với $i = n + 1$.

Nghĩa là ta đã xây dựng xong dãy các bộ 3 (P_n, q_n, R_n) thoả các giả thiết $a), b), c)$.

(vi) Chứng minh định lí:

⋆ Do $a) \lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$

Đặt:

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n, \qquad u = \lim_{n\to\infty} q_n$$

Lấy giới hạn của biểu thức : $f_n = P_n q_n + R_n$.
Ta được: $f = Pq$.

⋆ Với mọi $n \in N, P_n$ là $r - extremal$ bậc d nên P là $r - extremal$ bậc d. (Vì theo mệnh đề 2.2.4, tập $\{Q, 0| \quad Q$ là đa thức $r - extremal$ bậc $d\}$ là tập đóng).

$\star$ Do $f = Pq$ nên theo định lí $3.2, u$ là thương của phép chia f cho P nên: $u \in A[r_1, r_2]$.
Vì $d = K(f,r) - k(f,r) = K(P,r) + K(u,r) - (k(P,r) + k(u,r))$
(mệnh đề 2.2.7).
$= K(P,r) - k(P,r) + K(u,r) - k(u,r)$
$= d - 0 + K(u,r) - k(u,r)$
$$\Rightarrow k(u,r) = K(u,r) \tag{3.13}$$

(vii) Chứng minh tính duy nhất:
Giả sử: $Pu = \widetilde{P}\widetilde{u}$.
Theo mệnh đề $2.2.5, u$ khả nghịch trong $\mathcal{A}[r_1, r_2]$ (Do (3.13)).

$\Rightarrow P = u^{-1}\widetilde{P}\widetilde{u} = (u^{-1}\widetilde{u})\widetilde{P}$
$\Rightarrow u^{-1}\widetilde{u}$ là thương của phép chia P cho $\widetilde{P}$ và do đó nó là đa thức.
Mà: $degP = deg(\widetilde{P}) = d$
$\Rightarrow u^{-1}\widetilde{u}$ là hằng số.

Nhưng vì: $P(0) = \widetilde{P}(0) = 1 \quad \Rightarrow u^{-1}\widetilde{u} = 1 \Rightarrow u = \widetilde{u}$
$\Rightarrow P = \widetilde{P}$.

3.4 Một số ứng dụng của định lí Weierstrass

Định lí 3.4.1 (Số không điểm): *Cho $f \in \mathcal{A}[r_1, r_2]$.*
Nếu $r_1 \le \rho \le R \le r_2$ thì f có $K(f,R) - k(f,\rho)$ không điểm trong $A[\rho, R]$ tính cả bội.

Chứng minh:

- Nếu $f = 0$ thì f có vô hạn không điểm = $K(f,R) - k(f,\rho)$ vì $K(f,R) = +\infty$ và $k(f,\rho) = -\infty$.
- Nếu $f \neq 0$ thì ở chương 2 ta đã chứng minh f chỉ có hữu hạn bán kính tới hạn trong $A[\rho, R]$, giả sử là: $s_1, s_2, ..., s_m$ với $s_i < s_{i+1}, \forall i = 1, 2, ..., m-1$.

  ⋆ Với mỗi $r \in [\rho, R]$ và r không là điểm tới hạn:
  Theo định lí Weierstrass $f = P.u$ với P là đa thức bậc d.
  Với $d = K(f,r) - k(f,r)$ và $K(u,r) = k(u,r)$ nên u khả nghịch trong $\mathcal{A}[r,r]$. Do vậy, trong $A[r,r]$, số không điểm của f, kể cả bội bằng với số không điểm của P, tính cả bội.
  Theo mệnh đề 2.2.6, P có đúng $d = K(f,r) - k(f,r)$ không điểm kể cả bội trong $A[r,r]$.
  Do vậy: f có đúng $d = K(f,r) - k(f,r)$ không điểm kể cả bội trong $A[r,r]$.
  Vì r không là điểm tới hạn, tức là $d = K(f,r) - k(f,r) = 0$ nên f không có không điểm trong $A[r,r]$, nói cách khác là f không có không điểm có chuẩn bằng r. Như vậy, không điểm của f (nếu có) phải có chuẩn bằng điểm tới hạn.

  ⋆ Với mỗi điểm tới hạn s_i, $i = 1, 2, ..., m$:
  Lập luận tương tự như trên, f có đúng $d_i = K(f, s_i) - k(f, s_i)$ không điểm kể cả bội có chuẩn bằng s_i.
  Vậy: Số không điểm của f trong $A[\rho, R]$ = Số không điểm của f có chuẩn bằng điểm tới hạn s_i, $\forall i = 1, 2, ..., m$ và bằng:

$$\sum_{1 \le i \le m} d_i = \sum_{1 \le i \le m} (K(f, s_i) - k(f, s_i)) \tag{3.14}$$

  ⋆ Mặt khác, ta có:
  ∗ Nếu $\rho = s_1$ thì $k(f,\rho) = k(f, s_1)$, nếu $\rho < s_1$ thì ρ không phải là bán kính tới hạn nên: $k(f,\rho) = K(f,\rho)$ mà theo mệnh đề 2.2.9 $K(f,\rho) = k(f, s_1)$ nên $k(f,\rho) = k(f, s_1)$.
  ∗ Tương tự, nếu $R = s_m$ thì $K(f,R) = K(f, s_m)$, nếu $R > s_m$ thì R không phải là bán kính tới hạn nên: $k(f,R) = K(f,R)$ mà theo mệnh

đề 2.2.9 $K(f, s_m) = k(f, R)$ nên $K(f, s_m) = K(f, R)$.
Như vậy: $k(f, \rho) = k(f, s_1)$.
$K(f, s_m) = K(f, R)$.
Theo mệnh đề 2.2.9 ta cũng có: $K(f, s_i) = k(f, s_{i+1}), \forall i = 1, 2, ..., m-1$,
Từ các đẳng thức này và (3.14) ta có: Số không điểm của f trong $A[\rho, R]$ là:

$$\sum_{1\leq i\leq m} (K(f, s_i) - k(f, s_i)) = K(f, s_m) - k(f, s_1) = K(f, R) - k(f, \rho)$$

Định lí 3.4.2: *Cho* $f \in \mathcal{A}[r_1, r_2], f \neq 0$.
Khi đó f *có nhiều nhất là hữu hạn không điểm trong* $A[\rho, R]$.

Chứng minh:

Định lí này là hệ quả trực tiếp của định lí 3.4.1 khi $\rho = r_1$ và $R = r_2$.
Thật vậy, số không điểm của f trong $A[r_1, r_2]$ là: $K(f, r_2) - k(f, r_1)$, vì $f \neq 0$ nên $K(f, r_2)$ và $k(f, r_1)$ đều hữu hạn, do vậy hiệu của chúng là hữu hạn hay f có hữu hạn không điểm trong $A[\rho, R]$.

Một số ví dụ: Tính số không điểm của một chuỗi Laurent p-adic.

- Trong C_2, cho $f(z) = z^2(z-1)(z-2)(z-3) = z^5 - 6z^4 + 11z^3 - 6z^2$.
  Dễ thấy f giải tích trên $A[0,1]$, hay: $f \in \mathcal{A}[0,1]$.
  $|a_0| = 0, |a_1| = 0, |a_2| = 1/2, |a_3| = 1, |a_4| = 1/2, |a_5| = 1$.
  $K(f,1) = 5, k(f,0) = 0$.
  Vậy f có $K(f,1) - k(f,0) = 5$ không điểm trong $A[0,1]$.

  ⋆ Tính cụ thể, ta có:
  - $r_1 = 0: \quad k(f,r_1) = 0, K(f,r_1) = min\{n : |a_n| \neq 0\} = 2$.
    Nên f có $K(f,r_1) - k(f,r_1) = 2$ không điểm có chuẩn bằng r_1.
  - $r_2 = 1/2: \quad k(f,r_2) = 2, K(f,r_2) = 3$.
    Nên f có $K(f,r_2) - k(f,r_2) = 1$ không điểm có chuẩn bằng r_2.
  - $r_3 = 1: \quad k(f,r_3) = 3, K(f,r_3) = 5$.
    Nên f có $K(f,r_3) - k(f,r_3) = 1$ không điểm có chuẩn bằng r_3.

- Trong C_3, cho $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n z^n + \sum_{n=-\infty}^{1} 3^{-n} z^n$.

  ⋆ $\forall r \in [1/2, 1]$, ta có:
  - $n > 0 \quad : \quad \frac{1}{2^n} \leq r^n \leq 1$ và $|a_n| = 3^{-n}$
    $\Rightarrow \frac{1}{2^n} 3^{-n} \leq |a_n| r^n \leq 3^{-n} \quad \Rightarrow \frac{1}{2^n}\frac{1}{3^n} \leq |a_n| r^n \leq \frac{1}{3^n}$
    nên $\lim_{n\to+\infty} |a_n| r^n = 0$.
  - $n < 0 \quad : \quad \frac{1}{2^n} \geq r^n \geq 1$ và $|a_n| = 3^n$
    $\Rightarrow \frac{1}{2^n} 3^n \geq |a_n| r^n \geq 3^n \quad \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-n} \geq r^n \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$
    nên $\lim_{n\to-\infty} |a_n| r^n = 0$.

  Vậy f giải tích trên $A[1/2, 1]$, hay: $f \in \mathcal{A}[1/2, 1]$.

  ⋆ Dễ thấy: $K(f, 1/2) = k(f, 1/2) = -1$.
  Và: $K(f,1) = 1, k(f,1) = -1$.
  Nên f có $K(f,1) - k(f,1/2) = 2$ không điểm trong $A[1/2, 1]$.

3.5 Định lí Poisson−Jensen

Định lí Poisson−Jensen: *Cho* $f = \sum_{n \in Z} a_n z^n \in \mathcal{A}[r_1, r_2)$ *và không phải là hàm hằng, với* $r_2 < \infty$.

Khi đó: $\forall r \in [r_1, r_2)$, *ta có:*

$$\textit{Nếu } r_1 > 0 \textit{ thì : } N(f,0,r) + k(f,r_1)logr + log|a_{k(f,r_1)}| = log|f|_r$$
$$\textit{Nếu } r_1 = 0 \textit{ thì : } N(f,0,r) + log|a_{K(f,0)}| = log|f|_r$$

Chứng minh:

Theo mệnh đề 2.2.3, chỉ có hữu hạn điểm tới hạn trong $[r_1, r]$ nếu $r < r_2$.

⋆ **Trường hợp $r_1 = 0$, lấy r' là điểm tới hạn dương nhỏ nhất**

Theo mệnh đề 2.2.9, ta có: $K(f,0) = k(f,r')$.

Với $r : 0 < r \leq r'$, cũng theo mệnh đề 2.2.9: $K(f,r) = k(f,r')$

Do vậy: $K(f,0) = k(f,r)$ (3.15)

Mà:

$|f|_r = |a_{k(f,r)}|r^{k(f,r)}$ nên $log|f|_r = k(f,r)logr + log|a_{k(f,r)}|)$ (3.16)

Suy ra:

$N(f,0,r) = K(f,0)logr$ (Do định nghĩa của $N(f,0,r)$ khi $r_1 = 0$).

$= k(f,r)logr$ (do (3.15))

$= log|f|_r - log|a_{k(f,r)}|$ (do (3.16))

$= log|f|_r - log|a_{K(f,0)}|$ (do (3.15))

⋆ **Trường hợp $r_1 > 0$, lấy r' là điểm tới hạn dương nhỏ nhất mà $r' > r_1$**

Lập luận tương tự như trên, theo mệnh đề 2.2.9: $K(f,r_1) = k(f,r')$ và $K(f,r) = k(f,r')$.

Nên: $K(f,r_1) = k(f,r)$ (3.17)

Mà: $|f|_r = |a_{k(f,r)}|r^{k(f,r)}$

và : $|a_{K(f,r_1)}|r_1^{K(f,r_1)} = |f|_{r_1} = |a_{k(f,r_1)}|r_1^{k(f,r_1)}$

Suy ra:
$log|a_{k(f,r)}| + k(f,r)logr = log|f|_r = log|a_{K(f,r)}| + K(f,r)logr$

Và:
$$log|a_{k(f,r_1)}| + k(f,r_1)logr_1 = log|f|_{r_1} = log|a_{K(f,r_1)}| + K(f,r_1)logr_1 \quad (3.18)$$

Do đó:

$$N(f,0,r) = \sum_{0\neq z\in A[r_1,r]:f(z)=0} log\frac{r}{|z|}$$

$$= \sum_{|z|=r_1:f(z)=0} log\frac{r}{|z|} + \sum_{|z|=r:f(z)=0} log\frac{r}{|z|}$$

(Vì theo định lí Weierstrass, không điểm của f trong $A[r_1,r]$ (nếu có) phải có chuẩn bằng r_1 hoặc r)

(3.19)

$$= [K(f,r_1) - k(f,r_1)]log\frac{r}{r_1} + [K(f,r) - k(f,r)]log\frac{r}{r}$$

$$= [K(f,r_1) - k(f,r_1)](logr - logr_1) \text{ (Do } log\frac{r}{r} = log1 = 0)$$

$$= K(f,r_1)logr - k(f,r_1)logr - K(f,r_1)logr_1 + k(f,r_1)logr_1$$

$$= k(f,r)logr - k(f,r_1)logr - K(f,r_1)logr_1 + k(f,r_1)logr_1$$

(Do (3.17))

$$= (log|f|_r - log|a_{k(f,r)}|) - k(f,r_1)logr - (log|f|_{r_1} - log|a_{K(f,r_1)}|)$$
$$+(log|f|_{r_1} - log|a_{k(f,r_1)}|)$$

(Do (3.18))

$$= log|f|_r - log|a_{k(f,r)}| - k(f,r_1)logr + log|a_{k(f,r)}|) - log|a_{k(f,r_1)}|$$

(Do (3.17)).

$$= log|f|_r - k(f,r_1)logr - log|a_{k(f,r_1)}|$$

$$\Rightarrow N(f,0,r) + k(f,r_1)logr + log|a_{k(f,r_1)}| = log|f|_r$$

Như vậy, trong cả hai trường hợp, ta đã chứng minh định lí đúng cho mọi $r \in [r_1, r']$ với r' là điểm tới hạn đầu tiên lớn hơn r_1, nghĩa là đúng cho

mọi r nằm trong đoạn từ r_1 đến điểm tới hạn đầu tiên lớn hơn r_1.
Bây giờ, chúng ta chỉ cần kiểm tra rằng có thể vượt qua mỗi điểm giới hạn.

Giả sử r' là một điểm tới hạn, và giả sử là định lí đúng cho mọi $r \leq r'$.
Lấy r" là điểm tới hạn nhỏ nhất mà còn lớn hơn r'.
Vì f chỉ có nhiều nhất hữu hạn điểm tới hạn nằm trong đoạn từ r_1 đến bất kì số r mà $r < r_2$, do đó ta chỉ cần chứng minh định lí vẫn đúng cho mọi $r \leq r$", và do đó định lí được chứng minh bằng quy nạp.
Thật vậy, tương tự như chứng minh ở (3.19), không điểm của f (nếu có) phải có chuẩn bằng r_1(nếu r_1 là một bán kính tới hạn), hoặc bằng r' hoặc bằng r (nếu $r = r''$) nên:

$$\begin{aligned} N(f,0,r) &= \sum_{0\neq z\in A[r_1,r]:f(z)=0} log\frac{r}{|z|} \\ &= \sum_{|z|=r_1:f(z)=0} log\frac{r}{|z|} + \sum_{|z|=r':f(z)=0} log\frac{r}{|z|} \qquad (\text{Vì: } log\frac{r}{r}=0) \\ &= [K(f,r_1)-k(f,r_1)]log\frac{r}{r_1} + [K(f,r')-k(f,r')]log\frac{r}{r'} \end{aligned}$$

Nhưng vì: $r_1 < r' < r \leq r''$ nên theo mệnh đề 2.2.9, ta có:

$$K(f,r') = k(f,r) \text{ và } K(f,r_1) = k(f,r') \qquad (3.20)$$

Hơn nữa:

$$|f|_{r_1} = |a_{K(f,r_1)}|r_1^{K(f,r_1)} = |a_{k(f,r_1)}|r_1^{k(f,r_1)}$$

và:

$$|f|_{r'} = |a_{K(f,r')}|(r')^{K(f,r')} = |a_{k(f,r')}|(r')^{k(f,r')} \qquad (3.21)$$

Nên ta có:

$$\begin{aligned} N(f,0,r) &= K(f,r_1)logr - K(f,r_1)logr_1 - k(f,r_1)logr + k(f,r_1)logr_1 \\ &\quad + K(f,r')logr - K(f,r')logr' - k(f,r')logr + k(f,r')logr' \\ &= k(f,r')logr - K(f,r_1)logr_1 - k(f,r_1)logr + k(f,r_1)logr_1 \\ &\quad + k(f,r)logr - K(f,r')logr' - k(f,r')logr + k(f,r')logr' \\ &\qquad (\text{Do } (3.20)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= k(f,r')logr - log|f|_{r_1} + log|a_{K(f,r_1)}| - k(f,r_1)logr \\ &\quad + log|f|_{r_1} - log|a_{k(f,r_1)}| + log|f|_r - log|a_{k(f,r)}| \end{aligned}$$

$$-log|f|_{r'} + log|a_{K(f,r')}| - k(f,r')logr + log|f|_{r'} - log|a_{k(f,r')}|$$

(Do (3.21))

$$= log|a_{K(f,r_1)}| - k(f,r_1)logr - log|a_{k(f,r_1)}|$$

$$+log|f|_r - log|a_{k(f,r)}| + log|a_{K(f,r')}| - log|a_{k(f,r')}|$$

$$= log|a_{k(f,r')}| - k(f,r_1)logr - log|a_{k(f,r_1)}|$$

$$+log|f|_r - log|a_{k(f,r)}| + log|a_{k(f,r)}| - log|a_{k(f,r')}|$$

(Do (3.20)).

$$= log|f|_r - k(f,r_1)logr - log|a_{k(f,r_1)}|$$

KẾT LUẬN

Luận văn đã lần lượt trình bày những vấn đề cơ bản của việc xây dựng trường số phức p-adic để sau đó đi xây dựng chuỗi Laurent p-adic và tìm hiểu các tính chất quan trọng của nó. Tiếp đó đi chứng minh một số định lí quan trọng của chuỗi Laurent p-adic và cuối cùng là một số ứng dụng của chúng.

Như vậy, ta biết rằng một chuỗi Laurent p-adic bất kì chỉ có không điểm tại điểm tới hạn (tức là nó chỉ có không điểm với chuẩn bằng với bán kính tới hạn), hơn thế có thể tính được số không điểm của một chuỗi Laurent p-adic thông qua chỉ số tối đại và chỉ số tối tiểu của nó; tại mỗi bán kính hội tụ, có thể đem một chuỗi Laurent p-adic chia cho một đa thức, thương và dư (thỏa một số ràng buộc) là duy nhất, hơn nữa thương là một chuỗi Laurent p-adic và dư là một đa thức có bậc nhỏ hơn đa thức chia; cũng tại mỗi bán kính hội tụ, có thể đem phân tích một chuỗi Laurent p-adic thành tích của một đa thức $r - extremal$ và một chuỗi Laurent p-adic khả nghịch tại bán kính đó, ...

Ngoài ra, ta đã biết là giải tích p-adic có những mối liên quan sâu sắc với những vấn đề lớn của số học và hình học đại số, vậy lí thuyết về chuỗi Laurent p-adic được ứng dụng như thế nào trong những lĩnh vực này?

Đây là vấn đề mà tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu trong thời gian sắp tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Neal Koblitz (1977), *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, Graduate Texts in Mathematics 58, Springer-Verlag.

[2] P.C.Hu and C.C.Yang (2000), *Meromorphic functions over non - Archimedean fields*, Kluwer Academic Publishers, London.

[3] William Cherry and Julie Tzu-Yueh Wang (2000), Non-Archimedean Analytic Maps to Algebraic Curves, *Value Distribution Theory and Complex Dynamics*, Contemporary Math,(303), American Mathematical Society , pp.7-35.

[4] William Cherry (2009), Lecture on Non-Archimedean Function Theory Advanced School on p-adic Analysis and Applications, *The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics*,Trieste, Italy.

[5] Y.Amice (1975), *Lesnombres p-dic*, Presses Universitaires de France, France.