



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

PHẠM THANH SƠN

**PHƯƠNG TRÌNH SỐNG PHI TUYẾN TÍNH
CHỨA SỐ HẠNG NHỐT PHI TUYẾN**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Toán Giải Tích**

Mã số: **60. 46. 01**

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi trân trọng kính gửi đến Thầy TS. *Trần Minh Thuyết* lời cảm ơn sâu sắc nhất về sự tận tình hướng dẫn, chỉ bảo của thầy đối với tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn này.

Qua luận văn này, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy TS. *Nguyễn Thành Long* và Cô TS. *Lê Thị Phương Ngọc* đã đọc và đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho luận văn của tôi. Lòng say mê nghiên cứu khoa học và sự tận tâm của các Thầy và Cô đối với học trò là tâm gương sáng để thế hệ chúng tôi noi theo.

Xin chân thành cảm ơn *Quý Thầy, Cô* thuộc Phòng Khoa học Công nghệ -Sau đại học, Trường Đại học Sư Phạm TP.HCM đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi hoàn tất chương trình học và hoàn thành luận văn.

Qua đây tôi cũng tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các tác giả của các bài báo mà tôi đã tham khảo trong quá trình viết luận văn này.

Xin cảm ơn *các bạn lớp Cao học Toán Giải Tích khóa 18 và em Ngô Vũ Hoàng Thanh*, nhân viên TTBDVH THÀNH TRÍ đã nhiệt tình động viên và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua.

Cuối cùng, lời thân thương nhất tôi muốn gửi tới mọi người trong gia đình tôi, những người đã hết lòng lo lắng cho tôi và luôn ở bên tôi trong những lúc tôi gặp khó khăn.

Vì kiến thức của bản thân còn nhiều hạn chế nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót, rất mong nhận được sự chỉ bảo của Quý Thầy, Cô và sự góp ý chân thành của bạn bè, đồng nghiệp.

Phạm Thanh Sơn

DANH SÁCH CÁC KÝ HIỆU SỬ DỤNG TRONG LUẬN VĂN

$\mathbb{N}$	Tập các số tự nhiên
$\mathbb{Z}$	Tập các số nguyên
$\mathbb{R}$	Tập các số thực
$\mathbb{Z}_+$	Tập các số nguyên không âm
$\mathbb{R}_+$	Tập các số thực không âm
Ω	Khoảng $(0, 1)$
Q_T	Tích Descartes $\Omega \times (0, T), \forall T > 0$
$ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$	Modun của đa chỉ số $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \in \mathbb{Z}_+^4$
$\gamma! = \gamma_1! \gamma_2! \gamma_3! \gamma_4!$	Gia thừa của đa chỉ số $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \in \mathbb{Z}_+^4$
$\vec{\varepsilon}^\gamma = K^{\gamma_1} K_1^{\gamma_2} \lambda^{\gamma_3} \lambda_1^{\gamma_4}$	Đơn thức bậc $ \gamma $ theo 4 biến
$\vec{\varepsilon} = (K, K_1, \lambda, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^2,$	
$u(t) = u(x, t)$	Hàm hai biến (x, t)
$u_t(t) = u'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$	Đạo hàm riêng cấp 1 theo biến t
$u_{tt}(t) = u''(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$	Đạo hàm riêng cấp 2 theo biến t
$u_x(t) = \nabla u(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$	Đạo hàm riêng cấp 1 theo biến x
$u_{xx}(t) = \Delta u(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$	Đạo hàm riêng cấp 2 theo biến x
L^2, H^1	Đề chỉ $L^2(0, 1), H^1(0, 1)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Tích vô hướng hoặc tích đôi ngẫu trong $L^2(0, 1)$
$\ \cdot\ _X$	Chuẩn trong không gian X
$\ \cdot\ $	Chuẩn trong không gian $L^2(0, 1)$
$\ \cdot\ _0$	Chuẩn sup trên $[0, T]$
$C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$	Không gian các hàm số $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên Ω
$C^m(\Omega)$	Không gian các hàm $u \in C^0(\Omega)$ sao cho $D^i u \in C^0(\Omega)$ với Mọi $i = 1, 2, \dots, m$
$C_c^\infty(\Omega)$	Không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong Ω
$D(\Omega)$	Không gian các hàm số $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi vô hạn có giá compact trong Ω

Chương 1

TỔNG QUAN

1.1. Giới thiệu bài toán

Các bài toán biên về phương trình vi phân và phương trình đạo hàm riêng là một trong những lĩnh vực quan trọng của toán lý thuyết và ứng dụng. Các bài toán này xuất hiện nhiều trong vật lý, hóa học, sinh học, . . . , và do đó là đề tài được quan tâm bởi nhiều nhà toán học, chẳng hạn như trong [1, 2], [4 – 19] và các tài liệu tham khảo trong đó. Trong luận văn này, chúng tôi khảo sát phương trình sóng phi tuyến liên kết với điều kiện biên hỗn hợp phi tuyến sau đây.

Tìm hàm u thỏa phương trình sóng phi tuyến tính có dạng

$$u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + F(u, u_t) = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (1.1)$$

liên kết với điều kiện biên hỗn hợp phi tuyến

$$\begin{cases} \mu(t)u_x(0, t) = Y(t), \\ -\mu(t)u_x(1, t) = K_1 u(1, t) + \lambda_1 |u_t(1, t)|^{\alpha-2} u_t(1, t), \end{cases} \quad (1.2)$$

và điều kiện đầu

$$u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad (1.3)$$

trong đó $F(u, u_t) = Ku + \lambda u_t$, với $K, \lambda, K_1, \lambda_1, \alpha$ là các hằng số cho trước; $\mu, f, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ là các hàm cho trước thỏa các điều kiện sẽ đặt ra sau. Ấn hàm $u(x, t)$ và giá trị biên chưa biết $Y(t)$ thỏa mãn bài toán Cauchy cho phương trình vi phân thường sau

$$\begin{cases} Y''(t) + \gamma_1 Y'(t) + \gamma_2 Y(t) = K_0 u_{tt}(0, t), \quad 0 < t < T, \\ Y(0) = \tilde{Y}_0, \quad Y'(0) = \tilde{Y}_1, \end{cases} \quad (1.4)$$

trong đó $\gamma_1, \gamma_2, K_0, \tilde{Y}_0, \tilde{Y}_1$ là các hằng số cho trước, với $4\gamma_2 - \gamma_1^2 > 0$.

Từ (1.4), ta biểu diễn $Y(t)$ theo $\gamma_1, \gamma_2, K_0, \tilde{Y}_0, \tilde{Y}_1, u_{tt}(0, t)$ và sau đó dùng tích phân từng phần ta thu được

$$Y(t) = g(t) + K_0 u(0, t) + \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds, \quad (1.5)$$

trong đó

$$\begin{cases} g(t) = e^{-\gamma t} \left[(\tilde{Y}_0 - K_0 \tilde{u}_0(0)) \cos \omega t + (-\tilde{Y}_0 - \frac{1}{\gamma} \tilde{Y}_1 + \frac{\gamma K_0}{\omega} \tilde{u}_0(0) - \frac{K_0}{\omega} \tilde{u}_1(0)) \sin \omega t \right], \\ k(t) = K_0 e^{-\gamma t} \left[-2\gamma \cos \omega t + \frac{\sin \omega t}{\omega} (\gamma^2 - \omega^2) \right], \end{cases} \quad (1.6)$$

Do đó bài toán (1.1) – (1.4) được đưa về (1.1) – (1.3), (1.5), (1.6).

1.2. Các kết quả liên quan đến bài toán

Những năm gần đây, bài toán (1.1) – (1.3), (1.5), (1.6) và các dạng tương tự với các điều kiện biên khác nhau đã được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều tác giả và thu được một số kết quả, chẳng hạn như: sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu, tính trơn, tính chính qui, tính ổn định, đáng điệu tiệm cận cũng như khai triển tiệm cận của nghiệm, xem [1, 2], [4 – 19] và các tài liệu tham khảo trong đó. Sau đây, chỉ nêu ra vài khía cạnh liên quan đến bài toán khảo sát trong luận văn.

Trong trường hợp $\mu(t) \equiv 1$, các tác giả N.T. An và N.Đ. Triều trong [1] đã xét bài toán (1.1), (1.3) với

$$f(x, t) = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 > 0, \quad \tilde{u}_0 = \tilde{u}_1 = 0, \quad \tilde{Y}_0 = 0, \quad (1.7)$$

trong đó điều kiện biên (1.2) được thay thế bởi

$$u_x(0, t) = Y(t), \quad u(1, t) = 0. \quad (1.8)$$

Trong trường hợp này, bài toán (1.1), (1.3), (1.7), (1.8) mô tả dao động của một vật rắn và một thanh đàn hồi nhớt tựa trên nền cứng.

Trong [2], cũng trường hợp $\mu(t) \equiv 1$, các tác giả M. Bergounioux, N. T. Long, A. P. N. Định, nghiên cứu bài toán (1.1), (1.3), với điều kiện biên (1.2) được thay thế bởi

$$u_x(0, t) = Y(t), \quad -u_x(1, t) = K_1 u(1, t) + \lambda_1 u_t(1, t), \quad (1.9)$$

với các hằng số cho trước $\lambda_1 > 0$, $K_1 \geq 0$. Như vậy, bài toán chúng tôi xét trong luận văn này với điều kiện biên phi tuyến tổng quát hơn (1.9).

Bằng sự tổng quát hoá của [2], các tác giả N. T. Long và A. P. N. Định [4], N.T. Long và T. M. Thuyết [6], đã xét bài toán (1.1) – (1.3) với điều kiện biên tại $x = 0$ có dạng

$$u_x(0, t) = g(t) + H(u(0, t)) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds, \quad (1.10)$$

trong đó g, H, k là các hàm cho trước.

N. T. Long, A. P. N. Định, T. N. Diễm [5] nghiên cứu sự tồn tại, tính trơn và khai triển tiệm cận nghiệm của bài toán (1.1) – (1.4) trong trường hợp $\mu(t) \equiv 1$, $u_x(0, t) = Y(t)$, $u_x(1, t) = K_1 u(1, t) + \lambda_1 u_t(1, t)$, trong đó $Y(t)$ xác định bởi (1.4) với $u_{tt}(0, t)$ thay thế bằng $u_{tt}(1, t)$ và $\gamma_1 = 0$.

N. T. Long, L. V. Ut, N. T. T. Truc [9] nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu, tính chính qui theo biến thời gian, tính ổn định và khai triển tiệm cận của nghiệm yếu theo hai tham số (K, λ) của bài toán (1.1), (1.3) với (1.2) được thay thế bằng

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ -\mu(t)u_x(1, t) = K_1(t)u(1, t) + \lambda_1(t)u'(1, t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1, s)ds, \end{cases} \quad (1.11)$$

Trong trường hợp này bài toán là mô hình toán học mô tả va chạm của thanh đàn hồi nhớt tuyến tính.

1.3. Bố cục của luận văn

Nội dung của luận văn bao gồm các chương sau:

Chương 1. Trình bày phần tổng quan về bài toán khảo sát trong luận văn và điểm qua các kết quả đã có trước đó, đồng thời nêu bố cục luận văn.

Chương 2. Nêu một số kết quả chuẩn bị chẳng hạn như nhắc lại một số không gian hàm, một số kết quả về phép nhúng compact giữa các không gian hàm quan trọng.

Chương 3. Bằng phương pháp xấp xỉ Faedo - Galerkin liên hệ với các đánh giá tiên nghiệm và phương pháp compact yếu, chúng tôi chứng minh bài toán (1.1) – (1.3), (1.5) tồn tại và duy nhất nghiệm yếu toàn cục.

Chương 4. Chúng tôi khảo sát tính ổn định của nghiệm yếu phụ thuộc vào dữ kiện đầu vào của bài toán.

Chương 5. Nội dung chính của chương này gồm hai phần. Phần 1, nghiên cứu đáng điều tiệm cận của nghiệm yếu khi $(K, K_1, \lambda, \lambda_1) \rightarrow 0_+$. Phần 2, trình bày một khai triển tiệm cận của nghiệm yếu đến cấp $N + \frac{1}{2}$ theo bốn tham số bé $K, K_1; \lambda, \lambda_1$.

Chương 6. Chúng tôi xét một bài toán cụ thể để minh họa cho phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ bằng cách khai triển tiệm cận đã trình bày ở phần 2 của chương 5.

Kết quả thu được ở đây là một sự tổng quát hóa một cách tương đối các kết quả trong [1, 4, 5, 6, 9]. Một phần kết quả liên quan đến sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu, tính ổn định và khai triển tiệm cận của nghiệm yếu theo hai tham số được công bố trong công trình của chúng tôi [16].

Kế đến là Phần kết luận, nhằm tóm tắt kết quả thực hiện trong luận văn và cuối cùng là danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 2

CÔNG CỤ CHUẨN BỊ

2.1. Không gian hàm một chiều

Ta có

- L^2 là không gian Hilbert đối với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)v(x)dx, \quad u, v \in L^2. \quad (2.1)$$

Chuẩn sinh bởi tích vô hướng trên xác định như sau

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \left(\int_0^1 u^2(x)dx \right)^{1/2}, \quad u \in L^2. \quad (2.2)$$

- $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists g \in L^p(\Omega) \text{ sao cho } \int_{\Omega} u\varphi = -\int_{\Omega} g\varphi, \forall \varphi \in C_c^1(\Omega)\}$

là không gian Sobolev. Trên $W^{1,p}(\Omega)$ trang bị chuẩn

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|u'\|_{L^p(\Omega)}. \quad (2.3)$$

- $H^1 = W^{1,2} = \{v \in L^2 : v_x \in L^2\}$, là không gian Hilbert đối với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle + \langle u_x, v_x \rangle. \quad (2.4)$$

Ta ký hiệu $\|v\|_{H^1} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{H^1}}$ là chuẩn trong H^1 .

Ta có định lý sau.

Định lý 2.1. ([20, trang 129]) *Tồn tại một hằng số K (chỉ phụ thuộc vào $|\Omega| \leq +\infty$) sao cho*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \forall 1 \leq p \leq +\infty,$$

Hay phép nhúng $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ là liên tục với mọi $1 \leq p \leq +\infty$.

Hơn nữa, nếu Ω bị chặn ta có

i) *phép nhúng $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ là compact với mọi $1 < p \leq +\infty$,*

ii) *phép nhúng $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ là liên tục với mọi $1 \leq q < +\infty$.*

Nếu $\Omega \equiv (0,1)$, thì từ (i) của định lý 2.1 ta suy ra bổ đề sau đây

Bổ đề 2.1. *Phép nhúng $H^1 \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ là compact và*

$$\|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \sqrt{2}\|v\|_{H^1}, \quad \forall v \in H^1. \quad (2.5)$$

Bổ đề 2.2. ([3, trang 5]) Ta đồng nhất L^2 với đối ngẫu của nó. Khi đó, ta có bao hàm thức sau

$$H^1 \hookrightarrow L^2 \equiv (L^2)' \hookrightarrow (H^1)',$$

với các phép nhúng liên tục và chứa trong trù mật.

2.2. Không gian hàm phụ thuộc thời gian

Ký hiệu $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, để chỉ không gian Banach các hàm thực $u : (0, T) \rightarrow X$ đo được, sao cho $\|u\|_{L^p(0, T; X)} < +\infty$ với

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{khi } 1 \leq p < +\infty, \\ \text{ess sup}_{0 < t < T} \|u(t)\|_X, & \text{khi } p = \infty. \end{cases} \quad (2.6)$$

Khi đó, ta có các bổ đề sau mà chứng minh của chúng có thể tìm thấy trong [3].

Bổ đề 2.3. ([3, trang 7]) $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq +\infty$ là không gian Banach.

Bổ đề 2.4. Gọi X' là đối ngẫu của X . Với $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 < p < \infty$, ta có $L^{p'}(0, T; X')$ là đối ngẫu của $L^p(0, T; X)$.

Hơn nữa, nếu X phản xạ thì $L^p(0, T; X)$ cũng phản xạ.

Bổ đề 2.5. $(L^1(0, T; X))' = L^\infty(0, T; X')$. (2.7)

Hơn nữa, các không gian $L^1(0, T; X)$, $L^\infty(0, T; X')$ không phản xạ.

Bổ đề 2.6. ([3, trang 7]) Ta có $L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^p(Q_T)$, $1 \leq p < \infty$,

2.3. Phân bố có giá trị vector

Định nghĩa 2.1. Cho X là không gian Banach thực. Một ánh xạ tuyến tính liên tục từ $D((0, T))$ vào X gọi là một (hàm suy rộng) phân bố có giá trị trong X . Tập các phân bố có giá trị trong X ký hiệu là

$$D'(0, T; X) = L(D(0, T); X) = \{ f : D(0, T) \rightarrow X, f \text{ tuyến tính, liên tục} \}.$$

Chú thích 2.2. Ta ký hiệu $D(0, T)$ thay cho $D((0, T))$ hoặc $C_c^\infty((0, T))$ để chỉ không gian các hàm số thực khả vi vô hạn có giá compact trong $(0, T)$.

Định nghĩa 2.2. Cho $f \in D'(0, T; X)$. Ta định nghĩa đạo hàm $\frac{df}{dt}$ theo nghĩa phân bố của f bởi công thức

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle, \forall \varphi \in D(0, T). \quad (2.8)$$

Các tính chất

1/. Cho $v \in L^p(0, T; X)$, ta làm tương ứng nó bởi ánh xạ như sau:

$$T_v : D(0, T) \rightarrow X, \quad \left\langle T_v, \varphi \right\rangle = \int_0^T v(t) \varphi(t) dt, \forall \varphi \in D(0, T). \quad (2.9)$$

Ta có thể nghiệm lại rằng $T_v \in D(0, T; X)$. Thật vậy,

- i) Ánh xạ $T_v: D(0, T) \rightarrow X$ là tuyến tính.
- ii) Ta nghiệm lại ánh xạ $T_v: D(0, T) \rightarrow X$ là liên tục.

Giả sử $\{\varphi_j\} \subset D(0, T)$, sao cho $\varphi_j \rightarrow 0$ trong $D(0, T)$. Ta có

$$\begin{aligned} \left\| \left\langle T_v, \varphi_j \right\rangle \right\|_X &= \left\| \int_0^T v(t) \varphi_j(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|v(t) \varphi_j(t)\|_X dt \\ &\leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T |\varphi_j(t)|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \rightarrow 0, \text{ khi } j \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Do đó $\langle T_v, \varphi_j \rangle \rightarrow 0$ trong X khi $j \rightarrow +\infty$. Vậy $T_v \in D'(0, T; X)$.

2/. Ánh xạ $v \mapsto T_v$ là một đơn ánh, tuyến tính từ $L^p(0, T; X)$ vào $D'(0, T; X)$. Do đó, ta có thể đồng nhất $T_v = v$. Khi đó, ta có kết quả sau.

Bổ đề 2.7. $L^p(0, T; X) \hookrightarrow D'(0, T; X)$ với phép nhúng liên tục.

2.4. Đạo hàm trong $L^p(0, T; X)$

Do bổ đề 2.7, phần tử $f \in L^p(0, T; X)$ ta có thể coi f là phần tử của $D'(0, T; X)$. Ta có các kết quả sau.

Bổ đề 2.8. (Lions [3, trang 7]). Nếu $f \in L^p(0, T; X)$ và $f' \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, thì f bằng hầu hết với một hàm liên tục từ $[0, T] \rightarrow X$.

2.5. Bổ đề về tính compact của Lions

Cho X_0, X_1, X là các không gian Banach và $0 < T < +\infty, 1 \leq p_i \leq +\infty, i = 0, 1$.

$$X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1, X_0, X_1 \text{ là phản xạ}, \quad (2.11)$$

$$\text{Phép nhúng } X_0 \hookrightarrow X \text{ là compact, } X \hookrightarrow X_1 \text{ liên tục.} \quad (2.12)$$

Đặt

$$W(0, T) = \{v \in L^{p_0}(0, T; X_0) : v' \in L^{p_1}(0, T; X_1)\}. \quad (2.13)$$

Trên $W(0, T)$ ta trang bị chuẩn

$$\|v\|_{W(0, T)} = \|v\|_{L^{p_0}(0, T; X_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; X_1)}. \quad (2.14)$$

Khi đó, $W(0, T)$ là một không gian Banach.

Hiển nhiên ta có $W(0, T) \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; X)$.

Ta cũng có kết quả sau đây liên quan đến phép nhúng compact.

Bổ đề 2.9. ([3, trang 57]). *Với giả thiết (2.11), (2.12) và nếu $1 < p_i < +\infty, i = 0, 1$,*

thì phép nhúng $W(0, T) \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; X)$ là compact.

2.6. Bổ đề về sự hội tụ yếu

Bổ đề sau đây liên quan đến sự hội tụ yếu trong $L^p(Q)$.

Bổ đề 2.10. ([3, trang 12]). *Cho Q là tập mở bị chặn của $\mathbb{R}^N$ và $g_m, g \in L^p(Q)$,*

$1 < p < \infty$, sao cho

$$\|g_m\|_{L^p(Q)} \leq C \text{ và } g_m \rightarrow g \text{ a.e. trong } Q.$$

Khi đó, $g_m \rightarrow g$ trong $L^p(Q)$ yếu.

2.7. Một số bất đẳng thức cơ bản

1/. Bất đẳng thức Hölder

Cho $p, q > 1$ thỏa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p}{p} a^p + \frac{\varepsilon^{-q}}{q} b^q, \forall a, b \geq 0, \forall \varepsilon > 0.$$

2/. Bất đẳng thức Cauchy

$$2ab \leq \beta a^2 + \frac{1}{\beta} b^2, \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

3/. Bất đẳng thức Hölder cho tích phân

Cho $p, q \geq 1$ thỏa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó nếu $f \in L^p(\Omega)$ và $g \in L^q(\Omega)$ thì ta có $fg \in L^1(\Omega)$ và

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Nếu $p = q = 2$ thì ta có $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|, \forall f, g \in L^2(\Omega)$.

4/. Bất đẳng thức Gronwall (dạng tích phân)

Cho ζ là hàm khả tích, không âm trên $[0, T]$ và thỏa bất đẳng thức

$$\zeta(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \zeta(s) ds, \text{ hầu hết } t \in [0, T],$$

trong đó C_1, C_2 là các hàm số không âm. Khi đó

$$\zeta(t) \leq C_1 \exp(C_2 t), \text{ hầu hết } t \in [0, T].$$

Đặc biệt, nếu $C_1 = 0$ thì $\zeta(t) \equiv 0$ hầu hết $t \in [0, T]$.

Chú thích 2.1. Bất đẳng thức Gronwall ở trên còn được gọi là Bổ đề Gronwall.

2.8. Định lý Ascoli-Arzelà. Cho A là một tập con của $C^0([0, T]; \mathbb{R}^m)$. Khi đó $\bar{A}$ là một tập compact trong $C^0([0, T]; \mathbb{R}^m)$ nếu và chỉ nếu A thỏa các điều kiện sau

i) A bị chặn từng điểm, tức là: với mỗi $t \in [0, T]$, tập $\{f(t) : f \in A\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}^m$.

ii) A liên tục đồng bậc, tức là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall t, t' \in [0, T], |t - t'| < \delta \Rightarrow \|f(t) - f(t')\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon, \forall f \in A.$$

2.9. Định lý Schauder. Cho X là một tập lồi đóng khác trống và bị chặn trong không gian Banach E và U là một ánh xạ compact từ X vào X . Khi đó U có một điểm bất động trong X .

Chương 3

SỰ TỒN TẠI DUY NHẤT NGHIỆM

3.1. Giới thiệu

Trong chương này và các chương sau để tiện theo dõi ta gọi bài toán (1.1) – (1.3), (1.5), (1.6) là bài toán (3.1), (3.2) như sau: Tìm hàm u thoả phương trình sóng phi tuyến tính với điều kiện biên phi tuyến dưới đây:

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + F(u, u_t) = f(x, t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ \mu(t)u_x(0, t) = Y(t), \quad -\mu(t)u_x(1, t) = K_1 u(1, t) + \lambda_1 |u_t(1, t)|^{\alpha-2} u_t(1, t), \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó

$$\begin{cases} F(u, u_t) = Ku + \lambda u_t, \\ Y(t) = g(t) + K_0 u(0, t) + \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds, \end{cases} \quad (3.2)$$

với $K, K_0, K_1, \lambda, \lambda_1, \alpha$ là các hằng số cho trước; $\mu, f, g, k, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ là các hàm cho trước thoả các điều kiện mà ta sẽ đặt ra sau.

Định nghĩa 3.1. Ta nói u là *nghiệm yếu* của bài toán (3.1), (3.2) nếu $u \in L^\infty(0, T; H^2)$, sao cho $u_t \in L^\infty(0, T; H^1)$, $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2)$, $u(0, \cdot) \in W^{1, \infty}(0, T)$, $|u_t(1, \cdot)|^{\alpha-2} u_t(1, \cdot) \in H^1(0, T)$, và u thoả phương trình biến phân sau đây:

$$\begin{cases} \langle u_{tt}(t), v \rangle + \mu(t) \langle u_x(t), v_x \rangle + Y(t)v(0) + [K_1 u(1, t) + \lambda_1 |u_t(1, t)|^{\alpha-2} u_t(1, t)]v(1) \\ \quad + \langle Ku(t) + \lambda u_t(t), v \rangle = \langle f(t), v \rangle, \quad \forall v \in H^1, \\ Y(t) = g(t) + K_0 u(0, t) + \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds, \\ u(0) = \tilde{u}_0, \quad u_t(0) = \tilde{u}_1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Để chứng minh bài toán (3.1), (3.2) tồn tại duy nhất nghiệm yếu. Chúng tôi, dựa vào phương pháp xấp xỉ Faedo - Galerkin liên hệ với các đánh giá tiên nghiệm, từ đó trích ra các dãy con hội tụ yếu trong các không gian hàm thích hợp và nhờ một số các

phép nhúng compact. Định lý Schauder và Ascoli – Arzela cũng được sử dụng trong việc chứng minh sự tồn tại nghiệm xấp xỉ Faedo - Galerkin. Khó khăn chính trong chương này là điều kiện biên tại đầu $x = 1$.

3.2. Sự tồn tại duy nhất nghiệm

Trước tiên, ta thành lập các giả thiết sau:

$$(H_1) \quad (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1) \in H^2 \times H^1,$$

$$(H_2) \quad f, f_t \in L^1(0, T; L^2),$$

$$(H_3) \quad \mu \in W^{2,1}(0, T), \mu(t) \geq \mu_0 > 0, \forall t \in [0, T],$$

$$(H_4) \quad g, k \in W^{2,1}(0, T),$$

$$(H_5) \quad \alpha \geq 2; K, K_0, K_1 \geq 0; \lambda, \lambda_1 > 0.$$

Khi đó, ta có định lý sau:

Định lý 3.1. Cho $T > 0$. Giả sử $(H_1) - (H_5)$ đúng. Khi đó, bài toán (3.1), (3.2) tồn tại duy nhất nghiệm yếu u thỏa

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T; H^2), u_t \in L^\infty(0, T; H^1), u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2), \\ |u_t(1, \cdot)|^{\frac{\alpha-1}{2}} u_t(1, \cdot) \in H^1(0, T), u(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T). \end{cases} \quad (3.4)$$

Chú thích 3.1.

i) Ta suy ra từ (3.4), rằng nghiệm yếu u của bài toán (3.1), (3.2) thỏa

$$\begin{cases} u \in C^0([0, T]; H^1) \cap C^1([0, T]; L^2) \cap L^\infty(0, T; H^2), \\ u_t \in C^0([0, T]; L^2) \cap L^\infty(0, T; H^1), u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2), \\ |u_t(1, \cdot)|^{\frac{\alpha-1}{2}} u_t(1, \cdot) \in H^1(0, T), u(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T). \end{cases} \quad (3.5)$$

ii) Hơn nữa, cũng từ (3.4) ta thấy rằng

$$u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2) \subset L^2(Q_T).$$

Điều này dẫn đến nếu điều kiện đầu của bài toán (3.1), (3.3) thỏa giả thiết (H_1) thì bài toán (3.1), (3.2) có nghiệm yếu duy nhất $u \in H^2(Q_T)$, mà không nhất thiết cần $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1) \in C^2(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$.

Chứng minh định lý 3.1. Chứng minh định lý gồm 4 bước.

Bước 1. Xấp xỉ Faedo - Galerkin. Chọn cơ sở đặc biệt $\{w_j\}$ của H^2 . Nghiệm yếu xấp xỉ của bài toán (3.1), (3.2) được tìm dưới dạng

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m c_{mj}(t)w_j,$$

với, $c_{mj}(t)$ là nghiệm của hệ phương trình vi phân phi tuyến sau

$$\begin{cases} \langle u_m''(t), w_j \rangle + \mu(t) \langle u_m(t), w_{jx} \rangle + Y_m(t)w_j(0) \\ \quad + [K_1 u_m(1, t) + \lambda_1 \Psi_\alpha(u_m'(1, t))] w_j(1) \\ \quad + \langle K u_m(t) + \lambda u_m'(t), w_j \rangle = \langle f(t), w_j \rangle, \quad j = \overline{1, m}, \\ u_m(0) = u_{0m}, \quad u_m'(0) = u_{1m}, \end{cases} \quad (3.6)$$

trong đó

$$\begin{cases} Y_m(t) = g(t) + K_0 u_m(0, t) + \int_0^t k(t-s)u_m(0, s) ds, \\ \Psi_\alpha(z) = |z|^{\alpha-2}z, \end{cases} \quad (3.7)$$

và

$$\begin{cases} u_{0m} = \sum_{j=1}^m \alpha_{mj} w_j \rightarrow \tilde{u}_0 & \text{mạnh trong } H^2, \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} u_{1m} = \sum_{j=1}^m \beta_{mj} w_j \rightarrow \tilde{u}_1 & \text{mạnh trong } H^1. \end{cases} \quad (3.9)$$

Bỏ qua chỉ số m , ta viết lại $c_m(t) = (c_{m1}(t), \dots, c_{mm}(t))$ dưới dạng

$$c(t) = (c_1(t), \dots, c_m(t)).$$

Khi đó, hệ phương trình (3.6) - (3.7) được viết lại như sau

$$\begin{cases} c_j''(t) + \mu(t) \sum_{i=1}^m c_i(t) \langle w_{ix}, w_{jx} \rangle + g(t)w_j(0) + K_0 \sum_{i=1}^m c_i(t) w_i(0)w_j(0) \\ \quad + \int_0^t k(t-s) \sum_{i=1}^m c_i(s) w_i(0)w_j(0) ds + K_1 \sum_{i=1}^m c_i(t) w_i(1)w_j(1) \\ \quad + \lambda_1 \Psi_\alpha \left(\sum_{i=1}^m c_i'(t) w_i(1) \right) w_j(1) + K c_j(t) + \lambda c_j'(t) = \langle f(t), w_j \rangle, \\ c_j(0) = \alpha_j, \quad c_j'(0) = \beta_j, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Ta viết gọn hệ (3.10) dưới dạng

$$\begin{cases} c_j''(t) = F_{1j}(t, c(t), c'(t)) + \int_0^t k(t-s)F_{2j}(c(s))ds, \\ c_j(0) = \alpha_j, \quad c_j'(0) = \beta_j, \quad j = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (3.11)$$

với $F_{1j} : [0, T] \times \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_{2j} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, được xác định như sau:

$$\begin{aligned} F_{1j}(t, c(t), c'(t)) = & -\mu(t) \sum_{i=1}^m c_i(t) \langle w_{ix}, w_{jx} \rangle - g(t)w_j(0) - K_0 \sum_{i=1}^m c_i(t)w_i(0)w_j(0) \\ & - \left[K_1 \sum_{i=1}^m c_i(t)w_i(1) + \lambda_1 \left| \sum_{i=1}^m c_i'(t)w_i(1) \right|^{\alpha-2} \sum_{i=1}^m c_i'(t)w_i(1) \right] w_j(1) \\ & - Kc_j(t) - \lambda c_j'(t) + \langle f(t), w_j \rangle, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$F_{2j}(c(t)) = -\sum_{i=1}^m c_i(t)w_i(0)w_j(0), \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.13)$$

Sau hai lần lấy tích phân theo biến thời gian từ 0 đến t , ta đưa hệ (3.11) về hệ phương trình vi tích phân phi tuyến sau

$$c_j(t) = \alpha_j + \beta_j t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau G_j[c](s)ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.14)$$

trong đó

$$G_j[c](t) = F_{1j}(t, c(t), c'(t)) + \int_0^t k(t-s)F_{2j}(c(s))ds, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.15)$$

Với $T > 0$ cho trước, ta sử dụng định lý điểm bất động Schauder để chứng minh hệ (3.14) – (3.15) có nghiệm $c(t) = (c_1(t), \dots, c_m(t))$ trên khoảng $[0, T_m] \subset [0, T]$. Ta có bổ đề sau.

Bổ đề 3.1. Cho $T > 0$. Giả sử $(H_1) - (H_5)$ đúng. Khi đó, tồn tại $T_m > 0$ sao cho hệ (3.14) – (3.15) có nghiệm $c(t) = (c_1(t), \dots, c_m(t))$ trên khoảng $[0, T_m] \subset [0, T]$.

Chứng minh. Với mỗi $T_m > 0$, $\rho > 0$, ta đặt

$$X = C^1([0, T_m]; \mathbb{R}^m), \quad S = \{c \in C^1([0, T_m]; \mathbb{R}^m) : \|c\|_X \leq \rho\},$$

trong đó, $\|c\|_X = \|c\|_0 + \|c'\|_0$, $\|c\|_0 = \sup_{0 \leq t < T_m} |c(t)|_1$, $|c(t)|_1 = \sum_{j=1}^m |c_j(t)|$,

thì S là tập con lồi đóng và bị chặn trong X .

Ta viết lại hệ (3.14) dưới dạng phương trình điểm bất động

$$c(t) = U[c](t), \quad (3.16)$$

trong đó, $c = (c_1, \dots, c_m) \in X$, $U[c](t) = (U_1[c](t), \dots, U_m[c](t))$,

$$U_j[c](t) = \alpha_j + \beta_j t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau G_j[c](s) ds, \quad 0 \leq t \leq T_m, \quad j = \overline{1, m}.$$

Khi đó

i) $U : X \rightarrow X$ liên tục

Trước tiên, ta chứng minh toán tử $U : X \rightarrow X$ xác định. Thật vậy, để chứng minh toán tử $U : X \rightarrow X$ xác định, ta chỉ cần chứng minh rằng $(U_j[c])'$ liên tục trên $[0, T_m]$. Lấy $c = (c_1, \dots, c_m) \in X$, ta có

$$(U_j[c](t))' = \beta_j + \int_0^t G_j[c](s) ds$$

Từ (3.12) – (3.13), (3.15) và các giả thiết $(H_2) - (H_4)$, ta suy ra $G_j[c] \in L^1(0, T)$

nên $(U_j[c])'$ liên tục trên $[0, T_m]$. Vậy, toán tử $U : X \rightarrow X$ xác định.

Chứng minh toán tử $U : X \rightarrow X$ liên tục. Lấy $\{c_k\} \subset X$ sao cho $\|c_k - c\|_X \rightarrow 0$ trong X . Ta có

$$F_{1j}(t, c_k(t), c'_k(t)) \rightarrow F_{1j}(t, c(t), c'(t)) \text{ trong } L^1(0, T_m), \quad (3.17)$$

$$F_{2j}(c_k(t)) \rightarrow F_{2j}(c(t)) \quad \text{trong } C([0, T_m]). \quad (3.18)$$

Do đó suy ra được rằng

$$\int_0^t k(t-s) F_{2j}(c_k(s)) ds \rightarrow \int_0^t k(t-s) F_{2j}(c(s)) ds \quad \text{trong } C([0, T_m]). \quad (3.19)$$

Tổ hợp từ (3.17) - (3.19), ta có

$$G_j[c_k] \rightarrow G_j[c] \text{ trong } L^1(0, T_m),$$

hay,

$$G[c_k] \rightarrow G[c] \quad \text{trong } L^1(0, T_m; \mathbb{R}^m).$$

Khi đó, ta có

$$\|G[c_k] - G[c]\|_{L^1(0, T; \mathbb{R}^m)} \rightarrow 0.$$

Mặt khác, ta lại có

$$U_j[c_k](t) - U_j[c](t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau [G_j[c_k](s) - G_j[c](s)] ds, \quad 0 \leq t \leq T_m, \quad j = \overline{1, m},$$

$$(U_j[c_k])'(t) - (U_j[c])'(t) = \int_0^t [G_j[c_k](s) - G_j[c](s)] ds, \quad 0 \leq t \leq T_m, \quad j = \overline{1, m},$$

nên

$$\|U[c_k] - U[c]\|_0 \leq T_m \|G[c_k] - G[c]\|_{L^1(0, T; \mathbb{R}^m)},$$

$$\|(U[c_k])' - (U[c])'\|_0 \leq \|G[c_k] - G[c]\|_{L^1(0, T; \mathbb{R}^m)}.$$

Do đó

$$\|U[c_k] - U[c]\|_X \rightarrow 0.$$

Vậy, $U : X \rightarrow X$ liên tục.

ii) $U : S \rightarrow S$

Ta sẽ nghiệm lại rằng với ρ , T_m được chọn thích hợp thì $U : S \rightarrow S$

Do giả thiết (H₄) tồn tại hằng số dương M_0 , độc lập với ρ sao cho

$$|k(t)| \leq M_0, \quad \forall t \in [0, T],$$

Mặt khác, từ các giả thiết (H₂) - (H₅) và các biểu thức (3.12), (3.13) ta suy ra, tồn tại hằng số dương $M(\rho)$ phụ thuộc vào ρ sao cho với $|c|_1 \leq \rho$, $|d|_1 \leq \rho$ thì

$$|F_{1j}(t, c, d)| + |F_{2j}(c)| \leq M(\rho), \quad \forall t \in [0, T_m], \quad j = \overline{1, m},$$

điều này dẫn đến

$$|G_j[c](t)| \leq (1 + T_m M_0)M(\rho), \quad \text{với mọi } c \in S, \text{ mọi } t \in [0, T_m].$$

Khi đó, với mọi $c \in S$, ta có

$$|U_j[c](t)| \leq |\alpha_j| + |\beta_j| T_m + \frac{1}{2}(T_m^2 + T_m^3 M_0)M(\rho),$$

và

$$|(U_j[c])'(t)| \leq |\beta_j| + (T_m + T_m^2 M_0)M(\rho),$$

nên

$$\|U[c]\|_0 \leq m[|\alpha|_1 + |\beta|_1 T_m + \frac{m}{2}(T_m^2 + T_m^3 M_0)M(\rho)],$$

$$\|(U[c])'\|_0 \leq m[|\beta|_1 + m(T_m + T_m^2 M_0)M(\rho)].$$

Do đó

$$\|U[c]\|_X \leq |\alpha|_1 + |\beta|_1 + T_m \left[|\beta|_1 + m(1 + T_m + T_m M_0 + m T_m^2 M_0) M(\rho) \right].$$

Chọn ρ sao cho $|\alpha|_1 + |\beta|_1 \leq \frac{\rho}{2}$. Sau đó chọn T_m sao cho

$$T_m \left[|\beta|_1 + m(1 + T_m + T_m M_0 + m T_m^2 M_0) M(\rho) \right] \leq \frac{\rho}{2}.$$

Khi đó

$$\|U[c]\|_X \leq \rho, \text{ tức là } U[c] \in S.$$

Vậy, $U : S \rightarrow S$.

iii) $\overline{US}$ compact trong X

Với mọi $c \in S$, ta có

$$|G_j[c](t)| \leq (1 + T_m M_0) M(\rho),$$

suy ra

$$\left| (U[c])''(t) \right|_1 \leq m(1 + T_m M_0) M(\rho) \equiv \bar{M} \text{ (} \bar{M} \text{ độc lập với } c \in S \text{)}.$$

Từ đây ta suy ra các họ $\{U[c]\}_{c \in S}$, $\{(U[c])'\}_{c \in S}$ là liên tục đồng bậc.

Vậy áp dụng định lý Ascoli-Arzelà thì $\overline{US}$ compact.

Từ i), ii), iii) và định lý điểm bất động Schauder ta suy ra rằng $U : S \rightarrow S$ có điểm bất động trong S . Điểm bất động này là nghiệm của hệ (3.14).

Bổ đề 3.1 được chứng minh ■

Dùng bổ đề 3.1, ta suy ra hệ (3.6) - (3.7) có nghiệm u_m trên một khoảng $[0, T_m]$.

Các đánh giá tiên nghiệm dưới đây cho phép ta lấy $T_m = T$, với mọi m .

Bước 2. Đánh giá tiên nghiệm I. Thay (3.7) vào (3.6)₁ rồi nhân với $c'_{mj}(t)$ và lấy tổng theo j , sau đó lấy tích phân theo biến thời gian từ 0 đến t ta được

$$\begin{aligned} S_m(t) &= S_m(0) + 2g(0)u_{0m}(0) + \int_0^t \mu'(s) \|u_{mx}(s)\|^2 ds - 2g(t)u_m(0, t) \\ &\quad + 2 \int_0^t g'(s)u_m(0, s) ds - 2u_m(0, t) \int_0^t k(t-s)u_m(0, s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2k(0) \int_0^t u_m^2(0, s) ds + 2 \int_0^t u_m(0, s) ds \int_0^s k'(s-r) u_m(0, r) dr \\
& + 2 \int_0^t \langle f(s), u_m'(s) \rangle ds = S_m(0) + 2g(0)u_{0m}(0) + \sum_{i=1}^7 I_i,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

trong đó,

$$\begin{aligned}
S_m(t) &= \|u_m'(t)\|^2 + \mu(t)\|u_{mx}(t)\|^2 + K_0 u_m^2(0, t) + K\|u_m(t)\|^2 + K_1 u_m^2(1, t) \\
&+ 2 \int_0^t \left(\lambda \|u_m'(s)\|^2 + \lambda_1 |u_m'(1, s)|^\alpha \right) ds.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Sử dụng Bổ đề 2.1 và bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cùng với bất đẳng thức

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{3.22}$$

ta lần lượt đánh giá các tích phân ở vế phải (3.20) như sau

Số hạng thứ nhất. Từ (H₃) và (3.21) ta suy ra rằng

$$I_1 \leq \int_0^t |\mu'(s)| \|u_{mx}(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\mu_0} \|\mu'\|_{L^\infty(0, T)} \int_0^t S_m(s) ds \leq C_T \int_0^t S_m(s) ds, \tag{3.23}$$

ở đây, C_T là hằng số bị chặn chỉ phụ thuộc vào T .

Số hạng thứ hai. Từ giả thiết (H₄) và (3.21) ta có

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq 2\sqrt{2} |g(t)| \cdot \|u_m(t)\|_{H^1} \leq \frac{2}{\varepsilon} \|g\|_{L^\infty(0, T)}^2 + \varepsilon \|u_m(t)\|_{H^1}^2 \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} C_T + \varepsilon \|u_m(t)\|_{H^1}^2, \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Số hạng thứ ba. Từ (H₄) và (3.22) với $\varepsilon = 1$, ta được

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq 2\sqrt{2} \int_0^t |g'(s)| \|u_m(s)\|_{H^1} ds \leq 2 \|g'\|_{L^2(0, T)}^2 + \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq C_T + \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Số hạng thứ tư. Bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz và (3.22) ta có

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq 4 \|u_m(t)\|_{H^1} \int_0^t |k(t-s)| \cdot \|u_m(s)\|_{H^1} ds \\
&\leq \varepsilon \|u_m(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\varepsilon} \left(\int_0^t |k(t-s)| \cdot \|u_m(s)\|_{H^1} ds \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon \|u_m(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\varepsilon} \int_0^T k^2(\theta) d\theta \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq \varepsilon \|u_m(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\varepsilon} \|k\|_{L^2(0,T)}^2 \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq \varepsilon \|u_m(t)\|_{H^1}^2 + \frac{1}{\varepsilon} C_T \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds, \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Số hạng thứ năm. Từ (H₄) ta suy ra rằng

$$I_5 \leq 2|k(0)| \int_0^t u_m^2(0,s) ds \leq 4\|k\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds \leq C_T \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds. \tag{3.27}$$

Số hạng thứ sáu. Từ (H₄) ta thu được đánh giá sau

$$\begin{aligned}
I_6 &\leq 4 \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1} \int_0^s |k'(s-r)| \|u_m(r)\|_{H^1} dr ds \\
&\leq \int_0^t \left[\|u_m(s)\|_{H^1}^2 + 4 \left(\int_0^s |k'(s-r)| \|u_m(r)\|_{H^1} dr \right)^2 \right] ds \\
&\leq \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds + 4 \int_0^t \int_0^s |k'(s-r)|^2 dr \int_0^s \|u_m(r)\|_{H^1}^2 dr ds \\
&\leq \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds + 4T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2 \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq \left(1 + 4T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2 \right) \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds \leq C_T \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Số hạng thứ bảy. Từ (H₂) và (3.21) ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}
I_7 &\leq 2 \int_0^t \|f(s)\| \|u_m'(s)\| ds \leq \int_0^t (\|f(s)\| + \|f(s)\| \|u_m'(s)\|^2) ds \\
&\leq \|f\|_{L^1(0,T;L^2)} + \int_0^t \|f(s)\| S_m(s) ds \leq C_T + \int_0^t \|f(s)\| S_m(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Tổ hợp (3.20) và (3.23) – (3.29) ta được

$$\begin{aligned}
S_m(t) &\leq S_m(0) + 2g(0)u_{0m}(0) + \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\right)C_T + 2\varepsilon \|u_m(t)\|_{H^1}^2 \\
&\quad + [1 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\right)C_T] \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds + \int_0^t (C_T + \|f(s)\|) S_m(s) ds,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

với mọi $\varepsilon > 0$ và ở đây C_T là hằng số chỉ phụ thuộc vào T .

Từ các giả thiết (H_1) , (H_3) - (H_5) , (3.8), (3.9) và phép nhúng $H^1 \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ suy ra tồn tại hằng số $C_1 > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} S_m(0) + 2g(0)u_{0m}(0) &= \|u_{1m}\|^2 + \mu(0)\|u_{0mx}\|^2 + K_0 u_{0m}^2(0) \\ &+ K\|u_{0m}\|^2 + K_1 u_{0m}^2(1) + 2g(0)u_{0m}(0) \leq C_1, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

trong đó, C_1 là hằng số chỉ phụ thuộc vào $\mu(0)$, $g(0)$, K , K_0 , K_1 , $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$.

Mặt khác, từ (H_3) , bổ đề 2.1 và (3.21), (3.31) ta lại suy ra rằng

$$\left\{ \begin{aligned} S_m(t) &\geq \|u'_m(t)\|^2 + \mu_0 \|u_{mx}(t)\|^2, \\ \|u_m(t)\|^2 &\leq 2\|u_{0m}\|^2 + 2t \int_0^t S_m(s) ds \leq 2C_1 + 2t \int_0^t S_m(s) ds, \\ \|u_m(t)\|_{H^1}^2 &= \|u_m(t)\|^2 + \|u_{mx}(t)\|^2 \leq \frac{1}{\mu_0} S_m(t) + 2C_1 + 2t \int_0^t S_m(s) ds, \\ \int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds &\leq 2C_1 T + \left(\frac{1}{\mu_0} + 2T^2\right) \int_0^t S_m(s) ds. \end{aligned} \right. \quad (3.32)$$

Tổng hợp (3.30), (3.31) và (3.32), ta được

$$S_m(t) \leq \frac{1}{2} D_1(T, \varepsilon) + \frac{2\varepsilon}{\mu_0} S_m(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \bar{D}_1(T, \varepsilon, s) S_m(s) ds, \quad (3.33)$$

với mọi $\varepsilon > 0$ và trong đó

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} D_1(T, \varepsilon) &= C_1(1 + 4\varepsilon + 2T) + (1 + 2C_1 T) \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\right) C_T, \\ \frac{1}{2} \bar{D}_1(T, \varepsilon, s) &= C_T + \|f(s)\| + 4\varepsilon T + \left(\frac{1}{\mu_0} + 2T^2\right) [1 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\right) C_T]. \end{aligned} \right. \quad (3.34)$$

Chọn $\varepsilon = \frac{\mu_0}{4}$ và sử dụng bất đẳng thức Gronwall ta thu được từ (3.33) rằng

$$S_m(t) \leq D_1(T, \varepsilon) e^{\int_0^t \bar{D}_1(T, \varepsilon, s) ds} \leq C_T, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T], \forall T > 0, \quad (3.35)$$

hơn nữa, cũng từ bổ đề 2.1, (3.32) và (3.35) ta suy ra rằng

$$\left\{ \begin{aligned} \|u_m(0, t)\| &\leq \|u_m(t)\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \sqrt{2} \|u_m(t)\|_{H^1} \leq C_T, \forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T], \\ \|u_m(1, t)\| &\leq \|u_m(t)\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \sqrt{2} \|u_m(t)\|_{H^1} \leq C_T, \forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T], \end{aligned} \right. \quad (3.36)$$

với C_T là hằng số dương không phụ thuộc m , chỉ phụ thuộc vào $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu, f, g, k, K, K_0, K_1, \lambda$.

Đánh giá tiên nghiệm II. Trong (3.6)₁ lấy đạo hàm theo t , ta được

$$\begin{aligned} & \langle u_m'''(t), w_j \rangle + \langle \mu(t)u_m'(t) + \mu'(t)u_{mx}(t), w_{jx} \rangle + Y_m'(t)w_j(0) \\ & + [K_1u_m'(1, t) + \lambda_1\Psi'_\alpha(u_m'(1, t))u_m''(1, t)]w_j(1) \\ & + \langle Ku_m'(t) + \lambda u_m''(t), w_j \rangle = \overline{\langle f'(t), w_j \rangle}, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

trong đó

$$Y_m'(t) = g'(t) + K_0u_m'(0, t) + k(0)u_m(0, t) + \int_0^t k'(t-s)u_m(0, s)ds, \quad (3.38)$$

Thay (3.38) vào (3.37) rồi nhân hai vế với $c_{mj}''(t)$ và lấy tổng theo j , sau đó lấy tích phân theo biến thời gian từ 0 đến t và qua một số bước biến đổi đơn giản ta được

$$\begin{aligned} X_m(t) &= X_m(0) + 2\mu'(0)\langle u_{0mx}, u_{1mx} \rangle + 2[g'(0) + k(0)u_{0m}(0)]u_{1m}(0) \\ & - 2u_m'(0, t)[g'(t) + k(0)u_m(0, t) + \int_0^t k'(t-s)u_m(0, s)ds] \\ & + 2[k(0) + k'(0)]\int_0^t |u_m'(0, s)|^2 ds + 2\int_0^t g''(s)u_m'(0, s)ds \\ & - 2\mu'(t)\langle u_{mx}(t), u_{mx}'(t) \rangle \\ & + 2\int_0^t \mu''(s)\langle u_{mx}(s), u_{mx}'(s) \rangle ds + 3\int_0^t \mu'(s)||u_{mx}'(s)||^2 ds \\ & + 2\int_0^t u_m'(0, r)\int_0^r k''(r-s)u_m(0, s)ds dr + 2\int_0^t \langle F'(s), u_m''(s) \rangle ds \\ & = X_m(0) + 2\mu'(0)\langle u_{0mx}, u_{1mx} \rangle + 2[g'(0) - k(0)u_{0m}(0)]u_{1m}(0) + \sum_{i=1}^8 \bar{I}_i, \end{aligned} \quad (3.39)$$

trong đó,

$$\begin{aligned} X_m(t) &= ||u_m''(t)||^2 + \mu(t)||u_{mx}'(t)||^2 + K_0|u_m'(0, t)|^2 + K_1|u_m'(1, t)|^2 \\ & + 2\lambda_1\int_0^t \Psi'_\alpha(u_m'(1, s))|u_m''(1, s)|^2 ds + K||u_m'(t)||^2 + 2\lambda\int_0^t ||u_m''(s)||^2 ds \\ & = ||u_m''(t)||^2 + \mu(t)||u_{mx}'(t)||^2 + K_0|u_m'(0, t)|^2 + K_1|u_m'(1, t)|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8\lambda_1(\alpha-1)}{\alpha^2} \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial s} \left(|u'_m(1,s)|^{\frac{\alpha}{2}-1} u'_m(1,s) \right) \right|^2 ds \\
& + K \|u'_m(t)\|^2 + 2\lambda \int_0^t \|u''_m(s)\|^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Từ các giả thiết (H₂) – (H₅), (3.36), cùng với bất đẳng thức sơ cấp (3.22) ta bắt đầu đánh giá các số hạng ở vế phải của (3.39) như sau:

Số hạng thứ nhất.

$$\begin{aligned}
\bar{I}_1 & \leq 2\sqrt{2} \|u'_m(t)\|_{H^1} \left[|g'(t)| + \left(|k(0)| + \int_0^t |k'(t-s)| ds \right) C_T \right] \\
& \leq \varepsilon \|u'_m(t)\|_{H^1}^2 + \frac{2}{\varepsilon} \left[|g'(t)| + \left(|k(0)| + \int_0^t |k'(t-s)| ds \right) C_T \right]^2 \\
& \leq \varepsilon \|u'_m(t)\|_{H^1}^2 + \frac{1}{\varepsilon} C_T, \quad \forall \varepsilon > 0,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

trong đó C_T là hằng số bị chặn chỉ phụ thuộc vào T .

Số hạng thứ hai.

$$\begin{aligned}
\bar{I}_2 & \leq 2[|k(0)| + |k'(0)|] \int_0^t |u'_m(0,s)|^2 ds \leq 4 \|k\|_{W^{1,\infty}(0,T)} \int_0^t \|u'_m(s)\|_{H^1}^2 ds \\
& \leq C_T \int_0^t \|u'_m(s)\|_{H^1}^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Số hạng thứ ba.

$$\begin{aligned}
\bar{I}_3 & \leq 2 \int_0^t |g''(s)| |u'_m(0,s)| ds \leq 2\sqrt{2} \int_0^t |g''(s)| \|u'_m(s)\|_{H^1} ds \\
& \leq 2 \int_0^t |g''(s)| ds + \int_0^t |g''(s)| \|u'_m(s)\|_{H^1}^2 ds \leq 2 \|g''\|_{L^1(0,T)} + \int_0^t |g''(s)| \|u'_m(s)\|_{H^1}^2 ds \\
& \leq C_T + \int_0^t |g''(s)| \|u'_m(s)\|_{H^1}^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Số hạng thứ tư.

$$\begin{aligned}
\bar{I}_4 & \leq 2 |\mu'(t)| \|u_{mx}(t)\| \|u'_{mx}(t)\| \leq \frac{2}{\mu_0} \|\mu'\|_{L^\infty(0,T)} \sqrt{C_T} \sqrt{X_m(t)} \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon} C_T + \varepsilon X_m(t), \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Số hạng thứ năm.

$$\begin{aligned}
\bar{I}_5 &\leq 2 \int_0^t |\mu''(s)| |u_{mx}(s)| |u'_{mx}(s)| ds \leq 2 \int_0^t |\mu''(s)|^{\frac{\sqrt{C_T}}{\mu_0}} \sqrt{X_m(s)} ds \\
&\leq \frac{C_T}{\mu_0^2} \int_0^t |\mu''(s)| ds + \int_0^t |\mu''(s)| X_m(s) ds \leq \frac{C_T}{\mu_0^2} \|\mu''\|_{L^1(0,T)} + \int_0^t |\mu''(s)| X_m(s) ds \\
&\leq C_T + \int_0^t |\mu''(s)| X_m(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Số hạng thứ sáu.

$$\bar{I}_6 \leq 3 \int_0^t |\mu'(s)| |u'_{mx}(s)|^2 ds \leq \frac{3}{\mu_0} \|\mu'\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^t X_m(s) ds \leq C_T \int_0^t X_m(s) ds. \tag{3.46}$$

Số hạng thứ bảy.

$$\begin{aligned}
\bar{I}_7 &\leq 2 \int_0^t |u'_m(0, s)| \left| \int_0^s k''(s-r) |u_m(0, r)| dr \right| ds \\
&\leq 2\sqrt{2C_T} \int_0^t \|u'_m(s)\|_{H^1} \int_0^s |k''(s-r)| dr ds \\
&\leq 2\sqrt{2C_T} \int_0^t \|u'_m(s)\|_{H^1} \int_0^T |k''(\theta)| d\theta ds \\
&\leq 2C_T \|k''\|_{L^1(0,T)}^2 + \int_0^t \|u'_m(s)\|_{H^1}^2 ds \leq C_T + \int_0^t \|u'_m(s)\|_{H^1}^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Số hạng thứ tám.

$$\begin{aligned}
\bar{I}_8 &\leq 2 \int_0^t \|f'(s)\| \|u''_m(s)\| ds \leq \|f'\|_{L^1(0,T;L^2)} + \int_0^t \|f'(s)\| X_m(s) ds \\
&\leq C_T + \int_0^t \|f'(s)\| X_m(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Tổ hợp (3.39) và (3.41) – (3.48) ta được

$$\begin{aligned}
X_m(t) &\leq X_m(0) + 2\mu'(0) \langle u_{0mx}, u_{1mx} \rangle + 2[g'(0) - k(0)u_{0m}(0)]u_{1m}(0) + \left(\frac{2}{\varepsilon} + 4\right)C_T \\
&\quad + \varepsilon X_m(t) + \varepsilon \|u'_m(s)\|_{H^1}^2 + \int_0^t q_1(s) \|u'_m(s)\|_{H^1}^2 ds + \int_0^t q_2(s) X_m(s) ds,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

với mọi $\varepsilon > 0$, ở đây C_T là hằng số chỉ phụ thuộc vào T và

$$\begin{cases} q_1(s) = 1 + C_T + |g''(s)|, \\ q_2(s) = C_T + |\mu''(s)| + \|f'(s)\|. \end{cases} \quad (3.50)$$

Từ các giả thiết (H_1) , $(H_3) - (H_5)$, (3.8) – (3.9) và phép nhúng $H^1 \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ suy ra tồn tại hằng số $C_2 > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} X_m(0) + 2\mu'(0)\langle u_{0mx}, u_{1mx} \rangle + 2[g'(0) - k(0)u_{0m}(0)]u_{1m}(0) + \|u_{1m}\|^2 \\ = \|u_m''(0)\|^2 + \mu(0)\|u_{1mx}\|^2 + K_0|u_{1m}(0)|^2 + K_1|u_{1m}(1)|^2 \\ + 2\mu'(0)\langle u_{0mx}, u_{1mx} \rangle + 2[g'(0) - k(0)u_{0m}(0)]u_{1m}(0) + \|u_{1m}\|^2 \\ \leq \|\mu(0)u_{0mx} + Ku_{0m} + \lambda u_{1m} + f(0)\|^2 + \mu(0)\|u_{1mx}\|^2 + K_0|u_{1m}(0)|^2 \\ + K_1|u_{1m}(1)|^2 + 2\mu'(0)\langle u_{0mx}, u_{1mx} \rangle + 2[g'(0) - k(0)u_{0m}(0)]u_{1m}(0) \\ + \|u_{1m}\|^2 \leq C_2, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

trong đó, C_2 là hằng số chỉ phụ thuộc vào $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu(0), \mu'(0), g'(0), k(0), f(0), K, K_0, K_1, \lambda$.

Mặt khác, từ (3.40) và tương tự như trong (3.32) ta cũng có

$$\begin{cases} X_m(t) \geq \|u_m''(t)\|^2 + \mu_0\|u_m'(t)\|^2, \\ \|u_m'(t)\|^2 \leq 2\|u_{1m}\|^2 + 2t \int_0^t X_m(s) ds \leq 2C_2 + 2t \int_0^t X_m(s) ds, \\ \|u_m'(t)\|_{H^1}^2 = \|u_m'(t)\|^2 + \|u_m''(t)\|^2 \leq \frac{1}{\mu_0} X_m(t) + 2C_2 + 2t \int_0^t X_m(s) ds, \\ \int_0^t \|u_m'(s)\|_{H^1}^2 ds \leq 2TC_2 + (\frac{1}{\mu_0} + 2T^2) \int_0^t X_m(s) ds. \end{cases} \quad (3.52)$$

Tổng hợp (3.49), (3.51) và (3.52), ta thu được

$$X_m(t) \leq \frac{1}{2} D_2(T, \varepsilon) + \varepsilon(1 + \frac{1}{\mu_0})X_m(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \bar{D}_2(T, \varepsilon, s)X_m(s)ds, \quad (3.53)$$

với mọi $\varepsilon > 0$ và trong đó

$$\begin{cases} \frac{1}{2} D_2(T, \varepsilon) = (1 + 2\varepsilon)C_2 + (\frac{2}{\varepsilon} + 5)C_T + 2C_2 \int_0^T q_1(s)ds, \\ \frac{1}{2} \bar{D}_2(T, \varepsilon, s) = 2\varepsilon T + \frac{1}{\mu_0} q_1(s) + 2T \int_0^T q_1(s)ds + q_2(s) \in L^1(0, T). \end{cases} \quad (3.54)$$

Chọn $\varepsilon > 0$ và $\varepsilon(1 + \frac{1}{\mu_0}) \leq \frac{1}{2}$ và sử dụng bất đẳng thức Gronwall ta thu được từ (3.53) rằng

$$X_m(t) \leq D_2(T, \varepsilon) e^{\int_0^t \bar{D}_2(T, \varepsilon, s)ds} \leq C_T, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T > 0, \quad (3.55)$$

hơn nữa, từ bổ đề 2.1, (3.52) và (3.55) ta suy ra rằng

$$\begin{cases} |u'_m(0, t)| \leq \|u'_m(t)\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \sqrt{2} \|u'_m(t)\|_{H^1} \leq C_T, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T], \\ |u'_m(1, t)| \leq \|u'_m(t)\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \sqrt{2} \|u'_m(t)\|_{H^1} \leq C_T, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (3.56)$$

với C_T là hằng số dương không phụ thuộc m , chỉ phụ thuộc vào $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu, f, g, k, K, K_0, K_1, \lambda, \lambda_1$.

Từ (3.7)₁, (3.36)₁, (3.38), và (3.56)₁ ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} |Y_m(t)| &\leq |g(t)| + K_0 |u_m(0, t)| + \int_0^t |k(t-s)| |u_m(0, s)| ds \\ &\leq C_T, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T > 0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} |Y'_m(t)| &\leq |g'(t)| + K_0 |u'_m(0, t)| + |k(0)| \cdot |u_m(0, t)| + \int_0^t |k'(t-s)| |u_m(0, s)| ds \\ &\leq C_T, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T > 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Từ (3.36) và (3.56) ta thu được

$$\begin{cases} \|u_m(0, \cdot)\|_{W^{1,\infty}(0,T)} \leq C_T, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \\ \|u_m(1, \cdot)\|_{W^{1,\infty}(0,T)} \leq C_T, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.59)$$

Từ (3.40) suy ra

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(|u'_m(1, s)|^{\frac{\alpha}{2}-1} u'_m(1, s) \right) \text{ bị chặn trong } L^2(0, T) \quad (3.60)$$

Mặt khác, từ (3.59) ta lại có

$u'_m(1, s)$ bị chặn trong $L^\infty(0, T)$ mà $\left| |u'_m(1, s)|^{\frac{\alpha}{2}-1} u'_m(1, s) \right| \sim |u'_m(1, s)|^{\frac{\alpha}{2}}$.

Do đó

$$|u'_m(1, s)|^{\frac{\alpha}{2}-1} u'_m(1, s) \text{ bị chặn trong } L^\infty(0, T) \quad (3.61)$$

Từ (3.60) và (3.61) suy ra rằng

$$\| |u'_m(1, s)|^{\frac{\alpha}{2}-1} u'_m(1, s) \|_{H^1(0, T)} \leq C_T, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.62)$$

Bước 3. Qua giới hạn. Từ (3.21), (3.40) và (3.57) - (3.59), (3.62) ta suy ra rằng tồn tại một dãy con của dãy u_m mà vẫn ký hiệu là u_m sao cho

$$u_m \rightarrow u \quad \text{trong } L^\infty(0, T; H^1) \text{ yếu } *, \quad (3.63)$$

$$u'_m \rightarrow u' \quad \text{trong } L^\infty(0, T; H^1) \text{ yếu } *, \quad (3.64)$$

$$u''_m \rightarrow u'' \quad \text{trong } L^\infty(0, T; L^2) \text{ yếu } *, \quad (3.65)$$

$$|u'_m(1, \cdot)|^{\frac{\alpha}{2}-1} u'_m(1, \cdot) \rightarrow \chi \quad \text{trong } H^1(0, T) \text{ yếu}, \quad (3.66)$$

$$u_m(0, \cdot) \rightarrow u(0, \cdot) \quad \text{trong } W^{1, \infty}(0, T) \text{ yếu } *, \quad (3.67)$$

$$u_m(1, \cdot) \rightarrow u(1, \cdot) \quad \text{trong } W^{1, \infty}(0, T) \text{ yếu } *, \quad (3.68)$$

$$u'_m(1, \cdot) \rightarrow u'(1, \cdot) \quad \text{trong } L^\infty(0, T) \text{ yếu } *, \quad (3.69)$$

$$Y_m \rightarrow \tilde{Y} \quad \text{trong } W^{1, \infty}(0, T) \text{ yếu } *. \quad (3.70)$$

Theo bổ đề về tính compact của Lions [3, trang 57], từ (3.63) - (3.70) và các phép nhúng $H^1(Q_T) \hookrightarrow L^2(Q_T)$, $H^1(0, T) \hookrightarrow C^0([0, T])$, $W^{1, n}(0, T) \hookrightarrow C^0([0, T])$ là compact ta suy ra rằng tồn tại một dãy con của $\{u_m\}$ vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho

$$u_m \rightarrow u \quad \text{mạnh trong } L^2(Q_T) \text{ và a.e. } (x, t) \in Q_T, \quad (3.71)$$

$$u'_m \rightarrow u' \quad \text{mạnh trong } L^2(Q_T) \text{ và a.e. } (x, t) \in Q_T, \quad (3.72)$$

$$u_m(0, \cdot) \rightarrow u(0, \cdot) \quad \text{mạnh trong } C^0([0, T]), \quad (3.73)$$

$$u_m(1, \cdot) \rightarrow u(1, \cdot) \quad \text{mạnh trong } C^0([0, T]), \quad (3.74)$$

$$|u'_m(1, \cdot)|^{\frac{\alpha}{2}-1} u'_m(1, \cdot) \rightarrow \chi \quad \text{mạnh trong } C^0([0, T]), \quad (3.75)$$

$$Y_m \rightarrow \tilde{Y} \quad \text{mạnh trong } C^0([0, T]). \quad (3.76)$$

Mặt khác, từ (3.7)₁ và (3.79) và giả thiết (H₄) ta suy ra rằng

$$Y_m(t) \rightarrow g(t) + K_0 u(0, t) + \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds \equiv Y(t) \text{ mạnh trong } C^0([0, T]). \quad (3.77)$$

Vậy, từ (3.76) và (3.77) ta có $Y(t) = \tilde{Y}(t)$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh bổ đề sau

Bổ đề 3.2.

$$\Psi_\alpha(u'_m(1, \cdot)) \rightarrow \Psi_\alpha(u'(1, \cdot)) \text{ mạnh trong } C^0([0, T]). \quad (3.78)$$

Chứng minh Bổ đề 3.2. Đặt $\chi_m = |u'_m(1, \cdot)|^{\frac{\alpha}{2}-1} u'_m(1, \cdot)$. Từ (3.75) ta suy ra rằng

$$\chi_m \rightarrow \chi \text{ mạnh trong } C^0([0, T]). \quad (3.79)$$

Nhưng, ta lại có

$$u'_m(1, \cdot) = |\chi_m|^{\frac{\alpha}{2}-1} \chi_m \rightarrow |\chi|^{\frac{\alpha}{2}-1} \chi \text{ mạnh trong } C^0([0, T]). \quad (3.80)$$

Từ (3.69) và tính duy nhất của giới hạn, ta có

$$u'(1, \cdot) = |\chi|^{\frac{\alpha}{2}-1} \chi. \quad (3.81)$$

Do đó, từ (3.80) và (3.81) ta suy ra $\Psi_\alpha(u'_m(1, \cdot)) \rightarrow \Psi_\alpha(u'(1, \cdot))$ mạnh trong $C^0([0, T])$.

Bổ đề 3.2 được chứng minh hoàn tất ■

Qua giới hạn trong (3.6) – (3.9) và nhờ vào (3.63) – (3.65), (3.74), (3.75), (3.77) và Bổ đề 3.2 ta có u thỏa bài toán sau

$$\begin{cases} \langle u_{tt}, v \rangle + \mu(t) \langle u_x, v_x \rangle + Y(t)v(0) + [K_1 u(1, \cdot) + \lambda_1 \Psi_\alpha(u_t(1, \cdot))]v(1) \\ \quad + \langle Ku + \lambda u_t, v \rangle = \langle f(t), v \rangle, \quad \forall v \in H^1, \\ u(0) = \tilde{u}_0, \quad u_t(0) = \tilde{u}_1, \end{cases} \quad (3.82)$$

ở đây

$$Y(t) = g(t) + K_0 u(0, t) + \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds,$$

Hơn nữa, từ giả thiết (H₂) – (H₃), (H₅) và (3.63) – (3.65), (3.82)₁,

$$u_{xx} = \frac{1}{\mu(t)} (u_{tt} + Ku + \lambda u_t - f) \in L^\infty(0, T; L^2). \quad (3.83)$$

Vậy, $u \in L^\infty(0, T; H^2)$ và sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán đã được chứng minh.

Bây giờ ta tiếp tục chứng minh tính duy nhất của nghiệm yếu.

Bước 4. Sự duy nhất nghiệm. Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm yếu của bài toán (3.1),

(3.2) sao cho

$$\begin{cases} u_i \in L^\infty(0, T; H^2), \quad u_i' \in L^\infty(0, T; H^1), \quad u_i'' \in L^\infty(0, T; L^2), \\ |u_i'(1, \cdot)|^{\frac{\alpha-1}{2}} u_i'(1, \cdot) \in H^1(0, T), \quad u_i(0, \cdot) \in W^{1, \infty}(0, T), \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Thì $u = u_1 - u_2$ là nghiệm của bài toán biên phân sau

$$\begin{cases} \langle u'', v \rangle + \mu(t) \langle u_x, v_x \rangle + Y(t)v(0) + K_1 u(1, t)v(1) + \lambda_1 \Psi_\alpha(u_1'(1, t))v(1) \\ \quad - \lambda_1 \Psi_\alpha(u_2'(1, t))v(1) + \langle Ku + \lambda u', v \rangle = 0, \quad \forall v \in H^1, \\ u(0) = u'(0) = 0, \end{cases} \quad (3.84)$$

trong đó, $Y(t) = K_0 u(0, t) + \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds$.

Trong (3.84)₁ ta thay $v = u'$, sau đó lấy tích phân theo biến thời gian t , ta được

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int_0^t \mu'(s) \|u_x(s)\|^2 ds - 2 \int_0^t u'(0, s) ds \int_0^s k(s-r)u(0, r)dr \\ &= \int_0^t \mu'(s) \|u_x(s)\|^2 ds - 2u(0, t) \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds + 2k(0) \int_0^t u^2(0, s)ds \\ &\quad + 2 \int_0^t u(0, r)dr \int_0^r k'(r-s)u(0, s)ds = \sum_{i=1}^4 \hat{I}_i, \end{aligned} \quad (3.85)$$

trong đó,

$$\begin{aligned} Z(t) &= \|u'(t)\|^2 + \mu(t) \|u_x(t)\|^2 + K_0 u^2(0, t) + K_1 u^2(1, t) \\ &\quad + 2\lambda_1 \int_0^t [\Psi_\alpha(u_1'(1, s)) - \Psi_\alpha(u_2'(1, s))] u'(1, s) ds \\ &\quad + K \|u(s)\|^2 + 2\lambda \int_0^t \|u'(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Lần lượt đánh giá các tích phân ở (3.86) ta được

Đánh giá $\hat{I}_1$.

$$\hat{I}_1 \leq \int_0^t |\mu'(s)| \|u_x(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\mu_0} \|\mu'\|_{L^\infty(0, T)} \int_0^t Z(s) ds \leq \hat{C}_T \int_0^t Z(s) ds. \quad (3.87)$$

Đánh giá $\hat{I}_2$.

$$\begin{aligned}
\hat{I}_2 &\leq 4 \|u(t)\|_{H^1} \int_0^t |k(t-s)| \cdot \|u(s)\|_{H^1} ds \\
&\leq \varepsilon \|u(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\varepsilon} \left(\int_0^t |k(t-s)| \cdot \|u(s)\|_{H^1} ds \right)^2 \\
&\leq \varepsilon \|u(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\varepsilon} \int_0^T k^2(\theta) d\theta \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq \varepsilon \|u(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\varepsilon} \|k\|_{L^2(0,T)}^2 \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq \varepsilon \|u(t)\|_{H^1}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \hat{C}_T \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Đánh giá $\hat{I}_3$.

$$\hat{I}_3 \leq 2 |k(0)| \int_0^t u^2(0, s) ds \leq 4 \|k\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \leq \hat{C}_T \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds. \tag{3.99}$$

Đánh giá $\hat{I}_4$.

$$\begin{aligned}
\hat{I}_4 &\leq 4 \int_0^t \|u(r)\|_{H^1} dr \int_0^r |k'(r-s)| \cdot \|u(s)\|_{H^1} ds \\
&\leq \int_0^t \left[\|u(s)\|_{H^1}^2 + 2 \left(\int_0^s |k'(s-r)| \cdot \|u(r)\|_{H^1} dr \right)^2 \right] ds \\
&\leq \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds + 4 \int_0^t \int_0^s |k'(s-r)|^2 dr \int_0^s \|u(r)\|_{H^1}^2 dr ds \\
&\leq \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds + 4T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2 \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq \left(1 + 4T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2 \right) \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \leq \hat{C}_T \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Tổng hợp (3.85) và (3.87) – (3.90) ta được

$$Z(t) \leq \varepsilon \|u(t)\|_{H^1}^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + 3 \right) \hat{C}_T \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds + 2 \hat{C}_T \int_0^t Z(s) ds, \tag{3.91}$$

Do tính đơn điệu của hàm Ψ_α và giả thiết (H₃) nên từ (3.85) ta thu được

$$\begin{cases} Z(t) \geq \|u'(t)\|^2 + \mu_0 \|u_x(t)\|^2, \quad \|u(t)\|^2 = \left\| \int_0^t u'(s) ds \right\|^2 \leq T \int_0^t Z(s) ds, \\ \|u(t)\|_{H^1}^2 = \|u(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2 \leq \frac{1}{\mu_0} Z(t) + T \int_0^t Z(s) ds. \\ \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \leq \left(\frac{1}{\mu_0} + T^2\right) \int_0^t Z(s) ds. \end{cases} \quad (3.92)$$

Thay (3.92) vào (3.91) ta được

$$Z(t) \leq \frac{\varepsilon}{\mu_0} Z(t) + D_3(T, \varepsilon) \int_0^t Z(s) ds, \quad (3.93)$$

trong đó, $D_3(T, \varepsilon) = \varepsilon T + [(\frac{1}{\mu_0} + T^2)(\frac{1}{\varepsilon} + 3) + 2]\hat{C}_T$.

Chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $\frac{\varepsilon}{\mu_0} \leq \frac{1}{2}$ và bất đẳng thức Gronwall ta thu được từ (3.93) rằng

$Z(t) \equiv 0$. Do đó $u \equiv 0$, nghĩa là $u_1 \equiv u_2$.

Vậy, nghiệm yếu u của bài toán (3.1), (3.2) là duy nhất. Ta hoàn tất chứng minh Định lý 3.1 ■

Chú thích 3.2. Chú ý rằng Định lý 3.1 vẫn còn đúng nếu ta thay thế giả thiết (H_5) bởi $(H'_5) : \alpha \geq 2; K, K_0, K_1, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda_1 > 0$.

Chú thích 3.3. Với phương pháp chứng minh tương tự cùng với các điều chỉnh trong bước đánh giá tiên nghiệm, trong [16] chúng tôi cũng thu được kết quả tổng quát về sự tồn tại duy nhất nghiệm cho bài toán (3.1), (3.2) với $f(u, u_t) = K|u|^{p-2}u + \lambda|u_t|^{q-2}u_t$, $p, q \geq 2$.

Chương 4

ỔN ĐỊNH NGHIỆM

4.1. Giới thiệu

Trong chương này, chúng tôi khảo sát tính ổn định của nghiệm yếu của bài toán (3.1), (3.2) tương ứng với $\alpha = 2$. Giả sử các hàm $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$ thỏa giả thiết (H₁). Theo định lý 3.1, thì bài toán (3.1), (3.2) có duy nhất nghiệm yếu u phụ thuộc vào $K, K_0, K_1, \lambda, \lambda_1, \mu, f, g, k$.

$$u = u(K, K_0, K_1, \lambda, \lambda_1, \mu, f, g, k). \quad (4.1)$$

trong đó $(K, K_0, K_1, \lambda, \lambda_1, \mu, f, g, k)$ thỏa các giả thiết (H₂) – (H₅).

Đặt

$$\mathfrak{S}(\mu_0) = \{(K, K_0, K_1, \lambda, \lambda_1, \mu, f, g, k) : (K, K_0, K_1, \lambda, \lambda_1, \mu, f, g, k) \text{ thỏa (H}_2\text{) – (H}_5\text{)}\}$$

với $\mu_0 > 0$ là hằng số cho trước.

Ở đây, ta ký hiệu

$$W(T) = \{v \in L^\infty(0, T; H^1) : v_t \in L^\infty(0, T; L^2)\}$$

là không gian Banach thực với chuẩn định bởi

$$\|v\|_{W(T)} = \|v_t\|_{L^\infty(0, T; L^2)} + \|v\|_{L^\infty(0, T; H^1)}.$$

4.2. Tính ổn định của nghiệm yếu vào dữ kiện của bài toán

Định lý 4.1. *Giả sử (H₁) – (H₅) thỏa. Khi đó, với mỗi $T > 0$, nghiệm yếu của bài toán (3.1), (3.2) là ổn định với dữ kiện $(K, K_0, K_1, \lambda, \lambda_1, \mu, f, g, k)$ thuộc $\mathfrak{S}(\mu_0)$, nghĩa là:*

Nếu $(K, K_0, K_1, \lambda, \lambda_1, \mu, f, g, k), (K^j, K_0^j, K_1^j, \lambda^j, \lambda_1^j, \mu^j, f^j, g^j, k^j) \in \mathfrak{S}(\mu_0)$ sao cho

$$\begin{cases} |K^j - K| + |K_0^j - K_0| + |K_1^j - K_1| + |\lambda^j - \lambda| + |\lambda_1^j - \lambda_1| \rightarrow 0, \\ \|\mu^j - \mu\|_{C^1([0, T])} \rightarrow 0, \quad \|f^j - f\|_{L^1(0, T; L^2)} + \|f_t^j - f_t\|_{L^1(0, T; L^2)} \rightarrow 0, \\ \|g^j - g\|_{W^{2,1}(0, T)} \rightarrow 0, \quad \|k^j - k\|_{W^{2,1}(0, T)} \rightarrow 0, \quad \text{khi } j \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.2)$$

thì

$$(u_j, u_j(1, \cdot), Y_j) \rightarrow (u, u(1, \cdot), Y), \text{ trong } W(T) \times H^1(0, T) \times L^\infty(0, T) \quad (4.3)$$

khi $j \rightarrow +\infty$, trong đó $u_j = u(K^j, K_0^j, K_1^j, \lambda^j, \lambda_1^j, \mu^j, f^j, g^j, k^j)$.

Chứng minh. Trước hết, ta chú ý rằng, nếu các dữ kiện $(K, K_0, K_1, \lambda, \lambda_1, \mu, f, g, k)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} K \leq K^*, K_0 \leq K_0^*, K_1 \leq K_1^*, \lambda \leq \lambda^*, \lambda_1 \leq \lambda_1^*, \\ \|\mu\|_{C^1([0,T])} \leq \mu^*, \|f\|_{L^1(0,T;L^2)} + \|f_t\|_{L^1(0,T;L^2)} \leq f^*, \\ \|g\|_{W^{2,1}(0,T)} \leq g^*, \|k\|_{W^{2,1}(0,T)} \leq k^*, \end{cases} \quad (4.4)$$

trong đó $(K^*, K_0^*, K_1^*, \lambda^*, \lambda_1^*, \mu^*, f^*, g^*, k^*)$ là các hằng số dương cố định. Khi đó, các đánh giá tiên nghiệm cho dãy u_m trong chứng minh định lý 3.1 thỏa

$$\begin{cases} \|u'_m(t)\|^2 + \mu_0 \|u_{mx}(t)\|^2 + 2\lambda_1 \int_0^t |u'_m(1,s)|^2 ds \leq C_T, \forall t \in [0, T], \\ \|u''_m(t)\|^2 + \mu_0 \|u'_{mx}(t)\|^2 + 2\lambda_1 \int_0^t |u''_m(1,s)|^2 ds \leq C_T, \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (4.5)$$

trong đó C_T là các hằng số chỉ phụ thuộc vào $T, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu_0, K^*, K_0^*, K_1^*, \lambda^*, \lambda_1^*, \mu^*, f^*, g^*, k^*$ (độc lập với $K, K_0, K_1, \lambda, \lambda_1, \mu, f, g, k$).

Do đó giới hạn u trong các không gian hàm thích hợp của dãy u_m được xác định bởi (3.6) – (3.9), là nghiệm yếu của bài toán (3.1), (3.2) thỏa các đánh giá tiên nghiệm (4.5).

Do (4.2) nên ta có thể giả sử rằng tồn tại các hằng số dương $K^*, K_0^*, K_1^*, \lambda^*, \lambda_1^*, \mu^*, f^*, g^*, k^*$ sao cho bộ dữ kiện $(K^j, K_0^j, K_1^j, \lambda^j, \lambda_1^j, \mu^j, f^j, g^j, k^j) \in \mathfrak{S}(\mu_0)$ thỏa mãn (4.4), với $(K, K_0, K_1, \lambda, \lambda_1, \mu, f, g, k) = (K^j, K_0^j, K_1^j, \lambda^j, \lambda_1^j, \mu^j, f^j, g^j, k^j)$.

Khi đó, nhờ vào nhận xét trên, ta có nghiệm u_j của bài toán (3.1), (3.2) tương ứng với $(K, K_0, K_1, \lambda, \lambda_1, \mu, f, g, k) = (K^j, K_0^j, K_1^j, \lambda^j, \lambda_1^j, \mu^j, f^j, g^j, k^j)$ thỏa

$$\begin{cases} \|u'_j(t)\|^2 + \mu_0 \|u_{jx}(t)\|^2 + 2\lambda_1 \int_0^t |u'_j(1,s)|^2 ds \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T], \\ \|u''_j(t)\|^2 + \mu_0 \|u'_{jx}(t)\|^2 + 2\lambda_1 \int_0^t |u''_j(1,s)|^2 ds \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T], \\ |u_j(0,t)| \leq \|u_j(t)\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \sqrt{2} \|u_j(t)\|_{H^1} \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T], \\ |u'_j(0,t)| \leq \|u'_j(t)\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \sqrt{2} \|u'_j(t)\|_{H^1} \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases} \quad (4.6)$$

Đặt

$$\begin{cases} \tilde{K}_j = K^j - K, \tilde{K}_{0j} = K_0^j - K_0, \tilde{K}_{1j} = K_1^j - K_1, \tilde{\lambda}_j = \lambda^j - \lambda, \\ \tilde{\lambda}_{1j} = \lambda_1^j - \lambda_1, \tilde{\mu}_j = \mu^j - \mu, \tilde{f}_j = f^j - f, \tilde{g}_j = g^j - g, \tilde{k}_j = k^j - k. \end{cases} \quad (4.7)$$

Khi đó, $v_j = u_j - u$ thỏa bài toán biến phân sau

$$\begin{cases} \langle v_j''(t), v \rangle + \mu(t) \langle v_{jx}(t), v_x \rangle + \tilde{Y}_j(t) v(0) + K_1 v_j(1, t) v(1) + \lambda_1 v_j'(1, t) v(1) \\ \quad + \langle K v_j(t) + \lambda v_j'(t), v \rangle = -\tilde{\mu}_j(t) \langle u_{jx}(t), v_x \rangle - \tilde{K}_{1j} u_j(1, t) v(1) \\ \quad - \tilde{\lambda}_{1j} u_j'(1, t) v(1) - \langle \tilde{K}_j u_j + \tilde{\lambda}_j u_j', v \rangle + \langle \tilde{f}_j(t), v \rangle, \quad \forall v \in H^1, \\ v_j(x, 0) = v_j'(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

với

$$\begin{cases} \tilde{Y}_j(t) = \hat{g}_j(t) + K_0 v_j(0, t) + \int_0^t k(t-s) v_j(0, s) ds, \\ \hat{g}_j(t) = \tilde{g}_j(t) + \tilde{K}_{0j} u_j(0, t) + \int_0^t \tilde{k}_j(t-s) u_j(0, s) ds. \end{cases} \quad (4.9)$$

Thay (4.9) vào (4.8)₁, rồi thế $v = v_j'$ sau đó lấy tích phân theo biến thời gian từ 0 đến t và sau một số bước biến đổi đơn giản ta thu được

$$\begin{aligned} S_j(t) &= \int_0^t \mu'(s) \|v_{jx}(s)\|^2 ds - 2\hat{g}_j(t) v_j(0, t) + 2 \int_0^t \hat{g}_j'(s) v_j(0, s) ds + 2k(0) \int_0^t v_j^2(0, s) ds \\ &\quad - 2v_j(0, t) \int_0^t k(t-s) v_j(0, s) ds + 2 \int_0^t v_j(0, \tau) \int_0^\tau k'(\tau-s) v_j(0, s) ds d\tau \\ &\quad - 2\tilde{K}_{1j} \int_0^t u_j(1, s) v_j'(1, s) ds - 2\tilde{\lambda}_{1j} \int_0^t u_j'(1, s) v_j'(1, s) ds - 2\tilde{\mu}_j(t) \langle u_{jx}(t), v_{jx}(t) \rangle \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle \tilde{\mu}_j'(s) u_{jx}(s), v_{jx}(s) \rangle ds + 2 \int_0^t \langle \tilde{\mu}_j(s) u_{jx}'(s), v_{jx}(s) \rangle ds \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle \tilde{K}_j u_j(s) + \tilde{\lambda}_j u_j'(s), v_j'(s) \rangle ds + 2 \int_0^t \langle \tilde{f}_j(s), v_j'(s) \rangle ds = \sum_{i=1}^{13} J_i, \end{aligned} \quad (4.10)$$

trong đó

$$\begin{aligned} S_j(t) &= \|v_j'(t)\|^2 + \mu(t) \|v_{jx}(t)\|^2 + K \|v_j(t)\|^2 + K_0 v_j^2(0, t) + K_1 v_j^2(1, t) \\ &\quad + 2\lambda \int_0^t \|v_j'(s)\|^2 ds + 2\lambda_1 \int_0^t |v_j'(1, s)|^2 ds. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sử dụng giả thiết (H₃), (H₅) cho (4.11) thì ta được

$$S_j(t) \geq \|v'_j(t)\|^2 + \mu_0 \|v_{jx}(t)\|^2 + 2\lambda_1 \int_0^t |v'_j(1, s)|^2 ds. \quad (4.12)$$

Sử dụng bất đẳng thức (4.12), bất đẳng thức ở (3.22) và các bất đẳng thức sau

$$\begin{cases} \|v_j(t)\|^2 = \|v_j(0) + \int_0^t v'_j(s) ds\|^2 \leq t \int_0^t S_j(s) ds, \\ \|v_j(t)\|_{H^1}^2 = \|v_j(t)\|^2 + \|v_{jx}(t)\|^2 \leq \frac{1}{\mu_0} S_j(t) + t \int_0^t S_j(s) ds, \\ \int_0^t \|v_j(s)\|_{H^1}^2 ds \leq (\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2) \int_0^t S_j(s) ds, \end{cases} \quad (4.13)$$

ta lần lượt đánh giá các số hạng bên vế phải của (4.10) như sau

Số hạng thứ nhất.

$$\hat{J}_1 \leq \int_0^t |\mu'(s)| \cdot \|v_{jx}(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\mu_0} \|\mu'\|_0 \int_0^t S_j(s) ds \leq D_T \int_0^t S_j(s) ds. \quad (4.14)$$

Ở đây, ta sử dụng ký hiệu $\|\mu'\|_0 = \sup\{|\mu'(t)| : t \in [0, T]\}$.

Số hạng thứ hai.

$$\begin{aligned} \hat{J}_2 &\leq 2\sqrt{2} |\hat{g}_j(t)| \cdot \|v_j\|_{H^1} \leq \frac{2}{\varepsilon} \hat{g}_j^2(t) + \varepsilon \|v_j\|_{H^1}^2 \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon} \|\hat{g}_j\|_0^2 + \frac{\varepsilon}{\mu_0} S_j(t) + D_T(\varepsilon) \int_0^t S_j(s) ds, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Số hạng thứ ba.

$$\begin{aligned} \hat{J}_3 &\leq 2\sqrt{2} \int_0^t |\hat{g}'_j(s)| \|v_j(s)\|_{H^1} ds \leq 2 \int_0^t |\hat{g}'_j(s)|^2 ds + \int_0^t \|v_j(s)\|_{H^1}^2 ds \\ &\leq 2 \|\hat{g}'_j\|_{L^2(0,T)}^2 + (\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2) \int_0^t S_j(s) ds \leq 2 \|\hat{g}'_j\|_{L^2(0,T)}^2 + D_T \int_0^t S_j(s) ds. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Số hạng thứ tư.

$$\begin{aligned} \hat{J}_4 &\leq 2|k(0)| \int_0^t v_j^2(0, s) ds \leq 4 \|k\|_0 \int_0^t \|v_j(s)\|_{H^1}^2 ds \\ &\leq 4 \|k\|_0 (\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2) \int_0^t S_j(s) ds \leq D_T \int_0^t S_j(s) ds. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Số hạng thứ năm.

$$\begin{aligned}
\hat{J}_5 &\leq 4 \|v_j(t)\|_{H^1} \int_0^t |k(t-s)| \cdot \|v_j(s)\|_{H^1} ds \\
&\leq \varepsilon \|v_j(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\varepsilon} \left(\int_0^t |k(t-s)| \cdot \|v_j(s)\|_{H^1} ds \right)^2 \\
&\leq \varepsilon \|v_j(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\varepsilon} \int_0^T k^2(\theta) d\theta \int_0^t \|v_j(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq \varepsilon \|v_j(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\varepsilon} \|k\|_{L^2(0,T)}^2 \int_0^t \|v_j(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\mu_0} S_j(t) + \left[\frac{4}{\varepsilon} \|k\|_{L^2(0,T)}^2 \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2 \right) + \varepsilon T \right] \int_0^t S_j(s) ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\mu_0} S_j(t) + D_T(\varepsilon) \int_0^t S_j(s) ds, \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Số hạng thứ sáu.

$$\begin{aligned}
\hat{J}_6 &\leq 4 \int_0^t \|v_j(s)\|_{H^1} ds \int_0^s |k'(s-r)| \cdot \|v_j(r)\|_{H^1} dr \\
&\leq \int_0^t \left[\|v_j(s)\|_{H^1}^2 + 4 \left(\int_0^s |k'(s-r)| \cdot \|v_j(r)\|_{H^1} dr \right)^2 \right] ds \\
&\leq \int_0^t \|v_j(s)\|_{H^1}^2 ds + 4 \int_0^t \int_0^s |k'(s-r)|^2 dr \int_0^s \|v_j(r)\|_{H^1}^2 dr ds \\
&\leq \int_0^t \|v_j(s)\|_{H^1}^2 ds + 4T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2 \int_0^t \|v_j(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq (1 + 4T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2) \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2 \right) \int_0^t S_j(s) ds \leq D_T \int_0^t S_j(s) ds.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Số hạng thứ bảy.

$$\begin{aligned}
\hat{J}_7 &\leq 2 |\tilde{K}_{1j}| \int_0^t |u_j(1,s)| \cdot |v'_j(1,s)| ds \\
&\leq \frac{|\tilde{K}_{1j}|^2}{2\varepsilon \lambda_1} \int_0^t |u_j(1,s)|^2 ds + 2\varepsilon \lambda_1 \int_0^t |v'_j(1,s)|^2 ds \\
&\leq |\tilde{K}_{1j}|^2 D_T(\varepsilon) + \varepsilon S_j(t), \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Số hạng thứ tám.

$$\begin{aligned}
\hat{J}_8 &\leq 2|\tilde{\lambda}_{1j}|\int_0^t |u'_j(1,s)| |v'_j(1,s)| ds \\
&\leq \frac{|\tilde{\lambda}_{1j}|^2}{2\varepsilon\lambda_1}\int_0^t |u'_j(1,s)|^2 ds + 2\varepsilon\lambda_1\int_0^t |v'_j(1,s)|^2 ds \\
&\leq |\tilde{\lambda}_{1j}|^2 D_T(\varepsilon) + \varepsilon S_j(t), \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Số hạng thứ chín.

$$\begin{aligned}
\hat{J}_9 &\leq 2|\tilde{\mu}_j(t)| |\langle u_{jx}(t), v_{jx}(t) \rangle| \leq 2\|\tilde{\mu}_j\|_0 \|u_{jx}(t)\| \|v_{jx}(t)\| \\
&\leq 2\frac{\|\tilde{\mu}_j\|_0}{\mu_0} \sqrt{C_T} \sqrt{S_j(t)} \leq \|\tilde{\mu}_j\|_0^2 D_T(\varepsilon) + \varepsilon S_j(t), \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Số hạng thứ mười.

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{10} &\leq 2\int_0^t |\tilde{\mu}'_j(s)| |\langle u_{jx}(s), v_{jx}(s) \rangle| ds \\
&\leq 2\int_0^t \|\tilde{\mu}'_j\|_0 \|u_{jx}(s)\| \|v_{jx}(s)\| ds \\
&\leq \int_0^t 2\frac{\|\tilde{\mu}'_j\|_0}{\mu_0} \sqrt{C_T} \sqrt{S_j(s)} ds \leq D_T \|\tilde{\mu}'_j\|_0^2 + \int_0^t S_j(s) ds.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Số hạng thứ mười một.

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{11} &\leq 2\int_0^t |\tilde{\mu}_j(s)| |\langle u'_{jx}(s), v_{jx}(s) \rangle| ds \\
&\leq 2\int_0^t \|\tilde{\mu}_j\|_0 \|u'_{jx}(s)\| \|v_{jx}(s)\| ds \\
&\leq \int_0^t 2\frac{\|\tilde{\mu}_j\|_0}{\mu_0} \sqrt{C_T} \sqrt{S_j(s)} ds \leq D_T \|\tilde{\mu}_j\|_0^2 + \int_0^t S_j(s) ds.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Số hạng thứ mười hai.

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{12} &\leq 2\int_0^t \langle \tilde{K}_j u_j(s) + \tilde{\lambda}_j u'_j(s), v'_j(s) \rangle ds \\
&\leq 2|\tilde{K}_j| \int_0^t \langle |u_j(s)|, |v'_j(s)| \rangle ds + 2|\tilde{\lambda}_j| \int_0^t \langle |u'_j(s)|, |v'_j(s)| \rangle ds \\
&\leq 2|\tilde{K}_j| \int_0^t \|u_j(s)\| \|v'_j(s)\| ds + 2|\tilde{\lambda}_j| \int_0^t \|u'_j(s)\| \|v'_j(s)\| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \frac{|\tilde{K}_j|}{\sqrt{\mu_0}} \int_0^t \sqrt{C_T} \cdot \sqrt{S_j(s)} ds + 2|\tilde{\lambda}_j| \int_0^t \sqrt{C_T} \cdot \sqrt{S_j(s)} ds \\
&\leq D_T \left(\frac{|\tilde{K}_j|^2}{\mu_0} + |\tilde{\lambda}_j|^2 \right) + 2 \int_0^t S_j(s) ds.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Số hạng thứ mười ba.

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{13} &\leq 2 \int_0^t ||\tilde{f}_j(s)|| ||v'_j(s)|| ds \\
&\leq \int_0^t ||\tilde{f}_j(s)||^2 ds + \int_0^t ||v'_j(s)||^2 ds \\
&\leq \int_0^T ||\tilde{f}_j(s)||^2 ds + \int_0^t S_j(s) ds.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Tổ hợp (4.10) và (4.13) – (4.26), ta có

$$\begin{aligned}
S_j(t) &\leq 2\left(\frac{1}{\varepsilon} ||\hat{g}_j||_0^2 + ||\hat{g}'_j||_{L^2(0,T)}^2\right) + D_T(\varepsilon)(|\tilde{K}_{1j}|^2 + |\tilde{\lambda}_{1j}|^2 + ||\tilde{\mu}_j||_0^2) \\
&\quad + D_T ||\tilde{\mu}_j||_{C^1([0,T])}^2 + \varepsilon\left(\frac{2}{\mu_0} + 3\right)S_j(t) + D_T (|\tilde{K}_j|^2 + |\tilde{\lambda}_j|^2) \\
&\quad + \int_0^T ||\tilde{f}_j(s)||^2 ds + [5 + 4D_T + 2D_T(\varepsilon)] \int_0^t S_j(s) ds,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

với mọi $\varepsilon > 0$ và $t \in [0, T]$.

Chọn $\varepsilon\left(\frac{2}{\mu_0} + 3\right) \leq \frac{1}{2}$. Từ (4.27) ta có

$$S_j(t) \leq R_j + R_T \int_0^t S_j(s) ds, \tag{4.28}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} R_j &= 2\left(\frac{1}{\varepsilon} ||\hat{g}_j||_0^2 + ||\hat{g}'_j||_{L^2(0,T)}^2\right) + D_T(\varepsilon)(|\tilde{K}_{1j}|^2 + |\tilde{\lambda}_{1j}|^2 + ||\tilde{\mu}_j||_0^2) \\
&\quad + D_T ||\tilde{\mu}_j||_{C^1([0,T])}^2 + D_T (|\tilde{K}_j|^2 + |\tilde{\lambda}_j|^2) + \int_0^T ||\tilde{f}_j(s)||^2 ds,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\frac{1}{2} R_T = 5 + 4D_T + 2D_T(\varepsilon). \tag{4.30}$$

Sử dụng bổ đề Gronwalls vào (4.28) ta suy ra rằng

$$S_j(t) \leq R_j \exp(R_T T) \leq C_T^* R_j, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.31}$$

Từ (4.6)₃ và (4.9)₂ ta có đánh giá sau

$$|\hat{g}_j(t)| \leq |\tilde{g}_j(t)| + |\tilde{K}_{0j}| |u_j(0, t)| + \int_0^t |\tilde{k}_j(t-s)| |u_j(0, s)| ds$$

$$\leq |\tilde{g}_j(t)| + |\tilde{K}_{0j}| \sqrt{C_T} + T \|\tilde{k}_j\|_0 \sqrt{C_T},$$

lấy sup hai vế của bất đẳng thức trên ta được

$$\|\hat{g}_j\|_0 \leq \|\tilde{g}_j\|_0 + |\tilde{K}_{0j}| \sqrt{C_T} + T \|\tilde{k}_j\|_0 \sqrt{C_T}. \quad (4.32)$$

Cũng từ (4.6)_{3,4} và (4.9)₂ ta có

$$\begin{aligned} |\hat{g}'_j(t)| &\leq |\tilde{g}'_j(t)| + |\tilde{K}_{0j}| |u'_j(0, t)| + |\tilde{k}_j(0)| |u_j(0, t)| + \int_0^t |\tilde{k}'_j(t-s)| |u_j(0, s)| ds \\ &\leq |\tilde{g}'_j(t)| + (|\tilde{K}_{0j}| + \|\tilde{k}_j\|_0 + \sqrt{T} \|\tilde{k}'_j\|_{L^2(0,T)}) \sqrt{C_T}, \end{aligned}$$

do đó

$$\|\hat{g}'_j\|_{L^2(0,T)}^2 \leq 2 [\|\tilde{g}'_j\|_{L^2(0,T)}^2 + TC_T (|\tilde{K}_{0j}|^2 + \|\tilde{k}_j\|_0^2 + T \|\tilde{k}'_j\|_{L^2(0,T)}^2)]. \quad (4.33)$$

Mặt khác, từ (4.9)₁, (4.13), (4.31) ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} |\tilde{Y}_j(t)| &\leq |\hat{g}_j(t)| + K_0 |v_j(0, t)| + \int_0^t |k(t-s)| |v_j(0, s)| ds \\ &\leq |\hat{g}_j(t)| + \sqrt{2} K_0 \|v_j(t)\|_{H^1} + \sqrt{2} \int_0^t |k(t-s)| \|v_j(s)\|_{H^1} ds \\ &\leq |\hat{g}_j(t)| + \sqrt{2} K_0 \|v_j(t)\|_{H^1} + \sqrt{2} \int_0^t |k(t-s)| \|v_j(s)\|_{H^1} ds \\ &\leq |\hat{g}_j(t)| + K_0 \sqrt{2(\frac{1}{\mu_0} + T^2) C_T^* R_j} + \int_0^t |k(t-s)| \sqrt{2(\frac{1}{\mu_0} + T^2) C_T^* R_j} ds \\ &\leq |\hat{g}_j(t)| + (K_0 + \|k\|_{L^1(0,T)}) \sqrt{2(\frac{1}{\mu_0} + T^2) C_T^* R_j}, \end{aligned}$$

hay

$$\|\tilde{Y}_j\|_0 \leq \|\hat{g}_j\|_0 + (K_0 + \|k\|_{L^1(0,T)}) \sqrt{2(\frac{1}{\mu_0} + T^2) C_T^* R_j}. \quad (4.34)$$

Từ (4.2), (4.7) và các đánh giá (4.31) – (4.34) ta suy ra (4.3) đúng.

Định lý 4.1 được chứng minh đầy đủ ■

Chương 5

DÁNG ĐIỀU TIỆM CẬN VÀ KHAI TRIỂN TIỆM CẬN

5.1. Giới thiệu

Trong chương này, chúng tôi khảo sát bài toán nhiều sau. Tìm hàm u thỏa

$$\begin{cases} L[u] \equiv u_{tt} - \mu(t)u_{xx} = -Ku - \lambda u_t + f(x, t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u] \equiv \mu(t)u_x(0, t) - K_0u(0, t) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds = g(t), \\ L_1[u] \equiv \mu(t)u_x(1, t) + K_1u(1, t) + \lambda_1u_t(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x). \end{cases} \quad (\tilde{P}_{\vec{\varepsilon}})$$

với $0 \leq K \leq K^*$, $0 < \lambda \leq \lambda^*$, $0 \leq K_1 \leq K_1^*$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_1^*$, ($K^*, \lambda^*, K_1^*, \lambda_1^*$ là các hằng số cố định) và $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu, f, g, k)$ là các hàm cho trước thỏa các giả thiết (H₁) – (H₄).

Ở đây, chúng tôi sẽ sử dụng các ký hiệu sau

Bài toán $(\tilde{P}_{\vec{\varepsilon}})$ là bài toán (3.1), (3.2) tương ứng với $\alpha = 2$,

$$\vec{\varepsilon} = (K, \lambda, K_1, \lambda_1), \quad \vec{0} = (0, 0, 0, 0), \quad \|\vec{\varepsilon}\| = \sqrt{K^2 + K_1^2 + \lambda^2 + \lambda_1^2},$$

$$\vec{\varepsilon} \leq \vec{\varepsilon}^* \text{ được hiểu là } K \leq K^*, \lambda \leq \lambda^*, K_1 \leq K_1^*, \lambda_1 \leq \lambda_1^*.$$

Kết quả mà chúng tôi thu được trong chương này được đúc kết bằng hai định lý 5.1 và 5.2. Trong đó, định lý 5.1 khẳng định bài toán $(\tilde{P}_{\vec{0}})$ tương ứng với $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$ tồn tại và duy nhất nghiệm $u_{\vec{0}}$ và khảo sát dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu khi $\vec{\varepsilon} \rightarrow \vec{0}_+$, nghĩa là ta chứng được rằng nghiệm yếu $u_{\vec{\varepsilon}}$ của bài toán $(\tilde{P}_{\vec{\varepsilon}})$ hội tụ mạnh trong $W(T)$ về $u_{\vec{0}}$ của bài toán $(\tilde{P}_{\vec{0}})$ khi $\vec{\varepsilon} \rightarrow \vec{0}_+$. Định lý 5.2 trình bày khai triển tiệm cận nghiệm yếu của bài toán $(\tilde{P}_{\vec{\varepsilon}})$ theo bốn tham số bé $K, K_1; \lambda, \lambda_1$ tức là ta có thể xấp xỉ nghiệm yếu u bởi một đa thức theo bốn biến $K, K_1; \lambda, \lambda_1$ và đánh giá được sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ.

5.2. Dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu

Với $\vec{\varepsilon} \leq \vec{\varepsilon}^*$ và $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu, f, g, k)$ thỏa các giả thiết (H₁) – (H₄), thì từ định lý 3.1 ta có bài toán $(\tilde{P}_{\vec{\varepsilon}})$ tồn tại và duy nhất nghiệm yếu u phụ thuộc vào $\vec{\varepsilon} = (K, \lambda, K_1, \lambda_1)$:

$$u = u_{\vec{\varepsilon}} = u(K, \lambda, K_1, \lambda_1).$$

Ta nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu u của bài toán $(\tilde{P}_{\vec{\varepsilon}})$ phụ thuộc vào các tham số bé $(K, \lambda, K_1, \lambda_1)$. Kết quả thu được là định lý sau đây

Định lý 5.1. Cho $T > 0$. Giả sử (H₁) – (H₅) đúng. Khi đó,

(i) bài toán $(\tilde{P}_0)$ tương ứng với $\vec{\varepsilon} = 0$ tồn tại và duy nhất nghiệm yếu u_0 thỏa

$$\begin{cases} u_0 \in H^2(Q_T) \cap C^0(0, T; H^1) \cap C^1(0, T; L^2) \cap L^\infty(0, T; H^2), \\ u'_0 \in C^0(0, T; L^2) \cap L^\infty(0, T; H^1), \quad u''_0 \in L^\infty(0, T; L^2). \end{cases} \quad (5.1)$$

(ii) Nghiệm yếu $u_{\vec{\varepsilon}}$ hội tụ mạnh trong $W(T)$ về u_0 khi $\vec{\varepsilon} \rightarrow 0_+$.

Hơn nữa, chúng ta có đánh giá tiệm cận

$$\|u_{\vec{\varepsilon}} - u_0\|_{W(T)} + \sqrt{\lambda_1} \|u'_{\vec{\varepsilon}}(1, \cdot) - u'_0(1, \cdot)\|_{L^2(0, T)} + \|Y_{\vec{\varepsilon}} - Y_0\|_{L^\infty(0, T)} \leq \bar{C}_T \sqrt{\|\vec{\varepsilon}\|}, \quad (5.2)$$

trong đó, $\bar{C}_T$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào T .

Chứng minh định lý 5.1.

Trước tiên, ta chú ý rằng, nếu các tham số bé $K, K_1 \geq 0$; $\lambda, \lambda_1 > 0$ thỏa $\vec{\varepsilon} \leq \vec{\varepsilon}^*$, thì các đánh giá tiên nghiệm của dãy xấp xỉ Galerkin $\{u_m\}$ của bài toán $(\tilde{P}_{\vec{\varepsilon}})$ thỏa

$$\begin{cases} \|u'_m(t)\|^2 + \mu_0 \|u_{mx}(t)\|^2 + K \|u_m(s)\|^2 + K_0 u_m^2(0, t) + K_1 u_m^2(1, t) \\ \quad + 2\lambda \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \lambda_1 \int_0^t |u'_m(1, s)|^2 ds \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T], \\ \|u''_m(t)\|^2 + \mu_0 \|u'_{mx}(t)\|^2 + K \|u'_m(s)\|^2 + K_0 |u'_m(0, t)|^2 + K_1 |u'_m(1, t)|^2 \\ \quad + 2\lambda \int_0^t \|u''_m(s)\|^2 ds + \lambda_1 \int_0^t |u''_m(1, t)|^2 ds \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

Do đó, giới hạn u của dãy hàm $\{u_m\}$ khi cho $m \rightarrow +\infty$, trong các không gian hàm thích hợp là nghiệm yếu của bài toán $(\tilde{P}_{\vec{\varepsilon}})$ và thỏa

$$\left\{ \begin{aligned} & ||u'_\varepsilon(t)||^2 + \mu_0 ||u'_{\varepsilon x}(t)||^2 + K ||u'_\varepsilon(s)||^2 + K_0 u_\varepsilon^2(0, t) + K_1 u_\varepsilon^2(1, t) \\ & \quad + 2\lambda \int_0^t ||u'_\varepsilon(s)||^2 ds + \lambda_1 \int_0^t |u'_\varepsilon(1, s)|^2 ds \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T], \\ & ||u''_\varepsilon(t)||^2 + \mu_0 ||u'_{\varepsilon x}(t)||^2 + K ||u'_\varepsilon(s)||^2 + K_0 |u'_\varepsilon(0, t)|^2 + K_1 |u'_\varepsilon(1, t)|^2 \\ & \quad + 2\lambda \int_0^t ||u''_\varepsilon(s)||^2 ds + \lambda_1 \int_0^t |u''_\varepsilon(1, t)|^2 ds \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \right. \quad (5.3)$$

trong đó, hằng số C_T độc lập với $\vec{\varepsilon}$.

Từ (5.3) ta suy ra rằng

$$\left\{ \begin{aligned} & ||\sqrt{\lambda} u'_\varepsilon||_{L^2(0, T; L^2)}^2 = \int_0^T ||\sqrt{\lambda} u'_\varepsilon(s)||^2 ds = \lambda \int_0^T ||u'_\varepsilon(s)||^2 ds \leq C_T, \\ & ||\sqrt{\lambda} u''_\varepsilon||_{L^2(0, T; L^2)}^2 = \int_0^T ||\sqrt{\lambda} u''_\varepsilon(s)||^2 ds = \lambda \int_0^T ||u''_\varepsilon(s)||^2 ds \leq C_T, \end{aligned} \right. \quad (5.4)$$

và

$$\left\{ \begin{aligned} & ||\sqrt{\lambda_1} u'_\varepsilon(1, \cdot)||_{L^2(0, T)}^2 = \int_0^T |\sqrt{\lambda_1} u'_\varepsilon(1, s)|^2 ds = \lambda_1 \int_0^T |u'_\varepsilon(1, s)|^2 ds \leq C_T, \\ & ||\sqrt{\lambda_1} u''_\varepsilon(1, \cdot)||_{L^2(0, T)}^2 = \int_0^T |\sqrt{\lambda_1} u''_\varepsilon(1, s)|^2 ds = \lambda_1 \int_0^T |u''_\varepsilon(1, s)|^2 ds \leq C_T, \end{aligned} \right. \quad (5.5)$$

do đó

$$\left\{ \begin{aligned} & K ||u_\varepsilon||_{W^{1, \infty}(Q_T)} \leq C_T, \quad K_1 ||u_\varepsilon(1, \cdot)||_{W^{1, \infty}(0, T)} \leq C_T, \\ & ||\sqrt{\lambda} u'_\varepsilon||_{H^1(Q_T)}^2 \leq C_T, \quad ||\sqrt{\lambda_1} u'_\varepsilon(1, \cdot)||_{H^1(0, T)}^2 \leq C_T. \end{aligned} \right. \quad (5.6)$$

Xét dãy $\{\vec{\varepsilon}_m\}$, $\vec{\varepsilon}_m = (K_m, \lambda_m, K_{1m}, \lambda_{1m})$ là dãy sao cho $K_m, K_{1m} \geq 0$; $\lambda_m, \lambda_{1m} > 0$

và $\vec{\varepsilon}_m \rightarrow \vec{0}_+$, khi $m \rightarrow \infty$. Ta suy ra từ (5.3) và (5.6) rằng tồn tại một dãy con của dãy

$\{u_{\vec{\varepsilon}_m}\}$ mà vẫn kí hiệu là $\{u_{\vec{\varepsilon}_m}\}$ sao cho

$$u_{\vec{\varepsilon}_m} \rightarrow \bar{u} \quad \text{trong } L^\infty(0, T; H^1) \text{ yếu } *, \quad (5.7)$$

$$u'_{\vec{\varepsilon}_m} \rightarrow \bar{u}' \quad \text{trong } L^\infty(0, T; H^1) \text{ yếu } *, \quad (5.8)$$

$$u''_{\vec{\varepsilon}_m} \rightarrow \bar{u}'' \quad \text{trong } L^\infty(0, T; L^2) \text{ yếu } *, \quad (5.9)$$

$$u_{\varepsilon_m}(0, \cdot) \rightarrow \bar{u}(0, \cdot) \quad \text{trong } W^{1,\infty}(0, T) \text{ yếu}^*, \quad (5.10)$$

$$u_{\varepsilon_m}(1, \cdot) \rightarrow \bar{u}(1, \cdot) \quad \text{trong } H^2(0, T) \text{ yếu}, \quad (5.11)$$

$$K_m u_{\varepsilon_m} \rightarrow \chi_1 \quad \text{trong } W^{1,\infty}(Q_T) \text{ yếu}^*, \quad (5.12)$$

$$K_{1m} u_{\varepsilon_m}(1, \cdot) \rightarrow \bar{\chi}_1 \quad \text{trong } W^{1,\infty}(0, T) \text{ yếu}^*, \quad (5.13)$$

$$\sqrt{\lambda_m} u'_{\varepsilon_m} \rightarrow \chi_2 \quad \text{trong } H^1(Q_T) \text{ yếu}, \quad (5.14)$$

$$\sqrt{\lambda_{1m}} u'_{\varepsilon_m}(1, \cdot) \rightarrow \bar{\chi}_2 \quad \text{trong } H^1(0, T) \text{ yếu}. \quad (5.15)$$

Theo bổ đề về tính compact của Lions ([3], tr.57) và ta có các phép nhúng $H^1(Q_T) \hookrightarrow L^2(Q_T)$, $H^1(0, T) \hookrightarrow C^0([0, T])$ là compact nên suy ra từ (5.7) – (5.11) và (5.15) rằng tồn tại dãy con của $\{u_{\varepsilon_m}\}$ vẫn ký hiệu là $\{u_{\varepsilon_m}\}$ sao cho

$$u_{\varepsilon_m} \rightarrow \bar{u} \quad \text{mạnh trong } L^2(Q_T) \text{ và } a.e. \text{ trên } Q_T, \quad (5.16)$$

$$u'_{\varepsilon_m} \rightarrow \bar{u}' \quad \text{mạnh trong } L^2(Q_T) \text{ và } a.e. \text{ trên } Q_T, \quad (5.17)$$

$$u_{\varepsilon_m}(0, \cdot) \rightarrow \bar{u}(0, \cdot) \quad \text{mạnh trong } C^0([0, T]), \quad (5.18)$$

$$u_{\varepsilon_m}(1, \cdot) \rightarrow \bar{u}(1, \cdot) \quad \text{mạnh trong } C^1([0, T]). \quad (5.19)$$

Từ (5.16) - (5.19) ta suy ra rằng

$$K_m u_{\varepsilon_m} \rightarrow 0 \quad \text{mạnh trong } L^2(Q_T), \quad (5.20)$$

$$\sqrt{\lambda_m} u'_{\varepsilon_m} \rightarrow 0 \quad \text{mạnh trong } L^2(Q_T), \quad (5.21)$$

$$K_{1m} u_{\varepsilon_m}(1, \cdot) \rightarrow 0 \quad \text{mạnh trong } C^1([0, T]), \quad (5.22)$$

$$\sqrt{\lambda_{1m}} u'_{\varepsilon_m}(1, \cdot) \rightarrow 0 \quad \text{mạnh trong } C^0([0, T]). \quad (5.23)$$

Tổng hợp (5.12) - (5.15), (5.20) – (5.23) dẫn đến

$$\chi_1 \equiv 0, \quad \bar{\chi}_1 \equiv 0, \quad \chi_2 \equiv 0, \quad \bar{\chi}_2 \equiv 0.$$

Mặt khác, từ (5.18) ta có

$$Y_{\varepsilon_m}(t) = g(t) + K_0 u_{\varepsilon_m}(0, t) + \int_0^t k(t-s) u_{\varepsilon_m}(0, s) ds$$

$$\rightarrow g(t) + K_0 \bar{u}(0, t) + \int_0^t k(t-s) \bar{u}(0, s) ds \equiv \bar{Y}(t) \text{ mạnh trong } C^0([0, T]).$$

Bằng cách qua giới hạn giống như khi chứng minh định lý 3.1, ta suy ra $\bar{u}$ là nghiệm yếu bài toán $(\tilde{P}_0)$ ứng với $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$ và thỏa (5.1). Hơn nữa, do tính duy nhất của nghiệm yếu, nên chúng ta có $\bar{u} = u_0$.

Đặt $u = u_\varepsilon - u_0$, thì u là nghiệm bài toán của bài toán biên phân sau

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u'', v \rangle + \mu(t) \langle u_x, v \rangle + Y(t)v(0) + [K_1 u(1, t) + \lambda_1 u'(1, t)]v(1) + \langle Ku + \lambda u', v \rangle \\ \quad = -[K_1 u_0'(1, t) + \lambda_1 u_0'(1, t)]v(1) - \langle Ku_0 + \lambda u_0', v \rangle, \quad \forall v \in H^1, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ Y(t) = Y_\varepsilon(t) - Y_0(t) = K_0 u(0, t) + \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds, \end{array} \right. \quad (5.24)$$

trong đó

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^2(Q_T) \cap C^0(0, T; H^1) \cap C^1(0, T; L^2) \cap L^\infty(0, T; H^2), \\ u_{tt} \in C^0(0, T; L^2) \cap L^\infty(0, T; H^1), \quad u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2). \end{array} \right. \quad (5.25)$$

Trong (5.26)₁ ta thay $v = u'$, sau đó lấy tích phân theo biến thời gian t , ta được

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \int_0^t \mu'(s) \|u_x(s)\|^2 ds + 2u(0, t) \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds - 2k(0) \int_0^t u^2(0, s)ds \\ &\quad - 2 \int_0^t u(0, s)ds \int_0^s k'(s-r)u(0, r)dr - 2K \int_0^t \langle u_0, u' \rangle ds - 2\lambda \int_0^t \langle u_0', u' \rangle ds \\ &\quad - 2K_1 \int_0^t u_0'(1, s)u'(1, s)ds - 2\lambda_1 \int_0^t u_0'(1, s)u'(1, s)ds \equiv \sum_{i=1}^8 \bar{J}_i, \end{aligned} \quad (5.26)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \|u'(t)\|^2 + \mu(t) \|u_x(t)\|^2 + K_0 u^2(0, t) + K_1 u^2(1, t) + 2\lambda_1 \int_0^t |u'(1, s)|^2 ds \\ &\quad + K \|u(s)\|^2 + 2\lambda \int_0^t \|u'(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Chú ý rằng từ (5.27) và bổ đề 2.1 ta dễ dàng suy ra rằng

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(t) \geq \|u'(t)\|^2 + \mu_0 \|u_x(t)\|^2 + 2\lambda_1 \int_0^t |u'(1,s)|^2 ds, \\ \|u(t)\|^2 = \left\| \int_0^t u'(s) ds \right\|^2 \leq t \int_0^t \eta(s) ds, \\ \|u(t)\|_{H^1}^2 = \|u(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2 \leq \frac{1}{\mu_0} \eta(t) + t \int_0^t \eta(s) ds, \\ \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \leq \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2 \right) \int_0^t \eta(s) ds. \end{array} \right. \quad (5.28)$$

Sử dụng các bất đẳng thức ở (5.28) ta lần lượt đánh giá các tích phân ở (5.26) như sau

Đánh giá $\bar{J}_1$.

$$\bar{J}_1 \leq \int_0^t |\mu'(s)| \|u_x(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\mu_0} \|\mu'\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^t \eta(s) ds \leq \eta_T \int_0^t \eta(s) ds, \quad (5.29)$$

trong đó, η_T là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào T .

Đánh giá $\bar{J}_2$.

$$\begin{aligned} \bar{J}_2 &\leq 4 \|u(t)\|_{H^1} \int_0^t |k(t-s)| \|u(s)\|_{H^1} ds \\ &\leq \beta \|u(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\beta} \left(\int_0^t |k(t-s)| \|u(s)\|_{H^1} ds \right)^2 \\ &\leq \beta \|u(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\beta} \int_0^T k^2(\theta) d\theta \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \\ &\leq \beta \|u(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\beta} \|k\|_{L^2(0,T)}^2 \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \\ &\leq \frac{\beta}{\mu_0} \eta(t) + \left[\beta T + \frac{4}{\beta} \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2 \right) \|k\|_{L^2(0,T)}^2 \right] \int_0^t \eta(s) ds \\ &\leq \frac{\beta}{\mu_0} \eta(t) + \eta_T(\beta) \int_0^t \eta(s) ds, \quad \forall \beta > 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Đánh giá $\bar{J}_3$.

$$\bar{J}_3 \leq 2 |k(0)| \int_0^t u^2(0,s) ds \leq 4 \|k\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds$$

$$\leq 4 \|k\|_{L^\infty(0,T)} \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2\right) \int_0^t \eta(s) ds \leq \eta_T \int_0^t \eta(s) ds. \quad (5.31)$$

Đánh giá $\bar{J}_4$.

$$\begin{aligned} \bar{J}_4 &\leq 4 \int_0^t \|u(r)\|_{H^1} dr \int_0^r |k'(r-s)| \cdot \|u(s)\|_{H^1} ds \\ &\leq \int_0^t \left[\|u(s)\|_{H^1}^2 + 2 \left(\int_0^s |k'(s-r)| \cdot \|u(r)\|_{H^1} dr \right)^2 \right] ds \\ &\leq \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds + 4 \int_0^t \int_0^s |k'(s-r)|^2 dr \int_0^s \|u(r)\|_{H^1}^2 dr ds \\ &\leq \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds + 4T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2 \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \\ &\leq \left(1 + 4T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2\right) \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \\ &\leq \left(1 + 4T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2\right) \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2\right) \int_0^t \eta(s) ds \leq \eta_T \int_0^t \eta(s) ds. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Đánh giá $\bar{J}_5$.

$$\begin{aligned} \bar{J}_5 &= -2K \int_0^t \langle u_0', u' \rangle ds \leq 2K \int_0^t \|u_0'(s)\| \cdot \|u'(s)\| ds \\ &\leq K^2 \int_0^t \|u_0'(s)\|^2 ds + \int_0^t \|u'(s)\|^2 ds \leq K^2 TC_T + \int_0^t \eta(s) ds. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Đánh giá $\bar{J}_6$.

$$\begin{aligned} \bar{J}_6 &= -2\lambda \int_0^t \langle u_0', u' \rangle ds \leq 2\lambda \int_0^t \|u_0'(s)\| \cdot \|u'(s)\| ds \\ &\leq \lambda^2 \int_0^t \|u_0'(s)\|^2 ds + \int_0^t \|u'(s)\|^2 ds \leq \lambda^2 TC_T + \int_0^t \eta(s) ds. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Đánh giá $\bar{J}_7$.

$$\bar{J}_7 = -2K_1 \int_0^t u_0'(1,s) u'(1,s) ds = 2K_1 \left[u_0'(1,t) u(1,t) - \int_0^t u_0'(1,s) u(1,s) ds \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4K_1 \left[\|u_0(t)\|_{H^1} \|u(t)\|_{H^1} + \int_0^t \|u_0'(s)\|_{H^1} \|u(s)\|_{H^1} ds \right] \\
&\leq \frac{4}{\beta} K_1^2 \|u_0\|_{L^\infty(0,T;H^1)}^2 + \beta \|u(t)\|_{H^1}^2 + 4TK_1^2 \|u_0'\|_{L^\infty(0,T;H^1)}^2 + \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq K_1^2 \left[\frac{4}{\beta} \|u_0\|_{L^\infty(0,T;H^1)}^2 + 4T \|u_0'\|_{L^\infty(0,T;H^1)}^2 \right] + \beta \|u(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq K_1^2 \left[\frac{4}{\beta} \|u_0\|_{L^\infty(0,T;H^1)}^2 + 4T \|u_0'\|_{L^\infty(0,T;H^1)}^2 \right] + \frac{\beta}{\mu_0} \eta(t) + \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2 + \beta T \right) \int_0^t \eta(s) ds \\
&\leq K_1^2 C_T(\beta) + \frac{\beta}{\mu_0} \eta(t) + \eta_T(\beta) \int_0^t \eta(s) ds, \quad \forall \beta > 0.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Đánh giá $\bar{J}_8$.

$$\begin{aligned}
\bar{J}_7 &= -2\lambda_1 \int_0^t u_0'(1,s) u'(1,s) ds \leq \lambda_1 \int_0^t |u_0'(1,s)|^2 ds + \lambda_1 \int_0^t |u'(1,s)|^2 ds \\
&\leq 2\lambda_1 \int_0^t \|u_0'(s)\|_{H^1}^2 ds + \frac{1}{2} \eta(t) \leq 2\lambda_1 \int_0^t \|u_0'\|_{L^\infty(0,T;H^1)}^2 ds + \frac{1}{2} \eta(t) \\
&\leq 2\lambda_1 \|u_0'\|_{L^\infty(0,T;H^1)}^2 T + \frac{1}{2} \eta(t) \leq 2\lambda_1 T C_T + \frac{1}{2} \eta(t).
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Tổng hợp (5.26) và (5.29) – (5.36) ta được

$$\begin{aligned}
\eta(t) &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{2\beta}{\mu_0} \right) \eta(t) + KK_* TC_T + \lambda \lambda_* TC_T + K_1 K_{1*} C_T(\beta) + \lambda_1 2TC_T \\
&\quad + [2 + 3\eta_T + \eta_T(\beta)] \int_0^t \eta(s) ds \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{2\beta}{\mu_0} \right) \eta(t) + \frac{1}{2} D_1(T, \beta) \|\vec{\varepsilon}\| + D_1(T, \beta) \int_0^t \eta(s) ds,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

ở đây

$$\begin{cases} \frac{1}{2} D_1(T, \beta) = \sqrt{(K_* TC_T)^2 + (\lambda_* TC_T)^2 + [K_{1*} C_T(\beta)]^2 + (2TC_T)^2}, \\ D_2(T, \beta) = [2 + 3\eta_T + \eta_T(\beta)]. \end{cases} \tag{5.38}$$

Trong (5.37), chọn $\beta > 0$ thỏa $\left(\frac{1}{2} + \frac{2\beta}{\mu_0} \right) \leq \frac{1}{2}$ và sử dụng bổ đề Gronwall, ta thu được

$$\eta(t) \leq D_1(T, \beta) \|\vec{\varepsilon}\| \exp(2 D_2(T, \beta)). \tag{5.39}$$

Điều này, dẫn đến

$$\|u_{\varepsilon} - u_0\|_{W(T)} + \sqrt{\lambda_1} \|u'_{\varepsilon}(1, \cdot) - u'_0(1, \cdot)\|_{L^2(0, T)} \leq \hat{C}_T \sqrt{\|\vec{\varepsilon}\|}, \quad (5.40)$$

trong đó, $\hat{C}_T = \sqrt{D_1(T, \beta)} \exp(D_2(T, \beta))$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào T .

Mặt khác, từ (5.24)₃, (5.28) và (5.39) ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} |Y(t)| &\leq K_0 |u(0, t)| + \int_0^t |k(t-s)u(0, s)| ds \\ &\leq \sqrt{2} K_0 \|u(t)\|_{H^1} + \left(\int_0^t |k(t-s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t |u(0, s)|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2} K_0 \|u(t)\|_{H^1} + \sqrt{2} \left(\int_0^t |k(\theta)|^2 d\theta \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \tilde{C}_T \sqrt{\|\vec{\varepsilon}\|}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\|Y_{\varepsilon} - Y_0\|_{L^\infty(0, T)} \leq \tilde{C}_T \sqrt{\|\vec{\varepsilon}\|},$$

trong đó, $\tilde{C}_T$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào T . Định lý 5.1 được chứng minh đầy đủ ■

5.2. Khai triển tiệm cận của nghiệm yếu theo 4 tham số bé $K, K_1; \lambda, \lambda_1$

Trong mục này, chúng tôi sẽ dùng các ký hiệu sau, với đa chỉ số $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \in \mathbb{Z}_+^4$, ta đặt

$$\begin{cases} |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4, \quad \gamma! = \gamma_1! \gamma_2! \gamma_3! \gamma_4!, \\ \vec{\varepsilon}^\gamma = K^{\gamma_1} \lambda^{\gamma_2} K_1^{\gamma_3} \lambda_1^{\gamma_4}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^4, \beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_i \leq \alpha_i, \quad \forall i = \overline{1, 4}. \end{cases} \quad (5.41)$$

Giả sử u_0 là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\tilde{P}_0)$ (như trong định lý 5.1) ứng với $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$, nghĩa là

$$\begin{cases} L[u_0] = F_0 \equiv f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_0] = g(t), \quad L_1[u_0] = 0, \quad u_0(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u'_0(x, 0) = \tilde{u}'_1(x), \\ u_0 \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u'_0 \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u''_0 \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_0(0, \cdot) \in W^{1, \infty}(0, T), \quad u_0(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{cases} \quad (\tilde{P}_0)$$

Xét dãy hữu hạn các nghiệm yếu u_γ , $\gamma \in \mathbb{Z}_+^4$, $1 \leq |\gamma| \leq N$ được xác định bởi các bài toán sau

$$\begin{cases} L[u_\gamma] = F_\gamma(x, t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_\gamma] = L_1[u_\gamma] = 0, & u_\gamma(x, 0) = 0, \quad u_{\gamma_t}(x, 0) = 0, \\ u_\gamma \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), & u'_\gamma \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u''_\gamma \in L^\infty(0, T; L^2), & u_\gamma(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_\gamma(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{cases} \quad (P_\gamma)$$

trong đó F_γ , Z_γ , $1 \leq |\gamma| \leq N$, được xác định lần lượt bằng các công thức truy hồi sau đây

$$F_\gamma = \begin{cases} 0, & \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad 1 \leq |\gamma| \leq N, \\ -u_{\gamma_1-1, 0, \gamma_3, \gamma_4}, & \gamma_1 \geq 1, \quad \gamma_2 = 0, \quad 1 \leq |\gamma| \leq N, \\ -u'_{0, \gamma_2-1, \gamma_3, \gamma_4}, & \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 \geq 1, \quad 1 \leq |\gamma| \leq N, \\ -u_{\gamma_1-1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4} - u'_{\gamma_1, \gamma_2-1, \gamma_3, \gamma_4}, & \gamma_1 \geq 1, \quad \gamma_2 \geq 1, \quad 2 \leq |\gamma| \leq N, \end{cases} \quad (5.42)$$

và

$$Z_\gamma = \begin{cases} 0, & \gamma_3 = \gamma_4 = 0, \quad 1 \leq |\gamma| \leq N, \\ u_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3-1, 0}(1, t), & \gamma_3 \geq 1, \quad \gamma_4 = 0, \quad 1 \leq |\gamma| \leq N, \\ u'_{\gamma_1, \gamma_2, 0, \gamma_4-1}(1, t), & \gamma_3 = 0, \quad \gamma_4 \geq 1, \quad 1 \leq |\gamma| \leq N, \\ u_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3-1, \gamma_4}(1, t) + u'_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4-1}(1, t), & \gamma_3 \geq 1, \quad \gamma_4 \geq 1, \quad 2 \leq |\gamma| \leq N. \end{cases} \quad (5.43)$$

Giả sử $u = u_{\vec{\varepsilon}}$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\tilde{P}_{\vec{\varepsilon}})$. Khi đó

$$v = u - \sum_{|\gamma| \leq N} u_\gamma \vec{\varepsilon}^\gamma, \quad (5.44)$$

thỏa bài toán sau

$$\begin{cases} L[v] = -Kv - \lambda v' + E_N(\vec{\varepsilon}), & x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \\ L_0[v] = 0, \quad L_1[v] = \bar{E}_N(\vec{\varepsilon}), & v(x, 0) = v'(x, 0) = 0, \\ v \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), & v' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ v'' \in L^\infty(0, T; L^2), & u_\gamma(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_\gamma(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{cases} \quad (5.45)$$

trong đó

$$\begin{cases} E_N(\vec{\varepsilon}) = - \sum_{|\gamma|=N} (Ku_\gamma + \lambda u'_\gamma) \vec{\varepsilon}^\gamma, \\ \bar{E}_N(\vec{\varepsilon}) = \sum_{|\gamma|=N} (K_1 u_\gamma(1, t) + \lambda_1 u'_\gamma(1, t)) \vec{\varepsilon}^\gamma. \end{cases} \quad (5.46)$$

Khi đó, ta có bổ đề sau

Bổ đề 5.1. Cho $N \in \mathbb{N}$ và các giả thiết $(H_1) - (H_4)$ thỏa. Khi đó

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \|E_N(\vec{\varepsilon})\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq C_{1N} \|\vec{\varepsilon}\|^{N+1}, \\ \text{ii)} \quad & \left| 2 \int_0^t \bar{E}_N(\vec{\varepsilon}) v'(1, s) ds \right| \leq \beta \|v(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \|v(s)\|_{H^1}^2 ds \\ & + \lambda_1 \int_0^t |v'(1, s)|^2 ds + C_{2N}(\beta) \|\vec{\varepsilon}\|^{2N+1}, \quad \forall \beta > 0, \end{aligned}$$

với mọi $\vec{\varepsilon} \leq \vec{\varepsilon}^*$, trong đó C_{1N} , $C_{2N}(\beta)$ là các hằng số dương chỉ phụ thuộc vào các hằng số $\|u_\gamma\|_{L^\infty(0, T; H^1)}$, $\|u'_\gamma\|_{L^\infty(0, T; H^1)}$, $|\gamma| \leq N$.

Chứng minh.

i) Sử dụng tính bị chặn các hàm u_γ , u'_γ , $\gamma \in \mathbb{Z}_+^4$, $1 \leq |\gamma| \leq N$ trong $L^\infty(0, T; H^1)$ ta thu được đánh giá từ (5.46)₁ như sau, với chú ý $\|\vec{\varepsilon}\| \leq \|\vec{\varepsilon}^*\|$.

$$|E_N(\vec{\varepsilon})| \leq \sum_{|\gamma|=N} (K|u_\gamma| + \lambda|u'_\gamma|) |\vec{\varepsilon}^\gamma| \leq \sum_{|\gamma|=N} (K\|u_\gamma\|_{H^1} + \lambda\|u'_\gamma\|_{H^1}) |\vec{\varepsilon}^\gamma|,$$

hay

$$\|E_N(\vec{\varepsilon})\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq \sum_{|\gamma|=N} (\|u_\gamma\|_{L^\infty(0, T; H^1)} + \|u'_\gamma\|_{L^\infty(0, T; H^1)}) \|\vec{\varepsilon}^\gamma\| \cdot |\vec{\varepsilon}^\gamma|. \quad (5.47)$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} \leq \sum_{i=1}^4 \alpha_i x_i, \quad \forall \alpha_i \geq 0, \quad \forall \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1,$$

với $x_1 = K^2$, $x_2 = \lambda^2$, $x_3 = K_1^2$, $x_4 = \lambda_1^2$, $\alpha_1 = \frac{\gamma_1}{N}$, $\alpha_2 = \frac{\gamma_2}{N}$, $\alpha_3 = \frac{\gamma_3}{N}$, $\alpha_4 = \frac{\gamma_4}{N}$ ta được

$$\begin{aligned} |\vec{\varepsilon}^\gamma| &= |K^{\gamma_1} \lambda^{\gamma_2} K_1^{\gamma_3} \lambda_1^{\gamma_4}| = \left| K^{2\frac{\gamma_1}{N}} \lambda^{2\frac{\gamma_2}{N}} K_1^{2\frac{\gamma_3}{N}} \lambda_1^{2\frac{\gamma_4}{N}} \right|^{\frac{N}{2}} \\ &\leq \left(\frac{\gamma_1}{N} K^2 + \frac{\gamma_2}{N} \lambda^2 + \frac{\gamma_3}{N} K_1^2 + \frac{\gamma_4}{N} \lambda_1^2 \right)^{\frac{N}{2}} \\ &\leq \left(K^2 + \lambda^2 + K_1^2 + \lambda_1^2 \right)^{\frac{N}{2}} = \|\vec{\varepsilon}\|^N, \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}_+^4, \quad |\gamma| = N. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Do đó (5.47) được viết lại dưới dạng

$$\|E_N(\vec{\varepsilon})\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C_{1N} \|\vec{\varepsilon}\|^{N+1}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}_+^4, \quad |\gamma| = N, \quad (5.49)$$

trong đó $C_{1N} = \sum_{|\gamma|=N} (\|u_\gamma\|_{L^\infty(0,T;H^1)} + \|u'_\gamma\|_{L^\infty(0,T;H^1)})$.

ii) Từ (5.46)₂ ta có

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \bar{E}_N(\vec{\varepsilon}) v'(1,s) ds &= 2K_1 \sum_{|\gamma|=N} \int_0^t u_\gamma(1,s) v'(1,s) ds \vec{\varepsilon}^\gamma \\ &\quad + 2\lambda_1 \sum_{|\gamma|=N} \int_0^t u'_\gamma(1,s) v'(1,s) ds \vec{\varepsilon}^\gamma \\ &= \bar{E}_{1N}(\vec{\varepsilon}) + \bar{E}_{2N}(\vec{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Cũng từ tính bị chặn các hàm $u_\gamma, u'_\gamma, \gamma \in \mathbb{Z}_+^4, 1 \leq |\gamma| \leq N$ trong $L^\infty(0,T;H^1)$ ta sẽ đánh giá các số hạng bên vế phải của (5.50) như sau

Số hạng thứ nhất $\bar{E}_{1N}(\vec{\varepsilon})$. Bằng cách sử dụng tích phân từng phần và (5.48) ta có

$$\begin{aligned} \bar{E}_{1N}(\vec{\varepsilon}) &= 2K_1 \sum_{|\gamma|=N} \left[u_\gamma(1,t) v(1,t) - \int_0^t u'_\gamma(1,s) v(1,s) ds \right] \vec{\varepsilon}^\gamma \\ &\leq 4K_1 \|\vec{\varepsilon}^\gamma\|^N \sum_{|\gamma|=N} \left[\|u_\gamma(t)\|_{H^1} \|v(t)\|_{H^1} + \int_0^t \|u'_\gamma(s)\|_{H^1} \|v(s)\|_{H^1} ds \right] \\ &\leq \frac{4}{\beta} \|\vec{\varepsilon}^\gamma\|^{2N+2} \left(\sum_{|\gamma|=N} \|u_\gamma\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \right)^2 + \beta \|v(t)\|_{H^1}^2 \\ &\quad + 4T \|\vec{\varepsilon}^\gamma\|^{2N+2} \left(\sum_{|\gamma|=N} \|u'_\gamma\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \right)^2 + \int_0^t \|v(s)\|_{H^1}^2 ds \\ &\leq \bar{C}_{2N}(\beta) \|\vec{\varepsilon}^\gamma\|^{2N+2} + \beta \|v(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \|v(s)\|_{H^1}^2 ds, \end{aligned} \quad (5.51)$$

trong đó

$$\bar{C}_{2N}(\beta) = \frac{4}{\beta} \left(\sum_{|\gamma|=N} \|u_\gamma\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \right)^2 + 4T \left(\sum_{|\gamma|=N} \|u'_\gamma\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \right)^2.$$

Số hạng thứ hai $\bar{E}_{2N}(\vec{\varepsilon})$. Bằng cách sử dụng (5.48) và bất đẳng thức Cauchy ta cũng thu được đánh giá

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{2N}(\vec{\varepsilon}) &= 2\lambda_1 \sum_{|\gamma|=N} \int_0^t u'_\gamma(1,s) v'(1,s) ds \vec{\varepsilon}^\gamma \leq 2\lambda_1 \sum_{|\gamma|=N} \int_0^t |u'_\gamma(1,s) v'(1,s)| ds |\vec{\varepsilon}^\gamma| \\
&\leq 2\sqrt{2}\lambda_1 \|\vec{\varepsilon}\|^N \sum_{|\gamma|=N} \int_0^t \|u'_\gamma\|_{L^\infty(0,T;H^1)} |v'(1,s)| ds \\
&\leq 2\sqrt{2}\lambda_1 \|\vec{\varepsilon}\|^N \sum_{|\gamma|=N} \int_0^t \|u'_\gamma(s)\|_{L^\infty(0,T;H^1)} |v'(1,s)| ds \\
&\leq \lambda_1 \int_0^t |v'(1,s)| ds + 2T \|\vec{\varepsilon}\|^{2N+1} \left(\sum_{|\gamma|=N} \|u'_\gamma\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \right)^2.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Tổ hợp (5.50), (5.51) và (5.52), ta được

$$\begin{aligned}
\left| 2 \int_0^t \bar{E}_N(\vec{\varepsilon}) v'(1,s) ds \right| &\leq \beta \|v(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \|v(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\quad + \lambda_1 \int_0^t |v'(1,s)|^2 ds + C_{2N}(\beta) \|\vec{\varepsilon}\|^{2N+1},
\end{aligned} \tag{5.53}$$

trong đó

$$C_{2N}(\beta) = 2T \left(\sum_{|\gamma|=N} \|u'_\gamma\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \right)^2 + \bar{C}_{2N}(\beta) \varepsilon_*.$$

Hoàn tất chứng minh Bổ đề 5.2 ■

Kế tiếp, ta có định lý sau

Định lý 5.2. Cho $N \in \mathbb{N}$. Giả sử $(H_1) - (H_4)$ thỏa. Với mọi $\vec{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^4$ thỏa $\vec{\varepsilon} \leq \vec{\varepsilon}^*$ thì bài toán $(\tilde{P}_{\vec{\varepsilon}})$ có duy nhất nghiệm yếu $u = u_{\vec{\varepsilon}} \in W(T)$ thỏa đánh giá tiệm cận tới cấp $N + \frac{1}{2}$ như sau

$$\begin{aligned}
&\|u - \sum_{|\gamma| \leq N} u_\gamma \vec{\varepsilon}^\gamma\|_{W(T)} + \sqrt{\lambda_1} \|u'(1, \cdot) - \sum_{|\gamma| \leq N} u'_\gamma(1, \cdot) \vec{\varepsilon}^\gamma\|_{L^2(0,T)} \\
&\quad + \|Y - \sum_{|\gamma| \leq N} Y_\gamma \vec{\varepsilon}^\gamma\|_{L^\infty(0,T)} \leq \tilde{C}_N^* \|\vec{\varepsilon}\|^{N+\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{5.57}$$

với u_γ là nghiệm yếu của bài toán (P_γ) , $\gamma \in \mathbb{Z}_+^4$, $1 \leq |\gamma| \leq N$ và $\tilde{C}_N^*$ là hằng số độc lập với $\vec{\varepsilon}$.

Chứng minh.

Lấy tích vô hướng của (5.45)₁ với v' , sau đó lấy tích phân theo biến thời gian t , sau một số biến đổi ta dễ dàng thu được kết quả sau

$$\begin{aligned}
\sigma(t) = & \int_0^t \mu'(s) \|v_x(s)\|^2 ds - 2v(0, t) \int_0^t k(t-s)v(0, s) ds + 2k(0) \int_0^t v^2(0, s) ds \\
& + 2 \int_0^t v(0, r) dr \int_0^r k'(r-s)v(0, s) ds + 2 \int_0^t \langle E_N(\vec{\varepsilon}), v'(s) \rangle ds \\
& - 2 \int_0^t \bar{E}_N(\vec{\varepsilon}) v'(1, s) ds \equiv \sum_{i=1}^6 \sigma_i,
\end{aligned} \tag{5.55}$$

trong đó,

$$\begin{aligned}
\sigma(t) = & \|v'(t)\|^2 + \mu(t) \|v_x(t)\|^2 + K_0 v^2(0, t) + K \|v(s)\|^2 + 2\lambda \int_0^t \|v'(s)\|^2 ds \\
& + K_1 v^2(1, t) + 2\lambda_1 \int_0^t |v'(1, s)|^2 ds.
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Từ (5.56) và bổ đề 2.1 ta dễ dàng suy ra rằng

$$\left\{ \begin{aligned}
\sigma(t) & \geq \|v'(t)\|^2 + \mu_0 \|v_x(t)\|^2 + 2\lambda_1 \int_0^t |v'(1, s)|^2 ds, \\
\|v(t)\|^2 & = \left\| \int_0^t v'(s) ds \right\|^2 \leq t \int_0^t \sigma(s) ds, \\
\|v(t)\|_{H^1}^2 & = \|v(t)\|^2 + \|v_x(t)\|^2 \leq \frac{1}{\mu_0} \sigma(t) + t \int_0^t \sigma(s) ds, \\
\int_0^t \|v(s)\|_{H^1}^2 ds & \leq \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2 \right) \int_0^t \sigma(s) ds.
\end{aligned} \right. \tag{5.57}$$

Sử dụng các bất đẳng thức trên ta lần lượt đánh giá các số hạng bên vế phải của (5.55) như sau

$$\sigma_1 \leq \int_0^t |\mu'(s)| \|v_x(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\mu_0} \|\mu'\|_{L^\infty(0, T)} \int_0^t \sigma(s) ds \leq \sigma_{1T} \int_0^t \sigma(s) ds. \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_2 & \leq 4 \|v(t)\|_{H^1} \int_0^t |k(t-s)| \|v(s)\|_{H^1} ds \\
& \leq \beta \|v(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\beta} \left(\int_0^t |k(t-s)| \|v(s)\|_{H^1} ds \right)^2 \\
& \leq \beta \|v(t)\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\beta} \|k\|_{L^2(0, T)}^2 \int_0^t \|v(s)\|_{H^1}^2 ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\beta}{\mu_0} \sigma(t) + [\beta T + \frac{4}{\beta} \|k\|_{L^2(0,T)}^2 (\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2)] \int_0^t \sigma(s) ds \\
&\leq \frac{\beta}{\mu_0} \sigma(t) + \sigma_{2T}(\beta) \int_0^t \sigma(s) ds.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &\leq 2|k(0)| \int_0^t v^2(0, s) ds \leq 4 \|k\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^t \|v(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq 4 \|k\|_{L^\infty(0,T)} (\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2) \int_0^t \sigma(s) ds \leq \sigma_{3T} \int_0^t \sigma(s) ds
\end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_4 &\leq 4 \int_0^t \|v(r)\|_{H^1} dr \int_0^r |k'(r-s)| \cdot \|v(s)\|_{H^1} ds \\
&\leq \int_0^t \left[\|v(s)\|_{H^1}^2 + 2 \left(\int_0^s |k'(s-r)| \cdot \|v(r)\|_{H^1} dr \right)^2 \right] ds \\
&\leq \int_0^t \|v(s)\|_{H^1}^2 ds + 4 \int_0^t \int_0^s |k'(s-r)|^2 dr \int_0^s \|v(r)\|_{H^1}^2 dr ds \\
&\leq \int_0^t \|v(s)\|_{H^1}^2 ds + 4T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2 \int_0^t \|v(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq \left(1 + 4T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2 \right) (\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2) \int_0^t \sigma(s) ds \leq \sigma_{4T} \int_0^t \sigma(s) ds
\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\sigma_5 \leq 2 \int_0^t \|E_N(\vec{\varepsilon})\| \cdot \|v'(s)\| ds \leq TC_N^2 \|\vec{\varepsilon}\|^{2N+2} + \int_0^t \sigma(s) ds \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_6 &= -2 \int_0^t \bar{E}_N(\vec{\varepsilon}) v'(1, s) ds \\
&\leq \beta \|v(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \|v(s)\|_{H^1}^2 ds + \lambda_1 \int_0^t |v'(1, s)|^2 ds + C_{2N}(\beta) \|\vec{\varepsilon}\|^{2N+1} \\
&\leq (\frac{1}{2} + \frac{\beta}{\mu_0}) \sigma(t) + C_{2N}(\beta) \|\vec{\varepsilon}\|^{2N+1} + [\beta T + \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2} T^2] \int_0^t \sigma(s) ds \\
&\leq (\frac{1}{2} + \frac{\beta}{\mu_0}) \sigma(t) + C_{2N}(\beta) \|\vec{\varepsilon}\|^{2N+1} + \sigma_{6T}(\beta) \int_0^t \sigma(s) ds, \quad \forall \beta > 0.
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Tổ hợp (5.55), (5.58) - (5.63) ta được

$$\begin{aligned} \sigma(t) &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{2\beta}{\mu_0}\right)\sigma(t) + [TC_{1N}^2 \|\vec{\varepsilon}^*\| + C_{2N}(\beta)] \cdot \|\vec{\varepsilon}\|^{2N+1} \\ &\quad + (1 + \sigma_{1T} + \sigma_{2T}(\beta) + \sigma_{3T} + \sigma_{4T} + \sigma_{6T}(\beta)) \int_0^t \sigma(s) ds, \end{aligned} \quad (5.64)$$

Trong (5.64), chọn $\beta > 0$ thỏa $(\frac{1}{2} + \frac{2\beta}{\mu_0}) \leq \frac{1}{2}$ và sử dụng bổ đề Gronwall, ta thu được

$$\sigma(t) \leq \bar{D}_1(T, \beta) \|\vec{\varepsilon}\|^{2N+1} \exp(2 \bar{D}_2(T, \beta)), \quad (5.65)$$

ở đây

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \bar{D}_1(T, \beta) = TC_{1N}^2 \|\vec{\varepsilon}^*\| + C_{2N}(\beta), \\ \bar{D}_2(T, \beta) = 1 + \sigma_{1T} + \sigma_{2T}(\beta) + \sigma_{3T} + \sigma_{4T} + \sigma_{6T}(\beta). \end{cases} \quad (5.66)$$

Điều này, dẫn đến

$$\|v\|_{W(T)} + \sqrt{\lambda_1} \|v'(1, \cdot)\|_{L^2(0,T)} \leq \bar{C}_N^* \|\vec{\varepsilon}\|^{N+\frac{1}{2}},$$

hay

$$\|u - \sum_{|\gamma| \leq N} u_\gamma \vec{\varepsilon}^\gamma\|_{W(T)} + \sqrt{\lambda_1} \|u'(1, \cdot) - \sum_{|\gamma| \leq N} u'_\gamma(1, \cdot) \vec{\varepsilon}^\gamma\|_{L^2(0,T)} \leq \bar{C}_N^* \|\vec{\varepsilon}\|^{N+\frac{1}{2}}, \quad (5.66)$$

trong đó,

$$\bar{C}_N^* = \sqrt{\bar{D}_1(T, \beta)} \exp(\bar{D}_2(T, \beta)T). \quad (5.67)$$

Mặt khác, từ (5.45)₂ và (5.65) ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} |L_0[v]| &\leq K_0 |v(0, t)| + \int_0^t |k(t-s)v(0, s)| ds \\ &\leq \sqrt{2} K_0 \|v(t)\|_{H^1} + \sqrt{2} \int_0^t |k(t-s)| \|v(s)\|_{H^1} ds \\ &\leq \sqrt{2} \left(K_0 + \int_0^t |k(t-s)| ds \right) \|v\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \\ &\leq \sqrt{2} (K_0 + \|k\|_{L^1(0,T)}) \sqrt{\sigma(t)} \leq \hat{C}_N^* \|\vec{\varepsilon}\|^{N+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Do đó

$$\|Y - \sum_{|\gamma| \leq N} Y_\gamma \vec{\varepsilon}^\gamma\|_{L^\infty(0,T)} \leq \hat{C}_N^* \|\vec{\varepsilon}\|^{N+\frac{1}{2}}. \quad (5.68)$$

Từ (5.56) và (5.68) ta hoàn tất chứng minh Định lý 5.2 ■

Chương 6

MINH HỌA BẰNG BÀI TOÁN CỤ THỂ

Trong chương này, chúng tôi xét bài toán (3.1), (3.2) cụ thể, để minh họa cho việc khai triển tiệm cận nghiệm của yếu theo bốn tham số bé $K, K_1; \lambda, \lambda_1$ đến cấp 2 đã được trình bày trong phần 2, chương 5. Bài toán cụ thể được phát biểu như sau. Tìm hàm u thỏa

$$\begin{cases} L[u] \equiv u_{tt} - \mu(t)u_{xx} = -Ku - \lambda u_t, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u] \equiv \mu(t)u_x(0, t) - K_0 u(0, t) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds = 0, \\ L_1[u] \equiv \mu(t)u_x(1, t) + K_1 u(1, t) + \lambda_1 u_t(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x). \end{cases} \quad (6.1)$$

với $0 \leq K \leq K^*, \quad 0 < \lambda \leq \lambda^*, \quad 0 \leq K_1 \leq K_1^*, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_1^*,$ ($K^*, \lambda^*, K_1^*, \lambda_1^*$ là các hằng số cố định), $f(x, t) \equiv 0, \quad g(t) \equiv 0, \quad K_0 \geq 0$ và $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu, k)$ là các hàm cho trước thỏa các giả thiết $(H_1), (H_3), (H_4)$.

Giả sử $u_{\vec{0}}$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\tilde{P}_{\vec{0}})$ ứng với $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$, nghĩa là

$$\begin{cases} L[u_{\vec{0}}] = F_{\vec{0}} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{\vec{0}}] \equiv \mu(t)u_x(0, t) - K_0 u_{\vec{0}}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{\vec{0}}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{\vec{0}}] \equiv \mu(t)u_x(1, t) = 0, \quad u_{\vec{0}}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u'_{\vec{0}}(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \\ u_{\vec{0}} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u'_{\vec{0}} \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u''_{\vec{0}} \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{\vec{0}}(0, \cdot) \in W^{1, \infty}(0, T), \quad u_{\vec{0}}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{cases} \quad (\tilde{P}_{\vec{0}})$$

Xét dãy hữu hạn các nghiệm yếu $u_\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{Z}_+^4, \quad |\gamma| \leq 1$ được xác định bởi các bài toán sau

$$\begin{cases} L[u_{1000}] \equiv u''_{1000} - \mu(t)\Delta u_{1000} = -u_{\vec{0}}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{1000}] \equiv \mu(t)\nabla u_{1000}(0, t) - K_0 u_{1000}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{1000}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{1000}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{1000}(1, t) = 0, \quad u_{1000}(x, 0) = 0, \quad u'_{1000}(x, 0) = 0, \\ u_{1000} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u'_{1000} \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u''_{1000} \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{1000}(0, \cdot) \in W^{1, \infty}(0, T), \quad u_{1000}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{cases} \quad (P_{1000})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_{0100}] \equiv u_{0100}'' - \mu(t)\Delta u_{0100} = -u_0', \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{0100}] \equiv \mu(t)\nabla u_{0100}(0, t) - K_0 u_{0100}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{0100}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{0100}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{0100}(1, t) = 0, \\ u_{0100}(x, 0) = 0, \quad u_{0100}'(x, 0) = 0, \\ u_{0100} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u_{0100}' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u_{0100}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{0100}(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_{0100}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{array} \right. \quad (P_{0100})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_{0010}] \equiv u_{0010}'' - \mu(t)\Delta u_{0010} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{0010}] \equiv \mu(t)\nabla u_{0010}(0, t) - K_0 u_{0010}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{0010}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{0010}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{0010}(1, t) = u_0'(1, t), \\ u_{0010}(x, 0) = 0, \quad u_{0010}'(x, 0) = 0, \\ u_{0010} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u_{0010}' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u_{0010}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{0010}(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_{0010}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{array} \right. \quad (P_{0010})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_{0001}] \equiv u_{0001}'' - \mu(t)\Delta u_{0001} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{0001}] \equiv \mu(t)\nabla u_{0001}(0, t) - K_0 u_{0001}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{0001}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{0001}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{0001}(1, t) = u_0'(1, t), \\ u_{0001}(x, 0) = 0, \quad u_{0001}'(x, 0) = 0, \\ u_{0001} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u_{0001}' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u_{0001}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{0001}(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_{0001}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{array} \right. \quad (P_{0001})$$

Khi đó, nghiệm của bài toán (6.1) có thể xấp xỉ bởi đa thức cấp một theo bốn biến $K, \lambda, K_1, \lambda_1$ như sau

$$u_\varepsilon(x, t) \approx u_0(x, t) + u_{1000}(x, t)K + u_{0100}(x, t)\lambda + u_{0010}(x, t)K_1 + u_{0001}(x, t)\lambda_1,$$

và thỏa đánh giá tiệm cận đến cấp $\frac{3}{2}$ như sau

$$\begin{aligned} & \|u - \sum_{|\gamma| \leq 1} u_\gamma \vec{\varepsilon}^\gamma\|_{W(T)} + \sqrt{\lambda_1} \|u'(1, \cdot) - \sum_{|\gamma| \leq 1} u'_\gamma(1, \cdot) \vec{\varepsilon}^\gamma\|_{L^2(0, T)} \\ & + \|Y - \sum_{|\gamma| \leq 1} Y_\gamma \vec{\varepsilon}^\gamma\|_{L^\infty(0, T)} \leq \tilde{C}_1^* \|\vec{\varepsilon}\|^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

trong đó, $\tilde{C}_1^*$ độc lập với bốn tham số bé $K, \lambda, K_1, \lambda_1$.

Xét dãy hữu hạn các nghiệm yếu $u_\gamma, \gamma \in \mathbb{Z}_+^4, |\gamma| \leq 2$ được xác định bởi các bài toán sau

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_{1100}] \equiv u_{1100}'' - \mu(t)\Delta u_{1100} = -(u_0' + u_0'), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{1100}] \equiv \mu(t)\nabla u_{1100}(0, t) - K_0 u_{1100}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{1100}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{1100}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{1100}(1, t) = 0, \quad u_{1100}(x, 0) = 0, \quad u_{1100}'(x, 0) = 0, \\ u_{1100} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u_{1100}' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u_{1100}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{1100}(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_{1100}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{array} \right. \quad (P_{1100})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_{1010}] \equiv u_{1010}'' - \mu(t)\Delta u_{1010} = -u_0', \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{1010}] \equiv \mu(t)\nabla u_{1010}(0, t) - K_0 u_{1010}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{1010}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{1010}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{1010}(1, t) = u_{1000}(1, t), \quad u_{1010}(x, 0) = 0, \quad u_{1010}'(x, 0) = 0, \\ u_{1010} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u_{1010}' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u_{1010}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{1010}(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_{1010}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{array} \right. \quad (P_{1010})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_{1001}] \equiv u_{1001}'' - \mu(t)\Delta u_{1001} = -u_0', \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{1001}] \equiv \mu(t)\nabla u_{1001}(0, t) - K_0 u_{1001}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{1001}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{1001}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{1001}(1, t) = u_{1000}'(1, t), \quad u_{1001}(x, 0) = 0, \quad u_{1001}'(x, 0) = 0, \\ u_{1001} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u_{1001}' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u_{1001}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{1001}(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_{1001}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{array} \right. \quad (P_{1001})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_{0110}] \equiv u_{0110}'' - \mu(t)\Delta u_{0110} = -u_0', \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{0110}] \equiv \mu(t)\nabla u_{0110}(0, t) - K_0 u_{0110}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{0110}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{0110}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{0110}(1, t) = u_{0100}(1, t), \quad u_{0110}(x, 0) = 0, \quad u_{0110}'(x, 0) = 0, \\ u_{0110} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u_{0110}' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u_{0110}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{0110}(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_{0110}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{array} \right. \quad (P_{0110})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_{0101}] \equiv u_{0101}'' - \mu(t)\Delta u_{0101} = -u_0', \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{0101}] \equiv \mu(t)\nabla u_{0101}(0, t) - K_0 u_{0101}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{0101}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{0101}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{0101}(1, t) = u_{0100}'(1, t), \\ u_{0101}(x, 0) = 0, \quad u_{0101}'(x, 0) = 0, \\ u_{0101} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u_{0101}' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u_{0101}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{0101}(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_{0101}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{array} \right. \quad (P_{0101})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_{0011}] \equiv u_{0011}'' - \mu(t)\Delta u_{0011} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{0011}] \equiv \mu(t)\nabla u_{0011}(0, t) - K_0 u_{0011}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{0011}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{0011}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{0011}(1, t) = u_{0001}(1, t) + u_{0010}'(1, t), \\ u_{0011}(x, 0) = 0, \quad u_{0011}'(x, 0) = 0, \\ u_{0011} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u_{0011}' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u_{0011}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{0011}(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_{0011}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{array} \right. \quad (P_{0011})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_{2000}] \equiv u_{2000}'' - \mu(t)\Delta u_{2000} = -u_{1000}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{2000}] \equiv \mu(t)\nabla u_{2000}(0, t) - K_0 u_{2000}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{2000}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{2000}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{2000}(1, t) = 0, \\ u_{2000}(x, 0) = 0, \quad u_{2000}'(x, 0) = 0, \\ u_{2000} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u_{2000}' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u_{2000}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{2000}(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_{2000}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{array} \right. \quad (P_{2000})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_{0200}] \equiv u_{0200}'' - \mu(t)\Delta u_{0200} = -u_{0100}', \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{0200}] \equiv \mu(t)\nabla u_{0200}(0, t) - K_0 u_{0200}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{0200}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{0200}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{0200}(1, t) = 0, \\ u_{0200}(x, 0) = 0, \quad u_{0200}'(x, 0) = 0, \\ u_{0200} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u_{0200}' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u_{0200}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{0200}(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_{0200}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{array} \right. \quad (P_{0200})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_{0020}] \equiv u_{0020}'' - \mu(t)\Delta u_{0020} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{0020}] \equiv \mu(t)\nabla u_{0020}(0, t) - K_0 u_{0020}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{0020}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{0020}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{0020}(1, t) = u_{0010}(1, t), \\ u_{0020}(x, 0) = 0, \quad u_{0020}'(x, 0) = 0, \\ u_{0020} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u_{0020}' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u_{0020}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{0020}(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_{0020}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{array} \right. \quad (P_{0020})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_{0002}] \equiv u_{0002}'' - \mu(t)\Delta u_{0002} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ L_0[u_{0002}] \equiv \mu(t)\nabla u_{0002}(0, t) - K_0 u_{0002}(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_{0002}(0, s)ds = 0, \\ L_1[u_{0002}] \equiv -\mu(t)\nabla u_{0002}(1, t) = u_{0001}'(1, t), \\ u_{0002}(x, 0) = 0, \quad u_{0002}'(x, 0) = 0, \\ u_{0002} \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; H^2), \quad u_{0002}' \in L^\infty(0, T; H^1), \\ u_{0002}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u_{0002}(0, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \quad u_{0002}(1, \cdot) \in H^2(0, T). \end{array} \right. \quad (P_{0002})$$

Khi đó, nghiệm của bài toán $(\tilde{P}_\varepsilon)$ có thể xấp xỉ bởi một đa thức cấp hai theo bốn biến

$K, \lambda, K_1, \lambda_1$ như sau

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, t) \approx & u_0(x, t) + u_{1000}(x, t)K + u_{0100}(x, t)\lambda + u_{0010}(x, t)K_1 + u_{0001}(x, t)\lambda_1 \\ & + u_{1100}(x, t)K\lambda + u_{1010}(x, t)KK_1 + u_{1001}(x, t)K\lambda_1 \\ & + u_{0110}(x, t)\lambda K_1 + u_{0101}(x, t)\lambda\lambda_1 + u_{0011}(x, t)K_1\lambda_1 \\ & + u_{2000}(x, t)K^2 + u_{0200}(x, t)\lambda^2 + u_{0020}(x, t)K_1^2 + u_{0002}(x, t)\lambda_1^2, \end{aligned}$$

và đánh giá tiệm cận đến cấp $\frac{5}{2}$ như sau

$$\begin{aligned} & \|u - \sum_{|\gamma| \leq 2} u_\gamma \tilde{\varepsilon}^\gamma\|_{W(T)} + \sqrt{\lambda_1} \|u'(1, \cdot) - \sum_{|\gamma| \leq 2} u'_\gamma(1, \cdot) \tilde{\varepsilon}^\gamma\|_{L^2(0, T)} \\ & + \|Y - \sum_{|\gamma| \leq 2} Y_\gamma \tilde{\varepsilon}^\gamma\|_{L^\infty(0, T)} \leq \tilde{C}_2^* \|\tilde{\varepsilon}\|^{\frac{5}{2}}, \end{aligned}$$

trong đó, $\tilde{C}_2^*$ độc lập với bốn tham số bé $K, \lambda, K_1, \lambda_1$.

KẾT LUẬN

Qua luận văn này, tác giả thực sự bắt đầu làm quen với công việc nghiên cứu khoa học một cách có hệ thống, có phương pháp và có định hướng rõ ràng. Tác giả cũng học tập được phương pháp nghiên cứu trong việc đọc tài liệu, thảo luận trong nhóm sinh hoạt học thuật do Thầy TS. Trần Minh Thuyết và Thầy TS. Nguyễn Thành Long tổ chức. Ngoài ra, tác giả còn học tập được một số công cụ của Giải tích hàm để khảo sát sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm yếu của bài toán biên phi tuyến tính chứa số hạng nhót phi tuyến, chẳng hạn như: phương pháp xấp xỉ Feado - Galerkin liên hệ với các kỹ thuật đánh giá tiên nghiệm, kỹ thuật về tính compact và hội tụ yếu, phương pháp khai triển tiệm cận.

Nội dung chính của luận văn tập trung ở các chương 3, 4, 5.

Ở chương 3, Chúng tôi thu được kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu toàn cục.

Trong chương 4, chúng tôi thu được kết quả về tính ổn định của nghiệm yếu theo các dữ kiện đầu vào của bài toán.

Trong chương 5, chúng tôi thu được khai triển tiệm cận của nghiệm yếu theo bốn tham số bé đến cấp $N + 1/2$.

Ngoài ra, việc xét bài toán cụ thể để minh họa khai triển tiệm cận của nghiệm yếu theo bốn tham số ở chương 6 đã giúp tác giả có cái nhìn chính xác và cụ thể hơn về việc khai triển tiệm cận của nghiệm yếu ở chương 5.

Tuy nhiên, do sự hiểu biết của bản thân còn hạn chế và sự hạn hẹp khuôn khổ của luận văn nên tác giả chưa tìm hiểu kỹ khả năng ứng dụng của các kết quả thu được trong luận văn vào các bài toán vật lý và một số bài toán khác. Vì vậy, tác giả kính mong được sự chỉ bảo và góp ý của Quý Thầy Cô trong và ngoài Hội đồng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] **Nguyen Thuc An, Nguyen Dinh Trieu** (1991), *Shock between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous frictional resistance at the side*, J. Mech. NCSR.Vietnam, **13** (2) (1991) 1 – 7.
- [2] **M. Bergounioux, Nguyen Thanh Long, Alain Pham Ngoc Dinh** (2001), *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Anal. **43** (2001) 547 – 561.
- [3] **J. L. Lions**, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod; Gauthier – Villars, Paris, 1969.
- [4] **Nguyen Thanh Long, Alain Pham Ngoc Dinh** (1995), *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal. **24** (8) (1995) 1261 – 1279.
- [5] **Nguyen Thanh Long, Alain Pham Ngoc Dinh, Tran Ngoc Diem** (2005), *On a shock problem involving a nonlinear viscoelastic bar*, Bound. Value Probl. **2005** (3) 337 – 358.
- [6] **Nguyen Thanh Long, Tran Minh Thuyet** (2003), *A semilinear wave equation associated with a nonlinear integral equation*, Demonstratio Math. **36** (4) (2003) 915 – 938.
- [7] **Nguyen Thanh Long, Le Thi Phuong Ngoc** (2007), *On a nonlinear Kirchhoff-Carrier wave equation in the unit membrane: The quadratic convergence and asymptotic expansion of solutions*, Demonstratio Math. **40** (2) (2007) 365 – 392.
- [8] **Nguyen Thanh Long** (2002), *On the nonlinear wave equation $u_{tt} - B(t, \|u_x\|^2)u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t)$ associated with the mixed homogeneous conditions*, J. Math. Anal. Appl. **274** (1) (2002) 102 – 123.
- [9] **Nguyen Thanh Long, Le Van Ut, Nguyen Thi Thao Truc** (2005), *On a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **63** (2) (2005) 198 – 224.

- [10] **Nguyen Thanh Long, Le Xuan Truong** (2007), *Existence and asymptotic expansion for a viscoelastic problem with a mixed homogeneous condition*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **67** (3) (2007) 842 – 864.
- [11] **Nguyen Thanh Long, Le Thi Phuong Ngoc** (2009), *On nonlinear boundary value problems for nonlinear wave equations*, Vietnam J. Math. **37** (2 - 3)(2009) 141 – 178.
- [12] **Le Thi Phuong Ngoc, Nguyen Thanh Long** (2010), *Linear approximation and asymptotic expansion of solutions in many small parameters for a nonlinear Kirchhoff wave equation with mixed nonhomogeneous conditions*, Acta Applicanda Mathematicae, **112** (2) (2010) 137 – 169.
- [13] **Le Thi Phuong Ngoc, Le Nguyen Kim Hang, Nguyen Thanh Long** (2009), *On a nonlinear wave equation associated with the boundary conditions involving convolution*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **70** (11) (2009) 3943 – 3965.
- [14] **Le Thi Phuong Ngoc, Le Xuan Truong, Nguyen Thanh Long** (2010), *An N – order iterative scheme for a nonlinear Kirchhoff-Carrier wave equation associated with mixed homogeneous conditions*, Acta Mathematica Vietnamica, **35** (2) (2010) 207 – 227.
- [15] **Le Thi Phuong Ngoc, Le Khanh Luan, Tran Minh Thuyet, Nguyen Thanh Long** (2009), *On the nonlinear wave equation with the mixed nonhomogeneous conditions: Linear approximation and asymptotic expansion of solutions*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **71** (11) (2009) 5799 – 5819.
- [16] **Le Thi Phuong Ngoc, Tran Minh Thuyet, Pham Thanh Son, Nguyen Thanh Long** (2010), *On a nonlinear wave equation associated with a Cauchy problem for an ordinary differential equation*, (submitted)
- [17] **Le Xuan Truong, Le Thi Phuong Ngoc, Nguyen Thanh Long** (2009), *High-order iterative schemes for a nonlinear Kirchhoff – Carrier wave equation associated with*

the mixed homogeneous conditions, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **71** (1 – 2) (2009) 467 – 484.

[18] **Le Xuan Truong, Le Thi Phuong Ngoc, Nguyen Thanh Long** (2009), *The N – order iterative schemes for a nonlinear Kirchhoff – Carrier wave equation associated with the mixed inhomogeneous conditions*, Applied Mathematics and Computation, **215** (5) (2009) 1908 – 1925.

[19] **Le Xuan Truong, Le Thi Phuong Ngoc, Alain Pham Ngoc Dinh, Nguyen Thanh Long** (2010), *The regularity and exponential decay of solution for a linear wave equation associated with two – point boundary conditions*, Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications, **11**(3) (2010) 1289 – 1303.