

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

NGUYỄN THANH DŨNG

**CƠ SỞ VANDERPUT CHO KHÔNG
GIAN CÁC HÀM LIÊN TỤC TRÊN $\mathbb{C}_p$**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Tp. Hồ Chí Minh - 2011

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành nhờ quá trình tích lũy kiến thức lâu dài ở trường ĐHSP Quy Nhơn và lớp cao học Toán, chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số khóa 19 của trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh.

Đầu tiên tôi xin tỏ lòng tôn kính và biết ơn sâu sắc tới thầy PGS. TS My Vinh Quang, người đã trực tiếp hướng dẫn tôi trong suốt quá trình thực hiện đề tài này. Phương pháp làm việc của thầy rất nghiêm minh, khoa học và đạt hiệu quả cao. Thầy cũng đã đọc bản thảo và đưa ra những nhận xét sắc đáng về cách trình bày giúp luận văn được rõ ràng, mạch lạc hơn.

Chân thành cảm ơn quý thầy, cô trong khoa Toán – Tin học; khoa Giáo dục chính trị của trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh; quý thầy, cô trong khoa Toán – Tin học trường ĐHKHTN Tp. Hồ Chí Minh đã tận tâm truyền thụ những kiến thức nền tảng giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Cảm ơn Ban giám hiệu; quý thầy, cô công tác tại phòng KHCN và Sau đại học của trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh đã tạo điều kiện tốt nhất cho tôi hoàn thành khóa học cũng như trong suốt quá trình làm luận văn.

Cuối cùng, xin cảm ơn Ban giám hiệu, các thầy cô trong tổ Toán – Tin học trường THPT Ngô Gia Tự; gia đình, bè bạn đã tạo điều kiện thuận lợi cả về vật chất lẫn tinh thần cho tôi trong suốt quá trình học tập.

Tp Hồ Chí Minh, tháng 08 năm 2011

Nguyễn Thanh Dũng

MỤC LỤC

CÁC KÝ HIỆU DÙNG TRONG LUẬN VĂN

p : số nguyên tố

$\mathbb{N}$: tập hợp các số tự nhiên

$\mathbb{N}^*$: tập hợp các số nguyên dương

$\mathbb{Z}$: tập hợp các số nguyên

$\mathbb{Q}$: tập hợp các số hữu tỉ

$\mathbb{R}$: tập hợp các số thực

$\mathbb{C}$: tập hợp các số phức

$\mathbb{Z}_p$: vành các số nguyên p – adic

$\mathbb{Q}_p$: trường số p – adic

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{H}_p$$

$|\cdot|_p$: giá trị tuyệt đối p – adic trong $\mathbb{Q}_p$

$\|\cdot\|_p$: giá trị tuyệt đối p – adic trong $\mathcal{E}_p$

$$\gamma_n = n - n_-$$

$\{x_n\}_n$: dãy chuẩn của x

$[a]$: phần nguyên của số nguyên a

$[a]_p$: phần nguyên p – adic của a

$\forall$: kết thúc phép chứng minh

MỞ ĐẦU

Các số p – adic được mô tả lần đầu tiên bởi *Kurt Hensel* vào năm 1897, hơn một trăm năm qua chúng đã từng bước thâm nhập vào nhiều ngành toán học như: Lý thuyết số, Hình học đại số, Tôpô đại số, Giải tích và cả Vật lý đặc biệt là Vật lý lượng tử. Bộ môn toán học nghiên cứu các hàm với biến số là các số p – adic gọi là giải tích p – adic.

Không gian các hàm liên tục trên $\mathbb{C}_p$, $C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$, là một không gian *Banach* với chuẩn

$$\|f\|_\infty = \max \left\{ \|f(x)\|_p, \forall x \in \mathbb{C}_p \right\}, \forall f \in C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$$

Mahler đã chỉ ra rằng tập các đa thức dạng $\left(\frac{x}{n}\right), n = 0, 1, 2, \dots$ lập thành một cơ sở trực giao của $C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$, gọi là cơ sở *Mahler*. Cơ sở này đã có nhiều ứng dụng trong việc nghiên cứu các hàm liên tục trên $\mathbb{C}_p$. Theo hướng nghiên cứu này, *Vanderput* đã đưa ra một cơ sở trực giao khác của $C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ bao gồm các hàm hằng địa phương và cũng có nhiều ứng dụng. Bởi vậy, chúng tôi chọn đề tài “*Cơ sở Vanderput cho không gian các hàm liên tục trên $\mathbb{C}_p$* ” với mục đích tiếp tục làm rõ thêm một số kết quả về cơ sở này.

Mục đích chính của luận văn là xây dựng cơ sở *Vanderput* cho không gian các hàm liên tục trên $\mathbb{C}_p$. Nghiên cứu và mở rộng một số tính chất của cơ sở này. Đồng thời, xây dựng các ứng dụng của cơ sở này để biểu diễn các hàm liên tục trên tập $\mathbb{C}_p$.

Luận văn giới thiệu đầy đủ, chi tiết cách xây dựng cũng như các tính chất cơ bản của cơ sở *Vanderput*. Chúng tôi đã cố gắng tìm tòi để đưa ra những ứng dụng của cơ sở này trong việc nghiên cứu các hàm liên tục, khả vi liên tục trên $\mathbb{C}_p$; các hàm thỏa điều kiện *Lipchitz* cấp a dương.

Cấu trúc của luận văn gồm 2 chương

Chương 1: Các kiến thức cơ bản

Chương này giới thiệu các kiến thức cơ bản dùng cho chương sau như: các trường số p – adic, không gian các hàm liên tục trên $\mathbb{C}_p$, cơ sở trực giao, trực chuẩn của một không gian.

Chương 2: Cơ sở *Vanderput* cho không gian các hàm liên tục trên $\mathbb{C}_p$

Chương này là chương chính của luận văn, trình bày đầy đủ, chi tiết cách xây dựng cơ sở *Vanderput* và các tính chất của nó. Trình bày các đặc trưng của hệ số *Vanderput* đối với lớp hàm khả vi liên tục. Đưa ra công thức tính tích phân *Volkenborn* theo cơ sở này. Cuối cùng là mở rộng kết quả của *Vanderput* cho không gian các hàm liên tục hai biến $C(\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p)$.

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 08 năm 2011

Tác giả

Nguyễn Thanh Dũng

Chương 1: KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trong chương này, chúng tôi nêu cách xây dựng các trường số p – adic. Đồng thời đưa ra khái niệm hàm liên tục, không gian các hàm liên tục; cơ sở trực giao – trực chuẩn của một không gian; nêu và chứng minh chi tiết các tính chất cơ bản của chúng mà sẽ được sử dụng trong chương 2.

1.1 Trường các số p – adic

Để xây dựng trường các số p – adic $\mathbb{Q}_p$ và $\mathbb{F}_p$, trước hết ta cần khái niệm giá trị tuyệt đối trên một trường.

1.1.1. Định nghĩa

Cho K là một trường, ánh xạ $| \cdot | : K \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một giá trị tuyệt đối trên K nếu:

- 1) $|x| \geq 0, \forall x \in K; |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2) $|xy| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in K$
- 3) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in K$

Nếu $| \cdot |$ thỏa điều kiện 3') $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}, \forall x, y \in K$ thì $| \cdot |$ gọi là giá trị tuyệt đối phi - Acsimét.

Ví dụ 1 Trên trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, giá trị tuyệt đối thông thường là một giá trị tuyệt đối trên trường $\mathbb{Q}$

Ví dụ 2 Trên trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, ta có một số giá trị tuyệt đối phi – Acsimét

- 1) Giá trị tuyệt đối tầm thường $|x| = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$

2) Với $x \in \mathbb{Q}$, ta ký hiệu $\text{ord}_p(x)$ là số mũ của p trong sự phân tích x thành tích các thừa số nguyên tố, với quy ước $\text{ord}_p(0) = \infty$. Khi đó, hàm định bởi

$$|x|_p = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \left(\frac{1}{p}\right)^{\text{ord}_p(x)}, & x \neq 0 \end{cases}, \forall x \in \mathfrak{K}$$

là một giá trị tuyệt đối phi – Acsimét trên trường $\mathfrak{K}$.

Cho $|\cdot|$ là một giá trị tuyệt đối trên trường K . Ta định nghĩa hàm $d : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ như sau:
 $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in K$.

Do $|\cdot|$ là một giá trị tuyệt đối trên K nên ta kiểm tra được d là một mêtric trên K và do đó (K, d) là một không gian mêtric, gọi là không gian mêtric sinh bởi giá trị tuyệt đối.

1.1.2 Định nghĩa

Cho $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ là hai giá trị tuyệt đối trên trường K . Ta nói rằng hai giá trị tuyệt đối này tương đương nếu: $\{x_n\}$ là dãy Côsi theo $|\cdot|_1$ khi và chỉ khi $\{x_n\}$ là dãy Côsi theo $|\cdot|_2$.

Chú ý rằng: $\{x_n\}$ là dãy Côsi theo giá trị tuyệt đối $|\cdot|$, nghĩa là:

$$\left(|x_m - x_n| \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0 \right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_0, |x_m - x_n| < \varepsilon \right)$$

1.1.3 Định lý Ostrowski

Mọi giá trị tuyệt đối không tầm thường trên $\mathfrak{K}$ đều tương đương với giá trị tuyệt đối $|\cdot|_p$ (p là số nguyên tố nào đó) hoặc tương đương với giá trị tuyệt đối thông thường trên $\mathfrak{K}$.

1.1.4 Định lý

Cho $|\cdot|$ là một giá trị tuyệt đối phi – Acsimét trên trường K . Khi đó, nếu $|x| \neq |y|$ thì
 $|x \pm y| = \max\{|x|, |y|\}$.

Chứng minh Trước hết ta chứng minh $|x - y| = \max\{|x|, |y|\}$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|x| > |y|$. Khi đó,

$$|x - y| \leq \max\{|x|, |y|\} = |x| \text{ hay } |x + y| \leq |x| \quad (1)$$

Mặt khác, $|x| = |y + (x - y)| \leq \max\{|x - y|, |y|\}$.

Nếu $\max\{|x - y|, |y|\} = |y|$ thì $|x| \leq |y|$, trái giả thiết. Do vậy

$$\max\{|x - y|, |y|\} = |x - y| \text{ hay } |x| \leq |x - y| \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $|x - y| = |x| = \max\{|x|, |y|\}$.

Cuối cùng ta chứng minh $|x + y| = |x| = \max\{|x|, |y|\}$. Ta có

$$|x + y| = |x - (-y)| = \max\{|x|, |-y|\} = \max\{|x|, |y|\}. \quad \forall$$

1.1.5 Trường các số p -adic $\mathfrak{a}_p$

Xét $|\cdot|_p$ là giá trị tuyệt đối p -adic trên $\mathfrak{a}$; $|x|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{\text{ord}_p(x)}, \forall x \in \mathfrak{a}$. Ký hiệu S là tập tất cả các dãy Côsi trong $\mathfrak{a}$ theo $|\cdot|_p$.

Trên S xét quan hệ tương đương $\sim$ cho như sau:

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathfrak{a}, \{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Ký hiệu $\mathfrak{a}_p = S / \sim = \{\overline{\{x_n\}} : \{x_n\} \text{ Cosi trong } \mathfrak{a} \text{ theo } |\cdot|_p\}$. Ta sẽ trang bị hai phép toán cộng và nhân cho $\mathfrak{a}_p$ để nó trở thành một trường.

$$\text{Phép cộng: } \forall x = \overline{\{x_n\}}, y = \overline{\{y_n\}} \in \mathfrak{a}_p, x + y = \overline{\{x_n + y_n\}}$$

$$\text{Phép nhân: } \forall x = \overline{\{x_n\}}, y = \overline{\{y_n\}} \in \mathfrak{a}_p, x \cdot y = \overline{\{x_n \cdot y_n\}}$$

Ta chứng minh được với hai phép toán cho như trên $\mathfrak{a}_p$ là một trường với:

$$\text{Phần tử không: } \bar{0} = \overline{\{x_n = 0\}}$$

$$\text{Phần tử đơn vị: } \bar{1} = \overline{\{x_n = 1\}}$$

$$\text{Phần tử đối: } x = \overline{\{x_n\}} \text{ thì } -x = \overline{\{-x_n\}}$$

$$\text{Phần tử nghịch đảo: Với } \overline{\{x_n\}} \neq \bar{0}. \text{ Ta có } x_n \neq 0 \text{ suy ra } \exists N > 0 \text{ sao cho}$$

$$\forall n > N, |x_n|_p = a \neq 0.$$

Khi đó dãy $\{y_n\}$, với $y_n = \begin{cases} 0, n \leq N \\ x_n^{-1}, n > N \end{cases}$, là một dãy Côsi trong $\mathfrak{a}$ theo $|\cdot|_p$, và $\overline{\{x_n\}} \cdot \overline{\{y_n\}} = \bar{1}$.

Tức phần tử nghịch đảo của $\overline{\{x_n\}}$ là phần tử $\overline{\{y_n\}}$.

Xét $\theta: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}_p, \theta(x) = \overline{\{x_n = x\}}, \forall x \in \mathfrak{a}$, ta chứng minh được θ là đơn cấu trường. Do đó, ta có thể coi $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_p$.

Với $x = \overline{\{x_n\}} \in \mathfrak{K}_p$, ta định nghĩa $|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p$. Kiểm tra được $|\cdot|$ là một chuẩn trên $\mathfrak{K}_p$.

Hơn nữa, mọi dãy Côsi trong $(\mathfrak{K}, |\cdot|_p)$ đều hội tụ trong $(\mathfrak{K}_p, |\cdot|)$, tức $(\mathfrak{K}_p, |\cdot|)$ là một mở rộng của $(\mathfrak{K}, |\cdot|_p)$.

Để tiện trình bày, ta cũng ký hiệu giá trị tuyệt đối trong $\mathfrak{K}_p$ là $|\cdot|_p$.

Ký hiệu $\mathfrak{C}_p = \{x \in \mathfrak{K}_p : |x|_p \leq 1\}$. Khi đó, $\mathfrak{C}_p$ là vành con của trường $\mathfrak{K}_p$. Hơn nữa,

$$\forall x \in \mathfrak{C}_p, \exists a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, x = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n.$$

Nếu $x \in \mathfrak{K}_p, |x|_p > 1$ thì $\exists m \in \mathbb{N}, |p^m x|_p \leq 1$ hay $x' = p^m x \in \mathfrak{C}_p$. Do đó, $\exists a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ sao

cho $x' = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$. Suy ra $x = \sum_{i=-m}^{\infty} a_i p^i$. Nói cách khác: với mỗi $x \in \mathfrak{K}_p$ luôn tồn tại $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$

sao cho $x = \sum_{i=-m}^{\infty} a_i p^i$, trong đó $|x|_p = p^m$.

Trong $\mathfrak{K}_p$, ta định nghĩa:

Hình cầu mở tâm a bán kính r là tập $B(a, r) = \{x \in \mathfrak{K}_p : |x - a|_p < r\}$

Hình cầu đóng tâm a bán kính r là tập $\bar{B}(a, r) = \{x \in \mathfrak{K}_p : |x - a|_p \leq r\}$

Mặt cầu tâm a bán kính r là tập $S(a, r) = \{x \in \mathfrak{K}_p : |x - a|_p = r\}$

Từ định nghĩa cho thấy $\mathfrak{C}_p = \bar{B}(0, 1)$. Mặt khác, vì tôpô trên $\mathfrak{K}_p$ là tôpô cảm sinh từ chuẩn phi - Acsimét nên nó có một vài tính chất khác lạ. Cụ thể:

- 1) Mọi hình cầu, mặt cầu trong $\mathfrak{K}_p$ đều là tập vừa đóng vừa mở.
- 2) Hai hình cầu trong $\mathfrak{K}_p$ hoặc rời nhau hoặc lồng vào nhau.
- 3) Mọi hình cầu, mặt cầu trong $\mathfrak{K}_p$ đều có vô số tâm, vô số bán kính.
- 4) $\mathfrak{K}_p$ chỉ có một số đếm được các hình cầu, mặt cầu.

1.1.6 Trường các số p -adic $\mathbb{F}_p$

Theo định lý Ostrowski, trên $\mathbb{Q}$ chỉ có hai loại giá trị tuyệt đối là giá trị tuyệt đối thông thường $|\cdot|$ và giá trị tuyệt đối p -adic $|\cdot|_p$. Làm đầy đủ $\mathbb{Q}$ theo $|\cdot|$ ta được trường số thực $\mathbb{R}$. Còn làm đầy đủ $\mathbb{Q}$ theo $|\cdot|_p$ ta được trường $\mathbb{Q}_p$. Trường số thực $\mathbb{R}$ không đóng đại số, bao đóng đại số của $\mathbb{R}$ là trường số phức $\mathbb{C}$ và đặc biệt $\mathbb{C}$ đầy đủ. Vậy bao đóng, đủ của $\mathbb{Q}_p$ là trường nào? Ta xây dựng nó như sau.

Ký hiệu $\overline{\mathbb{Q}_p}$ là bao đóng đại số của $\mathbb{Q}_p$. Giá trị tuyệt đối $|\cdot|_p$ trên $\mathbb{Q}_p$ được mở rộng thành giá trị tuyệt đối $\|\cdot\|_p$ trên $\overline{\mathbb{Q}_p}$ theo cách:

Với $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}_p}$, giả sử $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}_p) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Khi đó,

$$\|\alpha\|_p = \sqrt[n]{|a_0|_p}$$

là một giá trị tuyệt đối trên $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

Nhận xét rằng $\overline{\mathbb{Q}_p}$ đóng đại số nhưng chưa đầy đủ. Ký hiệu $\mathbb{F}_p$ là bao đủ của $\overline{\mathbb{Q}_p}$ theo $\|\cdot\|_p$ và ta chứng minh được $\|\cdot\|_p$ là một giá trị tuyệt đối trên $\mathbb{F}_p$.

Như vậy, $\mathbb{F}_p = \overline{\mathbb{Q}_p}$ và $\forall \alpha \in \mathbb{F}_p$, $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}_p) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ thì

$$\|\alpha\|_p = \sqrt[n]{|a_0|_p}.$$

Trong trường $\mathbb{F}_p$:

Dãy $\{a_n\}_n$ gọi là hội tụ về $a \in \mathbb{F}_p$ nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a|_p = 0$. Ký hiệu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

$S_n = \sum_{i=0}^n a_i$ gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{F}_p$ ta nói chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

hội tụ và viết $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Nhận xét Vì $\mathbb{F}_p$ là trường phi - Acsimét nên điều kiện hội tụ của dãy và chuỗi đơn giản hơn trong giải tích phức. Cụ thể: trong trường $\mathbb{F}_p$

1) Dãy $\{a_n\}_n$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \|a_{n+1} - a_n\|_p < \varepsilon$

2) Chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

1.2 Không gian các hàm liên tục

Cho K là một trường với giá trị tuyệt đối $|\cdot|$ và X là tập con của K .

1.2.1 Định nghĩa

Hàm $f : X \rightarrow K$ được gọi là liên tục tại $a \in X$ nếu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, nghĩa là $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc X thì ta nói f liên tục trên X . Ký hiệu $C(X \rightarrow K)$ là tập tất cả các hàm liên tục trên X .

1.2.2 Mệnh đề

$C(X \rightarrow K)$ là K – không gian véc tơ với phép toán cho như sau:

Phép cộng: $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall f, g \in C(X \rightarrow K), \forall x \in X$

Phép nhân ngoài: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \forall f \in C(X \rightarrow K), \forall \lambda \in K, \forall x \in X$

1.2.3 Định nghĩa

Ảnh xạ $f : X \rightarrow K$ được gọi là hàm hằng địa phương nếu với mỗi $x \in X$, tồn tại một lân cận mở U của x sao cho f là hằng trên U .

Ví dụ Với U là tập vừa đóng vừa mở trong K . Hàm đặc trưng $\zeta_U : X \rightarrow K$ định bởi

$$\zeta_U(x) = \begin{cases} 1, & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases} \text{ là hàm hằng địa phương.}$$

Chứng minh $\forall x \in X$, nếu $x \in U$ thì vì U mở nên U là lân cận của x và $\zeta_U(y) = 1, \forall y \in U$. Còn $x \notin U$ thì $x \in K \setminus U$, mà U đóng nên $K \setminus U$ mở tức $K \setminus U$ là lân cận của x và $\zeta_U(y) = 0, \forall y \in (K \setminus U)$. Vậy ζ_U là hàm hằng địa phương. $\forall$

1.2.4 Định lý

Hàm hằng địa phương là hàm liên tục

Chứng minh Giả sử $f : X \rightarrow K$ là hàm hằng địa phương. Vì f là hàm hằng địa phương nên với $x_0 \in X$, $\exists U$ là lân cận mở của x_0 sao cho $f(x) = a, \forall x \in U$.

Khi đó, $\forall \varepsilon > 0$, vì U là lân cận mở của x_0 nên $\exists \delta > 0$ sao cho $B(x_0, \delta) \subset U$, ta có $|f(x) - f(x_0)| = |a - a| = 0 < \varepsilon, \forall x \in B(x_0, \delta)$. Vậy f liên tục. $\forall$

1.2.5 Định nghĩa

Cho E là một không gian véc tơ trên trường $(K, | \cdot |)$. Một chuẩn trên E là một ánh xạ $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa ba tính chất:

$$1) \|x\| \geq 0, \forall x \in E; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in E, \forall \lambda \in K$$

$$3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$$

Cặp $(E, \| \cdot \|)$ gọi là không gian định chuẩn. Nếu $\| \cdot \|$ thỏa tính chất 3')

$\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}, \forall x, y \in E$ thì $\| \cdot \|$ gọi là chuẩn phi - Acsimét.

Ta đã biết $C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$ là một $\mathfrak{E}_p$ - không gian véc tơ. Tiếp theo ta sẽ trang bị cho $C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$ một chuẩn để nó thành không gian định chuẩn.

Với mỗi $f \in C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$, ký hiệu $|f|_\infty = \max\{\|f(x)\|_p, \forall x \in \mathfrak{C}_p\}$. Khi đó, $| \cdot |_ \infty : C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p) \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm. Hơn nữa, ta có định lý.

1.2.6 Định lý

Hàm $| \cdot |_ \infty$ là một chuẩn phi - Acsimét trên $C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$.

Chứng minh Ta kiểm tra bằng định nghĩa

$$\text{Rõ ràng } |f|_\infty \geq 0, \forall f \in C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p); |f|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

Với mọi $\alpha \in \mathfrak{E}_p, f \in C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$, ta có:

$$\begin{aligned} |\alpha f|_\infty &= \max\{\|\alpha f(x)\|_p, \forall x \in \mathfrak{C}_p\} = \max\{\|\alpha\|_p \|f(x)\|_p, \forall x \in \mathfrak{C}_p\} \\ &= \|\alpha\|_p \max\{\|f(x)\|_p, \forall x \in \mathfrak{C}_p\} = \|\alpha\|_p |f|_\infty \end{aligned}$$

Với mọi $f, g \in C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$, ta có:

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_\infty &= \max \left\{ \|f(x) + g(x)\|_p, \forall x \in \mathfrak{C}_p \right\} \\
&\leq \max \left\{ \max \left\{ \|f(x)\|_p, \|g(x)\|_p \right\}, \forall x \in \mathfrak{C}_p \right\} \\
&\leq \max \left\{ \|f\|_\infty, \|g\|_\infty \right\}. W
\end{aligned}$$

Như vậy, $(C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p), \|\cdot\|_\infty)$ là một không gian định chuẩn. Hơn nữa, nó còn là không gian Banach. Ta có định lý

1.2.7 Định lý

$(C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p), \|\cdot\|_\infty)$ là một không gian Banach

Chứng minh Giả sử $\{f_n\}_n$ là dãy Côsi trong $C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$. Với mọi $\varepsilon > 0$, do $\{f_n\}_n$ là dãy Côsi nên $\exists N_1 > 0, \forall m, n > N_1$ ta có $\|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ hay

$$\max \left\{ \|f_m(x) - f_n(x)\|_p, \forall x \in \mathfrak{C}_p \right\} < \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow \|f_m(x) - f_n(x)\|_p < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in \mathfrak{C}_p \quad (1)$$

Suy ra, với mỗi $x \in \mathfrak{C}_p$ dãy $\{f_n(x)\}_n$ là dãy Côsi trong không gian $\mathfrak{E}_p$ đầy đủ do đó, $\{f_n(x)\}_n$ hội tụ.

Xét hàm $f : \mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \forall x \in \mathfrak{C}_p$ và ta sẽ chứng minh f là giới hạn của dãy $\{f_n\}_n$ trong $C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$.

Vì $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \forall x \in \mathfrak{C}_p$ nên $\exists N_2 > 0, \forall m > N_2$ ta có

$$\|f_m(x) - f(x)\|_p < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in \mathfrak{C}_p \quad (2)$$

Giả sử $\{x_n\} \subset \mathfrak{E}_p, x_n \rightarrow x \in \mathfrak{E}_p$. Khi đó, với mỗi $m \in \mathbb{N}$ vì f_m liên tục nên

$$\|f_m(x_n) - f_m(x)\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

Từ đó, $\forall m > N_2$, ta được

$$\begin{aligned}
\|f(x_n) - f(x)\|_p &= \|f(x_n) - f_m(x_n) + f_m(x_n) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)\|_p \\
&\leq \max \left\{ \|f(x_n) - f_m(x_n)\|_p, \|f_m(x_n) - f_m(x)\|_p, \|f_m(x) - f(x)\|_p \right\} = \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

suy ra $\|f(x_n) - f(x)\|_p < \varepsilon$, tức là $f(x_n) \rightarrow f(x)$ hay $f \in C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$.

Cuối cùng ta còn phải chứng minh $f_n \rightarrow f$.

Chọn $N = \max\{N_1, N_2\}$, thế thì theo (1) và (2), với mọi $m, n > N$ ta được

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - f(x)\|_p &= \|f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)\|_p \\ &\leq \max\{\|f_n(x) - f_m(x)\|_p, \|f_m(x) - f(x)\|_p\} = \frac{2\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon, \forall x \in \mathfrak{C}_p\end{aligned}$$

suy ra $\|f_n - f\|_\infty = \max\{\|f_n(x) - f(x)\|_p, \forall x \in \mathfrak{C}_p\} < \varepsilon$. Ta được $f_n \rightarrow f$.

Vậy $(C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p), \|\cdot\|_\infty)$ là một không gian Banach. $\forall$

Cho $X \subseteq K$ và $f: X \rightarrow K$. Với $a \in X$ là một điểm tụ, $b \in K$. Khi đó, ta định nghĩa $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ nếu $(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$

1.2.8 Định nghĩa

Cho X là một tập con khác rỗng của trường K và a là một điểm tụ của X . Hàm $f: X \rightarrow K$ được gọi là khả vi tại a nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ký hiệu: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Hàm f được gọi là khả vi trên X nếu tồn tại $f'(a)$ với mọi $a \in X$. Khi đó, f gọi là nguyên hàm của f' còn f' gọi là đạo hàm của hàm f .

Cho X là tập khác rỗng không chứa các điểm cô lập của K , ký hiệu $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. Sai phân thương $\Phi_1 f$ của $f: X \rightarrow K$ là một hàm hai biến

$$\Phi_1 f: X \times X \setminus \Delta \rightarrow K$$

$$(x, y) \notin \Delta \quad \Phi_1 f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

1.2.9 Định nghĩa

Cho X là một tập con khác rỗng của trường K . Hàm $f : X \rightarrow K$ được gọi là khả vi liên tục tại $a \in X$ (f là C^1 tại a) nếu giới hạn $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \Phi_1 f(x,y)$ tồn tại.

Hàm f được gọi là khả vi liên tục trên X nếu nó khả vi liên tục tại mọi $a \in X$. Ký hiệu $C^1(X \rightarrow K)$ là tập hợp các hàm khả vi liên tục.

Nhận xét $C^1(X \rightarrow K)$ là không gian định chuẩn với chuẩn

$$\|f\|_1 = \max \{ \|f\|_\infty, \|\Phi_1 f\|_\infty \} / \forall f \in C^1(X \rightarrow K)$$

1.2.10 Định nghĩa

Cho $(K, |\cdot|)$ là một trường, $X \subset K, a > 0$. Hàm $f : X \rightarrow K$ được gọi là thỏa điều kiện Lipschitz cấp a nếu tồn tại số $M > 0$ sao cho:

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^a, \forall x, y \in X$$

Ký hiệu $Lip_a(X \rightarrow K)$ là K – không gian vector gồm tất cả các hàm $f : X \rightarrow K$ thỏa điều kiện Lipschitz cấp a .

Nhận xét $Lip_1(X \rightarrow K)$ là không gian Banach với chuẩn

$$\|f\|_1 = \max \{ \|f\|_\infty, \|\Phi_1 f\|_\infty \} / \forall f \in Lip_1(X \rightarrow K)$$

1.3 Cơ sở trực chuẩn, cơ sở trực giao

Xét $(E, \|\cdot\|)$ là một K – không gian Banach với chuẩn phi – Acsimet.

1.3.1 Định nghĩa

Với hai phần tử x và y trong E . Ta nói x trực giao với y , ký hiệu $x \perp y$, nếu $\|x\| = \inf \{ \|x - \lambda y\|, \forall \lambda \in K \}$.

Ví dụ: Trong không gian định chuẩn $(C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p), \|\cdot\|_\infty)$ hai hàm $f(x) = x$ và $g(x) = x(x-1)^2$ là trực giao.

Chứng minh: Ta có $\|f\|_\infty = \max \{\|f(x)\|_p, \forall x \in \mathbb{C}_p\} = \max \{\|x\|_p, \forall x \in \mathbb{C}_p\} = 1$.

Mặt khác,

$$\begin{aligned} \|f - \lambda g\|_\infty &= \max \{\|f(x) - \lambda g(x)\|_p, \forall x \in \mathbb{C}_p\} = \max \{\|x - \lambda x(x-1)^2\|_p, \forall x \in \mathbb{C}_p\} \\ &\geq \max \{\|1 - \lambda(1-1)^2\|_p, \forall x \in \mathbb{C}_p\} = 1, \forall \lambda \in \mathbb{E}_p \end{aligned}$$

Vậy ta được $\inf \{\|f - \lambda g\|_\infty : \forall \lambda \in \mathbb{E}_p\} = 1 = \|f\|_\infty$.

1.3.2 Định nghĩa

1) Cho $x \in E$ và $D_1, D_2 \subseteq E$. Ta nói:

Phần tử x trực giao với tập hợp D_1 , ký hiệu $x \perp D_1$, nếu $x \perp d, \forall d \in D_1$.

Tập hợp D_1 trực giao với tập hợp D_2 , ký hiệu $D_1 \perp D_2$, nếu $d_1 \perp d_2, \forall d_1 \in D_1, \forall d_2 \in D_2$.

2) Tập hợp $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subseteq E$ được gọi là tập trực giao nếu với mọi $n=1, 2, 3, \dots$ ta có $x_n \perp \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots \rangle$, trong đó $\langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots \rangle$ là K -không gian con sinh bởi $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots$

3) $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subseteq E$ được gọi là tập trực chuẩn nếu nó là tập trực giao và $\|x_n\| = 1, \forall n=1, 2, 3, \dots$

Nhận xét: Nếu $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subseteq E$ là tập trực giao không chứa phần tử không thì nó độc lập tuyến tính.

1.3.3 Định lý

Cho $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in E$. Ta có các khẳng định sau:

1) $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ là tập trực giao nếu và chỉ nếu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là tập trực giao với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

2) $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là tập trực giao khi và chỉ khi

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| = \max \{\|\lambda_i\| \|x_i\| / 1 \leq i \leq n\} \text{ với } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$$

3) $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là tập trực chuẩn khi và chỉ khi

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| \geq \|\lambda_n\| \|x_n\| \text{ với } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$$

Chứng minh

1) Nếu $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ là cơ sở trực giao thì theo định nghĩa $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là tập trực giao với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ngược lại, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là tập trực giao với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta sẽ chứng minh $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ là tập trực giao bằng cách chỉ ra $x_i \perp \langle x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots \rangle, \forall i$. Thật vậy, $\forall y \in \langle x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots \rangle$, $y = \sum_{n=1}^m a_n x_n, a_n \in K$ suy ra $y \in \langle x_{i1}, \dots, x_{im} \rangle$.

Mặt khác. $\{x_i, x_{i1}, \dots, x_{im}\}$ là tập trực giao nên $x_i \perp y$, do đó

$$x_i \perp \langle x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots \rangle, \forall i.$$

2) Giả sử $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là tập trực giao. Khi đó, $\forall i = \overline{1, n}$,

$$x_i \perp \langle x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \rangle.$$

Suy ra, với mọi $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ ta có $\lambda_i x_i \perp \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j x_j$. Theo định nghĩa 1.3.1, ta được

$$\left\| \lambda_i x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j x_j \right\| \geq \|\lambda_i x_i\| \text{ hay } \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| \geq \|\lambda_i x_i\|$$

$$\text{Vì thế, } \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| \geq \max \{ \|\lambda_i x_i\| / i = \overline{1, n} \}. (*)$$

$$\text{Do } \| \cdot \| \text{ là chuẩn phi - Acsimet nên } \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| \leq \max \{ \|\lambda_i x_i\| / i = \overline{1, n} \}. (**)$$

$$\text{Kết hợp } (*) \text{ và } (**), \text{ ta được } \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| = \max \{ \|\lambda_i x_i\| / i = \overline{1, n} \}.$$

$$\text{Ngược lại, giả sử } \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| = \max \{ \|\lambda_j x_j\| / j = \overline{1, n} \}, \forall \lambda_j \in K. \text{ Với mọi } x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ và}$$

$$y \in \langle x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \rangle, \text{ ta có } y = \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j x_j, \lambda_j \in K. \text{ Khi đó,}$$

$$\|x_i - \alpha y\| = \left\| x_i - \alpha \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j x_j \right\| = \max \{ \|x_i\|, \|\alpha \lambda_j x_j\| / j = \overline{1, n}, j \neq i \}, \forall \alpha \in K$$

Từ đó suy ra $\|x_i - \alpha y\| \geq \|x_i\|, \forall \alpha \in K$ suy ra $x_i \perp y$. Vậy $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là tập trực giao.

3) Giả sử $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là tập trực giao. Khi đó, với $m = 2, 3, \dots, n$ tập hợp $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ cũng là tập trực giao, do đó theo (2), ta được :

$$\left\| \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j \right\| = \max \left\{ \|\lambda_j x_j\| / j = \overline{1, m} \right\} \geq \|\lambda_m x_m\|$$

Để chứng minh chiều ngược lại ta có nhận xét: với mọi $x, y \in E$, nếu có $c \in (0; 1]$ sao cho $\|x + y\| \geq cx$ thì $\|x + y\| \geq cy$.

Giả sử $\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| \geq \|\lambda_n x_n\|, \forall \lambda_j \in K$. Khi đó,

$$\left\| \lambda_n x_n + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| \geq \|\lambda_n x_n\|$$

Theo nhận xét trên,

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| = \left\| \lambda_n x_n + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j \right\| \geq \left\| \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j \right\|.$$

Cũng từ $\left\| \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j \right\| \geq \|\lambda_{n-1} x_{n-1}\|$ suy ra $\left\| \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j \right\| \geq \|\lambda_{n-1} x_{n-1}\|$. Do đó,

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| \geq \|\lambda_{n-1} x_{n-1}\|$$

Cứ lập luận như vậy ta được $\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| \geq \|\lambda_m x_m\|, m = 3, \dots, n$

Ngoài ra, $\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| \geq \|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\| \geq \|\lambda_2 x_2\|$. Lại do $\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\| \geq \|\lambda_2 x_2\|$ nên

$\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\| \geq \|\lambda_1 x_1\|$ suy ra $\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| \geq \|\lambda_1 x_1\|$

Như vậy, ta đã chứng minh được $\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| \geq \|\lambda_m x_m\|, m = 1, \dots, n$. Từ đó suy ra

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| \geq \max \left\{ \|\lambda_m x_m\| / m = \overline{1, n} \right\}$$

Điều này cho ta khẳng định $\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| = \max \left\{ \|\lambda_m x_m\| / m = \overline{1, n} \right\}$.

Vậy theo (2), $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là tập trực giao. $\forall$

1.3.4 Định nghĩa

Hệ $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \subseteq E, e_n \neq 0, \forall n = 1, 2, 3, \dots$ được gọi là cơ sở trực giao (tương ứng, trực chuẩn) của E nếu thỏa hai điều kiện:

1) $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ là tập trực giao (tương ứng, trực chuẩn)

2) Với mỗi $x \in E$, tồn tại $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in K$ sao cho $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$

1.3.5 Mệnh đề

Cho $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ là cơ sở trực chuẩn của E . Giả sử rằng $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in E$, với $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in K$.

Khi đó, ta có

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$

2) $\|x\| = \max \{|\lambda_n| / n \in \mathbb{N}\}$

3) Nếu $x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n \in E$, với $\beta_1, \beta_2, \dots \in K$ thì $\lambda_n = \beta_n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh

1) Vì $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ hội tụ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n e_n = 0$. Khi đó, $\forall \varepsilon > 0$, ta có

$$|\lambda_n| = |\lambda_n| \|e_n\| = \|\lambda_n e_n\| < \varepsilon \text{ suy ra } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0.$$

2) Ta có $\|x\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max \{ \|\lambda_i e_i\|, i = \overline{1, n} \}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \max \{ |\lambda_i| \|e_i\|, i = \overline{1, n} \} = \max \{ |\lambda_n|, n = 1, 2, 3, \dots \}$$

3) Ta có $0 = x - x = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \beta_n) e_n$. Theo (2), ta được

$$0 = \|0\| = \max \{ |\lambda_n - \beta_n|, n = 1, 2, \dots \}$$

Suy ra $\lambda_n = \beta_n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$ $\square$

Chương 2: CƠ SỞ VANDERPUT CHO KHÔNG GIAN CÁC HÀM LIÊN TỤC TRÊN $\mathbb{C}_p$

Chương này sẽ giới thiệu cụ thể, chi tiết cách xây dựng cơ sở *Vanderput* cho không gian các hàm liên tục trên $\mathbb{C}_p$, $C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$; cơ sở *Vanderput* cho các hàm liên tục trên $\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p$, $C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$. Đồng thời, đưa ra một số tính chất và ứng dụng của cơ sở này trong việc nghiên cứu các hàm khả vi liên tục; các hàm thỏa điều kiện *Lipchitz* và công thức tính tích phân *Volkenborn* qua hệ số *Vanderput*.

2.1 Cơ sở *Vanderput* cho không gian $C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$

Cho p là một số nguyên tố, với mỗi số nguyên dương n luôn tồn tại các số $a_i \in \{0; 1; \dots; p-1\}, i = \overline{1, s}$ sao cho $n = a_0 + a_1 p + \dots + a_s p^s$, trong đó $s = [\log_p n]$, gọi là khai triển p -phân của n . Ký hiệu $n_- = a_0 + a_1 p + \dots + a_{s-1} p^{s-1}$.

2.1.1 Định nghĩa

Với $x = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i p^i \in \mathfrak{a}_p$, ta định nghĩa phần nguyên p -adic của nó là $[x]_p = \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i p^i$, với mỗi

$n = 1, 2, 3, \dots$ ký hiệu $x_n = p^n [p^{-n} x]_p$.

Dễ thấy $x_n = p^n [p^{-n} x]_p = \sum_{i=-\infty}^{n-1} a_i p^i$. Do đó, với mỗi $x \in \mathfrak{a}_p$ ta được dãy các phần tử

$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots \in \mathfrak{a}_p$ hội tụ về x . Ta gọi $\{x_n\}_n$ là dãy chuẩn của x . Nếu $x \in \mathbb{C}_p$ thì $x = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i$. Do đó,

dãy chuẩn của x là các số tự nhiên.

2.1.2 Định nghĩa

Cho $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ là dãy chuẩn của $x \in \mathbb{C}_p$. Với mỗi số $m \in \mathbb{N}$ ta nói x bắt đầu với m , ký hiệu $m > x$, nếu $m \in \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$.

Nếu $n \in \mathbb{N}$ thì khai triển p -adic của n chính là khai triển p -phân do đó, tập hợp $\{m \in \mathbb{N} \mid m \neq n \wedge m > n\}$ là hữu hạn, suy ra nó có phần tử lớn nhất và phần tử lớn nhất đó chính là n_- .

Sau đây là một số các tính chất của dãy chuẩn $\{x_n\}_n$ và n_-

2.1.3 Mệnh đề

Các khẳng định sau là đúng

1) Nếu $x \in \mathbb{C}_p$, $n \in \mathbb{N}$ thì $|x - x_n| \leq p^{-n}$ và $x_n \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$. Ngược lại, nếu $y \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ thỏa $|x - y| \leq p^{-n}$ thì $y = x_n$.

2) Cho $x, y \in \mathbb{C}_p, n \in \mathbb{N}$. Khi đó,

i) $|x - y|_p \leq p^n$ khi và chỉ khi $x_n = y_n$

ii) $|x - y|_p = p^n$ khi và chỉ khi $x_n = y_n$ và $x_{n+1} \neq y_{n+1}$

3) Hàm $x \mapsto x_n (x \in \mathbb{C}_p)$ là hằng trên tập $a + p^n \mathbb{C}_p (a \in \mathbb{C}_p, n \in \mathbb{N}^*)$

4) Cho $x, y \in \mathbb{C}_p, n \in \mathbb{N}$. Khi đó,

$$|x_n - y_n|_p = \begin{cases} 0, & |x - y|_p \leq p^{-n} \\ |x - y|_p, & |x - y|_p > p^{-n} \end{cases}$$

5) $(x_n)_m = x_{\min\{n, m\}}, (x \in \mathbb{C}_p, n, m \in \mathbb{N})$

6) Cho $x \in \mathbb{C}_p, m \in \mathbb{N}$. Khi đó, $m < x \Leftrightarrow |x - m|_p < \frac{1}{m}$

7) $|m - m_-|_p = p^{-s}$ trong đó, $m = a_0 + a_1 p + \dots + a_s p^s \in \mathbb{N}, s = \lceil \log_p m \rceil$

Chứng minh

1) Giả sử $x = a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n + \dots \in \mathbb{C}_p$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$x_n = a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1}$$

suy ra $x_n \in \{0, 1, \dots, p^{n-1} - 1\}$ và $|x - x_n|_p = |a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \dots|_p \leq p^{-n}$.

Ngược lại, giả sử $y \in \{0, 1, 2, \dots, p^{n-1} - 1\}$ thỏa $|x - y|_p \leq p^{-n}$. Khi đó, vì $y \in \mathbb{N}$ nên

$y = b_0 + b_1 p + \dots + b_s p^s$. Thêm nữa, $y < p^n$ nên $s \leq n - 1$. Ta có

Nếu $s < n - 1$ thì

$$|x - y|_p = |(a_0 - b_0) + \dots + (a_s - b_s)p^s + a_{s+1}p^{s+1} + \dots|_p$$

Do $|x - y|_p \leq p^{-n}$ nên $a_i = b_i, i = \overline{0, s}$ và $a_i = 0, i = \overline{s+1, n-1}$. Từ đó suy ra

$$y = x_{s+1} = x_n$$

Nếu $s = n - 1$ thì lập luận như trên ta được $y = x_n$.

2) Với mọi $x, y \in \mathbb{C}_p$, $n \in \mathbb{N}$ ta có $x = a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n + \dots$ và

$$y = b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1} + b_n p^n + \dots$$

Suy ra $|x - y|_p = |(a_0 - b_0) + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})p^{n-1} + (a_n - b_n)p^n + \dots|_p$.

i) Điều kiện $|x - y|_p \leq p^{-n}$ tương đương với $a_i = b_i, i = \overline{0, n-1}$, tức là ta có $x_n = y_n$.

ii) Điều kiện $|x - y|_p = p^{-n}$ tương đương với $a_i = b_i, i = \overline{0, n-1}$ và $a_n \neq b_n$. Do đó,

$$x_n = y_n \text{ và } x_{n+1} \neq y_{n+1}.$$

3) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{C}_p$, $x = a_0 + a_1 p + \dots + a_{p^n-1} p^{p^n-1} + a_{p^n} p^{p^n} + \dots$ do đó,

$$x + p^n \mathbb{C}_p = a_0 + a_1 p + \dots + a_{p^n-1} p^{p^n-1} + p^n \mathbb{C}_p$$

Suy ra $\{a + p^n \mathbb{C}_p / a \in \mathbb{C}_p\} = \{i + p^n \mathbb{C}_p / i = \overline{0, p^n - 1}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Với $i \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ và $x, y \in i + p^n \mathbb{C}_p$, ta có $|x - i|_p \leq p^{-n}$ và $|i - y|_p \leq p^{-n}$ suy ra

$$|x - y|_p \leq \max\{|x - i|_p, |i - y|_p\} \leq p^{-n}$$

Theo (2i), $x_n = y_n$. Tức hàm $x \mapsto x_n (x \in \mathbb{C}_p)$ hằng trên tập $a + p^n \mathbb{C}_p, n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}_p$

4) Với $x, y \in \mathbb{C}_p$ và $n \in \mathbb{N}$ ta có $x = a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n + \dots$ và

$$y = b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1} + b_n p^n + \dots. \text{ Suy ra}$$

$$|x - y|_p = |(a_0 - b_0) + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})p^{n-1} + (a_n - b_n)p^n + \dots|_p.$$

Khi đó,

Nếu $|x - y|_p \leq p^{-n}$ thì $a_i = b_i, \forall i = \overline{0, n-1}$ nên $|x_n - y_n|_p = 0$

Nếu $|x - y|_p > p^{-n}$ thì $\exists i \in \{0, \dots, n-1\} : a_i \neq b_i$. Không mất tính tổng quát ta có thể xem i là chỉ số đầu tiên mà $a_i \neq b_i$. Ta được $|x_n - y_n|_p = p^{-i} = |x - y|_p$.

5) Với $x \in \mathbb{C}_p$; $m, n \in \mathbb{N}$ ta có $x = a_0 + a_1p + \mathbb{L} + a_{n-1}p^{n-1} + a_n p^n + \mathbb{L}$. Khi đó, $x_n = a_0 + a_1p + \mathbb{L} + a_{n-1}p^{n-1}$. Xây ra hai trường hợp:

Nếu $m > n$ thì $x_n = a_0 + a_1p + \mathbb{L} + a_{n-1}p^{n-1} + 0p^n + \mathbb{L} + 0p^{m-1} + \mathbb{L}$ suy ra,

$$(x_n)_m = a_0 + a_1p + \mathbb{L} + a_{n-1}p^{n-1} + 0p^n + \mathbb{L} + 0p^{m-1} = x_n$$

Nếu $m \leq n$ thì $x_n = a_0 + a_1p + \mathbb{L} + a_{m-1}p^{m-1} + a_m p^m + \mathbb{L} + a_{n-1}p^{n-1}$ suy ra

$$(x_n)_m = a_0 + a_1p + \mathbb{L} + a_{m-1}p^{m-1} = x_m.$$

Vậy $(x_n)_m = x_{\min\{n, m\}}$.

6) Với $x \in \mathbb{C}_p$ ta luôn có $x = a_0 + a_1p + \mathbb{L} + a_n p^n + \mathbb{L}$. Giả sử $m \in \mathbb{N}, m < x$. Khi đó, $\exists s \in \mathbb{N}$ sao cho $m = a_0 + a_1p + \mathbb{L} + a_s p^s$. Từ đây suy ra

$$|x - m|_p = |a_{s+1}p^{s+1} + a_{s+2}p^{s+2} + \mathbb{L}| \leq p^{-(s+1)} < \frac{1}{m}$$

Ngược lại, giả sử $m \in \mathbb{N}$, $|x - m|_p < \frac{1}{m}$. Khi đó, vì $m \in \mathbb{N}$ nên m có dạng

$m = b_0 + b_1p + \mathbb{L} + b_s p^s$ suy ra $\frac{1}{m} \leq p^{-s}$. Từ đó,

$$|x - m|_p = |(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)p + \mathbb{L} + (a_s - b_s)p^s + \mathbb{L}|_p < p^{-s}$$

Suy ra $a_i = b_i, \forall i = \overline{0, s}$ hay $m < x$.

7) Vì $m \in \mathbb{N}$ nên m có khai triển p -phân $m = a_0 + a_1p + \mathbb{L} + a_s p^s$ trong đó, $s = \lceil \log_p m \rceil$.

Suy ra $|m - m_-|_p = |a_s p^s|_p = p^{-s}$. $\forall$

2.1.4 Mệnh đề

Với mỗi $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ánh xạ $e_n : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ cho bởi công thức

$$e_n(x) = \begin{cases} 1, & n < x \\ 0, & n \not< x \end{cases}, x \in \mathbb{C}_p$$

là một hàm liên tục.

Chứng minh Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta sẽ chứng minh e_n là hàm hằng địa phương. Thật vậy, với mọi $x \in \mathbb{C}_p$, có hai khả năng có thể xảy ra:

Nếu $n < x$ thì $\exists m \in \mathbb{N} : n = x_m$. Ký hiệu $U = \{y \in \mathbb{C}_p / |y - x_m| < p^{-m-1}\}$. Khi đó, U là lân cận mở của x và $n < y, \forall y \in U$. Do đó, $e_n(y) = 1, \forall y \in U$.

Nếu $n \not< x$ thì đặt $U = \{y \in \mathbb{C}_p / |y - n|_p \geq \frac{1}{n}\}$. Vì $U = \mathbb{C}_p \setminus B\left(n, \frac{1}{n}\right)$ nên U là tập mở. Theo mệnh đề 2.1.3, ta có $x \in U$ suy ra U là một lân cận mở của x . Hơn nữa, $\forall y \in U$, cũng theo mệnh đề 2.1.3, $n \not< y$ suy ra $e_n(y) = 0$.

Vậy e_n là hàm hằng địa phương, do đó, e_n là hàm liên tục trên $\mathbb{C}_p$. Nói cách khác $\forall n \in \mathbb{N}, e_n \in C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{F}_p)$. $\square$

2.1.5 Định lý

(Cơ sở Vanderput) Các hàm $e_0, e_1, \dots$ xác định bởi công thức

$$e_n(x) = \begin{cases} 1, & n < x \\ 0, & n \not< x \end{cases}, x \in \mathbb{C}_p, n \in \{0; 1; \dots\}$$

tạo thành một cơ sở trực chuẩn của $C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{F}_p)$. Nếu $f \in C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{F}_p)$ thì

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n(x)$$

trong đó, $a_0 = f(0), a_n = f(n) - f(n_-), n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh Trước hết ta chứng minh $\{e_0, e_1, \dots, e_n, \dots\}$ là tập trực chuẩn. Với $n \in \mathbb{N}$ ta có:

$$\|e_n\|_\infty = \max \left\{ \|e_n(x)\|_p, x \in \mathbb{C}_p \right\} = 1$$

Với mỗi $m \in \{2, 3, \dots, n\}$ và với $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}_p$, ta có:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \right\|_\infty &= \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i(x) \right\|_p / x \in \mathbb{C}_p \right\} \\ &\geq \max \left\{ \left\| \lambda_1 0 + \lambda_2 0 + \dots + \lambda_{m-1} 0 + \lambda_m e_m(x) \right\|_p / x \in \mathbb{C}_p \right\} \\ &= \max \left\{ \left\| \lambda_m e_m(x) \right\|_p / x \in \mathbb{C}_p \right\} = \|\lambda_m\|_p \|e_m\|_\infty \end{aligned}$$

Hay là $\left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \right\|_\infty \geq \|\lambda_m\|_p \|e_m\|_\infty$. Theo định lý 1.3.5, $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ là tập trực giao nên $\{e_0, e_1, \dots, e_n, \dots\}$ là tập trực giao

Cuối cùng ta chứng minh $\{e_0, e_1, \dots, e_n, \dots\}$ là hệ sinh. Xét chuỗi

$$g = f(0)e_o + \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n) - f(n_-))e_n.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\|(f(n) - f(n_-))e_n\|_\infty = \|(f(n) - f(n_-))\|_p \|e_n\|_\infty \leq \|(f(n) - f(n_-))\|_p$$

Vì f liên tục nên $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n) - f(n_-)) = 0$ suy ra chuỗi $\sum_{n \geq 1} (f(n) - f(n_-))$ hội tụ, do đó, chuỗi

$g(x)$ hội tụ đều. Thêm nữa, f liên tục nên g liên tục, nghĩa là $g \in C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$.

$$\text{Mặt khác, } g(0) = f(0)e_o(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n) - f(n_-))e_n(0) = f(0)$$

Với $m \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{cases} g(m) = f(0)e_o(m) + \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n) - f(n_-))e_n(m) = \sum_{n < m} (f(n) - f(n_-)) \\ g(m_-) = f(0)e_o(m_-) + \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n) - f(n_-))e_n(m_-) = \sum_{n < m_-} (f(n) - f(n_-)) \end{cases}$$

Suy ra $f(m) - f(m_-) = g(m) - g(m_-)$. Do đó, $f(m) = g(m)$.

Với mọi $x \in \mathbb{C}_p$, dãy chuẩn $\{x_n\}$ của x là những số tự nhiên, thêm nữa, f và g là hai hàm liên tục nên

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$$

$$\text{Ta được } f = f(0)e_o + \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n) - f(n_-))e_n.$$

Ký hiệu

$$\begin{cases} a_o = f(0) \\ a_n = f(n) - f(n_-), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\text{Khi đó, } f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n.$$

Vậy $e_o, e_1, \dots$ tạo thành một cơ sở trực chuẩn của $C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$. $\forall$

Nhận xét: 1) Do $e_o, e_1, \dots$ là một cơ sở trực chuẩn của $C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ nên với

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n \in C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$$

ta được $\|f\|_\infty = \max \{ \|a_n\|_p / n \in \mathbb{N} \}$

2) Nếu $f: \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ là một hàm bất kỳ biểu diễn được dưới dạng $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$ thì $a_0 = f(0)$

và $a_n = f(n) - f(n_-), \forall n \neq 0$.

2.2 Một số tính chất của cơ sở Vanderput

Giả sử $f: \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$. Với mỗi số nguyên dương N , ta có

$$\begin{aligned} f(0)e_0(x) + \sum_{n=1}^N (f(n) - f(n_-))e_n(x) &= f(0) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \leq x}}^N (f(n) - f(n_-)) \\ &= f(0) + \sum_{x_i \leq N} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= f(x_{k(N)}) \end{aligned}$$

Trong đó, $x_{k(N)}$ là số lớn nhất trong các x_i bé hơn N .

Vận dụng tính toán này ta có định lý sau:

2.2.1 Định lý

Cho hàm $f: \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$. Khi đó, hai điều sau là tương đương

1) Tồn tại $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{E}_p$ sao cho $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$

2) Với mỗi $x \in \mathbb{C}_p$ ta luôn có $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

Nếu f liên tục trên tập $\mathbb{C}_p \setminus \mathbb{N}$ thì (2) đúng nhưng ngược lại có thể không.

Chứng minh $(1 \Rightarrow 2)$ Giả sử tồn tại $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{E}_p$ sao cho $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$. Khi đó, với $x \in \mathbb{C}_p$ và

$N \in \mathbb{N}$, ta có $\sum_{n=0}^N a_n e_n(x) = f(x_{k(N)}), x_{k(N)} < N$ hơn nữa, $N \rightarrow +\infty$ thì $k(N) \rightarrow +\infty$ nên

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n e_n(x) = \lim_{k(N) \rightarrow \infty} f(x_{k(N)}).$$

$(2 \Rightarrow 1)$ Giả sử $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Ta xét hai trường hợp:

Thứ nhất, $x \in \mathbb{N}$ thì $x = a_0 + a_1 p + \dots + a_s p^s$. Do đó,

$$\begin{cases} x_o = 0 \\ x_1 = a_o \\ \text{M} \\ x_{s+i} = x, \forall i \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(x_n), \forall n \geq s+1$$

Mặt khác,

$$f(x_n) = f(0) + \sum_{m=1}^x (f(m) - f(m_-))e_m(x) = f(0) + \sum_{m=1}^{+\infty} (f(m) - f(m_-))e_m(x)$$

$$\text{Từ đó suy ra } f(x) = f(0) + \sum_{m=1}^{+\infty} (f(m) - f(m_-))e_m(x).$$

Thứ hai, $x \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{N}$ thì khai triển p -adic của x không dừng, giả sử

$$x = a_o + a_1p + \text{L} + a_k p^k + \text{L}$$

Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, luôn tồn tại $N_k \in \mathbb{N}$ sao cho $x_k \leq N_k \leq x_{k+1}$ và

$$f(x_k) = \sum_{i=0}^{N_k} a_i e_i(x)$$

Khi $k \rightarrow +\infty$ thì $N_k \rightarrow +\infty$. Do đó,

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{N_k} a_i e_i(x) = \lim_{N_k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{N_k} a_i e_i(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i e_i(x).$$

Giả sử f liên tục trên tập $\mathbb{C}_p \setminus \mathbb{N}$, ta sẽ chứng minh $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, $\forall x \in \mathbb{C}_p$. Thật vậy, với mỗi $x \in \mathbb{C}_p$, có hai khả năng xảy ra:

Nếu $x \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{N}$ thì do f liên tục nên $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

Nếu $x \in \mathbb{N}$ thì $x = a_o + a_1p + \text{L} + a_s p^s$. Khi đó, dãy chuẩn $\{x_n\}_n$ có dạng

$$\begin{cases} x_o = 0 \\ x_1 = a_o \\ \text{M} \\ x_{s+1} = a_o + a_1p + \text{L} + a_s p^s = x \\ x_n = x_{s+1} = x, \forall n > s+1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(x_n), \forall n \geq s+1$$

Do đó, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

Xét hàm $f: \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ cho bởi công thức $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\} \\ 0, x = 0 \end{cases}$. Ta có:

Nếu $x = 0$ thì $g(0) = f(0)e_o(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n) - f(n_-))e_n(0) = 0 = f(0)(*)$

Nếu $x \neq 0$ thì $x = a_o + a_1p + \text{L}$. Do $x \neq 0$ nên có $k \in \mathbb{N}$ sao cho

$$x_0 = L \quad x_{k-1} = 0 \text{ và } x_k \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó, } g(x) &= f(0)e_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n) - f(n_-))e_n(x) = \sum_{n < x} (f(n) - f(n_-)) \\ &= \sum_i (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(x_k) = 1 = f(x) (**). \end{aligned}$$

Từ (*), (**) suy ra $f = f(0)e_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n) - f(n_-))e_n$. Ký hiệu $a_0 = f(0)$ và

$a_n = f(n) - f(n_-), \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta được dãy $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{Q}_p$ thỏa $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$. Do đó, điều kiện (2)

thỏa mãn.

Tuy nhiên hàm f không liên tục trên $\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{N}$. Thật vậy, với dãy $\{x_n = p^n\}_n \subset \mathbb{Q}_p$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ nhưng $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 \neq f(0)$, nghĩa là f không liên tục tại $x = 0$. $\square$

2.2.2 Định lý

Cho $f \in C(\mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ có khai triển theo cơ sở Vanderput là $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$,

ký hiệu V_n là không gian các hàm từ $\mathbb{Q}_p$ đến $\mathbb{E}_p$ mà chúng là hằng trên tập $a + p^n \mathbb{Q}_p, a \in \mathbb{Q}_p$. Khi đó, ta có các khẳng định sau:

1) $V_n = \langle e_0, e_1, \dots, e_{p^n-1} \rangle$. Hàm f là hằng địa phương nếu và chỉ nếu $a_n = 0$ với n đủ lớn.

2) Đặt $f_n = \sum_{i=0}^{p^n-1} a_i e_i$. Khi đó, f_n là phần tử duy nhất của V_n thỏa tính chất

$$g(0) = f(0), g(1) = f(1), \dots, g(p^n - 1) = f(p^n - 1)$$

3) f_n là xấp xỉ tốt nhất của f trong V_n .

4) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\max \{ |f(0)|_p, \dots, |f(n)|_p \} = \max \{ |a_0|_p, \dots, |a_n|_p \}$$

Chứng minh Với $x \in \mathbb{Q}_p$, $x = a_0 + a_1 p + L + a_{p^n-1} p^{p^n-1} + a_{p^n} p^{p^n} + L$, do đó,

$$x + p^n \mathbb{Q}_p = a_0 + a_1 p + L + a_{n-1} p^{n-1} + p^n \mathbb{Q}_p$$

Suy ra $\{a + p^n \mathbb{Q}_p / a \in \mathbb{Q}_p\} = \{i + p^n \mathbb{Q}_p / i \in \overline{0, p^n - 1}\}, n \in \mathbb{N}$

1) Với mỗi $m \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$, $i \in \{0, \dots, p^n - 1\}, \forall x, y \in i + p^n \mathbb{Q}_p$, Ta có $|x - i|_p \leq p^{-n}$ và

$$|i - y|_p \leq p^{-n} \text{ suy ra } |x - y|_p \leq \max \{ |x - i|_p, |i - y|_p \} \leq p^{-n}.$$

Do đó, $x_n = y_n$. Điều này dẫn đến, $m < x$ khi và chỉ khi $m < y$. Vì thế theo định nghĩa hàm e_m ta được, $e_m(x) = e_m(y)$ hay $e_m \in V_n$. Như vậy ta đã chứng minh được $\langle e_0, \dots, e_{p^n-1} \rangle \subseteq V_n$.

Ngược lại, $\forall f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n \in V_n$, ta sẽ chứng minh $a_k = 0, \forall k \geq p^n$. Thật vậy, giả sử

$$k = b_0 + b_1 p + \dots + b_{s(k)} p^{s(k)}.$$

Do $k \geq p^n$ nên $s(k) \geq n$ suy ra $|k - k_-|_p = p^{-s(k)} \leq p^{-n}$. Khi đó, tồn tại $i \in \{0, \dots, p^n - 1\}$ sao cho $k, k_- \in i + p^n \mathbb{F}_p$. Theo cách xác định V_n , $f(k) = f(k_-)$. Vì thế $a_k = f(k) - f(k_-) = 0$.

Từ đó suy ra $f = \sum_{n=0}^{p^n-1} a_n e_n \in \langle e_0, \dots, e_{p^n-1} \rangle$. Nghĩa là $V_n \subseteq \langle e_0, \dots, e_{p^n-1} \rangle$.

Tiếp theo ta chứng minh f là hàm hằng địa phương nếu và chỉ nếu $a_n = 0$ với n đủ lớn.

Giả sử f là hàm địa phương. Với $x \in \mathbb{F}_p$, tồn tại một lân cận mở U_x của x sao cho f là hằng trên U_x . Ta có $\mathbb{F}_p = \bigcup_{x \in \mathbb{F}_p} U_x$, mà $\mathbb{F}_p$ là tập compact nên ta được $\mathbb{F}_p = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$. Không mất tính tổng quát ta có thể chọn U_{x_i} là những hình cầu mở tâm x_i bán kính p^{-r_i} . Ký hiệu $n = \max\{r_i / i = 1, m\}$, ta chứng minh $f \in V_n$.

Với $i \in \{0, \dots, p^n - 1\}$; $x, y \in i + p^n \mathbb{F}_p$, ta có $|x - i|_p \leq p^{-n}$ và $|i - y|_p \leq p^{-n}$ suy ra $|x - y|_p \leq \max\{|x - i|_p, |i - y|_p\} \leq p^{-n}$.

Do $x \in \mathbb{F}_p$ nên tồn tại x_i để $x \in U_{x_i}$, tức $|x - x_i|_p < p^{-r_i}$. Khi đó,

$$|y - x_i|_p = |y - x + x - x_i|_p \leq \max\{|x - y|_p, |x - x_i|_p\} < p^{-r_i}$$

Điều này cho ta $y \in U_{x_i}$ vì thế, $f(x) = f(y)$ suy ra $f \in V_n$. Nghĩa là

$$f = a_0 e_0 + \dots + a_{p^n-1} e_{p^n-1}.$$

Ngược lại, giả sử $f = a_0 e_0 + \dots + a_n e_n$ ta sẽ chứng minh f là hàm địa phương. Từ cách biểu diễn của f ta suy ra $f \in \langle e_0, \dots, e_n \rangle \subset V_n$.

Với mọi $x \in \mathbb{F}_p, \exists i \in \{0, \dots, p^n - 1\} : |x - i|_p \leq p^{-n}$ suy ra $x \in i + p^n \mathbb{F}_p$. Do đó, f hằng trên tập mở $i + p^n \mathbb{F}_p$, hay f hằng địa phương.

2) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{cases} f_n(0) = a_0 = f(0) \\ f_n(1) = a_0 + a_1 = f(1) \\ \text{M} \\ f_n(p^n - 1) = a_0 + a_1 + \dots + a_{p^n-1} = f(p^n - 1) \end{cases}$$

Giả sử $g: \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$ là hàm thỏa $g(0) = f(0), \dots, g(p^n - 1) = f(p^n - 1)$. Khi đó, rõ ràng $f_n \equiv g$. Tức f_n là duy nhất.

3) Với mọi $g = \sum_{j=0}^{p^n-1} b_j e_j \in V_n$, ta có

$$\begin{cases} \|f - f_n\|_\infty = \left\| \sum_{j=p^n}^{+\infty} a_j e_j \right\|_\infty \\ \|g - f\|_\infty = \left\| \sum_{j=0}^{p^n-1} (b_j - a_j) e_j + \sum_{j=p^n}^{+\infty} a_j e_j \right\|_\infty \end{cases} \quad \text{suy ra } \|f - f_n\|_\infty \leq \|g - f\|_\infty.$$

Tức f_n là xấp xỉ tốt nhất của f trong V_n .

4) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $a_n = f(n) - f(n_-)$. Do đó,

$$\begin{aligned} \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|\} &= \max\{|f(0)|, |f(1) - f(1_-)|, \dots, |f(n) - f(n_-)|\} \\ &= \max\{|f(0)|, |f(1)|, \dots, |f(n)|\}. W \end{aligned}$$

2.3 Tích tích phân Volkenborn qua hệ số Vanderput

Trước hết ta nhắc lại định nghĩa tích phân Volkenborn.

2.3.1 Định nghĩa

Cho K là một trường chứa $\mathbb{F}_p$. Hàm $f \in C(\mathbb{F}_p \rightarrow K)$ được gọi là khả tích (khả tích

Volkenborn) nếu tồn tại giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^{-n} \sum_{k=0}^{p^n-1} f(k)$. Khi đó, giới hạn này được gọi là tích phân

Volkenborn của hàm f và ký hiệu là

$$\int_{\mathbb{F}_p} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} p^{-n} \sum_{k=0}^{p^n-1} f(k).$$

Nhận xét Cho $f \in C(\mathbb{F}_p \rightarrow K)$. Với $x \in \mathbb{F}_p$,

$$(Sf)(x) = \sum_{n=0}^{x-1} f(n) = \lim_{\substack{n \rightarrow x \\ n \in \mathbb{N}}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \right)$$

là một hàm liên tục thỏa $(Sf)(x+1) - (Sf)(x) = f(x), Sf(0) = f(0)$. Hơn nữa, nếu $f \in C^1(\mathbb{F}_p \rightarrow K)$ thì $Sf \in C^1(\mathbb{F}_p \rightarrow K)$ và $|f|_1 \leq |Sf|_1 \leq p|f|_1$.

Khi đó, nếu $f \in C^1(\mathbb{F}_p \rightarrow K)$, ta có

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} p^{-n} \sum_{k=0}^{p^n-1} f(k) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(0) + f(1) + \dots + f(p^n-1)}{p^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Sf(p^n) - Sf(0)}{p^n} = (Sf)'(0) \end{aligned}$$

Do vậy, mọi C^1 - hàm đều khả tích.

Có nhiều cách để tính tích phân Volkenborn. Trong phần này chúng tôi đưa ra công thức tính tích phân Volkenborn qua hệ số Vanderput.

2.3.2 Định lý

Ta có các khẳng định sau:

$$1) \int_{\mathbb{F}_p} e_o(x) dx = 1 \text{ và } \int_{\mathbb{F}_p} e_n(x) dx = p^{-s(n)-1} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*, s(n) = [\log_p n]$$

$$2) \text{ Cho } f \in C^1(\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p) \text{ có khai triển theo cơ sở Vanderput là } f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n. \text{ Khi đó,}$$

$$\int_{\mathbb{F}_p} f(x) dx = a_o + \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{p^m-1} a_n p^{-s(n)-1}.$$

Chứng minh Trước hết ta thấy $e_n \in C^1(\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p), \forall n \in \mathbb{N}$

$$1) \text{ Ta có } \int_{\mathbb{F}_p} e_o(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} p^{-m} \sum_{j=0}^{p^m-1} e_o(j) = \lim_{m \rightarrow +\infty} p^{-m} \sum_{j=0}^{p^m-1} 1 = \lim_{m \rightarrow +\infty} p^{-m} p^m = 1$$

$$\text{Với mỗi } n \in \mathbb{N}^*, \text{ theo định nghĩa 2.3.1 } \int_{\mathbb{F}_p} e_n(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} p^{-m} \sum_{j=0}^{p^m-1} e_n(j)$$

$$\text{Xét tổng } p^{-m} \sum_{j=0}^{p^m-1} e_n(j) = \frac{e_n(0) + e_n(1) + \dots + e_n(p^m-1)}{p^m}.$$

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n = b_o + b_1 p + \dots + b_{s(n)} p^{s(n)}$. Với mọi $x \in \{0, 1, \dots, p^m-1\}$, nếu $n < x$ thì

$$x = b_o + b_1 p + \dots + b_{s(n)} p^{s(n)} + b_{s(n)+1} p^{s(n)+1} + \dots + b_{p^m-1} p^{m-1}, 0 \leq b_i \leq p-1. (*)$$

Suy ra trong tập $\{0, 1, \dots, p^m-1\}, m \geq 1$ có tất cả $p^{m-s(n)-1}$ phần tử x có dạng (*). Vì thế ta được:

$$p^{-m} \sum_{j=0}^{p^m-1} e_n(j) = \frac{e_n(0) + e_n(1) + \dots + e_n(p^m-1)}{p^m} = \frac{p^{m-s(n)-1}}{p^m} = p^{-s(n)-1}$$

$$\text{Suy ra } \int_{\mathbb{F}_p} e_n(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} p^{-m} \sum_{j=0}^{p^m-1} e_n(j) = \lim_{m \rightarrow +\infty} p^{-s(n)-1} = p^{-s(n)-1}.$$

2) Theo tính toán ở câu (1), ta được:

$$\begin{aligned} p^{-m} \sum_{j=0}^{p^m-1} f(j) &= \frac{f(0) + f(1) + \dots + f(p^m-1)}{p^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{e_n(0) + \dots + e_n(p^m-1)}{p^m} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{p^m-1} a_n \left[\frac{e_n(0) + \dots + e_n(p^m-1)}{p^m} \right] \\ &= a_0 \frac{1 + \dots + 1}{p^m} + \sum_{n=1}^{p^m-1} a_n \left[\frac{e_n(0) + \dots + e_n(p^m-1)}{p^m} \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{p^m-1} a_n \left[\frac{e_n(0) + \dots + e_n(p^m-1)}{p^m} \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{p^m-1} a_n p^{-s(n)-1} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó, nếu } f \in C^1(\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{E}_p) \text{ thì } \int_{\mathbb{F}_p} f(x) dx = a_0 + \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{p^m-1} a_n p^{-s(n)-1}. \forall$$

2.4 Đặc trưng của hệ số Vanderput cho một số lớp hàm

Cho K là một trường với giá trị tuyệt đối $|\cdot|$, S là tập con của K . Tập S được gọi là tập lồi nếu

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in S \text{ và } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, |\lambda_i| \leq 1, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ thì } \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in S.$$

Từ định nghĩa trên ta nhận thấy, nếu S là một hình cầu mở thì S là tập lồi.

Vận dụng khái niệm này ta sẽ chứng minh được một bổ đề quan trọng sau:

2.4.1 Bổ đề

Cho $f \in C(\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$, B là một hình cầu trong $\mathbb{F}_p$, S là một hình cầu trong $\mathbb{E}_p$. Giả sử rằng

$$\Phi_1 f(n, n_-) = \frac{f(n) - f(n_-)}{n - n_-} \in S, \quad (n \in \mathbb{F}_p, n, n_- \in B)$$

$$\text{Khi đó, } \Phi_1 f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in S, \quad (x, y \in B, x \neq y).$$

Chứng minh Do $\nexists$ dày đặc trong $\mathfrak{C}_p$, f liên tục và S đóng trong $\mathfrak{E}_p$ nên chỉ cần chứng minh bổ đề trong trường hợp $x, y \in B \cap \nexists$.

Với mọi $x, y \in B \cap \nexists$, $x \neq y$. Gọi z là phần chung đầu tiên của x và y (nghĩa là với $x = a_o + a_1p + \mathbf{L}$ và $y = b_o + b_1p + \mathbf{L}$. Nếu $|x - y|_p < p^{-n} < 1$ (nghĩa là $a_o = b_o, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n \neq b_n$) thì $z = a_o + a_1p + \mathbf{L} + a_{n-1}p^{n-1}$; còn nếu $|x - y|_p = 1$ thì $z = 0$. Khi đó

$$z \in B, z < x, z < y \text{ và } \max\{|z - x|_p, |z - y|_p\} = |x - y|_p$$

$$\Phi_1 f(x, y) = \Phi_1 f(x, z) \frac{x - z}{x - y} + \Phi_1 f(z, y) \frac{z - y}{x - y}$$

Do $z < x$ nên có dãy $z = t_1 < t_2 < \mathbf{L} < t_n = x$ với $t_i \in B$ sao cho $(t_i)_- = t_{i-1}$. Ta được

$$\Phi_1 f(x, z) = \sum_{i=2}^n \lambda_i \Phi_1 f(t_i - t_{i-1}), \lambda_i = (x - z)^{-1} (t_i - t_{i-1}).$$

Mặt khác,

$$\begin{cases} |\lambda_i|_p = |(x - z)^{-1} (t_i - t_{i-1})|_p = |x - z|^{-1} |t_i - t_{i-1}| \leq 1, \forall i = \overline{2, n} \\ \sum_{i=2}^n \lambda_i = 1 \\ t_i \in B \cap \nexists, \forall i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Vì S là tập lồi nên $\Phi_1 f(x, z) = \sum_{i=2}^n \lambda_i \Phi_1 f(t_i - t_{i-1}) \in S$.

Lập luận tương tự ta được $\Phi_1 f(z, y) \in S$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} \Phi_1 f(x, z), \Phi_1 f(z, y) \in S \\ \left| \frac{x - z}{x - y} \right| < 1, \left| \frac{z - y}{x - y} \right| < 1 \\ \frac{x - z}{x - y} + \frac{z - y}{x - y} = 1 \end{cases}$$

Cũng vì S lồi nên $\Phi_1 f(x, y) = \Phi_1 f(x, z) \frac{x - z}{x - y} + \Phi_1 f(z, y) \frac{z - y}{x - y} \in S$. $\forall$

2.4.2 Định lý

(Đặc trưng của hệ số Vanderput cho lớp hàm $Lip_1(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$) Cho hàm $f \in C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$

có khai triển theo cơ sở Vanderput là $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$. Khi đó, $f \in Lip_1(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$ khi và chỉ khi

$\sup_n \|a_n\|_p < +\infty$. Chính xác hơn, với $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n \in C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$ chúng ta có các điều sau:

- 1) $\|\Phi_1 f\|_\infty = \sup\{\|a_n\|_p |\gamma_n|_p^{-1} : n \in \mathbb{N}^*\}$
- 2) $\|\Phi_1 f\|_\infty \leq \sup\{\|a_n\|_p : n \in \mathbb{N}^*\} \leq p \|\Phi_1 f\|_\infty$
- 3) Nếu $f \in Lip_1(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$ thì $\|f\|_1 = \sup\{\|a_n\|_p |\gamma_n|_p^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$

Chứng minh

1) Ta có $\|\Phi_1 f\|_\infty = \sup \left\{ \left\| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right\|_p : x, y \in \mathfrak{C}_p, x \neq y \right\}$. Theo bổ đề 2.4.1, ta được

$$\sup \left\{ \left\| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right\|_p : x, y \in \mathfrak{C}_p, x \neq y \right\} = \sup \left\{ \left\| \frac{f(n) - f(n_-)}{n - n_-} \right\|_p : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Suy ra $\|\Phi_1 f\|_\infty = \sup \left\{ \|f(n) - f(n_-)\|_p |n - n_-|_p^{-1} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Nghĩa là

$$\|\Phi_1 f\|_\infty = \sup\{\|a_n\|_p |\gamma_n|_p^{-1} : n \in \mathbb{N}\} \text{ với } \gamma_n = n - n_-.$$

2) Do $\gamma_n = n - n_-$ nên $1 \leq |\gamma_n|_p^{-1} \leq n$ suy ra $\|\Phi_1 f\|_\infty \leq \sup\{\|a_n\|_p n : n \in \mathbb{N}\}$. Mặt khác,

$$p \|\Phi_1 f\|_\infty = p \sup \left\{ \|a_n\|_p |\gamma_n|_p^{-1} : n \in \mathbb{N} \right\} \geq \sup \left\{ \|a_n\|_p n : n \in \mathbb{N} \right\}. \text{ Do đó, ta có}$$

$$\|\Phi_1 f\|_\infty \leq \sup\{\|a_n\|_p : n \in \mathbb{N}\} \leq p \|\Phi_1 f\|_\infty.$$

3) Nếu $f \in Lip_1(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$ thì $\|f(x) - f(y)\|_p \leq M |x - y|_p, \forall x, y \in \mathfrak{C}_p$

Suy ra $\left\| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right\|_p \leq M, \forall x \neq y \in \mathfrak{C}_p$. Điều này nghĩa là tồn tại

$$\sup \left\{ \left\| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right\|_p : x, y \in \mathfrak{C}_p, x \neq y \right\}$$

Ta có $\|\Phi_1 f\|_\infty = \sup\{\|a_n\|_p |\gamma_n|_p^{-1} : n \in \mathbb{N}^*\}$ và $\|f\|_1 = \sup\{\|a_n\|_p : n \in \mathbb{N}\}$.

Nếu $n \in \mathbb{N}^*$ thì $1 \leq |\gamma_n|_p^{-1} \leq n$ nên

$$\sup\{\|a_n\|_p |\gamma_n|_p^{-1} : n \in \mathbb{N}^*\} \geq \sup\{\|a_n\|_p : n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$\text{Suy ra } \|f\|_1 = \max\{|f|_\infty, |\Phi_1 f|_\infty / f \in C(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)\} = \sup\{\|a_n\|_p |\gamma_n|_p^{-1} / n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Giả sử $f \in Lip_1(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p)$, khi đó, $\forall x, y \in \mathfrak{C}_p$, $\exists M > 0$ sao cho

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq M |x - y|_p \text{ hay } \left\| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right\|_p < M.$$

$$\text{Suy ra } p\|\Phi_1 f\|_\infty = \sup\left\{\left\| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right\|_p / x, y \in \mathfrak{C}_p, x \neq y\right\} < pM.$$

$$\text{Theo (2), } \sup\{\|a_n\|_p n / n \in \mathbb{N}^*\} \leq p\|\Phi_1 f\|_\infty \text{ nên } \sup\{\|a_n\|_p n / n \in \mathbb{N}^*\} < pM < +\infty.$$

Ngược lại, giả sử $\sup_n \|a_n\|_p n < +\infty$ thế thì $\exists M > 0$ sao cho

$$\sup_n \|a_n\|_p n < M$$

Khi đó, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $\|f(n) - f(n_-)\|_p n < M$. Điều này tương đương với

$$\left\| \frac{f(n) - f(n_-)}{n - n_-} \right\|_p < \frac{M}{n|n - n_-|_p}.$$

Mặt khác, giả sử $n = a_o + a_1 p + \mathbf{L} + a_s p^s, a_s \neq 0$ ta được

$$n|n - n_-|_p = a_o p^{-s} + \mathbf{L} + a_s \geq 1$$

$$\text{Do đó, } \left\| \frac{f(n) - f(n_-)}{n - n_-} \right\|_p < \frac{M}{n|n - n_-|_p} < M. \text{ Như vậy, ta đã chứng minh được}$$

$$\frac{f(n) - f(n_-)}{n - n_-} \in B(0, M), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Theo bổ đề 2.4.1, } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in B(0, M), \forall x, y \in \mathfrak{C}_p, x \neq y. \text{ Hay là}$$

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq M |x - y|_p, \forall x, y \in \mathfrak{C}_p$$

$$\text{Vậy } f \in Lip_1(\mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{E}_p). \quad \square$$

Trường hợp tổng quát, ta có kết quả.

2.4.3 Định lý

(Đặc trưng của hệ số Vanderput cho lớp hàm $Lip_a(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$) Cho $f \in C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ có khai triển theo cơ sở Vanderput là $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$ và $a > 0$. Khi đó, $f \in Lip_a(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ khi và chỉ khi $\sup \left\{ \|a_n\|_p n^a \right\} < +\infty$.

Nhắc lại rằng $N^1(\mathbb{C}_p \rightarrow K) = \{f \in C^1(\mathbb{C}_p \rightarrow K) : f' = 0\}$.

2.4.4 Định lý

(Đặc trưng của hệ số Vanderput cho lớp hàm $N^1(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$) Cho hàm $f \in C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ có khai triển theo cơ sở Vanderput là $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

- 1) $f \in N^1(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$.
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_p n = 0$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (n - n_-)^{-1} = 0$

Chứng minh

($1 \Rightarrow 2$): Do $f \in N^1(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ nên với mọi $a \in \mathbb{C}_p$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0.$$

Với mọi $x, y \in \mathbb{C}_p$, do f liên tục nên

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow a} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n) - f(n_-)}{n - n_-} = 0$. Khi đó, vì $|n - n_-|_p^{-1} > p^{-1}n$ nên

$$p^{-1} \|a_n\|_p n \leq \|a_n\|_p |n - n_-|_p^{-1} \text{ hay } p^{-1} \|a_n\|_p n \leq \left\| \frac{f(n) - f(n_-)}{n - n_-} \right\|$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_p n = 0$.

($2 \Rightarrow 3$): Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\|a_n (n - n_-)^{-1}\|_p = \|a_n\|_p |n - n_-|_p^{-1} \leq \|a_n\|_p n$$

Do đó, nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_p n = 0$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (n - n_-)^{-1} = 0$.

(3 $\Rightarrow$ 1): Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(n - n_-)^{-1} = 0$. Khi đó, $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall n > M$ ta có

$$\left\| \frac{f(n) - f(n_-)}{n - n_-} \right\|_p < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{f(n) - f(n_-)}{n - n_-} \in B(0, \varepsilon), \forall n \in B(0, 1) \cap \mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N} / n \leq M\}$$

Theo bổ đề 2.4.1, $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in B(0, \varepsilon), \forall x, y \in \mathbb{C}_p, x \neq y$. Từ đây suy ra f là C^1 - hàm và

$$f'(a) = 0, \forall a \in \mathbb{C}_p \text{ hay } f \in N^1(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p).$$

2.4.5 Định lý

(Đặc trưng của hệ số Vanderput cho lớp hàm khả vi liên tục) Cho $f \in C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ có khai triển

theo cơ sở Vanderput là $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$. Khi đó, f khả vi liên tục khi và chỉ khi tồn tại $\lim_{x \rightarrow a} a_n \gamma_n^{-1}$ với mỗi

$$a \in \mathbb{C}_p.$$

Chứng minh Giả sử $f \in C^1(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ thì $\forall a \in \mathbb{C}_p$, tồn tại $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Do đó, tồn tại

$$\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(n_-)}{n - n_-}.$$

Ngược lại, với mỗi $a \in \mathbb{C}_p$ giới hạn $\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(n_-)}{n - n_-}$ tồn tại, ta sẽ chứng minh

$$f \in C^1(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p), \text{ hay chứng minh tồn tại } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Giả sử $\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(n_-)}{n - n_-} = L$. Khi đó, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n, n_- \in B(a, \delta)$ ta có

$$\frac{f(n) - f(n_-)}{n - n_-} \in B(L, \varepsilon)$$

Theo bổ đề 2.4.1, $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in B(L, \varepsilon), \forall x, y \in B(a, \delta), x \neq y$.

Nghĩa là, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = L$. Vậy f là C^1 - hàm. $\square$

Cho hàm $f \in C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$. Khi đó, $\Delta f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ là hàm cho bởi công thức

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \forall x \in \mathbb{C}_p.$$

Tiếp theo ta sẽ đưa ra công thức tính các hệ số của Δf theo các hệ số Vanderput của f .

2.4.6 Định lý

(Đặc trưng của hệ số Vanderput cho lớp hàm Δf) Cho hàm $f \in C(\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p)$ có khai triển theo cơ

sở Vanderput là $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$. Khi đó, $\Delta f = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e_n$. Trong đó,

$$b_n = \begin{cases} a_1, n=0 \\ a_{n+1} - a_n - a_{p^s}, n = ap^s - 1 \left(s \in \mathbb{N}, a \in \{2, 3, \dots, p\} \right) \\ a_{n+1} - a_n, \text{ trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Chứng minh Với mọi $x \in \mathbb{F}_p$, ta có $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e_n(x)$ trong đó,

$$\begin{cases} b_0 = \Delta f(0) \\ b_n = \Delta f(n) - \Delta f(n_-), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Với $n=0$, ta có $b_0 = \Delta f(0) = f(0+1) - f(0) = f(1) - f(1_-) = a_1$

Với $n \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} b_n &= \Delta f(n) - \Delta f(n_-) = [f(n+1) - f(n)] - [f(n_-+1) - f(n_-)] \\ &= \{f(n+1) - f[(n+1)_-]\} - [f(n) - f(n_-)] - \{f(n_-+1) - f[(n+1)_-]\} \\ &= a_{n+1} - a_n - \{f(n_-+1) - f[(n+1)_-]\} \end{aligned}$$

Ta xét hai trường hợp:

Nếu $n = ap^s - 1$ với $a \in \{2, 3, \dots, p\}$, $s \in \mathbb{N}^*$ thì khai triển p -adic của n là

$$n = (p-1) + (p-1)p + \dots + (p-1)p^{s-1} + (a-1)p^s$$

Suy ra,

$$n_- = (p-1) + (p-1)p + \dots + (p-1)p^{s-1} = p^s - 1 \Rightarrow n_- + 1 = p^s$$

$$n+1 = \begin{cases} ap^s, 2 \leq a < p \\ p^{s+1}, a = p \end{cases} \text{ suy ra } (n+1)_- = 0 = (p^s)_-$$

Do đó, $f(n_-+1) - f[(n+1)_-] = f(p^s) - f[(p^s)_-] = a_{p^s}$. Vậy nên

$$b_n = a_{n+1} - a_n - a_{p^s}.$$

Nếu $n \notin \{0; ap^s - 1, a \in \{2, 3, \dots, p\}, s \in \mathbb{N}^*\}$ thì khai triển p -adic của n là

$$n = a_0 + a_1 p + \dots + a_s p^s, s \in \mathbb{N}.$$

Vì $n \notin \{0; ap^s - 1, a \in \{2; 3; \dots; p\}, s \in \mathbb{N}^*\}$ nên tồn tại $k = \overline{0, s}$ sao cho $a_k < p - 1$. Không mất tính tổng quát ta có thể chọn k là chỉ số đầu tiên để $a_k < p - 1$. Khi đó,

$$n = (p-1) + (p-1)p + L + (p-1)p^{k-1} + a_k p^k + L + a_s p^s$$

$$= (a_k + 1)p^k + L + a_s p^s - 1$$

Suy ra $n+1 = (a_k + 1)p^k + L + a_s p^s$. Từ đây ta được

$$n_- = (a_k + 1)p^k + L + a_{s-1}p^{s-1} - 1$$

$$n_- + 1 = (a_k + 1)p^k + L + a_{s-1}p^{s-1}$$

$$(n+1)_- = (a_k + 1)p^k + L + a_{s-1}p^{s-1}.$$

Do đó, $f(n_- + 1) - f[(n+1)_-] = 0$. Vậy nên $b_n = a_{n+1} - a_n \cdot \forall$

2.5 Cơ sở Vanderput cho không gian $C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$

Trên $\mathbb{E}_p$ - không gian các hàm liên tục $C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ ta định nghĩa

$$\|f\|_\infty = \text{Max} \left\{ \|f(x, y)\|_p / (x, y) \in \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \right\}, \forall f \in C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$$

Khi đó, $\|\cdot\|_\infty$ là một chuẩn phi - Acsmet. Hơn nữa, $C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ còn là không gian Banach.

2.5.1 Mệnh đề

$(C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p), \|\cdot\|_\infty)$ là một $\mathbb{E}_p$ - không gian Banach

Chứng minh Với mọi $\{f_n\}_n$ là dãy Côsi trong $(C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p), \|\cdot\|_\infty)$, ta có:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n > n_0, \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

Suy ra $\max \left\{ \|f_m(x, y) - f_n(x, y)\|_p / (x, y) \in \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \right\} < \frac{\varepsilon}{2}$, hay là

$$\|f_m(x, y) - f_n(x, y)\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \forall (x, y) \in \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p.$$

Điều này có nghĩa $\{f_n(x, y)\}_n$ là dãy Côsi trong $\mathbb{E}_p$. Do đó, $\{f_n(x, y)\}_n$ hội tụ. Xét hàm

$$f : \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$$

$$(x, y) \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, y)$$

Ta chứng minh được f liên tục và $f_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x, y)$. Hay ta có

$$\exists m_o \in \mathbb{N}, \forall n > m_o, \|f_n(x, y) - f(x, y)\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

Khi đó, với $n, m > \max\{n_o, m_o\}$ ta được

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_\infty &= \max \left\{ \|f_n(x, y) - f(x, y)\|_p / (x, y) \in \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \right\} \\ &\leq \max \left\{ \|f_n(x, y) - f_m(x, y)\|_p + \|f_m(x, y) - f(x, y)\|_p / (x, y) \in \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right\} = \varepsilon \end{aligned}$$

Suy ra $\{f_n\}_n$ hội tụ về $f \in (C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p), \|\cdot\|_\infty)$. $\forall$

Với mỗi cặp $n, m \in \mathbb{N}$ ta định nghĩa

$$e_{nm}(x, y) = e_n(x)e_m(y), \forall (x, y) \in \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p$$

Khi đó, do e_n là các hàm liên tục trên $\mathbb{C}_p$ nên e_{nm} liên tục. Hơn nữa, chúng còn tạo thành một cơ sở trực chuẩn trong $C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$.

2.5.2 Định lý

(Cơ sở vanderput cho $C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$) Hệ $\{e_{nm} / n, m \in \mathbb{N}\}$ lập thành một cơ sở trực chuẩn của không gian $C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ trên $\mathbb{E}_p$.

Chứng minh Trước hết ta chứng minh $\{e_{nm} / n, m \in \mathbb{N}\}$ là hệ trực chuẩn

Với mỗi $n, m \in \mathbb{N}$ ta có:

$$\begin{aligned} \|e_{nm}\|_\infty &= \max \left\{ \|e_n(x)e_m(y)\|_p / (x, y) \in \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \right\} \\ &= \max \left\{ \|e_n(x)\|_p \|e_m(y)\|_p / (x, y) \in \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \right\} = 1 \end{aligned}$$

$\{e_{ij} / i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}\}$ là hệ trực giao. Thật vậy, với $\lambda_{ij} \in \mathbb{E}_p$, do $\{e_n\}_n$ là cơ sở trực chuẩn của $C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ nên

$$\left| \sum_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{1, m}}} \lambda_{ij} e_{ij} \right|_\infty \geq \left| \sum_{i=\overline{1, n}} \lambda_{im} e_i \right|_\infty \|e_m\|_\infty \text{ và } \left| \sum_{i=\overline{1, n}} \lambda_{ij} e_i \right|_\infty \geq \|\lambda_{nm}\|_p \|e_n\|_\infty$$

$$\text{Suy ra } \left| \sum_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{1, m}}} \lambda_{ij} e_{ij} \right|_\infty \geq \|\lambda_{nm}\|_p \|e_n\|_\infty \|e_m\|_\infty \text{ tức là, } \left| \sum_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{1, m}}} \lambda_{ij} e_{ij} \right|_\infty \geq \|\lambda_{nm}\|_p \|e_{nm}\|_\infty$$

Theo định lý 1.3.3, $\{e_{ij} / i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}\}$ là tập hợp trực giao. Do đó, cũng theo định lý 1.3.3, $\{e_{nm} / n, m \in \mathbb{N}\}$ là tập trực giao.

Cuối cùng ta chứng minh $\{e_{nm} / n, m \in \mathbb{N}\}$ là hệ sinh. Với mỗi hàm liên tục $f \in C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$, cố định biến y coi f là hàm theo biến x . Khi đó, do $\{e_n\}_n$ là cơ sở của $C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ nên tồn tại bộ số $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{E}_p$ sao cho $f = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(y)e_j$.

Lại do, $\{e_n\}_n$ là cơ sở của $C(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ nên có $a_{0j}, a_{1j}, \dots \in \mathbb{E}_p$ sao cho

$$f = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{ij} e_i e_j = \sum_{i,j=0}^{+\infty} a_{ij} e_{ij}$$

Vậy $\{e_{nm} / n, m \in \mathbb{N}\}$ là cơ sở trực chuẩn của $C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$. $\forall$

Ta đã biết, $\forall f \in C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$ thì $f = \sum_{m,n=0}^{+\infty} a_{mn} e_{mn}$. Tiếp theo đây ta sẽ đưa ra công thức

tính các hệ số a_{mn} .

2.5.3 Định lý

Với $f \in C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$, $f(x, y) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} a_{mn} e_m(x) e_n(y)$. Khi đó,

$$\begin{cases} a_{00} = f(0, 0) \\ a_{0n} = f(0, n) - f(0, n_-), \forall n > 1 \\ a_{m0} = f(m, 0) - f(m_-, 0), \forall m > 1 \\ a_{mn} = f(m, n) - f(m_-, n_-), \forall m, n > 1 \end{cases}$$

Chứng minh Vì f là hàm liên tục nên khi cố định biến y thì f là hàm liên tục theo biến x . Do đó,

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn}(y) e_m(x) = a_{0n}(y) e_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}(y) e_m(x), \text{ trong đó,}$$

$$\begin{cases} a_{0n}(y) = f(0, y) \\ a_{mn}(y) = f(m, y) - f(m_-, y), \forall m > 1 \end{cases}$$

Với mỗi n , $a_{0n}(y) = f(0, y)$ nên $a_{0n}(y)$ là hàm liên tục, do đó nó có biểu diễn

$$a_{0n}(y) = \sum_{i=0}^{+\infty} b_{0i} e_i, \text{ trong đó,}$$

$$\begin{cases} b_{00} = a_{0n}(0) = f(0, 0) \\ b_{0i} = a_{0n}(i) - a_{0n}(i_-) = f(0, i) - f(0, i_-), \forall i > 1 \end{cases}$$

Suy ra $a_{on}(y) = f(0,0)e_o(y) + \sum_{i=1}^{+\infty} [f(0,i) - f(0,i_-)]e_i(y)$.

Có định $m > 1$, với mỗi n , $a_{mn}(y) = f(m,y) - f(m_-,y)$ nên $a_{mn}(y)$ là hàm liên tục, suy ra

$$a_{mn}(y) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_{mj}e_j(y) \text{ trong đó,}$$

$$\begin{cases} c_{m0} = a_{mn}(0) = f(m,0) - f(m_-,0) \\ c_{mj} = a_{mn}(j) = a_{mn}(j_-) = f(m,j) - f(m_-,j_-), \forall j > 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } a_{mn}(y) = [f(m,0) - f(m_-,0)]e_o(y) + \sum_{j=1}^{+\infty} [f(m,j) - f(m_-,j_-)]e_j(y)$$

Tóm lại ta được

$$f(x,y) = a_{on}(y)e_o(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}(y)e_m(x)$$

$$= f(0,0)e_o(x)e_o(y) + \sum_{i=1}^{+\infty} [f(0,i) - f(0,i_-)]e_o(x)e_i(y) + \quad \text{Nói cách khác}$$

$$+ \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ [f(m,0) - f(m_-,0)]e_m(x)e_o(y) + \sum_{j=1}^{+\infty} [f(m,j) - f(m_-,j_-)]e_m(x)e_j(y) \right\}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0)e_o(x)e_o(y) + \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} [f(0,n) - f(0,n_-)]e_o(x)e_n(y) + \sum_{m=1}^{+\infty} [f(m,0) - f(m_-,0)]e_m(x)e_o(y) + \\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} [f(m,n) - f(m_-,n_-)]e_m(x)e_n(y) \end{aligned}$$

Vậy ta đã chứng minh được

$$\begin{cases} a_{oo} = f(0,0) \\ a_{on} = f(0,n) - f(0,n_-), \forall n > 1 \\ a_{mo} = f(m,0) - f(m_-,0), \forall m > 1 \\ a_{mn} = f(m,n) - f(m_-,n_-), \forall m, n > 1. \end{cases}$$

KẾT LUẬN

Luận văn đã giải quyết được các vấn đề sau:

- 1) Trình bày đầy đủ và chi tiết các kết quả của *Vanderput* về cơ sở trực chuẩn cho không gian các hàm liên tục trên $\mathbb{C}_p$.
- 2) Xây dựng được các đặc trưng của hệ số *Vanderput* cho lớp hàm khả vi liên tục và lớp hàm thỏa điều kiện *Lipchitz* cấp a trên $\mathbb{C}_p$.
- 3) Đưa ra công thức tính tích phân *Volkenborn* cho lớp hàm khả vi liên tục trên $\mathbb{C}_p$ theo hệ số *Vanderput*.
- 4) Mở rộng kết quả của *Vanderput* trên không gian các hàm liên tục hai biến $C(\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$.

Do thời gian có hạn nên luận văn chưa xây dựng được ánh xạ đạo hàm của các hàm khả vi liên tục trên $\mathbb{C}_p$ và các tính chất của nó; chưa xây dựng được cơ sở *Vanderput* cho không gian $C^n(\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{E}_p)$, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu vấn đề này trong thời gian tới nếu có điều kiện.

Mặc dù đã làm việc một cách nghiêm túc, cần mẫn song có lẽ sẽ không tránh khỏi những thiếu sót, kính mong quý thầy – cô góp ý thêm.

Xin chân thành cảm ơn!

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 08 năm 2011

Người thực hiện

Nguyễn Thanh Dũng

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] *Fernando Gouvêa, p – adic numbers an introduction, Springer, 1997*
- [2] *Mahler, p – adic numbers and their functions, Cambridge tracts in mathematics 76, Cambridge University Press, 1980.*
- [3] *Neal Koblitz, p – adic numbers, p – adic analysis, and zeta – functions, Springer, 1973.*
- [4] *Neal Koblitz, p – adic integral transforms on compact subgroups of $\mathbb{E}_p$, Pacific journal of mathematics, Vol. 120, No. 1, 1985.*
- [5] *Stany De Smedt, The VanDerPut base for C^n - functions, Buletin of Belgian Mathematical Society – Simon Stevin 1(1994), 85 – 86*
- [6] *W.H.Schikhof, Ultrametric calculus, Cambridge University Press, 1984.*