BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN THANH THIÊN

ĐA THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG TRONG ĐẠI SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

ĐÀ NẴNG - 2011

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN THANH THIÊN

ĐA THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG TRONG ĐẠI SỐ

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 40

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Giáo viên hướng dẫn:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

ĐÀ NẴNG, 2011

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong chương trình toán học phổ thông, đa thức lượng giác có ứng dụng thật đa dạng và hiệu quả, đặc biệt là trong đại số và hình học. Nhiều bài toán có lời giải phức tạp hoặc không thể giải được bằng phương pháp đại số, chẳng hạn như một số phương trình đa thức có bậc lớn hơn hay bằng 5 lại cho lời giải dễ dàng và hiệu quả bằng phương pháp lượng giác.

Thực tế, phương pháp lượng giác nói chung đã được biết đến nhiều trong quá trình giải toán ở bậc trung học phổ thông, tuy nhiên với đa thức lượng giác và các ứng dụng của nó trong đại số vẫn luôn là vấn đề hết sức cần thiết trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở bậc học phổ thông, đồng thời sự phát hiện các ứng dụng đa dạng của nó trong đại số cũng luôn đem lại sự hấp dẫn đối với nhiều đối tượng học sinh và giáo viên khi nghiên cứu vấn đề này.

Luận văn *"Đa thức lượng giác và một số ứng dụng trong đại số"* trình bày một số vấn đề liên quan đến một số đồng nhất thức đại số sinh bởi hàm lượng giác, định nghĩa và tính chất của đa thức lượng giác cùng với một số ứng dụng của nó trong đại số.

Đề tài quan tâm đến nhiều đối tượng, trong đó đa thức lượng giác và các vấn đề liên quan hoàn toàn phù hợp với thực tế mà bản thân đang công tác.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Đề tài *"Đa thức lượng giác và một số ứng dụng trong đại số"* nhằm hệ thống các kiến thức về đa thức lượng giác và ứng dụng của phương pháp lượng giác trong đại số.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu và các sách chuyên đề về đa thức, đa thức lượng giác, các bài toán nội suy, các bài báo toán học viết về đa thức lượng giác, nhằm hệ thống các dạng toán có xuất xứ từ lượng giác.

Đối tượng khảo sát của đề tài luận văn là lớp các hàm lượng giác cơ bản, không đi sâu khảo sát các hàm lượng giác ngược.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Tổng hợp các tài liệu liên quan, nắm vững cốt lõi của nội dung kiến thức từ đó sắp xếp, trình bày hệ thống và khai thác các ứng dụng theo đề tài đã chọn.

Nghiên cứu các bài học kinh nghiệm giảng dạy của các đồng nghiệp và các bạn học viên trong lớp, đồng thời sử dụng các trang web www.mathlinks.ro, www.mathnfriend.net, www.diendantoanhoc.net để học hỏi và trao đổi kinh nghiệm

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh trung học phổ thông.

Đề tài đóng góp thiết thực cho việc dạy và học lượng giác, đại số, phát triển năng lực giải toán cho học sinh trong trường THPT và đem lại niềm đam mê sáng tạo từ những bài toán cơ bản nhất.

6. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 3 chương.

Chương 1. Một số đồng nhất thức lượng giác

Chương 2. Đa thức lượng giác.

Chương 3. Một số ứng dụng của đa thức lượng giác.

Chương 1

MỘT SỐ ĐỒNG NHẤT THỨC LƯỢNG GIÁC

Chương này sẽ trình bày một số kiến thức cơ sở của hàm số lượng giác, đặc biệt là những đồng nhất thức đại số sinh bởi các hàm số lượng giác.

1.1 Tính chất của hàm số lượng giác

1.1.1 Tính chẵn, lẻ của hàm số

Xét hàm số $f(x)$ với tập xác định $D(f) \subset R$ và tập giá trị $R(f) \subset R$.

Định nghĩa 1.1 (xem [1]-[3])**.**
Hàm số $f(x)$ với tập xác định $D(f) \subset R$ được gọi là hàm số chẵn trên M, $M \subset D(f)$ nếu

$$\forall x \in M \Rightarrow -x \in M \text{ và } f(-x) = f(x), \forall x \in M.$$

$f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên M, $M \subset D(f)$ nếu

$$\forall x \in M \Rightarrow -x \in M \text{ và } f(-x) = -f(x), \forall x \in M.$$

Nhận xét 1.1.
Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn; các hàm số $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ là những hàm số lẻ trên tập xác định của chúng.

1.1.2 Tính tuần hoàn của hàm số

Định nghĩa 1.2 (xem [2]-[4])**.**
a) Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ a $(a > 0)$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm a \in M \\ f(x+a) = f(x), \forall x \in M \end{cases} \tag{1.1}$$

b) Cho $f(x)$ là một hàm số tuần hoàn trên M. Khi đó $T(T > 0)$ được gọi là chu kỳ cơ sở của $f(x)$ nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T mà không tuần hoàn với bất cứ chu kỳ nào bé hơn T.

Nhận xét 1.2.

Hàm số $y = \cos x$, hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Hàm số $y = \tan x$, hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Bài toán 1.1.

Cho cặp hàm số $f(x), g(x)$ tuần hoàn trên M có các chu kỳ lần lượt là a và b, với $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Chứng minh rằng $F(x) := f(x) + g(x)$ và $G(x) := f(x).g(x)$ cũng là những hàm tuần hoàn trên M.

Định nghĩa 1.3.

a) Hàm số $f(x)$ được gọi là phản tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ $b(b > 0)$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm a \in M \\ f(x+b) = -f(x), \forall x \in M \end{cases} \tag{1.2}$$

b) Nếu $f(x)$ là một hàm số phản tuần hoàn chu kỳ b_0 trên M mà không là hàm phản tuần hoàn với bất kỳ chu kỳ nào bé hơn b_0 trên M thì b_0 được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm phản tuần hoàn $f(x)$ trên M

Bài toán 1.2.

Chứng minh rằng mọi hàm phản tuần hoàn trên M cũng là hàm tuần hoàn trên M

Bài toán 1.3.

Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn chu kỳ b trên M khi và chỉ khi $f(x)$ có dạng

$$f(x) = g(x+b) - g(x)$$

với $g(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $2b$ trêm M

Định nghĩa 1.4.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn (nhân tính) chu kỳ $a(a \notin \{-1, 0, 1\})$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = f(x), \forall x \in M. \end{cases} \tag{1.3}$$

Định nghĩa 1.5.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn (nhân tính) chu kỳ $a(a \notin \{-1, 0, 1\})$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = -f(x), \forall x \in M. \end{cases} \tag{1.4}$$

Bài toán 1.4.

Chứng minh rằng mọi hàm số phản tuần hoàn nhân tính trên M cũng là hàm tuần hoàn nhân tính trên M

Bài toán 1.5.

Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ $b(b \notin \{-1, 0, 1\})$ trên M khi và chỉ khi $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(g(bx) - g(x)\right)$$

với $g(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ b^2 trêm M

1.2 Công thức lượng giác và đặc trưng hàm của các hàm số lượng giác

1.2.1 Các công thức biến đổi lượng giác

1.2.2 Đặc trưng hàm của các hàm lượng giác

Phần này sẽ đưa ra những đặc trưng hàm của các hàm số lượng giác. Nhờ những đặc trưng này mà ta có thể nhận biết xuất xứ của những bài toán có liên quan đến lượng giác, đồng thời áp dụng phương pháp lượng giác để giải toán có hiệu quả.

1. Đặc trưng của hàm sin
2. Đặc trưng của hàm cosin
3. Đặc trưng của hàm tan
4. Đặc trưng của hàm cotan
5. Đặc trưng của hàm Hyperbolic sin
6. Đặc trưng của hàm Hyperbolic cosin
7. Đặc trưng của hàm Hyperbolic tan
8. Đặc trưng của hàm Hyperbolic cotan

Các hàm số hyperbolic 5. 6. 7. 8. trên cũng có các công thức biến đổi tương tự như các hàm số lượng giác.

1.3 Một số đồng nhất thức đại số sinh bởi hàm lượng giác

1.3.1 Một số đồng nhất thức liên quan đến hàm cosin

Ví dụ 1.1.
Hệ thức đại số ứng với công thức

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$$

chính là công thức

$$\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^2 - 1.$$

Ví dụ 1.2.
Hệ thức đại số ứng với công thức

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

chính là công thức

$$\frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) = 4\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^3 - 3\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right],$$

hay

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$$

với

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right),\ a \neq 0.$$

Ví dụ 1.3.
Hệ thức đại số ứng với công thức

$$\cos 5t = 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t$$

chính là công thức

$$\frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right) = 16\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^5 - 20\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^3 + 5\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right],$$

hay

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = \frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right)$$

với

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right),\ a \neq 0.$$

Ví dụ 1.4.
Cho số thực m với $|m| > 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = 8x^3 - 6x,$$

trong đó

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}}\right)$$

1.3.2 Một số đồng nhất thức liên quan đến hàm sin

Từ công thức Euler, ta thu được hệ thức

$$i \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$$

Từ đây, suy ra biểu thức $i \sin(it)$ nhận giá trị thực. Điều này gợi ý cho ta cách chuyển đổi các đồng nhất thức đối với hàm số sin sang các đồng nhất thức đại số.

Ví dụ 1.5.
Xét công thức khai triển

$$\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t.$$

Từ đây ta thu được công thức (hình thức)

$$i \sin i(3t) = 3(i \sin it) + 4(i \sin it)^3$$

Hệ thức đại số ứng với công thức trên chính là đồng nhất thức

$$\frac{1}{2}\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) = 3\left[\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right] + 4\left[\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right]^3,$$

hay

$$4x^3 + 3x = \frac{1}{2}\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)$$

với

$$x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right), a \neq 0.$$

Ví dụ 1.6.
Ứng với công thức biến đổi

$$\sin 5t + \sin t = 2 \sin 3t(1 - 2sin^2 t)$$

là đồng nhất thức

$$\frac{1}{2}\left(a^5-\frac{1}{a^5}\right)+\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)=2\left[\frac{1}{2}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)\right]\left[1+\left(\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right)^2\right]$$

Ví dụ 1.7.

Cho số thực m. Tính giá trị biểu thức

$$M=x^3+\frac{3}{4}x,$$

trong đó

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2+1}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{m^2+1}}\right)$$

Chương 2

ĐA THỨC LƯỢNG GIÁC

Do biểu diễn của hàm tan và cot là hàm phân thức giữa sin và cos nên chương này chủ yếu chỉ trình bày về đa thức lượng giác theo các hàm sin và hàm cos.

2.1 Đa thức lượng giác theo các hàm sin và cosin

2.1.1 Định nghĩa đa thức lượng giác

Định nghĩa 2.1 (xem [2]-[5]).

Biểu thức

$$L_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{2.1}$$

trong đó:

$$a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}(k \in \{1, 2, ..., n\}); |a_n| + |b_n| \neq 0(n \in \mathbb{N}^*),$$

được gọi là đa thức lượng giác bậc n (cấp n) với các hệ số $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}(k \in \{1, 2, ..., n\})$

Định nghĩa 2.2.

Nếu trong đa thức (2.1) *tất cả các hệ số* $b_k(k \in \{1, 2, ..., n\})$ *đều bằng* 0 *thì ta có đa thức lượng giác cấp* n *thuần* cos*:*

$$C_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx,\ (a_n \neq 0) \tag{2.2}$$

Nếu trong đa thức (2.1) *tất cả các hệ số* $a_k(k \in \{1, 2, ..., n\})$ *đều bằng* 0 *thì ta có đa thức lượng giác cấp* n *thuần* sin*:*

$$S_n(x) = a_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx,\ (b_n \neq 0) \tag{2.3}$$

2.1.2 Một số tính chất

Tính chất 2.1.
Cho $L_m(x)$ và $L_n(x)$ là hai đa thức lượng giác. Khi đó:
$a)L_m(x)+L_n(x)$ là đa thức lượng giác bậc k, với k $\leq max\{m,n\}$
$b)L_m(x).L_n(x)$ là đa thức lượng giác bậc $m+n$.

Tính chất 2.2.
Với mọi đa thức lượng giác $L_n(x)$ dạng (2.1) luôn luôn tồn tại các đa thức đại số $P_n(t)$ và $Q_{n-1}(t)$ sao cho

$$L_n(x)=P_n(\cos x)+\sin xQ_{n-1}(\cos x).$$

Tính chất 2.3.
Với mọi $S_n(x)$ dạng (2.3) luôn luôn tồn tại đa thức đại số $Q_{n-1}(t)$ để

$$S_n(x)=b_0+\sin xQ_{n-1}(cosx)$$

Tính chất 2.4.
Với mọi $C_n(x)$ dạng (2.2) luôn luôn tồn tại đa thức đại số $P_n(t)$ để

$$C_n(x)=P_n(cosx)$$

trong đó $P_n(t)$ là đa thức bậc n đối với t và có hệ số chính là $a_n.2^{n-1}$. Ngược lại, với mọi đa thức $P_n(t)$ với hệ số chính bằng 1 thì từ phép đặt ẩn phụ $t=\cos x$ ta đều biến đổi về được đa thức $C_n(x)$ dạng (2.2) với $a_n=2^{1-n}$.

Bài toán 2.1.
Cho đa thức

$$f(x)=a_0+\sum_{j=1}^{k}(a_j\cos jx+b_j\sin jx),\ (k\geq 1) \tag{2.4}$$

và cho số α thỏa mãn điều kiện $n\alpha=2\pi$ với $n>k$. Chứng minh rằng

$$f(x+\alpha)+f(x+2\alpha)+\cdots+f(x+n\alpha)=na_0 \tag{2.5}$$

Bài toán 2.2.
Cho đa thức

$$f(x)=b_0+b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots+b_n\sin nx,\ b_n\neq 0,$$

thỏa mãn điều kiện

$$|f(x)|\leq|\sin x|\,,\forall x\in\mathbb{R}$$

Chứng minh rằng:

$$|b_1+2b_2+3b_3+\cdots+nb_n|\leq 1 \tag{2.6}$$

Bài toán 2.3.
Chứng minh rằng với mọi giá trị $a_k \in \mathbb{R}$, đa thức lượng giác

$$f(x) = \cos 2^n x + a_1 \cos(2^n - 1)x + a_2 \cos(2^n - 2)x + \cdots + a_m \cos x,\ (m = 2^n - 1) \tag{2.7}$$

không thể nhận giá trị cùng dấu.

Nhận xét 2.1.
Nếu sử dụng các đặc trưng tuần hoàn của các nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ dạng (2.7) thì $F(x)$ không thể là hàm thực sự đơn điệu và do đó đạo hàm của nó (chính là $f(x)$) không thể luôn luôn cùng dấu.

Bài toán 2.4.
Cho đa thức

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trong đó các số thực $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện $f_n(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, a_k^2 + b_k^2 = 1$, $(k \in \{1, 2, ..., n\})$

Chứng minh rằng

$$\frac{f_n(x) - n}{a_0} \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

2.2 Tổng và tích sinh bởi các đa thức lượng giác

Phần này bao gồm các bài toán sau:

Bài toán 2.5.
Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với công sai d . Tính các tổng
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin a\_k$ và $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos a\_k$

Bài toán 2.6.
Tính các tổng sau $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k \sin kx$ và $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cos kx$, với $x \neq 2l\pi, (l \in \mathbb{Z})$,

Bài toán 2.7.
Tính các tổng sau $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^n \sin(\alpha + k\beta)$ và $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^n \cos(\alpha + k\beta)$, trong đó q, α, β là những số thực cho trước.

Bài toán 2.8.

Tính tích sau đây:

$$P = \prod_{k=1}^{2011} \cos ka$$

biết $a = \dfrac{2\pi}{4023}$.

Bài toán 2.9.

Tính tích sau đây:

$$Q = \prod_{k=1}^{2011} \sin ka$$

biết $a = \dfrac{\pi}{4024}$.

2.3 Biểu diễn một số đa thức lượng giác đặc biệt

2.3.1 Định nghĩa đa thức Chebyshev

Định nghĩa 2.3.

Các đa thức $T_n(x) (n \in \mathbb{N})$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1;\ T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ \forall n > 1. \end{cases}$$

được gọi là đa thức Chebyshev (loại 1)

Định nghĩa 2.4.

Các đa thức $U_n(x) (n \in \mathbb{N})$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} U_0(x) = 0;\ U_1(x) = 1, \\ U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),\ \forall n > 1. \end{cases}$$

được gọi là đa thức Chebyshev (loại 2)

2.3.2 Tính chất của đa thức Chebyshev

A. Tính chất của đa thức $T_n(x)$

Tính chất 2.5.

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ với mọi $x \in [-1; 1]$

Tính chất 2.6.
$T_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ bậc n có hệ số bậc cao nhất bằng 2^{n-1} và là hàm chẵn khi n chẵn; là hàm lẻ khi n lẻ.

Tính chất 2.7.
$T_n(x)$ có đúng n nghiệm trên đoạn $[-1;1]$ là:

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi,\ (k = 0,\ 1,\ \cdot,\ n-1)$$

Tính chất 2.8.

$$|T_n(x)| \leq 1,\ \forall x \in [-1;1],$$

$|T_n(x)| = 1$ tại $n+1$ điểm $\overline{x} = \cos\dfrac{k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$
Các điểm $\overline{x}$ gọi là các nút nội suy Chebyshev và $T_n(\overline{x}) = (-1)^k$

B. Tính chất của đa thức $U_n(x)$

Tính chất 2.9.

$$U_n(x) = \frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{(1-x^2}},\ \forall x \in (-1;1).$$

Tính chất 2.10.

$$U_n(x) = \frac{1}{n}T'_n(x) = \frac{\sin nt}{\sin t},\ \cos t = x$$

là đa thức bậc $n-1$ có hệ số bậc cao nhất bằng 2^{n-1} và là hàm chẵn khi n lẻ; là hàm lẻ khi n chẵn.

Tính chất 2.11.

$$|U_n(x)| \leq n, \forall x \in [-1;1]$$

và

$$|T'_n(x)| \leq n^2,\ \forall x \in [-1;1]$$

Trường hợp $|x| \geq 1$, xét các hàm:

$$shx = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$chx = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

thì:

$$T_n(x) = ch(nt),\, U_n(x) = \frac{sh(nt)}{sht}$$

trong đó $x = cht$

Bài toán 2.10.
Chứng minh rằng đa thức $U_n(x)$ có đúng $n-1$ nghiệm thực phân biệt trong khoảng $(-1;1)$

Bài toán 2.11.
Chứng minh rằng:

$$U_n(x) = xU_{n-1}(x) + T_{n-1}(x),\, \forall n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

Bài toán 2.12.
Chứng minh rằng:

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - (1-x^2)U_n(x),\, \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

Bài toán 2.13.
Chứng minh rằng:

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0,\, \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

Bài toán 2.14.
Chứng minh rằng: $\forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m, x \in \mathbb{R}$ thì:

$$T_{m+n}(x) + xT'_{n-m}(x) = 2T_m(x)T_n(x)$$

Bài toán 2.15.
Chứng minh rằng: $\forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m, x \in \mathbb{R}$ thì:

$$T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$$

Chương 3

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐA THỨC LƯỢNG GIÁC

Khi giải phương trình đại số, nhiều khi ta gặp những phương trình rất khó giải do kỹ thuật biến đổi phức tạp, trong số các phương trình đó có nhiều phương trình có thể chuyển về phương trình lượng giác thì việc giải sẽ dễ dàng hơn. Việc chuyển từ phương trình đại số về phương trình lượng giác được gọi là "lượng giác hóa các phương trình đại số". Do giới hạn của luận văn nên chương này chỉ trình bày phương pháp lượng giác trong việc giải phương trình đa thức và phương trình vô tỷ. Phần còn lại là phép tính và ước lượng trên đa thức đại số và định lý Bernstien - Markov.

3.1 Phương trình đa thức giải bằng phương pháp lượng giác

3.1.1 Giải trực tiếp phương trình bậc ba và bậc bốn không qua số phức

3.1.1.1. Giải phương trình bậc ba

Trước hết ta xét một số dạng phương trình đặc biệt.

Bài toán 3.1.
Giải phương trình:
$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 3.2.
Giải và biện luận phương trình:
$$4x^3 - 3x = m, m \in \mathbb{R}$$

Bài toán 3.3.
Giải và biện luận phương trình:
$$4x^3 + 3x = m, m \in \mathbb{R}$$

Tiếp đến ta xét phương trình bậc ba tổng quát hơn.

Bài toán 3.4.
Giải và biện luận phương trình:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

3.1.1.2. Giải phương trình bậc bốn

Bài toán 3.5.
Giải phương trình:

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0$$

3.1.2 Một số phương trình bậc cao giải được bằng phương pháp lượng giác

Bài toán 3.6. (Đề nghị OLYMPIC 30/4/2009)
Giải phương trình:

$$64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0$$

Bài toán 3.7.
Chứng minh rằng phương trình:

$$64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0$$

có nghiệm thực $x = x_0$ thỏa bất đẳng thức:

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} < x_0 < \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

Bài toán 3.8.
Giải phương trình:

$$x^5 - 15x^3 + 45x - 27 = 0$$

Bài toán 3.9. (Đề nghị OLYMPIC 30/4/2008)
Giải phương trình:

$$16x^6 - 16x^5 - 20x^4 + 20x^3 + 5x^2 + 2x - 7 = 0 \qquad (3.1)$$

Bài toán 3.10.
Cho đa thức lượng giác $P_n(\cos x) = \cos nx$, với $n \geq 2$
a) Hãy xác định đa thức $P_n(t)$ với $t = \cos x$
b) Giải và biện luận phương trình $P_n(t) = m$

Nhận xét 3.1.

Trong một số phương trình bậc cao ở trên, ta thường quy về dạng $\cos mx = \cos nx$ hoặc $\sin mx = \sin nx$, hoặc các phương trình đại số liên quan đến đồng nhất thức đại số, vì chúng có xuất xứ những công thức lượng giác hoặc các đồng nhất thức đại số có xuất xứ từ hàm lượng giác Hyperbolic. Do đó, việc tạo ra các phương trình như trên là hoàn toàn tự nhiên. Để minh họa cho nhận xét này, xin nêu ra đây một số ví dụ.

Ví dụ 3.1.

Từ công thức

$$\sin 5t = 16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t$$

Lấy $x = \sin t$ và chọn $5t = \dfrac{\pi}{6}$, ta được phương trình:

$$32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0$$

Nếu lấy $2x = \cos t$ và $5t = \dfrac{\pi}{3}$, ta đi đến phương trình:

$$1024x^5 - 320x^3 + 20x - \sqrt{3} = 0$$

Ta xét tiếp một ví dụ khác

Ví dụ 3.2.

Từ đồng nhất thức $\dfrac{1}{2}\left(a^5 - \dfrac{1}{a^5}\right) = 16m^5 + 20m^3 + 5m$,

trong đó $m = \dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right), a \neq 0$

Đặt $m = x$ và lấy $\dfrac{1}{2}\left(a^5 - \dfrac{1}{a^5}\right) = \sqrt{2}$, ta có bài toán sau:

Giải phương trình:

$$16x^5 + 20x^3 + 5x - \sqrt{2} = 0$$

Như vậy, với cách làm trên đây, ta có thể tạo ra nhiều bài toán giải phương trình đa thức khác nữa. Việc giải các bài toán này phụ thuộc vào cách biến đổi và nhận dạng đặc trưng hàm để vận dụng phương pháp giải. Hay nói cách khác là cần phải biết xuất xứ bài toán.

3.2 Phương trình vô tỷ giải bằng phương pháp lượng giác

Bài toán 3.11.

Giải phương trình

$$x^3 + \sqrt{\left(1 - x^2\right)^3} = x\sqrt{2\left(1 - x^2\right)}$$

Bài toán 3.12. OLYMPIC 30/4/2011
Giải phương trình:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$$

Bài toán 3.13. (Crux Mathematicorum 1996, Vol.22, No.4, Problem M 2150)
Giải phương trình:

$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$$

Bài toán 3.14. (Mathematicorum Excalibur Vol.8, No.5, 2003)
Giải phương trình:

$$x^3-3x=\sqrt{2+x}$$

Bài toán 3.15.
Giải phương trình:

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{x}{4x^2-1}$$

Bài toán 3.16.
Giải phương trình:

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2x^2$$

Nhận xét 3.2.

Trong suốt mục này, phần lớn ta lượng giác hóa các phương trình vô tỷ về dạng $\sin mx=\cos nx$, từ đây, ta sẽ tìm được nghiệm của phương trình. Ngược lại, xuất phát từ phương trình lượng giác $\sin mx=\cos nx$, ta sẽ tạo ra được một lớp các bài toán là những phương trình vô tỷ. Chẳng hạn, xét các ví dụ sau đây

Ví dụ 3.3.

Từ phương trình $\sin 5t=\cos 3t$, với $t\in[0;\pi]$, ta biến đổi phương trình về dạng

$$\begin{aligned}
&16\sin^5 t-20\sin^3 t+5\sin t=4\cos^3 t-3\cos t\\
\Leftrightarrow\ &\sin t\left(16\sin^4 t-20\sin^2 t+5\right)=4\cos^3 t-3\cos t\\
\Leftrightarrow\ &\sin t\left[16\left(1-\sin^2 t\right)^2-12\left(1-\sin^2 t\right)+1\right]=4\cos^3 t-3\cos t\\
\Leftrightarrow\ &\sin t\left(16\cos^4 t-12\cos^2 t+1\right)=4\cos^3 t-3\cos t
\end{aligned}$$

Lấy $x=\cos t$, ta có bài toán sau:
Giải phương trình:

$$\sqrt{1-x^2}\left(16x^4-12x^2+1\right)=4x^3-3x$$

Ta có thể xét tiếp một ví dụ khác.

Ví dụ 3.4.

Từ phương trình $\sin t = \cos 3t$, với $t \in [0; \pi]$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{1-\cos^2 t} = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

Đặt $x = \cos t$, ta được bài toán:
Giải phương trình

$$4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$$

Đây là bài toán đề nghị Olympic 30/4/2003 - toán 10.
Nhưng nếu ta thay x bởi $x-1$ thì được bài toán khó hơn là:
Giải phương trình:

$$4x^3 - 12x^2 + 9x - 1 = \sqrt{2x-x^2}$$

3.3 Ước lượng đa thức đại số trên một khoảng và định lý Bernstein - Markov

Bài toán ước lượng đa thức gồm nhiều dạng toán khác nhau, như ước lượng miền giá trị của đa thức trên một tập cho trước, ước lượng các hệ số của đa thức, ước lượng nghiệm của đa thức, ước lượng các giá trị của đạo hàm,$\cdots$. Trong phần này, ta có sử dụng công thức nội suy Lagrange, vậy trước hết, xin nêu lại công thức này.

Đồng nhất thức Lagrange

Cho $f(x)$ là đa thức có bậc không quá n và $n+1$ số thực $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ đôi một khác nhau thì ta có đồng nhất thức sau:

$$\begin{aligned} f(x) = f(\alpha_1)\,.&\frac{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)...(\alpha_1-\alpha_{n+1})} + \cdots \\ &+ f(\alpha_{n+1})\,.\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)}{(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)\cdots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)} \end{aligned}$$

Hay

$$f(x) = \sum_{j}^{n+1} f(\alpha_j) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n+1} \frac{x-\alpha_i}{\alpha_j-\alpha_i}$$

Ví dụ 3.5.

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa điều kiện

$$|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$$

Chứng minh rằng với mọi $M \geq 1$ ta có $|f(x)| \leq 2M^2 - 1$ với mọi x thỏa $|x| \leq M$

Ví dụ 3.6.

Cho n số thực $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < r_1 + 1$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |r_i - r_j|} \geq 2^{2n-3}$$

Bài toán 3.17.

Cho nhị thức $f(x) = ax + b$ thỏa điều kiện

$$\sqrt{1-x^2}\,|ax+b| \leq 1, \forall x \in [-1;1]$$

Chứng minh rằng khi đó ta luôn có $|a| \leq 2$

Bài toán 3.18.

Cho nhị thức $f(x) = ax + b$ thỏa điều kiện

$$\sqrt{1-x^2}\,|ax+b| \leq 1, \forall x \in [-1;1]$$

Chứng minh rằng khi đó ta luôn có $|f(x)| \leq 2, \forall x \in [-1;1]$

Bài toán 3.19.

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa điều kiện

$$\sqrt{1-x^2}\left|ax^2+bx+c\right| \leq 1, \forall x \in [-1;1]$$

Chứng minh rằng khi đó ta luôn có $|a| \leq 4$

Tiếp theo, ta xét bài toán với công thức tổng quát.

Bài toán 3.20.

Cho đa thức $P_{n-1}(x)$ có bậc bé hơn hoặc bằng $n-1$ và hệ số bậc cao nhất là a_0, thỏa điều kiện

$$\sqrt{1-x^2}\,|P_{n-1}(x)| \leq 1, \forall x \in [-1;1]$$

Chứng minh rằng: $|a_0| \leq 2^{n-1}$

Bài toán 3.21.

Cho đa thức $P_{n-1}(x)$ có bậc bé hơn hoặc bằng n và hệ số bậc cao nhất là a_0, thỏa điều kiện

$$\sqrt{1-x^2}\,|P_{n-1}| \leq 1, \forall x \in [-1;1]$$

Chứng minh rằng: $|P_{n-1}(x)| \leq n, \forall x \in [-1;1]$

Áp dụng kết quả này, với $n = 3$ ta có:
Nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa điều kiện

$$\sqrt{1-x^2}\left|ax^2 + bx + c\right| \le 1, \forall x \in [-1;1]$$

Thì $|f(x)| \le 3$

Bài toán 3.22.
Cho đa thức $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ thỏa điều kiện $|P(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$. Chứng minh rằng

$$\left|a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0\right| \le 2^{n-1}, \forall x \in [-1;1]$$

Nhận xét: Khi $n = 2$ ta có bài toán sau

Bài toán 3.23. (Liên Xô, 1973)
Cho $\left|ax^2 + bx + c\right| \le 1, \forall x \in [-1;1]$. Chứng minh rằng:

$$\left|cx^2 + bx + a\right| \le 2, \forall x \in [-1;1]$$

Bài toán 3.24.
Cho đa thức lượng giác

$$P(t) = a_1 \sin t + a_2 \sin 2t + \cdots + a_n \sin nt$$

Thỏa mãn điều kiện

$$|P(t)| \le 1,\ \forall t \in R\backslash\left\{\cdots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\right\}$$

Chứng minh rằng

$$\left|\frac{P(t)}{\sin t}\right| \le 1,\ \forall t \in R\backslash\left\{\cdots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\right\}$$

Bài toán 3.25.
Cho đa thức lượng giác

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n}\left(a_j \cos jx + b_j \sin \mathrm{j}x\right)$$

thỏa mãn điều kiện $|P(x)| \le 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Chứng minh rằng $|P'(x)| \le n$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Bài toán 3.26. (Định lý Bernstein - Markov)
Cho đa thức

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

Thỏa mãn điều kiện $|P_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$
Chứng minh rằng:

$$\left|P_n'(x)\right| \leq n^2, \forall x \in [-1; 1] \tag{3.2}$$

Nhận xét:

Sau khi áp dụng liên tiếp kết quả này, ta thu được kết quả
Nếu đa thức $P(x)$ thỏa điều kiện

$$|P_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$$

Thì

$$\left|P^{(k)}\left(x\right)\right| \leq \left[n\left(n-1\right)\left(n-2\right)...\left(n-k+1\right)\right]^2, \forall x \in [-1; 1]$$

KẾT LUẬN

Luận văn này được trình bày theo hướng hệ thống các kiến thức về đa thức lượng giác, đồng thời dựa trên cơ sở đó sẽ đặc biệt khai thác sâu hơn về một số ứng dụng của đa thức lượng giác trong đại số.

Trong chương một, tác giả trình bày một số kiến thức cơ sở, đặc biệt là các đồng nhất thức đại số sinh bởi các hàm số lượng giác mà chủ yếu là liên quan đến hàm cos và hàm sin, bên cạnh đó là một số ví dụ áp dụng.

Trong chương hai, tác giả trình bày các kiến thức về đa thức lượng giác, đến cuối chương là phần biểu diễn của một số đa thức đặc biệt, đó chính là đa thức Chebyshev, bao gồm đa thức $T_n(x)$ và đa thức $U_n(x)$.

Chương ba là chương ứng dụng, nên phần trình bày các bài toán ứng dụng theo thứ tự từ những bài toán cơ bản đến những bài toán có độ khó tăng dần, và tác giả cũng đã dành nhiều thời lượng cho chương này. Trong phần đầu của chương, tác giả trình bày cách giải phương trình bậc ba bằng phương pháp lượng giác, sau đó là giải một số phương trình bậc cao có xuất xứ từ các hàm lượng giác. Tiếp theo đó là ứng dụng phương pháp lượng giác trong việc giải các phương trình vô tỷ. Cũng trong hai phần ứng dụng này, sau khi trình bày các phương pháp giải, tác giả đã chỉ ra xuất xứ của những dạng toán này, đồng thời nêu lên cách tạo ra những phương trình đa thức hay phương trình vô tỷ dựa trên các công thức lượng giác. Đối với phần ước lượng đa thức bao gồm những bài toán mang tính tổng quát hơn và cuối cùng là định lý Bernstein-Markov nói lên mối quan hệ giữa đa thức và đạo hàm của nó.

Trong quá trình làm luận văn, tác giả cũng đã có nhiều cố gắng, song vẫn chưa khai thác hết những vấn đề liên quan đến luận văn, cụ thể là phần đảo lại của định lý Bersntein-Markov. Hi vọng trong thời gian tới, tác giả sẽ tiếp tục khai thác sâu hơn và hoàn chỉnh hơn cho đề tài này.