

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG**

TRẦN THỊ PHƯƠNG

CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA ĐẠI SỐ BOOLE

**Chuyên ngành : Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số : 60.46.40**

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: PGS.TS. NGUYỄN GIA ĐỊNH

Đà Nẵng - Năm 2011

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong đại số trừu tượng, đại số Boole là một cấu trúc đại số với ba phép toán: nhân ($x.y$), cộng ($x+y$) và lấy bù ($\bar{x}$) thỏa mãn một hệ các tiên đề nào đó. Cụ thể, ta có đại số Boole tập hợp với các phép toán giao $A \cap B$, hợp $A \cup B$, lấy bù ($\bar{A}$), đại số Boole logic với các phép toán hội-AND ($p \wedge q$), tuyển-OR ($p \vee q$), phủ định-NOT ($\bar{p}$), đại số Boole $\mathcal{B}^n$ các xâu nhị phân độ dài n với các phép toán AND-bit, OR-bit, NOT-bit.

Đại số Boole làm việc với các đại lượng chỉ nhận các giá trị Đúng hoặc Sai và có thể thể hiện hệ thống nhị phân, hoặc mức điện thế trong mạch logic. Do đó đại số Boole có nhiều ứng dụng trong kỹ thuật điện và khoa học máy tính, cũng như trong logic toán học.

Các mạch điện trong máy tính và các dụng cụ điện tử khác đều có các đầu vào, mỗi đầu vào là số 0 hoặc số 1, hoặc tạo ra các đầu ra cũng là 0 và 1. Các mạch điện đó đều có thể xây dựng bằng cách dùng bất kỳ một phần tử cơ bản nào có hai trạng thái khác nhau. Chúng bao gồm các chuyển mạch có thể ở hai vị trí mở hoặc đóng và các dụng cụ quang học có thể là sáng hoặc tối. Năm 1938 Claude Shannon chứng tỏ rằng có thể dùng quy tắc cơ bản của logic do George Boole đưa ra vào năm 1854 trong cuốn “ Các quy luật của tư duy” của ông để thiết kế các mạch điện. Các quy tắc này đã tạo nên cơ sở của đại số Boole. Sự hoạt động của một mạch điện được xác định bởi một hàm Boole chỉ rõ giá trị của đầu ra đối với mỗi tập đầu vào. Bước đầu tiên trong việc xây dựng một mạch điện là biểu diễn hàm Boole của nó bằng một biểu thức được lập bằng cách dùng các phép toán cơ bản của đại số Boole. Biểu thức mà ta sẽ nhận được có thể chứa nhiều phép toán hơn mức cần thiết để biểu diễn hàm đó. Ta sẽ có

các phương pháp tìm một biểu thức với số tối thiểu các phép tổng và tích được dùng để biểu diễn hàm Boole. Các thủ tục được mô tả là bản đồ Karnaugh và phương pháp Quine-McCluskey, chúng đóng vai trò quan trọng trong việc thiết kế các mạch điện có hiệu quả cao.

Xuất phát từ nhu cầu phát triển của đại số Boole và những ứng dụng của nó chúng tôi quyết định chọn đề tài với tên : ***Các đặc trưng của đại số Boole*** để tiến hành nghiên cứu. Chúng tôi hy vọng tạo được một tài liệu tham khảo tốt cho những ai muốn nghiên cứu về đại số Boole và hy vọng tìm ra được một số ví dụ minh họa đặc sắc góp phần làm phong phú thêm kết quả trong lĩnh vực này.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu của đề tài nhằm nghiên cứu về cấu trúc và các tính chất của đại số Boole, hàm Boole và cực tiểu hóa hàm Boole.

3. Phương pháp nghiên cứu

1. Thu thập các bài báo khoa học của các tác giả nghiên cứu liên quan đến *đại số Boole* và *hàm Boole*.

2. Tham gia các buổi seminar hàng tuần để trao đổi các kết quả đang nghiên cứu.

4. Đóng góp của đề tài

1. Tổng quan các kết quả của các tác giả nghiên cứu liên quan đến *Đặc trưng của đại số Boole* nhằm xây dựng một tài liệu tham khảo cho những ai muốn nghiên cứu *Đại số Boole*.

2. Chứng minh chi tiết và làm rõ một số mệnh đề cũng như đưa ra một số ví dụ minh họa đặc sắc nhằm làm cho người đọc dễ dàng tiếp cận vấn đề được đề cập.

5. Bố cục luận văn

Ngoài các phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, phần nội dung chính của luận văn gồm 2 chương:

Chương 1: Trình bày một số khái niệm tiền đề của đại số Boole, đó là khái niệm Dàn, khái niệm đại số Boole, cấu trúc đại số Boole và Dàn modular đầy đủ.

Chương 2: Chương này sẽ đi nghiên cứu sâu về hàm Boole, xây dựng hàm Boole, mạch logic, phương pháp xây dựng hàm Boole theo yêu cầu từ các mạch logic và giới thiệu phương pháp cực tiểu hóa mạch logic. Bao gồm 2 phương pháp: phương pháp bản đồ Karnaugh và phương pháp Quine-McCluskey.

CHƯƠNG 1

ĐẠI SỐ BOOLE

Các khái niệm và kết quả trong chương này có thể tìm thấy trong các tài liệu [2], [4], [6], [9].

1.1. SƠ LƯỢC VỀ DÀN

Định nghĩa 1.1.1. Một tập hợp S gọi là được sắp thứ tự bộ phận nếu nó được trang bị một quan hệ $\leq$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

- (i) $a \leq a$ với mọi $a \in S$ (tính phản xạ);
- (ii) $a \leq b$ và $b \leq c$ kéo theo $a \leq c$ với mọi $a, b, c \in S$ (tính bắc cầu);
- (iii) $a \leq b$ và $b \leq a$ kéo theo $a = b$ với mọi $a, b \in S$ (tính phản đối xứng);

Quan hệ $\leq$ được gọi là một thứ tự bộ phận.

Chú ý 1.1.1. Ta viết $b \geq a$ có nghĩa là $a \leq b$. Khi đó $\geq$ cũng là một quan hệ thứ tự bộ phận. Trong lý thuyết tập hợp được sắp thứ tự bộ phận, tồn tại một kết quả hữu ích được biết là "nguyên lý đối ngẫu".

Nếu trong định lý bất kỳ về tập được sắp thứ tự bộ phận ta thay quan hệ $\leq$ bởi quan hệ $\geq$ ta được một định lý cũng đúng.

Định nghĩa 1.1.2. Cho S là một tập được sắp thứ tự bộ phận và T là một tập con của S . Một phần tử $a \in S$ được gọi là một chặn trên (t.ư chặn dưới) của T nếu $t \leq a$ (t.ư $a \leq t$) với mọi $t \in T$. Nói chung, một tập có thể có nhiều chặn trên (t.ư chặn dưới) hoặc có thể không có.

Một phần tử $a \in T$ được gọi là phần tử lớn nhất (t.ư nhỏ nhất) của T nếu $t \leq a$ (t.ư $a \leq t$) với mọi $t \in T$. Không phải một tập con T nào của S đều có phần tử lớn nhất (hoặc nhỏ nhất). Nhưng nếu T có một phần tử như thế thì nó là duy nhất. Thật vậy, giả sử x và y là hai phần tử lớn nhất của T . Khi đó $x \leq y$ và $y \leq x$. Do tính phản đối xứng kéo theo $x = y$. Tính duy nhất của phần tử nhỏ nhất của

T được chứng minh tương tự. Vì vậy phần tử lớn nhất (t.ư nhỏ nhất), nếu tồn tại, là duy nhất và là một chặn trên (t.ư chặn dưới) đối với T . Nếu tập hợp các chặn trên của T có phần tử nhỏ nhất thì nó được gọi là cận trên hay supremum của T và ký hiệu là $\sup(T)$. Nếu tập hợp các chặn dưới có phần tử lớn nhất, nó được gọi là cận dưới hay infimum của T và ký hiệu là $\inf(T)$. Rõ ràng rằng nếu một tập con T có một supremum(t.ư infimum) thì nó được xác định duy nhất.

Định nghĩa 1.1.3. Một tập được sắp thứ tự bộ phận S mà mỗi cặp phần tử của nó vừa có supremum vừa có infimum trong S , được gọi là một dàn.

Chú ý 1.1.2. Các phép toán $\sup$ và $\inf$ không thật sự là những phép toán hai ngôi đối với tập được sắp thứ tự bộ phận bất kỳ. Nhưng điều này là đúng đối với một dàn.

Cho S là một dàn. Khi đó mỗi cặp $a, b \in S$ có supremum và infimum. Ta ký hiệu

$$(1.1.1) \quad a \vee b = \sup\{a, b\} \text{ và } a \wedge b = \inf\{a, b\}.$$

Khi đó các ánh xạ $\vee$ và $\wedge$ từ $S \times S$ vào S xác định bởi

$$(a, b) \mapsto a \vee b \text{ và } (a, b) \mapsto a \wedge b$$

là các phép toán hai ngôi trên S .

Mệnh đề sau đây cho nhiều tính chất thú vị của các phép toán này.

Mệnh đề 1.1.1. Cho S là một dàn với hai phép toán $\wedge$ và $\vee$ xác định bởi

(1.1.1). Khi đó với mọi $a, b, c \in S$, ta có các tính chất sau:

$$1) \text{ Luật giao hoán: } a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a;$$

$$2) \text{ Luật kết hợp: } (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c);$$

$$3) \text{ Luật lũy đẳng: } a \vee a = a, \quad a \wedge a = a;$$

$$4) \text{ Luật hấp thụ: } a \vee (a \wedge b) = a, \quad a \wedge (a \vee b) = a.$$

Mệnh đề sau đây chứng tỏ rằng các tính chất này thật sự đặc trưng cho một dàn.

Mệnh đề 1.1.2. Nếu ta có một tập S với hai phép toán $\vee$ và $\wedge$ sao cho với mọi phần tử $a, b, c \in S$, ta có:

$$(i) \quad a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a;$$

$$(ii) \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$(iii) \quad a \vee a = a, \quad a \wedge a = a;$$

$$(iv) \quad a \vee (a \wedge b) = a, \quad a \wedge (a \vee b) = a.$$

thì tồn tại duy nhất một quan hệ thứ tự bộ phận trên S làm cho S trở thành một dàn và sao cho các phép toán được cho “ $\vee$ ” và “ $\wedge$ ” tương ứng là supremum và infimum trong dàn.

Định nghĩa 1.1.4. Một dàn S được gọi là phân phối nếu nó thỏa mãn tính chất sau đây:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad \text{với mọi } a, b, c \in S$$

Sử dụng “nguyên lý đối ngẫu” dễ dàng có được một định nghĩa đối xứng:

Mệnh đề 1.1.3. Một dàn S là phân phối khi và chỉ khi với mọi $a, b, c \in S$ nó thỏa mãn tính chất sau:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Định nghĩa 1.1.5. Cho S là một dàn với phần tử lớn nhất là 1 và phần tử nhỏ nhất là 0.

Một phần tử $b \in S$ được gọi là bù của phần tử $a \in S$ nếu $a \vee b = 1$ và $a \wedge b = 0$.

Định nghĩa 1.1.6. Một dàn được gọi là bù nếu nó có phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất và mỗi phần tử của nó có ít nhất một phần tử bù.

1.2 ĐẠI SỐ BOOLE

Ta định nghĩa một dàn như là một kiểu đặc biệt của một tập được sắp thứ tự bộ phận. Bây giờ ta sẽ chỉ ra một đại số Boole là một kiểu đặc biệt của một dàn.

Định nghĩa 1.2.1. Một đại số Boole là một dàn phân phối bù được.

Dễ dàng chứng tỏ rằng mỗi phần tử của đại số Boole có đúng một phần tử bù. Thật vậy, giả sử b và c là hai phần tử bù của phần tử a . Khi đó

$$\begin{aligned} b &= b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) \\ &= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c = 1 \wedge c = c \end{aligned}$$

Ta sẽ dùng $\bar{a}$ để ký hiệu bù của một phần tử a trong một đại số Boole.

Ví dụ 1.2.1. Xét tập hợp $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ với phép toán logic thông thường là tuyển $\vee$ và hội $\wedge$:

$$0 \vee 0 = 0, 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$$

Và phép lấy bù $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$. Rõ ràng trong trường hợp này ta có thể viết $a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$ và $\bar{a} = 1 - a$ với bất kỳ $a, b \in \mathcal{B}$. Khi đó $\mathcal{B}$ với các phép toán này là một đại số Boole.

Ví dụ 1.2.2. Xét một tích trực tiếp hữu hạn $\mathcal{B}^n = \mathcal{B} \times \dots \times \mathcal{B}$, là tập hợp các n -bộ thứ tự $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, với $b_i \in \mathcal{B}$. Ở đây, $\mathcal{B}^n$ chính là tập hợp các chuỗi nhị phân độ dài n .

Cho $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ là những phần tử của $\mathcal{B}^n$. Xét các phép toán “theo từng tọa độ” trên $\mathcal{B}^n$:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_n) \vee (b_1, b_2, \dots, b_n) &= (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2, \dots, a_n \vee b_n) \\ (a_1, a_2, \dots, a_n) \wedge (b_1, b_2, \dots, b_n) &= (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2, \dots, a_n \wedge b_n) \\ \overline{(a_1, a_2, \dots, a_n)} &= (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \end{aligned}$$

Khi đó $\mathcal{B}^n$ là một đại số Boole với phần tử lớn nhất là $1 = (1, 1, \dots, 1)$ và phần tử nhỏ nhất là $0 = (0, 0, \dots, 0)$. Số tất cả các phần tử trong $\mathcal{B}^n$ bằng 2^n .

Mệnh đề 1.2.1. Trong đại số Boole bất kỳ thì các phép lấy bù đều thỏa mãn các tính chất sau đây:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \bar{\bar{a}} = a \\ (b) \quad & \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b} \\ (c) \quad & \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b} \\ (d) \quad & a \vee b = \overline{\bar{a} \wedge \bar{b}} \end{aligned}$$

$$(e) \quad a \wedge b = \overline{\overline{a \vee b}}$$

$$(f) \quad \overline{1} = 0$$

$$(g) \quad \overline{0} = 1$$

Mệnh đề 1.2.2. Nếu có một tập S chứa 2 phần tử đặc biệt là 1 và 0 với 2 phép toán hai ngôi $\vee$ và $\wedge$ sao cho với mọi phần tử $a, b, c \in S$, ta có:

$$(i) \quad a \vee b = b \vee a; \quad a \wedge b = b \wedge a;$$

$$(ii) \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c); \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c);$$

$$(iii) \quad a \vee a = a; \quad a \wedge a = a;$$

$$(iv) \quad a \vee (a \wedge b) = a; \quad a \wedge (a \vee b) = a;$$

$$(v) \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

$$(vi) \quad \text{Với bất kỳ } a \in S, \text{ tồn tại một phần tử } \overline{a} \in S \text{ sao cho } a \vee \overline{a} = 1 \text{ và } a \wedge \overline{a} = 0,$$

thì tồn tại duy nhất một quan hệ thứ tự bộ phận trên S làm cho S trở thành một đại số Boole và sao cho các phép toán được cho “ $\vee$ ” và “ $\wedge$ ” tương ứng là supremum và infimum trong đại số Boole này. Ngoài ra, 1 và 0 tương ứng là phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của S và $\overline{a}$ là phần tử bù của a .

Bổ đề 1.2.1. Trong một đại số Bool B bất kỳ điều kiện $a \vee b = b$ xảy ra khi và chỉ khi điều kiện $a \wedge b = a$ xảy ra.

Bổ đề 1.2.2. Trong bất kỳ đại số Boole B bất kỳ, ta luôn có:

$$1. \quad a \wedge b \leq a \leq a \vee b;$$

$$2. \quad 0 \leq a \leq 1;$$

với bất kỳ $a, b \in B$.

Định nghĩa 1.2.2. Một phần tử $a \neq 0$ của đại số Boole được gọi là một nguyên tố nếu nó không thể được biểu diễn dưới dạng $a = b \vee c$ với $a \neq b$ và $a \neq c$.

Bổ đề 1.2.3. Một phần tử khác không a của một đại số Boole $\mathbf{B}$ là một nguyên tố khi và chỉ khi bất đẳng thức $x \leq a$ có đúng 2 nghiệm $x = a$ và $x = 0$.

Bổ đề 1.2.4. Với bất kỳ phần tử khác không b của một đại số Boole hữu hạn $\mathbf{B}$, tồn tại ít nhất một nguyên tố $a \in \mathbf{B}$ sao cho $a \leq b$.

Mệnh đề 1.2.3. Một phần tử khác không bất kỳ x trong đại số Boole hữu hạn $\mathbf{B}$ có thể được viết thành một tổng hữu hạn các nguyên tố phân biệt:

$$(1.2.2) \quad x = a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \dots \vee a_{i_k}$$

Trong đó $a_{i_j} \in T(x)$, $j = 1 \dots k$. Ngoài ra, sự phân tích này là duy nhất sai khác thứ tự của các phần tử của nó và

$$T(x) = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$$

Bổ đề 1.2.5. Với bất kỳ một đại số Boole hữu hạn $\mathbf{B}$ và bất kỳ $x, y \in \mathbf{B}$, ta luôn có:

$$(i) \quad T(x \vee y) = T(x) \cup T(y)$$

$$(ii) \quad T(x \wedge y) = T(x) \cap T(y)$$

$$(iii) \quad T(\overline{x}) = \overline{T(x)}$$

Bổ đề 1.2.6. Cho $\mathbf{B}$ là một đại số Boole hữu hạn. Khi đó với mọi $x \in \mathbf{B}$, ta luôn có $\sup T(x) = x$.

Từ tính duy nhất của supremum đối với một tập bất kỳ, ta có được kết quả sau đây.

Hệ quả 1.2.1. $T(x) = T(y)$ khi và chỉ khi $x = y$

Định nghĩa 1.2.3. Với hai đại số Boole $\mathbf{B}_1$ và $\mathbf{B}_2$, một song ánh φ từ $\mathbf{B}_1$ lên $\mathbf{B}_2$ được gọi là một đẳng cấu đại số Boole nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

$$1) \quad \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y);$$

$$2) \quad \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y);$$

$$3) \quad \varphi(\overline{x}) = \overline{\varphi(x)}, \text{ với mọi } x, y \in \mathbf{B}_1.$$

Định lý 1.2.1. Một đại số Boole hữu hạn bất kỳ $\mathbf{B}$ với tập các nguyên tố $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ có kích thước n là đẳng cấu với đại số Boole $\mathcal{P}(A)$ gồm tất cả các tập con của

tập được cho A . Đặc biệt, $\mathbf{B}$ có 2^n phần tử và phần tử 1 của $\mathbf{B}$ có một phân tích duy nhất thành tổng của mọi nguyên tố phân biệt

$$(1.2.3) \quad 1 = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$$

Định lý 1.2.1 là một trường hợp đặc biệt của định lý Stone nổi tiếng mà chứng minh của nó có thể tìm thấy trong cuốn sách *R. Sikorsky, Boolean algebras, Springer, 1964*:

Định lý 1.2.2 (Định lý Stone). Một đại số Boole bất kỳ đẳng cấu với đại số Boole gồm một số (không nhất thiết tất cả) tập con của một tập được cho.

Định lý 1.2.3. Nếu $\mathbf{B}_1$ và $\mathbf{B}_2$ là 2 đại số Boole hữu hạn các tập các nguyên tố của nó tương ứng là $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ và $A_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, thì tồn tại một đẳng cấu đại số Boole φ từ $\mathbf{B}_1$ lên $\mathbf{B}_2$ sao cho $\varphi(a_i) = b_i$ với $i = 1, \dots, n$.

Xét đại số Boole $\mathcal{B}^n$. Nó có đúng n nguyên tố và có 2^n phần tử. Mặt khác, $\mathcal{B}^n$ là một tích trực tiếp hữu hạn của n bản sao của đại số Boole đơn $\mathcal{B}$. Vì vậy ta có hệ quả sau.

Hệ quả 1.2.2 Bất kỳ một đại số Boole $\mathbf{B}$ nào có n nguyên tố thì đẳng cấu với đại số Boole $\mathcal{B}^n$.

1.3 VÀNH BOOLE

Định nghĩa 1.3.1. Một vành kết hợp $\mathcal{R}$ (có thể không có đơn vị) được gọi là vành Boole nếu mỗi phần tử của nó $a \in \mathcal{R}$ đều là một phần tử lũy đẳng ($a^2 = a$).

Mệnh đề 1.3.1.

1. Mỗi vành Boole $\mathcal{R}$ là giao hoán và $a + a = 0$ với mọi $a \in \mathcal{R}$
2. Nếu $\mathcal{R}$ là một vành Boole thì tổng trực tiếp $\tau = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{R}$ gồm các bản sao của $\mathcal{R}$ cũng là một vành Boole.

Mệnh đề 1.3.2. Cho $\mathbf{B}$ là một đại số Boole. Khi đó $\mathbf{B}$ trở thành một vành Boole có đơn vị nếu các phép toán hai ngôi cộng và nhân được xác định trên $\mathbf{B}$ bởi:

$$a + b = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$$

$$a.b = (a \wedge b)$$

Mệnh đề 1.3.3. Cho $\mathcal{R}$ là một vành Boole có đơn vị. Khi đó $\mathcal{R}$ trở thành một đại số Boole nếu ta đặt:

$$a \vee b = a + b + ab$$

$$a \wedge b = a.b$$

và quan hệ thứ tự “ $\leq$ ” được định nghĩa trên $\mathcal{R}$ bởi::

$$a \leq b \Leftrightarrow ab = a$$

Định lý 1.3.1. Một vành Boole hữu hạn bất kỳ $\mathcal{R}$ có đơn vị đẳng cấu với một tổng trực tiếp của các vành Boole đơn.

1.4 DÀN MÔĐULA ĐẦY ĐỦ

Định nghĩa 1.4.1. Một tập được sắp thứ tự bộ phận S , trong đó mỗi tập con của S có cả supremum và infimum trong S , được gọi là dàn đầy đủ.

Mệnh đề 1.4.1. Một tập được sắp thứ tự bộ phận là một dàn đầy đủ khi và chỉ khi S có supremum và mọi tập con khác rỗng của S đều có infimum trong S .

Định nghĩa 1.4.2. Một dàn S được gọi là môđular nếu thỏa mãn đầy đủ điều kiện của môđula:

$$(1.4.1) \quad \text{Nếu } b \leq a \text{ thì } a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c), \text{ với mọi } a, b, c \in S$$

Mệnh đề 1.4.2. Các iđêan trong một vành tạo thành một dàn môđula đầy đủ đối với phép bao hàm iđêan.

Định lý 1.4.1. Các iđêan trong một vành nửa đơn A tạo thành một đại số Boole hữu hạn gồm 2^s phần tử.

CHƯƠNG 2

HÀM BOOLE

VÀ CỰC TIỂU HÓA HÀM BOOLE

Các khái niệm và kết quả trong chương này có thể tìm thấy trong các tài liệu [1], [2], [3], [4], [5].

2.1. HÀM BOOLE

Định nghĩa 2.1.1. Ký hiệu $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ và $\mathcal{B}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathcal{B}, 1 \leq i \leq n\}$, ở đây $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}^n$ là các đại số Boole như trong Ví dụ 1.2.1 và Ví dụ 1.2.2, với phép cộng (+) thay cho phép toán $\vee$ và phép nhân (.) thay cho phép toán $\wedge$. Biến x được gọi là một biến Boole nếu nó nhận các giá trị chỉ từ $\mathcal{B}$. Một hàm từ $\mathcal{B}^n$ vào $\mathcal{B}$ được gọi là một hàm Boole (hay hàm đại số logic) bậc n .

Định nghĩa 2.1.2. Các hàm Boole cũng có thể được biểu diễn bằng cách dùng các biểu thức được tạo bởi các biến và các phép toán Boole. Các biểu thức Boole với các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ được định nghĩa bằng đệ quy như sau:

- 0, 1, $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các biểu thức Boole.
- Nếu P và Q là các biểu thức Boole thì $\bar{P}$, PQ và $P+Q$ cũng là các biểu thức Boole.

Mỗi một biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole. Các giá trị của hàm này nhận được bằng cách thay 0 và 1 cho các biến trong biểu thức đó.

Định nghĩa 2.1.3. Hai hàm Boole F và G bậc n được gọi là bằng nhau nếu

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = G(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ với mọi } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{B}.$$

Hai biểu thức Boole khác nhau biểu diễn cùng một hàm Boole được gọi là tương đương. Ký hiệu $\mathcal{BF}(n)$ là tập hợp tất cả các hàm Boole bậc n . Ta định nghĩa các phép toán cộng, nhân và lấy bù trên $\mathcal{BF}(n)$ như sau: với mọi $F, G \in \mathcal{BF}(n)$,

$$F+G \text{ xác định bởi } (F+G)(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + G(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

FG xác định bởi $(FG)(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + G(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$\overline{F}$ xác định bởi $\overline{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{F(x_1, x_2, \dots, x_n)}$.

Khi đó $\mathcal{BF}(n)$ trở thành một đại số Boole.

Định nghĩa 2.1.4. Cho x là một biến Boole và $\sigma \in \mathcal{B}$. Ký hiệu:

$$x^\sigma = \begin{cases} x & \text{khi } \sigma = 1, \\ \overline{x} & \text{khi } \sigma = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng $x^\sigma = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$. Với mỗi hàm Boole F bậc n , ký hiệu:

$$T_F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{B}^n \mid F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1\}$$

và gọi nó là tập đặc trưng của hàm F . Khi đó ta có:

$$T_{\overline{F}} = \overline{T_F}, \quad T_{F+G} = T_F \cup T_G, \quad T_{FG} = T_F \cap T_G.$$

Cho n biến Boole $x_1, x_2, \dots, x_n$. Một biểu thức dạng:

$$x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$$

trong đó $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \in \mathcal{B}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ được gọi là một hội sơ cấp của n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$. Số các biến xuất hiện trong một hội sơ cấp được gọi là hạng của của hội sơ cấp đó.

Cho F là một hàm Boole bậc n . Nếu F được biểu diễn dưới dạng tổng của một số hội sơ cấp khác nhau của n biến thì biểu diễn đó được gọi là dạng tổng chuẩn tắc của F . Dạng tổng chuẩn tắc hoàn toàn là dạng tổng chuẩn tắc duy nhất của F mà trong đó các hội sơ cấp đều có hạng n .

Mệnh đề 2.1.1. Mọi hàm Boole F bậc n đều có thể biểu diễn dưới dạng:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{B}^n} x_1^{\sigma_1} \dots x_i^{\sigma_i} F(\sigma_1, \dots, \sigma_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (1)$$

trong đó i là số tự nhiên bất kỳ, $1 \leq i \leq n$.

Hệ quả 2.1.1. Mọi hàm Boole F bậc n đều có thể được khai triển theo một biến x_i :

$$F(x_1, \dots, x_n) = \overline{x_i} F(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) + x_i F(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Cho $i=n$ trong mệnh đề trên và bỏ đi các nhân tử bằng 1 trong tích, các số hạng bằng 0 trong tổng, ta được hệ quả sau.

Hệ quả 2.1.2. Mọi hàm Boole F bậc n đều có thể được khai triển dưới dạng:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in T_F} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} \quad (2)$$

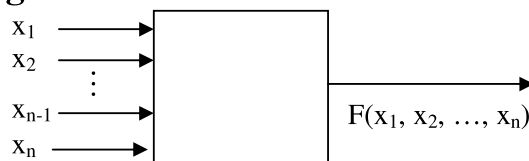
Chú ý 2.1.2. Từ Hệ quả 2.1.2, ta suy ra rằng mọi hàm Boole đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng chuẩn tắc hoàn toàn. Như vậy mọi hàm Boole đều có thể biểu diễn bằng một biểu thức Boole chỉ chứa ba phép tích (hội), tổng (tuyển), bù (phủ định). Ta nói rằng hệ {tích, tổng, bù} là đầy đủ.

Bằng đối ngẫu, ta có thể chứng minh một kết quả tương tự bằng việc thay tích bởi tổng và ngược lại, từ đó dẫn tới việc biểu diễn F qua một tích các tổng. Biểu diễn này được gọi là dạng tích (hội) chuẩn tắc hoàn toàn của F :

$$F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \overline{T_F}} (\overline{x_1^{\sigma_1}} + \dots + \overline{x_n^{\sigma_n}}).$$

2.2. MẠCH LÔGIC

2.2.1. Cổng logic:



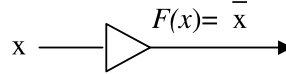
Ta gọi một thiết bị với các đầu vào và đầu ra mang giá trị 0, 1 như vậy là một mạch logic.

Đầu ra của một mạch logic là một hàm Boole F của các đầu vào $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ta nói mạch logic trong hình trên thực hiện hàm F .

Các mạch logic được tạo thành từ một số mạch cơ sở, gọi là cổng logic. Các cổng logic sau đây thực hiện các hàm phủ định, hội và tuyển.

1. Cổng NOT: Cổng NOT thực hiện hàm phủ định. Cổng chỉ có một đầu vào. Đầu ra $F(x)$ là phủ định của đầu vào x .

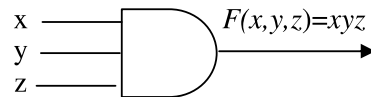
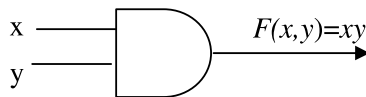
$$F(x) = \bar{x} = \begin{cases} 0 & \text{khi } x = 1, \\ 1 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$



Chẳng hạn, xâu bit 100101011 qua cổng NOT cho xâu bit 011010100.

2. Cổng AND: Cổng AND thực hiện hàm hội. Đầu ra $F(x,y)$ là hội (tích) của các đầu vào.

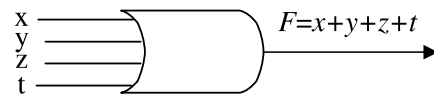
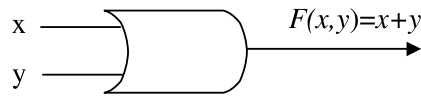
$$F(x, y) = xy = \begin{cases} 1 & \text{khi } x = y = 1, \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác.} \end{cases}$$



Chẳng hạn, hai xâu bit 101001101 và 111010110 qua cổng AND cho 101000100.

3. Cổng OR: Cổng OR thực hiện hàm tuyển (tổng). Đầu ra $F(x,y)$ là tuyển (tổng) của các đầu vào.

$$F(x, y) = x + y = \begin{cases} 1 & \text{khi } x = 1 \text{ hay } y = 1, \\ 0 & \text{khi } x = y = 0. \end{cases}$$



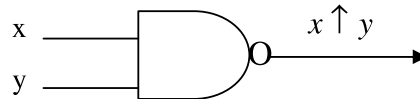
Chẳng hạn, hai xâu bit 101001101 và 111010100 qua cổng OR cho 111011101.

2.2.2. Mạch logic:

1. Tổ hợp các cổng: Các cổng logic có thể lắp ghép để được những mạch logic thực hiện các hàm Boole phức tạp hơn. Như ta đã biết rằng một hàm Boole bất kỳ có thể biểu diễn bằng một biểu thức chỉ chứa các phép $-$, $.$, $+$. Từ đó suy ra rằng có thể lắp ghép thích hợp các cổng NOT, AND, OR để được một mạch logic thực hiện một hàm Boole bất kỳ.

Xét hàm Sheffer $F(x, y) = x \uparrow y = \begin{cases} 0 & \text{khi } x = y = 1, \\ 1 & \text{khi } x = 0 \text{ hay } y = 0. \end{cases}$ Mạch logic thực

hiện hàm $\uparrow$ gọi là cổng NAND, được vẽ như hình dưới đây.



Dựa vào các đẳng thức $\bar{x} = x \uparrow x$, $xy = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$, $x + y = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$, cho ta biết hệ $\{\uparrow\}$ là đầy đủ, nên bất kỳ một hàm Boole nào cũng có thể thực hiện được bằng một mạch logic chỉ gồm có cổng NAND.

Xét hàm Veblen $F(x, y) = x \downarrow y = \begin{cases} 0 & \text{khi } x = 1 \text{ hay } y = 1, \\ 1 & \text{khi } x = y = 0. \end{cases}$ Mạch logic thực hiện

hàm $\downarrow$ gọi là cổng NOR, được vẽ như hình dưới đây.



Tương tự hệ $\{\downarrow\}$ là đầy đủ nên bất kỳ hàm Boole nào cũng có thể thực hiện được bằng một mạch logic chỉ gồm có cổng NOR.

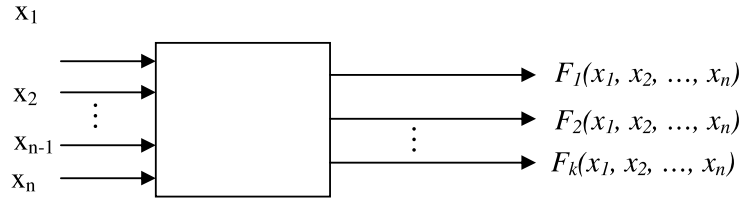
Một phép toán logic quan trọng khác là phép tuyển loại:

$$F(x, y) = x \oplus y = \begin{cases} 0 & \text{khi } x = y, \\ 1 & \text{khi } x \neq y. \end{cases}$$

Mạch logic này là một cổng logic, gọi là cổng XOR, được vẽ như hình dưới đây.



2. Mạch cộng: Nhiều bài toán đòi hỏi phải xây dựng những mạch logic có nhiều đường ra, cho các đầu ra $F_1, F_2, \dots, F_k$ là các hàm Boole của các đầu vào $x_1, \dots, x_n$.



Chẳng hạn, ta xét phép cộng hai số tự nhiên từ các khai triển nhị phân của chúng. Trước hết, ta sẽ xây dựng một mạch có thể được dùng để tìm $x+y$ với x, y là hai số 1-bit. Đầu vào mạch này sẽ là x và y . Đầu ra sẽ là một số 2-bit $\overline{cs}$, trong đó s là bit tổng và c là bit nhớ.

$$0+0 = 00$$

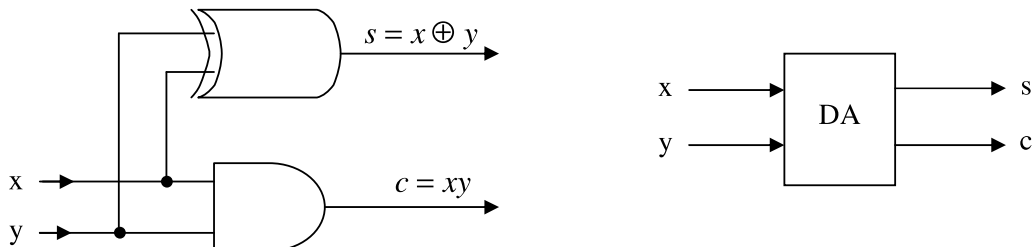
$$0+1 = 01$$

$$1+0 = 01$$

$$1+1 = 10$$

x	y	c	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Từ bảng trên, ta thấy ngay $s = x \oplus y, c = xy$. Ta vẽ được mạch thực hiện hai hàm $s = x \oplus y$ và $c = xy$ như hình dưới đây. Mạch này gọi là mạch cộng hai số 1-bit hay mạch cộng bán phần, ký hiệu là DA.



Xét phép cộng hai số 2-bit $\overline{a_2 a_1}$ và $\overline{b_2 b_1}$,

$$\overline{a_2 a_1}$$

$$\overline{b_2 b_1}$$

Thực hiện phép cộng theo từng cột, ở cột thứ nhất (từ phải sang trái) ta tính $a_1 + b_1$ được bit tổng s_1 và bit nhớ c_1 ; ở cột thứ hai, ta tính $a_2 + b_2 + c_1$, tức là phải cộng ba số 1-bit.

Cho x, y, z là ba số 1-bit. Tổng $x+y+z$ là một số 2-bit $\overline{cs}$, trong đó s là bit tổng của $x+y+z$ và c là bit nhớ của $x+y+z$. Các hàm Boole s và c theo các biến x, y, z được xác định bằng bảng sau:

x	y	z	c	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Từ bảng này, dễ dàng thấy rằng:

$$s = x \oplus y \oplus z.$$

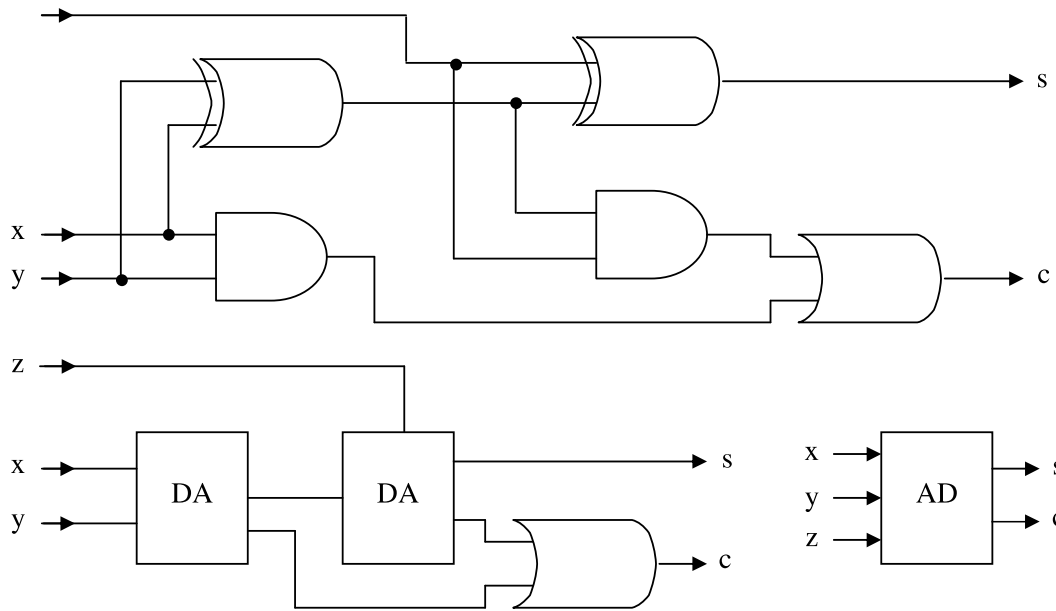
Hàm c có thể viết dưới dạng tổng chuẩn tắc hoàn toàn là:

$$c = \overline{x}yz + x\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz.$$

Công thức của c có thể rút gọn:

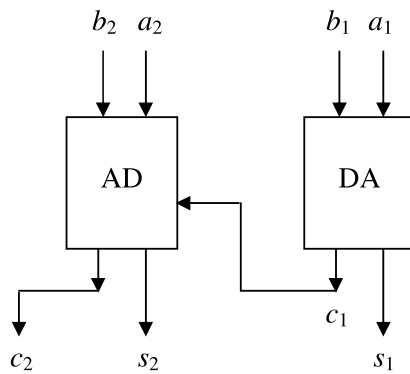
$$c = z(\overline{x}y + x\overline{y}) + xy(\overline{z} + z) = z(x \oplus y) + xy.$$

Ta vẽ được mạch thực hiện hai hàm Boole $s = x \oplus y \oplus z$ và $c = z(x \oplus y) + xy$ như hình dưới đây, mạch này là ghép nối của hai mạch cộng bán phần (DA) và một cổng OR. Đây là mạch cộng ba số 1-bit hay mạch cộng toàn phần, ký hiệu là AD.

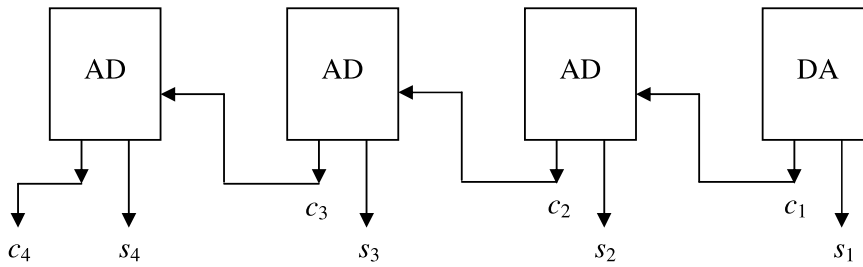


Trở lại phép cộng hai số 2-bit $\overline{a_2a_1}$ và $\overline{b_2b_1}$. Tổng $\overline{a_2a_1} + \overline{b_2b_1}$ là một số 3-bit $\overline{c_2s_2s_1}$, trong đó s_1 là bit tổng của a_1+b_1 : $s_1 = a_1 \oplus b_1$, s_2 là bit tổng của $a_2+b_2+c_1$, với c_1 là bit nhớ của a_1+b_1 : $s_2 = a_2 \oplus b_2 \oplus c_1$ và c_2 là bit nhớ của $a_2+b_2+c_1$.

Ta có được mạch thực hiện ba hàm Boole s_1, s_2, c_2 như hình dưới đây.



Dễ dàng suy ra mạch cộng hai số n -bit, với n là một số nguyên dương bất kỳ. Hình sau cho một mạch cộng hai số 4-bit.



2.3. CỰC TIỂU HOÁ CÁC MẠCH LÔGIC (HÀM BOOLE) BẰNG PHƯƠNG PHÁP KARNAUGH

Định nghĩa 2.3.1. Để làm giảm số các số hạng trong một biểu thức Boole biểu diễn một mạch, ta cần phải tìm các số hạng để tổ hợp lại. Có một phương pháp đồ thị, gọi là bản đồ Karnaugh, được dùng để tìm các số hạng tổ hợp được đối với các

hàm Boole có số biến tương đối nhỏ. Phương pháp mà ta mô tả dưới đây đã được Maurice Karnaugh đưa ra vào năm 1953. Phương pháp này dựa trên một công trình trước đó của E.W. Veitch. Các bản đồ Karnaugh cho ta một phương pháp trực quan để rút gọn các khai triển tổng các tích, nhưng chúng không thích hợp với việc cơ khí hoá quá trình này. Trước hết, ta sẽ minh hoạ cách dùng các bản đồ Karnaugh để rút gọn biểu thức của các hàm Boole hai biến.

Có bốn hội sơ cấp khác nhau trong khai triển tổng các tích của một hàm Boole có hai biến x và y . Một bản đồ Karnaugh đối với một hàm

Boole hai biến này gồm bốn ô vuông, trong đó hình vuông biểu diễn hội sơ cấp có mặt trong khai triển được ghi số 1.

Các hình ô được gọi là kề nhau nếu các hội sơ cấp mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một biến.

x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

2.4. CỰC TIỂU HOÁ CÁC MẠCH LÔGIC (HÀM BOOLE) BẰNG PHƯƠNG PHÁP QUINE-McCLUSKEY

Định nghĩa 2.4.1. Cho hai hàm Boole F và G bậc n . Ta nói G là một nguyên nhân của F nếu $T_G \subset T_F$, nghĩa là $G \Rightarrow F$ là một hằng đúng.

Dễ thấy rằng mỗi hội sơ cấp trong một dạng tổng chuẩn tắc của F là một nguyên nhân của F . Hội sơ cấp A của F được gọi là một nguyên nhân nguyên tố của F nếu trong A xoá đi một biến thì hội nhận được không còn là nguyên nhân của F .

Nếu $F_1, \dots, F_k$ là các nguyên nhân của F thì $T_{F_i} \subset T_F, 1 \leq i \leq k$. Khi đó

$$T_{\sum_{i=1}^k F_i} = \bigcup_{i=1}^k T_{F_i} \subset T_F. \text{ Do đó } \sum_{i=1}^k F_i \text{ là một nguyên nhân của } F.$$

Cho S là một hệ các nguyên nhân của F . Ta nói rằng hệ S là đầy đủ đối với F nếu $F = \sum_{G \in S} G$, nghĩa là $T_F = \bigcup_{G \in S} T_G$.

Mệnh đề 2.4.1. Hệ các nguyên nhân nguyên tố của hàm Boole F là một hệ đầy đủ.

Định nghĩa 2.4.2. Nếu S là hệ tất cả các nguyên nhân nguyên tố của hàm Boole F thì dạng tổng chuẩn tắc $F = \sum_{G \in S} G$ được gọi là dạng tổng chuẩn tắc thu

gọn của F .

Chú ý 2.4.1 (Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc thu gọn). Giả sử F là một hàm Boole n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$. Mỗi hội sơ cấp của n biến đó được biểu diễn bằng một dãy n ký hiệu trong bảng $\{0, 1, -\}$ theo quy ước: ký tự thứ i là 1 hay 0 nếu x_i có mặt trong hội sơ cấp là bình thường hay với dấu phủ

định, còn nếu x_i không có mặt thì ký tự này là $-$. Chẳng hạn, hội sơ cấp của 6 biến $x_1, \dots, x_6$ là $\overline{x_1}x_3x_4\overline{x_6}$ được biểu diễn bởi 0–11–0.

Hai hội sơ cấp được gọi là kề nhau nếu các biểu diễn nói trên của chúng chỉ khác nhau ở một vị trí 0, 1. Rõ ràng các hội sơ cấp chỉ có thể dán được với nhau bằng phép dán $Ax + A\overline{x} = A$ nếu chúng là kề nhau.

Thuật toán được tiến hành như sau: Lập một bảng gồm nhiều cột để ghi các kết quả dán. Sau đó lần lượt thực hiện các bước sau:

Bước 1: Viết vào cột thứ nhất các biểu diễn của các nguyên nhân hạng n của hàm Boole F . Các biểu diễn được chia thành từng nhóm, các biểu diễn trong mỗi nhóm có số các ký hiệu 1 bằng nhau và các nhóm xếp theo thứ tự số các ký hiệu 1 tăng dần.

Bước 2: Lần lượt thực hiện tất cả các phép dán các biểu diễn trong nhóm i với các biểu diễn trong nhóm $i+1$ ($i=1, 2, \dots$). Biểu diễn nào tham gia ít nhất một phép dán sẽ được ghi nhận một dấu $*$ bên cạnh. Kết quả dán được ghi vào cột tiếp theo.

Bước 3: Lặp lại Bước 2 cho cột kế tiếp cho đến khi không thu thêm được cột nào mới. Khi đó tất cả các biểu diễn không có dấu $*$ sẽ cho ta tất cả các nguyên nhân nguyên tố của F .

Chú ý 2.4.2 (Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu (cực tiểu)).

Sau khi tìm được dạng tổng chuẩn tắc thu gọn của hàm Boole F , nghĩa là tìm được tất cả các nguyên nhân nguyên tố của nó, ta tiếp tục phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu (cực tiểu) của F như sau.

Lập một bảng chữ nhật, mỗi cột ứng với một cấu tạo đơn vị của F (mỗi cấu tạo đơn vị là một hội sơ cấp hạng n trong dạng tổng chuẩn tắc hoàn toàn của F) và mỗi dòng ứng với một nguyên nhân nguyên tố của F . Tại ô (i, j) , ta đánh dấu cộng

(+) nếu nguyên nhân nguyên tố ở dòng i là một phần con của cấu tạo đơn vị ở cột j . Ta cũng nói rằng khi đó nguyên nhân nguyên tố i là phủ cấu tạo đơn vị j .

Một hệ S các nguyên nhân nguyên tố của F được gọi là phủ hàm F nếu mọi cấu tạo đơn vị của F đều được phủ ít nhất bởi một thành viên của hệ. Dễ thấy rằng nếu hệ S là phủ hàm F thì nó là đầy đủ, nghĩa là tổng của các thành viên trong S là bằng F .

Một nguyên nhân nguyên tố được gọi là cốt yếu nếu thiếu nó thì một hệ các nguyên nhân nguyên tố không thể phủ hàm F . Các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu được tìm như sau: tại những cột chỉ có duy nhất một dấu +, xem dấu + đó thuộc dòng nào thì dòng đó ứng với một nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.

Việc lựa chọn các nguyên nhân nguyên tố trên bảng đã đánh dấu, để được một dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu, có thể tiến hành theo các bước sau.

Bước 1: Phát hiện tất cả các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.

Bước 2: Xoá tất cả các cột được phủ bởi các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.

Bước 3: Trong bảng còn lại, xoá nốt những dòng không còn dấu + và sau đó nếu có hai cột giống nhau thì xoá bớt một cột.

Bước 4: Sau các bước trên, tìm một hệ S các nguyên nhân nguyên tố với số biến ít nhất phủ các cột còn lại.

Tổng của các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu và các nguyên nhân nguyên tố trong hệ S sẽ là dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu của hàm F .

Các bước 1, 2, 3 có tác dụng rút gọn bảng trước khi lựa chọn. Độ phức tạp chủ yếu nằm ở Bước 4. Tình huống tốt nhất là mọi nguyên nhân nguyên tố đều là cốt yếu. Trường hợp này không phải lựa chọn gì và hàm F có duy nhất một dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu cũng chính là dạng tổng chuẩn tắc thu gọn. Tình huống xấu nhất là không có nguyên nhân nguyên tố nào là cốt yếu. Trường hợp này ta phải lựa chọn toàn bộ bảng.

KẾT LUẬN

Qua một thời gian tìm hiểu, tiếp cận và nghiên cứu về các đặc trưng của đại số Boole và hàm Boole, luận văn đã hoàn thành và đạt được mục tiêu nghiên cứu của đề tài với những kết quả cụ thể sau:

- Tổng quan và hệ thống một cách đầy đủ các khái niệm, tính chất cơ bản liên quan đến đại số Boole. Cụ thể là đại số Boole được tìm hiểu thông qua lý thuyết dàn, vành Boole, dàn môđula đầy đủ. Từ đó giới thiệu một kết quả quan trọng trong đại số Boole là mọi đại số Boole hữu hạn $\mathcal{B}$ đều đẳng cấu với đại số Boole $\mathcal{R}(S)$, với S là tập hợp tất cả các nguyên tố của $\mathcal{B}$. Đây được xem như là một hệ quả của Định lý Stone nổi tiếng.

- Trình bày một cách đầy đủ và chi tiết hàm Boole, các tính chất quan trọng của nó và biểu diễn hàm Boole bằng mạch logic. Đặc biệt là cực tiểu hóa hàm Boole bằng phương pháp Karnaugh và phương pháp Quine_McCluskey.

Với những gì đã khảo sát được, luận văn sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích cho bản thân khi tiếp tục đi sâu nghiên cứu sau này và hy vọng cũng là nguồn tư liệu tốt cho những ai quan tâm nghiên cứu về đại số Boole, hàm Boole và các ứng dụng của chúng.

Trong điều kiện về thời gian và khuôn khổ của luận văn nên chúng tôi chưa đi nghiên cứu sâu về tôpô trên đại số Boole và ứng dụng trong giải tích hàm cũng như lý thuyết độ đo. Đó như là hướng phát triển của luận văn. Trong quá trình làm luận văn, mặc dù đã có rất nhiều cố gắng, song do điều kiện khách quan và năng lực có hạn của bản thân nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được những góp ý chân thành của quý thầy cô và bạn đọc để có thể tiếp tục tìm hiểu, nghiên cứu và phát triển luận văn sau này.