BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LAN

ĐẠI SỐ LIE NỬA ĐƠN VÀ TIÊU CHUẨN CARTAN

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60. 46. 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HOC

Đà Nẵng – Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **PGS.TS TRẦN ĐẠO DÕNG**

Phản biện 1:PGS.TSKH Trần Quốc Chiến

Phản biện 2:TS Hoàng Quang Tuyến

Luận văn được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đà Nẵng
vào ngày 28 tháng 05 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại :

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại Học Sư Phạm – Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Một trong các lớp đại số Lie được nhiều nhà toán học quan tâm khảo sát là lớp các đại số Lie nửa đơn. Lớp đại số Lie này có quan hệ mật thiết với các đại số Lie khả quy, một lớp đại số Lie mở rộng của đại số Lie nửa đơn.

Đóng vai trò quan trọng cho việc khảo sát tính nửa đơn của đại số Lie là tiêu chuẩn Cartan, được xây dựng từ dạng Killing của đại số Lie. Với mong muốn tìm hiểu thêm về đại số Lie nửa đơn và dạng Killing và được sự gợi ý của PGS.TS. Trần Đạo Dõng, tôi đã chọn đề tài **"Đại số Lie nửa đơn và tiêu chuẩn Cartan"** làm đề tài nghiên cứu của mình.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận văn nhằm nghiên cứu đại số Lie nửa đơn trong mối liên hệ với đại số Lie khả quy, thể hiện tường minh cho lớp các đại số Lie cổ điển và ứng dụng tiêu chuẩn Cartan để khảo sát tính giải được và tính nửa đơn của đại số Lie.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu cuả đề tài là khảo sát đại số Lie nửa đơn và đại số Lie khả quy, thể hiện tường minh cho lớp các đại số Lie cổ điển. Tiếp đó, sử dụng dạng Killing để xác định Tiêu chuẩn Cartan cho tính giải được, tính nửa đơn và thể hiện qua một số lớp đại số Lie củ thể.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Tham khảo tài liệu và hệ thống hóa các kiến thức đã học.
- Thể hiện tường minh các kết quả nghiên cứu trong đề tài.
- Trao đổi thảo luận với giáo viên hướng dẫn.

5. Ý nghĩa khoa học của đề tài

- Tổng quan về đại số Lie nửa đơn và đại số Lie khả quy, thể hiện mối liên hệ của chúng trong các đại số Lie cụ thể và ứng dụng Tiêu chuẩn Cartan để khảo sát tính giải được và tính nửa đơn của đại số Lie.

6. Nội dung luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận, nội dung của luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Các kiến thức cơ sở về đại số Lie;

Chương 2: Đại số Lie nửa đơn và đại số Lie khả quy;

Chương 3: Dạng Killing và tiêu chuẩn Cartan.

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CƠ SỞ VỀ ĐẠI SỐ LIE

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản của đại số Lie có liên quan đến việc nghiên cứu các chương tiếp theo. Kiến thức trình bày trong chương chủ yếu được tham khảo từ các tài liệu [1], [5] và [9].

1.1 Đại số Lie

1.1.1 Định nghĩa

Một không gian vectơ $\mathfrak{g}$ trên trường $\mathbb{F}$ cùng với phép toán

$$\begin{aligned} [\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

tuyến tính theo từng biến được gọi là một *đại số*.

Đại số $\mathfrak{g}$ được gọi là *đại số Lie* nếu phép toán $[\ ,\ ]$ thỏa mãn hai tính chất:
a) Tính phản xứng: $[X, X] = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$.
b) Đồng nhất thức Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Khi đó $[\ ,\ ]$ được gọi là tích Lie.

1.1.2 Nhận xét

a) Từ định nghĩa của đại số Lie ta có: $[X, Y] = -[Y, X], \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.
b) Đồng nhất thức Jacobi có thể viết lại là:

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

1.1.3 Định nghĩa

Đại số Lie $\mathfrak{g}$ được gọi là *giao hoán* nếu $[X, Y] = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

1.1.4 Ví dụ

Ví dụ 3. Đại số kết hợp $\mathfrak{g} = \{X = (x_{ij})_{n\times n} | x_{ij} \in \mathbb{F}\}$ các ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbb{F}$ với tích Lie $[X, Y] = XY - YX$ là một đại số Lie và được kí hiệu là $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$.

Ví dụ 4. Không gian vectơ con $\mathfrak{so}_n(\mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \,|\, X^t + X = 0\}$ các ma trận phản xứng của $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ là một đại số Lie với tích Lie

$$[X, Y] = XY - YX,\ \forall X, Y \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{F}).$$

1.1.5 Định nghĩa

Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie và $\mathfrak{h}$ là không gian vectơ con của $\mathfrak{g}$.
Khi đó $\mathfrak{h}$ được gọi là *đại số Lie con* của $\mathfrak{g}$ nếu $[X, Y] \in \mathfrak{h}, \forall X, Y \in \mathfrak{h}$.
Ký hiệu $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \langle\, \{[X, Y] \,|\, X, Y \in \mathfrak{h}\}\,\rangle$ là không gian vectơ con sinh bởi tập hợp $\{[X, Y] \,|\, X, Y \in \mathfrak{h}\}$. Ta có điều kiện $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ được viết lại là $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$.

1.1.6 Ví dụ

Ví dụ 4. Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie. Khi đó

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}$$

là một đại số Lie con của $\mathfrak{g}$ và được gọi là tâm của $\mathfrak{g}$.

1.1.7 Định nghĩa

Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie và $\mathfrak{h}$ là không gian vectơ con của $\mathfrak{g}$.
Khi đó $\mathfrak{h}$ được gọi là *iđêan* của $\mathfrak{g}$ nếu $[X, Y] \in \mathfrak{h}, \forall X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$. Nói cách khác, không gian vectơ con $\mathfrak{h}$ là iđêan của $\mathfrak{g}$ khi và chỉ khi $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

1.1.8 Định nghĩa

Cho $\mathfrak{h}$ là một iđêan của đại số Lie $\mathfrak{g}$. Khi đó không gian vectơ thương $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \{X + \mathfrak{h} \mid X \in \mathfrak{g}\}$ trở thành một đại số Lie với tích Lie

$$[X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}] = [X, Y] + \mathfrak{h}, \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

và được gọi là *đại số Lie thương* của đại số Lie $\mathfrak{g}$ theo iđêan $\mathfrak{h}$.

1.2 Đồng cấu đại số Lie

1.2.1 Định nghĩa

Cho $\mathfrak{g}$ và $\mathfrak{h}$ là hai đại số Lie trên trường $\mathbb{F}$. Khi đó, ánh xạ $\varphi : \quad \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ được gọi là một *đồng cấu đại số Lie* nếu

a) φ là một ánh xạ tuyến tính;

b) φ bảo toàn tích Lie.

Đồng cấu đại số Lie φ được gọi là *đơn cấu* (tương ứng *toàn cấu, đẳng cấu*) nếu φ là *đơn ánh* (tương ứng *toàn ánh, song ánh*).

Hai đại số Lie $\mathfrak{g}$ và $\mathfrak{h}$ được gọi là đẳng cấu nếu tồn tại một đẳng cấu đại số Lie từ $\mathfrak{g}$ lên $\mathfrak{h}$, kí hiệu $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$.

Nhân của đồng cấu φ, kí hiệu là $Ker\varphi$, là một tập con của $\mathfrak{g}$ gồm các phần tử $X \in \mathfrak{g}$ sao cho $\varphi(X) = 0$.

Ảnh của đồng cấu φ, kí hiệu là $Im\varphi$, là một tập con của $\mathfrak{h}$ gồm các phần tử $\varphi(X), \ X \in \mathfrak{g}$.

1.2.2 Ví dụ

Ví dụ 3. Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie trên trường $\mathbb{F}$, ta xét ánh xạ:

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto ad(X) : \quad \begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\longmapsto ad(X)(Y) = [X, Y]. \end{aligned} \end{aligned}$$

Khi đó ad là đồng cấu đại số Lie và $Kerad = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

1.2.3 Mệnh đề [1, Mệnh đề 1.3.3]

Cho $\varphi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *là đồng cấu đại số Lie. Khi đó:*
a) Nếu $\mathfrak{a}$ *là đại số Lie con của* $\mathfrak{g}$ *thì* $\varphi(\mathfrak{a})$ *là đại số Lie con của* $\mathfrak{g}$.
b) Nếu $\mathfrak{b}$ *là một iđêan của* $\mathfrak{h}$ *thì* $\varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ *là iđêan của* $\mathfrak{g}$.

1.2.4 Hệ quả [1, Hệ quả 1.3.4]

a) $Ker\varphi$ *là iđêan của* $\mathfrak{g}$.
b) $Im\varphi$ *là đại số Lie con của* $\mathfrak{h}$.

1.2.5 Mệnh đề [1, Mệnh đề 1.3.5]

Cho $\mathfrak{g}$ *và* $\mathfrak{h}$ *là các đại số Lie.*
a) Giả sử $\varphi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *là một đồng cấu đại số Lie.*
Khi đó, $\mathfrak{g}/ker\varphi \cong Im\varphi$.
b) Nếu $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *là các iđêan của* $\mathfrak{g}$ *thì* $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$.

1.2.6 Định nghĩa

Cho V là một không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$ và $\mathfrak{g}$ là đại số Lie trên trường $\mathbb{F}$ (là một trường con của $\mathbb{K}$). Khi đó một *biểu diễn* của $\mathfrak{g}$ trong V là một đồng cấu đại số Lie $\pi: \mathfrak{g} \longrightarrow (End_{\mathbb{K}}V)^{\mathbb{F}}$, trong đó $(End_{\mathbb{K}}V)^{\mathbb{F}}$ được xét như một đại số Lie trên trường $\mathbb{F}$. Để đơn giản hơn ta có thể ký hiệu $\pi: \mathfrak{g} \longrightarrow End_{\mathbb{K}}V$.

1.2.7 Nhận xét

1) Theo định nghĩa của tích Lie [,] trong $End_{\mathbb{K}}V$, ta có π là một biểu diễn của $\mathfrak{g}$ trong V nếu:
a) π là $\mathbb{F}$ tuyến tính.
b) $\pi([X,Y]) = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X) \ ,\forall\, X,Y \in \mathfrak{g}$.

2) Khi $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ và $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, ta có V là không gian vectơ phức. Một biểu diễn của đại số Lie thực $\mathfrak{g}$ trong V là một đồng cấu từ $\mathfrak{g}$ vào $End_{\mathbb{C}}V$, trong đó $End_{\mathbb{C}}V$ được xét như đại số Lie thực $(End_{\mathbb{C}}V)^{\mathbb{R}}$.

1.2.8 Ví dụ

Ví dụ 3. Cho π là một biểu diễn của $\mathfrak{g}$ trong không gian vectơ hữu hạn chiều V và $U \subseteq V$ là không gian con bất biến.
Khi đó $\pi^* \; : \; \mathfrak{g} \longrightarrow End_{\mathbb{K}}V/U$

$$X \longmapsto \pi^*(X): \qquad V/U \longrightarrow V/U$$

$$v + U \longmapsto \pi^*(X)(v+U) = \pi(X)v + U$$

là một biểu diễn của $\mathfrak{g}$ trong V/U và được gọi là *biểu diễn thương* của $\mathfrak{g}$ trong V/U.

1.3 Đại số Lie giải được

1.3.1 Định nghĩa

Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie hữu hạn chiều. Ta xác định dãy

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g},\; \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],\; \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1],\; ...,\; \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}^{k-1}], ...$$

Đại số Lie $\mathfrak{g}$ được gọi là *giải được* nếu tồn tại k sao cho $\mathfrak{g}^k = 0$.

Khi đó, dãy giảm $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \; ... \; \supseteq \mathfrak{g}^k \supseteq \; ...$ được gọi là *chuỗi dẫn xuất* của $\mathfrak{g}$.

1.3.2 Nhận xét

a) Mỗi $\mathfrak{g}^k$ đều là một iđêan của $\mathfrak{g}$.

b)Một đại số Lie giải được $\mathfrak{g}$ khác 0 luôn có một iđêan khác 0 là $\mathfrak{g}^{k-1}$ (nếu $\mathfrak{g}^k = 0$).

1.3.3 Ví dụ

Ví dụ 1. Đại số Lie $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ là giải được.

Thật vậy, xét $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Khi đó, với $X = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$, ta có

$$[X,Y]=\begin{pmatrix}0&0&a_1b_2-a_2b_1\\0&0&a_1c_2-a_2c_1\\0&0&0\end{pmatrix}.\quad \text{Vậy } \mathfrak{g}^1=\left\{\begin{pmatrix}0&0&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

Xét $\mathfrak{g}^2=[\mathfrak{g}^1,\mathfrak{g}^1]$. Với $X=\begin{pmatrix}0&0&b_1\\0&0&c_1\\0&0&0\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}0&0&b_2\\0&0&c_2\\0&0&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}^1$
ta có $[X,Y]=XY-YX=0$.
Từ đó suy ra $\mathfrak{g}^2=0$. Vậy $\mathfrak{g}$ là đại số Lie giải được.

1.3.4 Mệnh đề [9, Proposition 1.10]

Bất kỳ đại số Lie con và đại số Lie thương của đại số Lie giải được đều là giải được.

1.3.5 Mệnh đề [9, Proposition 1.11]

Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie và $\mathfrak{a}$ là một iđêan của $\mathfrak{g}$. Khi đó $\mathfrak{g}$ là đại số Lie giải được nếu $\mathfrak{a}$ và $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ đều giải được.

1.3.6 Mệnh đề [9, Proposition 1.12]

Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie hữu hạn chiều. Khi đó, tồn tại duy nhất một iđêan giải được $\mathcal{R}$ của $\mathfrak{g}$ chứa tất cả các iđêan giải được trong $\mathfrak{g}$ gọi là căn *của $\mathfrak{g}$ và thường được ký hiệu là $\mathcal{R}=rad(\mathfrak{g})$.*

1.3.7 Mệnh đề [9, Proposition 1.23]

Một đại số Lie n-chiều $\mathfrak{g}$ là giải được *khi và chỉ khi tồn tại một dãy các đại số con*

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}_0\supseteq\mathfrak{a}_1\supseteq\mathfrak{a}_2\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{a}_n=0$$

sao cho $\mathfrak{a}_{i+1}$ là một iđêan trong $\mathfrak{a}_i$, $\forall i=\overline{0,n-1}$ và $dim(\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1})=1$.

1.3.8 Định nghĩa

Nếu $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie, $\pi:\mathfrak{g}\longrightarrow End_{\mathbb{F}}V$ là một biểu diễn của $\mathfrak{g}$, $\lambda\in\mathfrak{g}^*$ thì không gian con $\mathbf{V}_\lambda^{\mathfrak{g}}=\{v\in\mathbf{V}|\pi(X)v=\lambda(X)v,\forall X\in\mathfrak{g}\}$ được gọi là *không gian riêng* của $\mathfrak{g}$ ứng với λ.

Định lý Lie dưới đây cho ta một đặc trưng của đại số Lie giải được.

1.3.9 Định lý Lie [9, Theorem 1.25]

Cho $\mathfrak{g}$ *là đại số Lie giải được,* $V \neq 0$ *là một không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường* $\mathbb{F}$*, và* $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow End_{\mathbb{F}}V$ *là một biểu diễn của* $\mathfrak{g}$ *trong* V*. Nếu* $\mathbb{F}$ *là đóng đại số thì tồn tại một vectơ riêng* $v \neq 0$ *cho mọi phần tử của* $\pi(\mathfrak{g})$*. Tổng quát hơn (đối với* $\mathbb{F}$*) tồn tại vectơ riêng cho mọi phần tử của* $\pi(\mathfrak{g})$ *nếu mọi giá trị riêng của* $\pi(X)$ *với* $X \in \mathfrak{g}$ *thuộc vào* $\mathbb{F}$*.*

1.3.10 Hệ quả [9, Corollary 1.29]

Cho $\mathfrak{g}$, V, π *và* $\mathbb{F}$ *như trong giả thiết của định lý Lie. Khi đó tồn tại một dãy các không gian con:*

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \ldots \supseteq V_m = 0$$

sao cho V_i *ổn định qua tác động của* $\pi(\mathfrak{g})$ *và* $dim(V_i/V_{i+1}) = 1$*. Từ đó suy ra* V *có một cơ sở sao cho các ma trận tương ứng của các phần tử thuộc* $\pi(\mathfrak{g})$ *có dạng tam giác trên.*

1.3.11 Định nghĩa

Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie hữu hạn chiều. Khi đó ta định nghĩa:
$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}],\ \mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}],\ \mathfrak{g}_3 = [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}], \ldots \mathfrak{g}_k = [\mathfrak{g}_{k-1}, \mathfrak{g}], \ldots$.
Dãy giảm $\mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{g}_2 \supseteq \mathfrak{g}_3 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{g}_k \supseteq \ldots$ được gọi là *chuỗi tâm dưới* của $\mathfrak{g}$.
Đại số Lie $\mathfrak{g}$ được gọi là *lũy linh* nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $\mathfrak{g}_k = 0$.

1.3.12 Nhận xét

a) Mỗi $\mathfrak{g}_k,\ k \in \mathbb{N}$ đều là iđêan của $\mathfrak{g}$.
b) Với mỗi $k \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{g}_k$.

Từ nhận xét này suy ra nếu $\mathfrak{g}$ là đại số Lie lũy linh thì $\mathfrak{g}$ là đại số Lie giải được.

1.3.13 Mệnh đề [1, Mệnh đề 1.5.5]

1.3.14 Định nghĩa

Một tự đồng cấu $f \in EndV$ được gọi là *lũy linh* nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $f^n = 0$.

Kết quả dưới đấy cho chúng ta một tính chất quan trọng của đại số Lie lũy linh.

1.3.15 Định lý Engel [9, Theorem 1.35]

Cho $\mathbf{V} \neq 0$ *là một không gian vectơ hữu hạn chiều,* $\mathfrak{g}$ *là một đại số Lie gồm các tự đồng cấu lũy linh của* $\mathbf{V}$. *Khi đó:*

a) $\mathfrak{g}$ *là một đại số Lie lũy linh.*

b) Tồn tại $v \neq 0, v \in \mathbf{V}$ *thỏa* $X(v) = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$.

c) Trong một cơ sở thích hợp của $\mathbf{V}$ *mọi phần tử* $X \in \mathfrak{g}$ *có dạng tam giác trên ngặt.*

1.3.16 Mệnh đề [9, Proposition 1.32]

Cho $\mathfrak{g}$ *là đại số Lie hữu hạn chiều và* $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ *là biểu diễn liên hợp của* $\mathfrak{g}$. *Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

a) $\mathfrak{g}$ *là lũy linh.*

b) $ad\mathfrak{g} = \{ad\ X | X \in \mathfrak{g}\}$ *là lũy linh.*

1.3.17 Mệnh đề [9, Corollary 1.39]

Cho $\mathfrak{g}$ *là đại số Lie hữu hạn chiều và* $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ *là biểu diễn liên hợp của* $\mathfrak{g}$. *Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

a) $\mathfrak{g}$ *là lũy linh.*

b) Với mọi $X \in \mathfrak{g}$, $ad\ X$ *là lũy linh.*

Chương 2

ĐẠI SỐ LIE NỬA ĐƠN VÀ ĐẠI SỐ LIE KHẢ QUY

Trong chương này chúng tôi khảo sát đại số Lie nửa đơn trong mối tương quan với đại số Lie khả quy và ứng dụng để xác định các đại số Lie nửa đơn cổ điển gồm các ma trận vuông cấp n hệ số thực, phức hoặc quaternion. Các khái niệm và kết quả chủ yếu được tham khảo trong các tài liệu [5], [9].

2.1 Đại số Lie nửa đơn

2.1.1 Định nghĩa

Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie hữu hạn chiều.

a) $\mathfrak{g}$ được gọi là *đại số Lie đơn* nếu $\mathfrak{g}$ không giao hoán và $\mathfrak{g}$ không chứa một iđêan thật sự khác 0 nào.

b) $\mathfrak{g}$ được gọi là *đại số Lie nửa đơn* nếu $\mathfrak{g}$ không chứa một iđêan giải được khác 0 nào.

2.1.2 Nhận xét

a) Mỗi iđêan là một đại số Lie nên ta có khái niệm iđêan đơn.

b) Nếu $\mathfrak{g}$ là đại số Lie đơn thì $\mathfrak{g}$ có tâm tầm thường.

c) Mỗi đại số Lie đơn là nửa đơn. Đảo lại nói chung không đúng.

2.1.3 Mệnh đề [9, Proposition 1.14]

Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie hữu hạn chiều. Khi đó $\mathfrak{g}/rad\ \mathfrak{g}$ là nửa đơn.

2.1.4 Nhận xét

Nếu $\mathfrak{g}$ là nửa đơn thì tâm của $\mathfrak{g}$ bằng 0 và biểu diễn liên hợp của $\mathfrak{g}$ là đơn ánh.

Kết quả dưới đây cho ta đặc trưng của các đại số Lie số chiều bé.

2.1.5 Mệnh đề

Mỗi đại số Lie 3 chiều hoặc là đơn hoặc là giải được.

2.1.6 Ví dụ

Ví dụ 2. Xét đại số Lie 3 chiều

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = so_3(\mathbb{R}).$$

Do $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ nên $\mathfrak{g}$ không giải được. Do đó $\mathfrak{g}$ đơn.

Chú ý rằng tính nửa đơn của đại số Lie được bảo toàn qua phép toán tích Descartes.

2.1.7 Mệnh đề [5, Proposition 1.5.5]

Cho $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, ..., \mathfrak{g}_n$ là các đại số Lie. Khi đó, $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times ... \times \mathfrak{g}_n$ là nửa đơn nếu và chỉ nếu $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, ..., \mathfrak{g}_n$ là nửa đơn.

Bây giờ ta khảo sát mối liên hệ giữa đại số Lie đơn và đại số Lie nửa đơn thể hiện trong kết quả sau:

2.1.8 Định lý [5, Theorem 1.5.12]

Đại số Lie $\mathfrak{g}$ là nửa đơn khi và chỉ khi $\mathfrak{g}$ là tích trực tiếp của các đại số Lie đơn.

2.1.9 Mệnh đề [5, Proposition 1.5.13]

Cho $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, ..., \mathfrak{g}_n$ là các đại số Lie đơn và $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times ... \times \mathfrak{g}_n$. Khi đó mỗi iđêan của $\mathfrak{g}$ là tích của một số các đại số Lie $\mathfrak{g}_i$. Hơn nữa, với mỗi $i = 1, ..., n$, đại số Lie đơn $\mathfrak{g}_i$ là iđêan cực tiểu không tầm thường của $\mathfrak{g}$.

2.1.10 Định nghĩa

Cho ρ là một biểu diễn hữu hạn chiều của $\mathfrak{g}$ trong không gian vectơ V.

a) Biểu diễn ρ được gọi là *đơn (hay bất khả quy)* nếu $V \neq 0$ và V chỉ có hai không gian con ổn định là 0 và V. Khi đó $\mathfrak{g}$-môđun V cũng được gọi là đơn.

b) Biểu diễn ρ được gọi là *nửa đơn (hay khả quy đầy đủ)* nếu ρ là tổng trực tiếp của các biểu diễn đơn. Khi đó $\mathfrak{g}$-môđun V cũng được gọi là nửa đơn và có thể biểu thị dưới dạng tổng trực tiếp của các $\mathfrak{g}$-môđun con đơn.

c) Với mỗi $x, y \in \mathfrak{g}$, ta đặt $B(x, y) = tr(\rho(x).\rho(y))$. Khi đó B là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathfrak{g}$ và được gọi là *dạng song tuyến tính kết hợp đối với ρ.*

2.1.11 Bổ đề [5, Lemma 1.6.2]

Cho $\mathfrak{g}$ là nửa đơn, V là không gian vectơ hữu hạn chiều, ρ là một biểu diễn của $\mathfrak{g}$ trong V, f là ánh xạ tuyến tính từ $\mathfrak{g}$ vào V. Các điều kiện sau là tương đương:

a) $f([x, y]) = \rho(x)f(y) - \rho(y)f(x)$, với mọi $x, y \in \mathfrak{g}$

b) Tồn tại $v \in V$ sao cho $f(x) = \rho v$, với mọi $x \in \mathfrak{g}$.

2.1.12 Định lý [5, Theorem 1.6.3]

Cho $\mathfrak{g}$ là nửa đơn, V là không gian vectơ hữu hạn chiều, ρ là một biểu diễn của $\mathfrak{g}$ trong V. Khi đó ρ là nửa đơn.

2.2 Đại số Lie khả quy

2.2.1 Định nghĩa

Đại số Lie $\mathfrak{g}$ gọi là *khả quy* nếu mỗi iđêan $\mathfrak{a}$ trong $\mathfrak{g}$ luôn tồn tại iđêan $\mathfrak{b}$ trong $\mathfrak{g}$ sao cho $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.

Nhận xét. Mỗi đại số Lie nửa đơn là khả quy. Điều ngược lại nói chung là không đúng.

Kết quả dưới đây cho thấy đại số Lie khả quy có thể được xác định từ đại số Lie nửa đơn và đại số Lie giao hoán.

2.2.2 Mệnh đề

Tổng trực tiếp của một đại số Lie nửa đơn và một đại số Lie giao hoán là khả quy.

2.2.3 Mệnh đề [9, Corollary 1.56]

Mỗi đại số Lie $\mathfrak{g}$ *khả quy có dạng phân tích* $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus Z(\mathfrak{g})$*, trong đó* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *là nửa đơn và* $Z(\mathfrak{g})$ *là giao hoán.*

2.2.4 Định lý [5, Proposition 1.7.1]

Cho ρ *là biểu diễn của* $\mathfrak{g}$*. Cho* $\mathfrak{a}_1$ *là giao của các hạt nhân của biểu diễn đơn hữu hạn chiều của* $\mathfrak{g}$*. Đặt* $\mathfrak{a}_2$ *là giao của các iđêan lũy linh lớn nhất của biểu diễn hữu hạn chiều của* $\mathfrak{g}$*. Khi đó,*

a) $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \rho = [\mathfrak{g}, \rho]$

b) Iđêan $\mathfrak{a}_1$ *là lũy linh.*

c) Đặc biệt, nếu $\mathfrak{g}$ *là giải được thì* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *lũy linh.*

2.2.5 Định nghĩa

Iđêan $\mathfrak{a}_1$ ở định lý trên được gọi là *căn lũy linh* của $\mathfrak{g}$. Chú ý rằng nếu $\mathfrak{g}$ giải được thì $\mathfrak{a}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Từ các Mệnh đề trên ta suy ra một đại số Lie $\mathfrak{g}$ là khả quy nếu và chỉ nếu $\mathfrak{g}$ là tổng trực tiếp của một đại số Lie nửa đơn và một đại số Lie giao hoán.

2.2.6 Mệnh đề [5, Proposition 1.7.3]

Cho $\mathcal{R}$ *là căn của* $\mathfrak{g}$ *và* τ *là căn lũy linh của* $\mathfrak{g}$*. Các điều kiện sau tương đương:*

a) Biểu diễn liên hợp của $\mathfrak{g}$ *là nửa đơn.*

b) $\mathfrak{g}$ *là tích của một đại số Lie nửa đơn và một đại số Lie giao hoán*

c) Tồn tại một biểu diễn hữu hạn chiều của $\mathfrak{g}$ *sao cho dạng song tuyến tính kết hợp là không suy biến.*

d) Tồn tại một biểu diễn đơn ánh nửa đơn hữu hạn chiều của $\mathfrak{g}$

e) $\tau = 0$

f) $\mathcal{R}$ *là tâm của* $\mathfrak{g}$.

2.2.7 Mệnh đề

Cho $\mathfrak{g}$ *là một đại số Lie khả quy. Khi đó* $\mathfrak{g}$ *là nửa đơn khi và chỉ khi* $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = 0$.

2.3 Các đại số Lie nửa đơn cổ điển

Dựa vào mối liên hệ giữa đại số Lie khả qui và đại số Lie nửa đơn ta có thể xác định được cấu trúc nửa đơn của lớp các đại số Lie thực gồm các ma trận trên trường số thực $\mathbb{R}$, trường số phức $\mathbb{C}$ và trường quaternion $\mathbb{H}$, với $\mathbb{H}$ là một đại số chia được trên $\mathbb{R}$ có cơ sở $1, i, j, k$ sao cho $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k, jk = i, ki = j$ và $ji = -k, kj = -i, ik = -j$.

Lớp các đại số Lie nửa đơn này thường được gọi là đại số Lie nửa đơn cổ điển.

Trước hết xét các đại số Lie thực $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ và $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ lần lượt gồm tất cả các ma trận vuông thực và phức cấp n. Khi đó các đại số Lie này là khả quy nhưng không nửa đơn do chúng có tâm gồm các ma trận vô hướng nên khác không. Tương tự, đại số Lie thực $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$ gồm tất cả các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{H}$ là khả quy nhưng không nửa đơn do có tâm khác không.

Bây giờ chúng ta sẽ xét một tiêu chuẩn về tính khả quy cho các đại số Lie thực của các ma trận hệ số thực, phức hoặc quaternion dựa vào phép toán lấy liên hợp chuyển vị của ma trận, tức là phép toán cho ứng với mỗi ma trận $X = (x_{ij})_n$ một ma trận X^* là chuyển vị của ma trận liên hợp $(\overline{x_{ij}})_n$, như sau:

2.3.1 Mệnh đề [9, Proposition 1.59]

Cho $\mathfrak{g}$ *là một đại số Lie thực gồm các ma trận trên* $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ *hoặc* $\mathbb{H}$*. Khi đó nếu* $\mathfrak{g}$ *đóng qua phép toán lấy liên hợp chuyển vị của ma trận thì* $\mathfrak{g}$ *là khả quy.*

2.3.2 Mệnh đề [9, Section 8]

Xét các đại số Lie sau đây:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) | X + X^* = 0\};\\
&\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) | X + X^* = 0\};\\
&\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) | X + X^* = 0, TrX = 0\};\\
&\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) | X + X^* = 0\}.
\end{aligned}$$

Khi đó ta có:

a) $\mathfrak{so}(n)$ *là nửa đơn với* $n \geq 3$ *và* $\mathfrak{sp}(n)$ *là nửa đơn với* $n \geq 1$*.*

b) $\mathfrak{u}(n)$ *không là nửa đơn với* $n \geq 1$ *và* $\mathfrak{su}(n)$ *là nửa đơn với* $n \geq 2$*.*

Lý luận tương tự như Mệnh đề trên ta thu được các đại số Lie nửa đơn như sau:

2.3.3 Mệnh đề [9, Section 8]

Các đại số Lie sau đây đều là đại số Lie nửa đơn:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) | X + X^t = 0\} && \text{với } n \geq 2;\\
&\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) | TrX = 0\} && \text{với } n \geq 3;\\
&\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) | X^t J + JX = 0\} && \text{với } n \geq 1;
\end{aligned}$$

trong đó $J = J_{n,n}$ *là ma trận vuông cấp* $2n$ *xác định bởi* $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.4 Mệnh đề [9, Section 8]

Các đại số Lie sau đây đều là đại số Lie nửa đơn:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) | TrX = 0\} && \text{với } n \geq 2;\\
&\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{H}) | ReTrX = 0\} && \text{với } n \geq 1;\\
&\mathfrak{so}(m,n) = \{X \in \mathfrak{gl}(m+n,\mathbb{R}) | X^* I_{m,n} + I_{m,n}X = 0\} && \text{với } m+n \geq 3;\\
&\mathfrak{su}(m,n) = \{X \in \mathfrak{sl}(m+n,\mathbb{C}) | X^* I_{m,n} + I_{m,n}X = 0\} && \text{với } m+n \geq 2;\\
&\mathfrak{sp}(m,n) = \{X \in \mathfrak{gl}(m+n,\mathbb{H}) | X^* I_{m,n} + I_{m,n}X = 0\} && \text{với } m+n \geq 1;\\
&\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R}) | X^t J_{n,n} + J_{n,n}X = 0\} && \text{với } n \geq 1;\\
&\mathfrak{so}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{su}(n,n) | X^t I_{n,n}J_{n,n} + I_{n,n}J_{n,n}X = 0\} && \text{với } n \geq 2;
\end{aligned}$$

trong đó $J = J_{n,n}$ *là ma trận vuông cấp 2n xác định như trong Mệnh đề trên và các ma trận* $I_{m,n}$, $I_{n,n}J_{n,n}$ *xác định bởi:*

$$I_{m,n} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} m & n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \end{array} ; \qquad I_{n,n}J_{n,n} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} n & n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n \\ n \end{array} \end{array} .$$

Chương 3

DẠNG KILLING VÀ TIÊU CHUẨN CARTAN

Trong chương này chúng tôi ứng dụng các Tiêu chuẩn Cartan được xây dựng từ dạng Killing của đại số Lie để khảo sát tính giải được và tính nửa đơn của một số đại số Lie cụ thể. Các khái niệm và kết quả chủ yếu được tham khảo trong các tài liệu [5], [9].

3.1 Dạng Killing của đại số Lie

3.1.1 Định nghĩa

Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie trên trường $\mathbb{F}$, ánh xạ

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\longmapsto B(X, Y) = Tr(adX \circ adY) \end{aligned}$$

gọi là *dạng Killing* của $\mathfrak{g}$.

3.1.2 Nhận xét.

a) *Dạng Killing B là một dạng song tuyến tính.*

b) $B([X,Y],Z]) = -B(Y,[X,Z])$ *hay* $B(adX(Y),Z) = -B(Y,adX(Z))$

c) *Dạng Killing bất biến qua mọi tự đẳng cấu của $\mathfrak{g}$, nghĩa là $B\varphi = B$ hay $B(\varphi(X), \varphi(Y)) = B(X,Y)$.*

d) *Cho $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ là iđêan. Khi đó hạn chế của dạng Killing của $\mathfrak{g}$ lên $\mathfrak{a}$ là dạng Killing của $\mathfrak{a}$.*

3.1.3 Định nghĩa

Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie hữu hạn chiều, B là dạng Killing tương ứng. Ký hiệu $\mathrm{rad}B = \{X \in \mathfrak{g} | B(X,Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ là một iđêan của $\mathfrak{g}$.

Dạng Killing B được gọi là không suy biến nếu $\mathrm{rad}B = \{0\}$.

3.1.4 Hệ quả

3.1.5 Ứng dụng

1.Tìm dạng Killing của đại số Lie sau:

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & x \\ 0 & t & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| t, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lời giải:

Ta có một cơ sở của đại số Lie $\mathfrak{g}$ là:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tính toán ta thấy: $[A_1, A_2] = A_2,\ [A_1, A_3] = A_3,\ [A_2, A_3] = 0$.

Xét bất kì $X \in \mathfrak{g}$, ta có $X = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$, với $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\quad adX = x_1adA_1 + x_2adA_2 + x_3adA_3$.

Ta có

$$\begin{aligned}
adX(A_1) &= x_1adA_1(A_1) + x_2adA_2(A_1) + x_3adA_3(A_1) \\
&= x_1[A_1, A_1] + x_2[A_2, A_1] + x_3[A_3, A_1] \\
&= -x_2A_2 - x_3A_3, \\
adX(A_2) &= x_1adA_1(A_2) + x_2adA_2(A_2) + x_3adA_3(A_2) \\
&= x_1[A_1, A_2] + x_2[A_2, A_2] + x_3[A_3, A_2] \\
&= x_1A_2, \\
adX(A_3) &= x_1adA_1(A_3) + x_2adA_2(A_3) + x_3adA_3(A_3) \\
&= x_1[A_1, A_3] + x_2[A_2, A_3] + x_3[A_3, A_3] \\
&= x_1A_3.
\end{aligned}$$

Vậy ánh xạ adX có ma trận là:

$$M_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Tương tự xét bất kỳ $Y \in \mathfrak{g}$ với $Y = y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ thì ánh xạ adY cũng có ma trận biểu diễn là:

$$M_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -y_2 & y_1 & 0 \\ -y_3 & 0 & y_1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $adX \circ adY$ có ma trận là:

$$M_X M_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_1y_2 & x_1y_1 & 0 \\ -x_1y_3 & 0 & x_1y_1 \end{pmatrix}.$$

Đại số Lie $\mathfrak{g}$ có dạng Killing là:

$$B = Tr(adX \circ adY) = x_1y_1 + x_1y_1 = 2x_1y_1$$

và có ma trận là:

$$M_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 Tiêu chuẩn Cartan cho đại số Lie giải được

3.2.1 Bổ đề [9, Lemma 1.42]

Cho $\mathbf{V}$ *là không gian vectơ trên trường* $\mathbb{C}$*, nếu* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathbf{V})$ *là đại số Lie sao cho* $Tr(X \circ Y) = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ *thì* $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *là lũy linh.*

Kết quả dưới đây cho chúng ta một đặc trưng về tính giải được của đại số Lie dựa vào dạng Killing và được gọi là Tiêu chuẩn Cartan thứ nhất.

3.2.2 Định lý [9, Proposition 1.46]

Đại số Lie $\mathfrak{g}$ *là giải được khi và chỉ khi dạng Killing* B *thoả mãn* $B(X, Y) = 0$*,* $\forall X \in \mathfrak{g}$ *và* $\forall Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$*.*

3.2.3 Ứng dụng:

1. Kiểm tra tính giải được của đại số Lie sau:

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & x \\ 0 & t & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| t, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lời giải:
Xét cơ sở của đại số Lie $\mathfrak{g}$ là:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Xét bất kì $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ thì $X = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$,
$Y = y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3,\ Z = z_1A_1 + z_2A_2 + z_3A_3$.
Theo ứng dụng 3.1.5 thì adX có ma trận là:

$$M_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Ta cũng tính toán được $ad[Y, Z]$ có ma trận là:

$$M_{[Y,Z]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_2z_1 - y_1z_2 & 0 & 0 \\ y_3z_1 - y_1z_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $adX \circ ad[Y, Z]$ có ma trận biểu diễn là:

$$M_XM_{[Y,Z]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1(y_2z_1 - y_1z_2) & 0 & 0 \\ x_1(y_3z_1 - y_1z_3) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Từ đó ta có $B(X, [Y, Z]) = Tr(adX \circ ad[Y, Z]) = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, suy ra $B(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}') = 0$ nên theo Tiêu chuẩn Cartan thứ I suy ra $\mathfrak{g}$ giải được.

3.3 Tiêu chuẩn Cartan cho đại số Lie nửa đơn

3.3.1 Định nghĩa.

Cho dạng song tuyến tính $\eta : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$, ta có

a) $\operatorname{Ker}\eta = \{x \in \mathbf{V} | \eta(x,y) = 0, \forall y \in \mathbf{V}\}$.

b) Dạng toàn phương η được gọi là không suy biến khi và chỉ khi $\operatorname{Ker}\eta = 0$.

Bây giờ ta sẽ khảo sát Tiêu chuẩn Cartan cho các đại số Lie nửa đơn dựa vào dạng Killing và gọi là Tiêu chuẩn Cartan thứ hai.

3.3.2 Định lý [9, Proposition 1.45]

Đại số Lie $\mathfrak{g}$ là nửa đơn khi và chỉ khi dạng Killing của $\mathfrak{g}$ là không suy biến.

3.3.3 Ứng dụng:

1. Kiểm tra tính nửa đơn của đại số Lie sau:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lời giải:
Xét một cơ sở của $\mathfrak{g}$ như sau:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Xét bất kì $X, Y \in \mathfrak{g}$ thì $X = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3, Y = y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3$.
Tính toán như trên ta có ma trận của adX, adY lần lượt là:

$$M_X = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}, M_Y = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $adX \circ adY$ có ma trận là:

$$M_XM_Y = \begin{pmatrix} -x_3y_3 - x_2y_2 & x_2y_1 & x_3y_1 \\ x_1y_2 & -x_3y_3 - x_1y_1 & x_3y - 2 \\ x_1y - 3 & -x_2y_3 & -x_2y_2 - x_1y_1 \end{pmatrix}.$$

Vậy $B(X,Y) = Tr(adX \circ adY) = -2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$, và dạng Killing của $\mathfrak{g}$ có ma trận là:

$$M_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$detM_B = -8 \neq 0$, nên theo Tiên chuẩn Cartan thứ II ta suy ra $\mathfrak{g}$ nửa đơn.

3.4 Một số kết quả liên quan

Trong phần này chúng tôi giới thiệu một số kết quả liên quan đến ứng dụng của Tiêu chuẩn Cartan và các đại số con khả quy.

3.4.1 Định lý. [9, Theorem 1.54]

Đại số Lie $\mathfrak{g}$ là nửa đơn khi và chỉ khi $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ với các iđêan $\mathfrak{g}_j$ là đại số Lie đơn. Sự phân tích này là duy nhất và bất kì iđêan nào của $\mathfrak{g}$ đều là tổng của một số hạng tử $\mathfrak{g}_j$ nào đó. Từ Định lý trên ta thu được Hệ quả sau:

3.4.2 Hệ quả [9, Corollary 1.55]

Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie nửa đơn trên trường $\mathbb{F}$. Khi đó $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Giả sử $\mathfrak{a}$ là một Ideal bất kỳ của $\mathfrak{g}$ và đặt $\mathfrak{a}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} \mid K(X,Y) = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{a}\}$. Ta có $\mathfrak{a}^{\perp}$ là một Ideal của $\mathfrak{g}$ và $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$.

3.4.3 Mệnh đề. [9, Corollary 1.53]

i) Nếu $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ là phức hóa của đại số Lie thực $\mathfrak{g}$ thì $\mathfrak{g}$ là nửa đơn khi và chỉ khi $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ là nửa đơn.

ii) Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie phức và $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ là dạng thực của $\mathfrak{g}$ thì $\mathfrak{g}$ là nửa đơn khi và chỉ khi $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ là nửa đơn.

3.4.4 Định nghĩa.

Gọi $\mathfrak{h}$ là một đại số Lie con của $\mathfrak{g}$. Ta gọi $\mathfrak{h}$ là *khả quy* trong $\mathfrak{g}$ nếu biểu diễn $x \to ad_{\mathfrak{g}}x$, $\forall x \in \mathfrak{h}$ là nửa đơn. Khi đó biểu diễn con $x \to ad_{\mathfrak{g}}x$ của $\mathfrak{h}$ là nửa đơn nên suy ra $\mathfrak{h}$ là nửa đơn.

3.4.5 Mệnh đề. [5, Proposition 1.7.6]

Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie nửa đơn, B là dạng Killing của $\mathfrak{g}$ và $\mathfrak{m}$ là đại số Lie con của $\mathfrak{g}$ thỏa mãn điều kiện sau:

i) $B|_{\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}}$ là không suy biến.

ii) Nếu $x \in \mathfrak{m}$ thì các thành phần nửa đơn và lũy linh của x tương ứng với $\mathfrak{g}$ thuộc vào $\mathfrak{m}$.

Khi đó, $\mathfrak{m}$ là khả quy trong $\mathfrak{g}$.

3.4.6 Mệnh đề. [5, Proposition 1.7.7]

Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie nửa đơn và $\mathfrak{a}$ là đại số Lie khả quy tương ứng với $\mathfrak{g}$. Gọi $\mathfrak{m}$ là tâm hóa của $\mathfrak{a}$ trong $\mathfrak{g}$ và B là dạng Killing của $\mathfrak{g}$. Khi đó ta có

i) $B|_{\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}}$ là không suy biến.

ii) Nếu $x \in \mathfrak{m}$ thì các thành phần nửa đơn và lũy linh của x tương ứng với $\mathfrak{g}$ thuộc vào $\mathfrak{m}$.

iii) $\mathfrak{m}$ là khả quy trong $\mathfrak{g}$.

iv) $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ và $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ là không gian con trực giao của $\mathfrak{m}$.

3.4.7 Hệ quả.

Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie hữu hạn chiều, B là dạng Killing tương ứng. Khi đó $rad\ B \subset rad\ \mathfrak{g}$.

KẾT LUẬN

Luận văn đã cho tổng quan về đại số Lie nửa đơn và đại số Lie khả quy, thể hiện mối liên hệ của chúng trong các đại số Lie cụ thể và ứng dụng Tiêu chuẩn Cartan để khảo sát tính giải được và tính nửa đơn của đại số Lie.

Kết quả đạt được chủ yếu của luận văn thể hiện trong Chương 2 và Chương 3 cụ thể như sau:

1) Trong chương 2, chúng tôi đã khảo sát đại số Lie nửa đơn trong mối tương quan với đại số Lie khả quy, từ đó ứng dụng để xác định các đại số Lie nửa đơn cổ điển gồm các ma trận vuông cấp n hệ số thực, phức hoặc quaternion.

2) Trong Chương 3, chúng tôi đã ứng dụng các Tiêu chuẩn Cartan được xây dựng từ dạng Killing của đại số Lie để khảo sát tính chất giải được và nửa đơn của một số đại số Lie cụ thể.

Các kết quả đạt được của luận văn tuy chưa nhiều và chỉ dừng lại ở mức tổng quan nhưng đã giúp cho bản thân hiểu biết thêm về cấu trúc đại số Lie nửa đơn và đại số Lie khả quy cùng một số khái niệm và kết quả liên quan.