



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
∞  ∞

BÙI THỊ VÂN ANH

ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC SỐ CHIỀU THẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC



Thành Phố Hồ Chí Minh - 2011

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
∞  ∞

BÙI THỊ VÂN ANH

ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC SỐ CHIỀU THẤP

Chuyên ngành: Hình học và tô pô

Mã số : 60.46.10

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS.LÊ ANH VŨ**

Thành Phố Hồ Chí Minh – 2011

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành nhờ sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS.Lê Anh Vũ. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy. Thầy đã giúp đỡ tạo điều kiện cho tôi tiếp xúc với các nguồn tài liệu quý trong và ngoài nước, giảng giải và chỉ dẫn tận tình, đầy trách nhiệm cho tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Hơn nữa, Thầy đã dành nhiều thời gian và công sức để đọc và chỉnh sửa luận văn cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn Quý Thầy Cô khoa Toán – Tin Trường Đại Học Sư Phạm Thành Phố Hồ Chí Minh. Đặc biệt là các Quý Thầy Cô tổ Hình học, Thầy Cô giảng dạy lớp cao học khóa 18 Trường Đại học Sư Phạm Thành phố Hồ Chí Minh đã cung cấp những kiến thức chuyên môn cần thiết cho tôi để làm nền tảng cho việc hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng tổ chức hành chính, Phòng khoa học công nghệ - Sau Đại học, phòng Kế hoạch - tài chính Trường Đại học sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Ban giám hiệu Trường THPT Phú Nhuận cùng toàn thể các đồng nghiệp và bạn bè đã giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học và nghiên cứu luận văn này.

Luận văn không thể hoàn thành nếu thiếu sự chia sẻ, khích lệ, động viên của gia đình tôi. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn vô hạn của mình đến gia đình.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

Tp Hồ Chí Minh, tháng 09 năm 2011
Tác giả

Bùi Thị Vân Anh

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN	3
MỤC LỤC	4
BẢNG CHỈ DẪN CÁC KÝ HIỆU	7
LỜI MỞ ĐẦU	9
1. Lý do chọn đề tài.....	9
2. Mục đích	11
3. Đối tượng và nội dung nghiên cứu.....	11
4. Ý nghĩa khoa học thực tiễn	11
5. Cấu trúc luận văn	11
CHƯƠNG 1: CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ.....	12
1.1. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH	12
1.1.1 Định nghĩa	12
1.1.2 Định nghĩa	12
1.1.3 Bổ đề	12
1.1.4 Định nghĩa	13
1.1.5 Nhận xét	13
1.1.6 Dạng chính tắc của dạng song tuyến tính	13
1.1.6.1 Bổ đề.....	13
1.1.6.2 Bổ đề.....	13
1.2. ĐẠI SỐ LIE	14
1.2.1 Đại số.....	14
1.2.1.1 Định nghĩa	14
1.2.1.2 Ví dụ.....	14
1.2.2 Đại số Lie	15
1.2.2.1 Định nghĩa	15
1.2.2.2 Nhận xét.....	15
1.2.2.3 Định lý (Đại số Lie cảm sinh từ đại số).....	15
1.2.2.4 Ví dụ.....	16
1.3. ĐỒNG CẤU.....	17
1.3.1 Định nghĩa	17
1.3.2 Nhận xét và ví dụ	17
1.4. ĐẠI SỐ LIE CON, IDEAL VÀ ĐẠI SỐ THƯỜNG.....	17
1.4.1 Định nghĩa	17
1.4.2 Định nghĩa	17

1.4.3 Định nghĩa	17
1.4.4 Tính chất.....	18
1.4.5 Mệnh đề.....	18
1.4.6 Nhận xét	18
1.5. ĐẠI SỐ LIE GIẢI ĐƯỢC	19
1.5.1 Bổ đề	19
1.5.2 Nhận xét	19
1.5.3 Định nghĩa	19
1.5.4 Ví dụ.....	19
1.5.5 Bổ đề	20
1.5.6 Bổ đề	20
1.5.7 Bổ đề	20
1.5.8 Hệ quả	21
1.6 ĐẠI SỐ LIE LŨY LINH	21
1.6.1 Chúng ta xét dãy các ideal :	21
1.6.2 Định lý.....	21
1.6.3 Định nghĩa	22
1.6.4 Nhận xét	22
1.6.5 Tâm của đại số Lie	22
1.6.6 Bổ đề	22
1.7 ĐẠI SỐ LIE ĐƠN VÀ NỬA ĐƠN	23
1.7.1 Định nghĩa	23
1.7.2 Định nghĩa	23
1.7.3 Ví dụ.....	23
1.7.4 Định lý (Cartan – Levi – Malcev)	23
1.7.5 Bổ đề	23
1.7.6 Nhận xét	24

CHƯƠNG 2: CÁC KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC 25

2.1. ĐỊNH NGHĨA ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC. VÀI VÍ DỤ.....	25
2.1.1 Định nghĩa đại số Lie quadratic	25
2.1.2 Vài ví dụ.....	26
2.2. VÀI TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC.....	27
2.2.1 Vài khái niệm	27
2.2.2 Các tính chất.....	29
2.3. ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC ĐỊA PHƯƠNG.....	30
2.3.1 Vài khái niệm	31

2.3.2 Các tính chất.....	31
CHƯƠNG 3: ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC CÓ CHIỀU QUADRATIC BẰNG 2	37
3.1. ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC GIẢI ĐƯỢC VỚI CHIỀU QUADRATIC BẰNG 2	37
3.1.1. Các tính chất.....	37
3.1.2 Các hệ quả	43
3.1.3 Các ví dụ.....	44
3.2. ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC ĐẦY ĐỦ VỚI CHIỀU QUADRATIC BẰNG 2	46
3.2.1 Mệnh đề (xem [5, trang 726]).....	46
3.2.2 Định lý (xem [5, Theorem 5.1])	46
3.2.3 Ví dụ	47
3.3. ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC THỰC VỚI CHIỀU QUADRATIC BẰNG 2	47
3.3.1 Tính chất về số chiều quadratic của đại số Lie thực quadratic.....	48
3.3.2 Tính chất bất khả qui của đại số Lie thực quadratic có chiều quadratic bằng 2 (xem [5, Proposition 6.2]).....	48
3.3.3 Bổ đề (xem [5, Lemma 6.1])	48
3.3.4 Tính chất (xem [5, Proposition 6.3])	49
KẾT LUẬN	50
CHỈ MỤC	51
TÀI LIỆU THAM KHẢO	54

BẢNG CHỈ DẪN CÁC KÝ HIỆU

Ký hiệu	Giải thích ký hiệu
$\text{Mat}(n, \mathbf{K})$	Không gian các ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbf{K}$
$\text{gl}(n; \mathbf{K})$	Đại số Lie các ma trận vuông cấp n trên $\mathbf{K}$
$\text{sl}(n, \mathbf{K})$	Không gian các ma trận có vết bằng không
$\mathfrak{b}(n, \mathbf{K})$	Không gian các ma trận tam giác trên
$\mathfrak{n}(n, \mathbf{K})$	Không gian các ma trận tam giác trên ngặt
$\text{End}(V)$	Không gian các toán tử tuyến tính
$[\dots]$	Móc Lie (hay hoán tử)
Tr	Vết
$Z(\mathcal{G})$	Tâm của đại số Lie $\mathcal{G}$
$\mathcal{G}/I$	Đại số Lie thương
$[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$	Đại số dẫn xuất của $\mathcal{G}$
$\text{Rad}\mathcal{G}$ (hay $\mathcal{R}$)	Căn giải được của $\mathcal{G}$
ad_x	Biểu diễn phụ hợp giữa các đại số Lie
$\mathcal{S}$	Đại số Lie đơn
$\mathbf{K}$	Trường giao hoán đóng đại số có đặc số là 0
$(\mathfrak{g}, B)$	Đại số Lie quadratic của đại số Lie B trên $\mathfrak{g}$
$V^\perp$	Trực giao của V
$\text{Der}(\mathfrak{g})$	Đại số Lie các toán tử vi phân trên $\mathfrak{g}$
$\text{Der}_a(\mathfrak{g}, B)$	Đại số Lie con của $\text{Der}(\mathfrak{g})$
$\mathcal{F}(\mathfrak{g})$	Không gian vectơ của các dạng song tuyến tính đối xứng bất biến trên $\mathfrak{g}$

$\mathcal{B}(g)$	Không gian vectơ của các tích vô hướng bất biến trên g
$d_q(g)$	Chiều quadratic của đại số Lie g
$Cent_s(g, B)$	Tập tất cả các phần tử B - đối xứng trong trọng tâm của g
$M(g)$	Tập tất cả các ideal cực tiểu trên g
$Soc(g)$	Tổng các ideal cực tiểu trong g
g^c	Mở rộng phức của g
κ	Dạng Killing
K	Dạng song tuyến tính đối xứng bất biến trên g
$\square$	Kết thúc một chứng minh

LỜI MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Nhóm Lie, *đại số Lie*, đặc biệt là Đại số Lie Quadratic (hay *đại số Quadratic*) đã ngày càng có vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học và Vật lý. *Nhóm Lie*, được đặt tên theo nhà toán học người Na Uy là Sophus Lie (1842 – 1899), là một khái niệm tổng hòa từ hai khái niệm cơ bản là *nhóm* (trong Đại số học) và *đa tạp vi phân* (trong Hình học – Tôpô). Nhóm Lie là công cụ của gần như tất cả các ngành toán hiện đại và vật lý lý thuyết hiện đại, đặc biệt là lý thuyết các hạt. Một trong những ý tưởng của lý thuyết nhóm Lie là thay thế cấu trúc nhóm toàn cục bởi phiên bản mang tính địa phương của nó hay còn gọi là phiên bản đã được làm tuyến tính hóa. Sophus Lie gọi đó là nhóm Lie vô cùng bé. Sau đó người ta gọi đó là *Đại số Lie*. Một đại số Lie là quadratic nếu nó được bổ sung một bất biến thể hiện dưới dạng một dạng song tuyến tính đối xứng không suy biến. Các đại số Lie quadratic thú vị không chỉ vì những quan điểm đại số mới lạ mà còn do chúng được áp dụng trong nhiều lĩnh vực toán học và vật lý. Hiểu về đại số quadratic giúp chúng ta hiểu rõ hơn về cấu trúc Poisson trực giao, nhóm Lie Poisson và phương trình Lax. Trên cơ sở đại số Lie với một bất biến được bổ sung, ta xây dựng được nhiều lớp các cấu trúc đại số quadratic cụ thể như: đại số quadratic Novikov, đại số quadratic giải được, đại số quadratic đối ngẫu,....

Đại số quadratic đóng một vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu lý thuyết trường bảo giác. Nappi và Witten đã chứng minh được rằng các phép dựng hình loại Sugawara tồn tại trong đại số quadratic và các phép dựng hình này được khái quát hóa cho việc mở rộng Abel của các đại số Euclide. Ngoài ra, Mohammedi cũng đã chứng minh rằng, điều kiện cho phép dựng hình Sugawara tương đương với điều kiện thiết yếu của đại số Lie quadratic. Thêm vào đó, M. Bordemann cũng đưa ra khái niệm mở rộng T^* của đại số Lie. Dựa trên khái niệm này, ông chứng minh được rằng mọi đại số Lie quadratic giải được trên trường đóng đại số có đặc số bằng 0 là mở rộng T^* hoặc là ideal không suy biến có số đối chiều là 1. Cũng dựa trên khái niệm này, M. Bordemann chứng minh được rằng mọi đại số Lie quadratic hữu hạn chiều trên trường đóng đại số có đặc số bằng 0 là một cặp Manin trong chiều của Drinfel'd.

Mặt khác, nhờ khái niệm mở rộng kép được giới thiệu bởi Medina và Revoy, ta có thể chứng minh được một điều quan trọng là mọi đại số Lie quadratic trong không gian hữu hạn chiều có thể được tạo nên bởi đại số Lie 1 chiều hoặc đại số Lie đơn bởi một dãy các phép dựng trong đó mỗi phép dựng là tổng trực tiếp trực giao hoặc là mở rộng kép. Ngoài ra, dựa vào khái niệm mở rộng kép ta còn chứng minh được đại số Lie quadratic giải được n chiều có thể nhận được từ đại số Lie quadratic $(n-2)$ chiều bởi đại số 1 chiều tích nửa trực tiếp với một đại số 1 chiều khác. Khái niệm mở rộng kép đóng một vai trò quan trọng vì nó là cơ sở cho phương pháp phân loại quy nạp các đại số Lie quadratic.

Ngoài ra, nếu G là một nhóm Lie và g là metric song bất biến nửa Riemann trên G thì đại số Lie(G) của nó G khi bổ sung dạng song tuyến tính không suy biến g sẽ trở thành đại số Lie quadratic. Ngược lại, sẽ có một tích vô hướng bất biến B trên một đại số Lie h được tạo ra bởi phép tịnh tiến trái một metric song bất biến nửa Riemann trên nhóm Lie G bất kì mà $h = \text{Lie}(G)$. Do vậy, việc nghiên cứu đại số Lie quadratic rất hữu ích cho hình học nửa Riemann. Đặc biệt, tập các tích vô hướng bất biến trên đại số Lie quadratic tương ứng 1-1 với tập các metric song bất biến trên nhóm Lie tương ứng.

Trên nhóm Lie người ta còn xét cấu trúc Novikov như là một trường hợp đặc biệt của cấu trúc affin bất biến trái trên nhóm Lie. Hơn nữa, một nhóm Lie chấp nhận cấu trúc Novikov khi và chỉ khi nhóm Lie là nhóm giải được. Fuhai Zhu và Zhiqi Chen dựa trên đại số Novikov trang bị thêm một dạng song tuyến tính đối xứng không suy biến bất biến tạo thành một đại số Novikov quadratic. Trong lý thuyết các đại số Novikov quadratic, người ta chứng minh được một kết quả quan trọng là mỗi đại số Novikov quadratic trong không gian có số chiều nhỏ hơn hoặc bằng 4 đều giao hoán, hơn nữa tồn tại đại số Novikov không giao hoán có chiều lớn hơn 4, cụ thể là đại số Novikov quadratic trong không gian 6 chiều.

Dựa trên sự đa dạng, mới mẻ, nhiều ứng dụng của đại số quadratic và để hiểu rõ hơn về đại số quadratic, chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu về đại số quadratic với số chiều quadratic là 2. Vì vậy, luận văn của chúng tôi có tên là “***Đại số Lie quadratic số chiều thấp***”.

2. Mục đích

Trình bày một cách cơ bản nhất các kiến thức về đại số Lie quadratic, đặc biệt là đại số Lie quadratic có số chiều quadratic bằng 2.

3. Đối tượng và nội dung nghiên cứu

Đại số Lie quadratic số chiều quadratic thấp, cụ thể là bằng 2.

4. Ý nghĩa khoa học thực tiễn

Đại số Lie quadratic có ý nghĩa rất lớn trong nghiên cứu khoa học, toán học và vật lý.

5. Cấu trúc luận văn

Nội dung của bản luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương nội dung và phần kết luận. Cụ thể:

Phần mở đầu: Nêu xuất xứ của vấn đề và đặt bài toán nghiên cứu.

Chương 1: Dành cho việc liệt kê lại những kiến thức cơ bản nhất cần thiết cho việc nghiên cứu đại số Lie quadratic.

Chương 2: Giới thiệu các khái niệm mở đầu và các tính chất cơ bản của đại số Lie quadratic, đại số Lie quadratic địa phương, mở rộng kép,...

Chương 3: Giới thiệu về đại số Lie quadratic có chiều quadratic bằng 2.

Phần kết luận: Đưa ra những nhận xét và những vấn đề mở cần phải tiếp tục nghiên cứu tiếp sau đề tài.

CHƯƠNG 1: CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này nhằm nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản về dạng song tuyến tính, đại số và đại số Lie cần thiết cho các chương sau. Do đó hầu hết các phép chứng minh của các tính chất, bổ đề, mệnh đề, định lý đều không được giới thiệu. Độc giả nào quan tâm xin xem thêm các tài liệu tham khảo [1], [3], ...

1.1. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

1.1.1 Định nghĩa

Cho V là không gian vector trên trường K . Một dạng song tuyến tính trên V là một ánh xạ :

$$B : V \times V \rightarrow K \text{ thỏa}$$

$$\text{i) } B(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2; w) = \lambda_1 B(v_1, w) + \lambda_2 B(v_2, w)$$

$$\text{ii) } B(v, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \mu_1 B(v, w_1) + \mu_2 B(v, w_2)$$

với mọi $v_i, w_i \in V, \lambda_i, \mu_i \in K$.

Đặc biệt:

+ Dạng song tuyến tính trên V gọi là *đối xứng* khi $B(v, w) = B(w, v)$,
 $\forall v, w \in V$.

+ Dạng song tuyến tính trên V gọi là *phản xứng* khi $B(v, w) = - B(w, v)$,
 $\forall v, w \in V$.

+ Khi $K = \mathbb{R}$, một dạng song tuyến tính đối xứng thì $(v, v) \geq 0$ với mọi $v \in V$
và $(v, v) = 0$ khi và chỉ khi $v = 0$.

1.1.2 Định nghĩa

Cho U là tập con của V . Đặt $U^\perp = \{v \in V: B(u, v) = 0 \text{ với } \forall u \in U\}$. Khi đó $U^\perp$ là không gian con của V . Dạng song tuyến tính B trên V được gọi là *không suy biến* trên V khi $V^\perp = \{0\}$.

1.1.3 Bổ đề

Giả sử B là một dạng song tuyến tính không suy biến trên V . Khi đó, với mọi không gian con U của V , chúng ta có $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

Nếu $U \cap U^\perp = \{0\}$ thì $V = U \oplus U^\perp$. Và thu hẹp dạng song tuyến tính B trên U và trên $U^\perp$ là không suy biến.

1.1.4 Định nghĩa

Giả sử $B: V \times V \rightarrow \mathbf{K}$ là một dạng song tuyến tính. Một vector $v \in V$ được gọi là *đẳng hướng* đối với dạng song tuyến tính B nếu $B(v, v) = 0$.

1.1.5 Nhận xét

i) Nếu B là dạng song tuyến tính phản xứng và đặc số của trường khác 0 thì mọi vector của V đều là đẳng hướng.

ii) Nếu B là dạng song tuyến tính đối xứng thì vector $\vec{0}$ luôn đẳng hướng đối với B .

iii) Nếu dạng song tuyến tính B không suy biến và $v \in V$ là vector đẳng hướng thì tồn tại $w \in V$ sao cho $B(v, w) \neq 0$. Rõ ràng v và w độc lập tuyến tính.

1.1.6 Dạng chính tắc của dạng song tuyến tính

1.1.6.1 Bổ đề

Giả sử V có một dạng song tuyến tính B . Và U_1, U_2 là những không gian con của V sao cho $B(u, v) = 0$ với mọi $u, v \in U_1$, $u, v \in U_2$ và $B(-, -)$ trên $U_1 \oplus U_2$ là không suy biến. Nếu $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ là một cơ sở của U_1 thì khi đó có một cơ sở $\{u_1', u_2', \dots, u_n'\}$ của U_2 sao cho $(u_i, u_j') = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

1.1.6.2 Bổ đề

Cho B là một dạng song tuyến tính đối xứng không suy biến trên V . Khi đó có một cơ sở $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ của V sao cho $B(v_i, v_j) = 0$ nếu $i \neq j$ và $B(v_i, v_i) \neq 0$.

1.2. ĐẠI SỐ LIE

1.2.1 Đại số

1.2.1.1 Định nghĩa

Một *đại số* trên trường $\mathbf{K}$ có đặc số 0 là một $\mathbf{K}$ - không gian vector $\mathcal{A}$ với phép nhân $(a,b) \rightarrow ab$ thỏa mãn tính chất sau :

$$a(\lambda b + \mu c) = \lambda ab + \mu ac$$

$$(\lambda b + \mu c)a = \lambda ba + \mu ca, \quad a, b, c \in \mathcal{A}, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{K}.$$

Một đại số là *đại số kết hợp* nếu phép nhân có tính kết hợp, tức là $(ab)c = a(bc), \forall a, b, c \in \mathcal{A}$.

Tùy vào phép nhân trong $\mathcal{A}$ giao hoán hay phản giao hoán mà ta nói $\mathcal{A}$ là *đại số giao hoán* hay *phản giao hoán*.

Khi $\mathbf{K}$ là trường thực hay phức thì ta nói $\mathcal{A}$ là *đại số thực* hay *phức*.

1.2.1.2 Ví dụ

(1) Không gian các ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbf{K}$, $\text{Mat}(n, \mathbf{K})$ là đại số kết hợp với phép nhân ma trận và không giao hoán.

(2) Không gian các toán tử tuyến tính $\text{End}(V)$ trên $\mathbf{K}$ - không gian vector V cũng là một đại số kết hợp với phép nhân là phép hợp thành hai toán tử thông thường.

(3) Đại số đa thức với hệ số trên $\mathbf{K}$ (một hay nhiều biến) là một đại số giao hoán.

(4) Đại số vector thực hay phức $\mathbf{K}^3$ ($\mathbf{K} = \mathbb{R}, \mathbf{K} = \mathbb{C}$) với phép cộng vector, phép nhân vector với một số và phép nhân có hướng là một đại số phản giao hoán.

1.2.2 Đại số Lie

1.2.2.1 Định nghĩa

Một *đại số Lie* là một $\mathbf{K}$ - đại số $\mathcal{G}$ với phép nhân $[a,b]$ gọi là móc Lie của a và b thỏa :

(i) Tính phản xứng : $[a,a] = 0$, $\forall a \in \mathcal{G}$

(ii) Đẳng thức Jacobi : $[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0$, $\forall a,b,c \in \mathcal{G}$.

Tùy vào trường cơ sở $\mathbf{K}$ là thực hay phức mà ta gọi $\mathcal{G}$ là đại số Lie *thực* hay *phức*.

1.2.2.2 Nhận xét

(1) Số chiều của đại số Lie $\mathcal{G}$ chính là số chiều của $\mathbf{K}$ -không gian vector $\mathcal{G}$.

(2) Dễ dàng kiểm tra, điều kiện (i) sẽ tương đương với (i')

$$[a,b] = -[b,a], \text{ với mọi } a,b \in \mathcal{G}.$$

(3) Nếu $[a,b] = 0$, $\forall a,b \in \mathcal{G}$ thì ta nói rằng *móc Lie* của đại số Lie là *tâm thường* và ta gọi đại số Lie $\mathcal{G}$ là *giao hoán*.

(4) Mỗi $\mathbf{K}$ - đại số Lie đều là $\mathbf{K}$ - đại số. Ngược lại, mỗi $\mathbf{K}$ - đại số $\mathcal{G}$ đều có thể xem là một $\mathbf{K}$ - đại số Lie khi ta định nghĩa móc Lie nhờ hoán tử của phép nhân. Cụ thể ta có định lý sau:

1.2.2.3 Định lý (Đại số Lie cảm sinh từ đại số)

Cho $\mathcal{G}$ là một $\mathbf{K}$ - đại số. Trên $\mathcal{G}$ ta định nghĩa móc Lie như sau :

$$[.,.]: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, [a,b] = ab - ba, \forall a,b \in \mathcal{G}.$$

Khi đó, $\mathcal{G}$ cùng với móc Lie trên trở thành một $\mathbf{K}$ - đại số Lie. Như vậy, ta thấy rằng:

+ Mỗi đại số Lie đều là một đại số (không kết hợp). Trong khi đó, mỗi đại số nói chung không phải là đại số Lie, nhưng nếu ta lấy móc Lie là hoán tử thì mỗi đại số đều trở thành đại số Lie.

+ Mỗi không gian vector chính là một đại số Lie giao hoán.

1.2.2.4 Ví dụ

(1) Không gian $\mathbb{R}^3$ với tích có hướng thông thường là một đại số Lie thực 3-chiều.

(2) Kí hiệu $\text{Mat}(n; \mathbf{K})$ là không gian vector n^2 – chiều trên $\mathbf{K}$. Ta xác định trên $\mathbf{g}$ móc Lie: $(A, B) \rightarrow [A, B] = AB - BA, \forall A, B \in \text{Mat}(n; \mathbf{K})$ (A và B còn gọi là hoán tử). Khi đó, $\text{Mat}(n; \mathbf{K})$ trở thành một đại số Lie.

Ta kí hiệu $\text{Mat}(n; \mathbf{K}) = \text{gl}(n; \mathbf{K})$ và gọi là đại số Lie các ma trận vuông cấp n trên $\mathbf{K}$.

(3) Kí hiệu $\mathfrak{b}(n, \mathbf{K})$ là không gian các ma trận tam giác trên trong $\text{gl}(n, \mathbf{K})$. Nhắc lại rằng một ma trận $y = (y_{ij})_n$ vuông cấp n được gọi là ma trận *tam giác trên* nếu $y_{ij} = 0, \forall i > j$. Hiển nhiên nếu x, y thuộc $\mathfrak{b}(n, \mathbf{K})$ thì $[x, y]$ cũng thuộc $\mathfrak{b}(n, \mathbf{K})$. Nói cách khác, $\mathfrak{b}(n, \mathbf{K})$ là một đại số Lie với móc Lie kế thừa từ $\text{gl}(n, \mathbf{K})$.

(4) Tương tự, kí hiệu $\mathfrak{n}(n, \mathbf{K})$ là không gian các ma trận tam giác trên ngặt trong $\text{gl}(n, \mathbf{K})$. Một ma trận $y = (y_{ij})_n$ vuông cấp n gọi là *ma trận tam giác trên ngặt* nếu $y_{ij} = 0, \forall i \geq j$. Tương tự $\mathfrak{b}(n, \mathbf{K})$, $\mathfrak{n}(n, \mathbf{K})$ cũng là một đại số Lie với móc Lie kế thừa từ $\text{gl}(n, \mathbf{K})$.

(5) Nhắc lại rằng *vết* của một ma trận vuông là tổng của các phần tử trên đường chéo (chính) của nó. Kí hiệu $\text{sl}(n, \mathbf{K})$ là không gian con của $\text{gl}(n, \mathbf{K})$ gồm tất cả các ma trận có vết bằng không. Hiển nhiên, với hai ma trận tùy ý $x, y \in \text{sl}(n, \mathbf{K})$ thì $[x, y] = xy - yx$ có vết bằng không, tức là $[x, y]$ cũng thuộc $\text{sl}(n, \mathbf{K})$. Do đó, $\text{sl}(n, \mathbf{K})$ với móc Lie kế thừa của $\text{gl}(n, \mathbf{K})$ là một đại số Lie.

1.3. ĐỒNG CẤU

1.3.1 Định nghĩa

Cho $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ là các $\mathbf{K}$ - đại số Lie. Một *đồng cấu đại số Lie* là một ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ bảo toàn móc Lie, tức là

$$\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)], \quad \forall a, b \in \mathcal{G}_1.$$

Nếu φ là đẳng cấu tuyến tính thì φ được gọi là một *đẳng cấu đại số Lie*.

1.3.2 Nhận xét và ví dụ

- (1) Mỗi ánh xạ tuyến tính của các $\mathbf{K}$ - không gian vector chính là các đồng cấu giữa các đại số Lie giao hoán.
- (2) Mỗi đồng cấu đại số đều trở thành đồng cấu đại số Lie khi xét cấu trúc đại số Lie cảm sinh bởi hoán tử.

1.4. ĐẠI SỐ LIE CON, IDEAL VÀ ĐẠI SỐ THƯƠNG

1.4.1 Định nghĩa

Không gian vector con $\mathbf{K}$ của đại số Lie $\mathcal{G}$ được gọi là *đại số Lie con* của $\mathcal{G}$ nếu $[a,b] \in \mathbf{K}$ với mọi $a, b \in \mathbf{K}$.

1.4.2 Định nghĩa

Không gian vector con I của đại số Lie L được gọi là *ideal* của $\mathcal{G}$ nếu

$$[a,b] \in \mathcal{G} \quad \text{với } \forall a \in \mathcal{G}, \forall b \in I.$$

1.4.3 Định nghĩa

Giả sử $\mathcal{G}$ là một đại số Lie và I là một ideal của nó. Khi đó, ta có *đại số Lie thương* $\mathcal{G}/I$ xây dựng từ không gian vector thương bằng cách trang bị móc Lie như

$$\text{sau: } \overline{[a_1, a_2]} = [\overline{a_1}, \overline{a_2}], \quad \forall a_1, a_2 \in \mathcal{G}.$$

Ở đó dấu ngang trên các phần tử chỉ lớp kề của các phần tử đó.

1.4.4 Tính chất

1) Nếu I và J lần lượt là các ideal con của $\mathcal{G}$. Khi đó,

$$I + J = \{x + y, x \in I, y \in J\} \text{ là ideal của } \mathcal{G}.$$

2) Nếu I và J lần lượt là các ideal con của $\mathcal{G}$. Khi đó,

$$[I, J] = \{[x, y], x \in I, y \in J\} \text{ là ideal của } \mathcal{G}.$$

3) Nếu $I = J = \mathcal{G}$ thì $L' = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ được gọi là *đại số dẫn xuất* của $\mathcal{G}$, đôi khi cũng gọi là *đại số hoán tử*.

1.4.5 Mệnh đề

Nếu $\varphi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ là một đồng cấu đại số Lie thì:

1) Hạt nhân $\ker \varphi$ của φ là một ideal trong $\mathcal{G}_1$

2) Ảnh đồng cấu $\text{Im} \varphi$ của φ là một đại số Lie con của $\mathcal{G}_2$

$$3) \mathcal{G}_1 / \ker \varphi \cong \text{Im} \varphi.$$

1.4.6 Nhận xét

Một ideal thì hiển nhiên là một đại số Lie con, nhưng nói chung điều ngược lại là không đúng. Chẳng hạn, $b(n, K)$ là một đại số Lie con của $gl(n, K)$ nhưng nó không phải là ideal vì nếu lấy $e_{11} \in b(n, K)$ và $e_{21} \in gl(n, K)$ thì $[e_{11}, e_{21}] = -e_{21} \notin b(n, K)$.

1.5. ĐẠI SỐ LIE GIẢI ĐƯỢC

1.5.1 Bổ đề

Giả sử I là ideal của $\mathcal{G}$. Khi đó, $\mathcal{G}/I$ giao hoán khi và chỉ khi I chứa

$$\mathcal{G}' = [\mathcal{G}, \mathcal{G}].$$

Chứng minh

Đại số $\mathcal{G}/I$ giao hoán khi và chỉ khi với mọi $x, y \in \mathcal{G}$ thì $[x + I, y + I] = [x, y] + I = I \Leftrightarrow [x, y] \in I, \forall x, y \in \mathcal{G}$. Vì I là ideal của $\mathcal{G}$ nên I là không gian con của $\mathcal{G}$. $[x, y] \in I$ với mọi $x, y \in \mathcal{G}$ xảy ra khi và chỉ khi không gian được tạo bởi các móc Lie $[x, y]$ được chứa trong I có nghĩa là $\mathcal{G}' = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subseteq I$. $\square$

1.5.2 Nhận xét

Bổ đề này cho ta thấy đại số $\mathcal{G}'$ là ideal nhỏ nhất của $\mathcal{G}$ với một đại số thương giao hoán. Tương tự, $\mathcal{G}'$ có một ideal nhỏ nhất để đại số thương của nó giao hoán, đặt ideal đó là $\mathcal{G}^2 \dots$

Vậy chúng ta có một chuỗi ideal của $\mathcal{G}$ được xác định như sau: $\mathcal{G}' = \mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2 = [\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^1], \dots, \mathcal{G}^k = [\mathcal{G}^{k-1}, \mathcal{G}^{k-1}], \forall k \geq 2$. Khi đó, ta có dãy các ideal liên kết với đại số Lie $\mathcal{G}$ thỏa $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{G}^1 \supseteq \mathcal{G}^2 \supseteq \dots$

1.5.3 Định nghĩa

Một đại số Lie $\mathcal{G}$ được gọi là *giải được* nếu tồn tại $m \geq 1$ sao cho $\mathcal{G}^m = 0$.

1.5.4 Ví dụ

- 1) Đại số các ma trận tam giác trên là một đại số giải được.
- 2) Bất kỳ một đại số Lie 2-chiều cũng là một đại số giải được.

1.5.5 Bổ đề

Nếu $\mathcal{G}$ là một đại số Lie với các ideal $\mathcal{G} = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \dots \supseteq I_{m-1} \supseteq I_m = 0$ sao cho I_{k-1}/I_k giao hoán với mọi $1 \leq k \leq m$ thì $\mathcal{G}$ giải được.

Chứng minh

Chúng ta sẽ chứng minh $\mathcal{G}^{(k)}$ được chứa trong I_k với mọi k ($1 \leq k \leq m$). Khi đó, đặt $k = m$ ta sẽ có $\mathcal{G}^{(m)} = \{0\}$. Thật vậy, vì $\mathcal{G}/I_1$ giao hoán nên từ bổ đề 1.5.1 ta có $\mathcal{G}' \subseteq I_1$. Quy nạp ta có $\mathcal{G}^{k-1} \subseteq I_{k-1}$ với $k \geq 2$. Và I_{k-1}/I_k giao hoán. Tương tự, $[I_{k-1}, I_{k-1}] \subseteq I_k$. Vì $L^{k-1} \subseteq I_{k-1}$ nên $[\mathcal{G}^{k-1}, \mathcal{G}^{k-1}] \subseteq [I_{k-1}, I_{k-1}]$ suy ra $\mathcal{G}^k \subseteq I_k$. Đặt $k = m$ khi đó $\mathcal{G}^k = \mathcal{G}^m$ và $I_k = I_m$ và $\mathcal{G}^m \subseteq I_m = 0$, do vậy $\mathcal{G}^m = 0$. Vậy $\mathcal{G}$ giải được. $\square$

1.5.6 Bổ đề

Giả sử $\varphi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ là một tự đồng cấu đơn ánh của đại số Lie. Khi đó,

$$\varphi(\mathcal{G}_1^k) = (\mathcal{G}_2)^k$$

1.5.7 Bổ đề

Cho $\mathcal{G}$ là một đại số Lie

- i) Nếu $\mathcal{G}$ giải được thì mọi đại số con và mọi ảnh đồng cấu của $\mathcal{G}$ đều giải được.
- ii) Nếu ideal I và $\mathcal{G}/I$ giải được thì $\mathcal{G}$ giải được.
- iii) Nếu ideal I và J giải được của $\mathcal{G}$ thì $I+J$ là ideal giải được.

1.5.8 Hệ quả

Cho $\mathcal{G}$ là đại số Lie hữu hạn chiều. Khi đó, có duy nhất ideal giải được của $\mathcal{G}$ chứa mọi ideal giải được của $\mathcal{G}$. Ideal này gọi là *căn giải được của $\mathcal{G}$* . Kí hiệu $Rad\mathcal{G}$ (hay $\mathcal{R}$).

Chứng minh

Đặt R là ideal giải được có chiều lớn nhất có thể.

Giả sử I là ideal giải được bất kỳ. Theo bổ đề 1.5.7 thì $R+I$ là ideal giải được và $R \subseteq R+I$. Do đó $\dim R \leq \dim(R+I)$. Vì ta chọn R là ideal giải được có chiều lớn nhất, do đó $\dim R = \dim(R+I)$. Nên suy ra $R = R+I$ hay $I \subseteq R$. $\square$

1.6 ĐẠI SỐ LIE LŨY LINH

1.6.1 Chúng ta xét dãy các ideal :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= [\mathcal{G}, \mathcal{G}], \mathcal{G}_2 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}_1], \mathcal{G}_3 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}_2], \dots, \\ \mathcal{G}_k &= [\mathcal{G}, \mathcal{G}_{k-1}]. \dots \dots \dots \text{ Khi đó, chúng ta có:} \\ \mathcal{G} &\supseteq \mathcal{G}_1 \supseteq \mathcal{G}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{G}_k \dots \text{ và } \mathcal{G}_k / \mathcal{G}_{k+1} \subseteq \mathcal{G} / \mathcal{G}_{k+1} \text{ với } k \geq 2. \end{aligned}$$

1.6.2 Định lý

(i) $\mathcal{G}^k, \mathcal{G}_k$ là các ideal của $\mathcal{G}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Hơn nữa các đại số thương $\mathcal{G}^k / \mathcal{G}^{k+1}$ và $\mathcal{G}_k / \mathcal{G}_{k+1}$ đều là các ideal giao hoán.

$$(ii) \quad \mathcal{G} \supset \mathcal{G}^1 \supset \mathcal{G}^2 \supset \dots \supset \mathcal{G}^k \supset \dots$$

$$|| \quad \cup \quad \cup$$

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2 \supset \dots \supset \mathcal{G}_k \supset \dots$$

(iii) Nếu $\dim \mathcal{G} < +\infty$ thì hai dãy các ideal nêu trên đều dừng, tức là tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\mathcal{G}^\infty := \mathcal{G}^k = \mathcal{G}^{k+1} = \dots$$

$$\mathcal{G}_\infty := \mathcal{G}_k = \mathcal{G}_{k+1} = \dots$$

1.6.3 Định nghĩa

Đại số Lie $\mathcal{G}$ được gọi là *lũy linh* nếu tồn tại một số m sao cho $\mathcal{G}_m = \{0\}$.

1.6.4 Nhận xét

1. Mỗi đại số Lie $\mathcal{G}$ lũy linh đều giải được. Điều ngược lại không đúng tức là đại số giải được chưa chắc là lũy linh. Ví dụ: $b(n, F)$ các ma trận tam giác trên với $n \geq 2$ là đại số Lie không giao hoán 2-chiều.

2. Nếu đại số Lie $\mathcal{G}$ giải được thì đại số con $\mathcal{G}_1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ lũy linh.

3. Tên gọi “*giải được*” là xuất phát từ nhóm Lie giải được (liên quan đến tính có nghiệm của phương trình, hệ phương trình vi phân trên nhóm Lie).

4. Tên gọi “*lũy linh*” là do định lý sau đây:

Định lý (Engel)

$(\mathcal{G} \text{ lũy linh}) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{G}, \text{ad}_x \text{ là toán tử lũy linh, tức là } \exists n \in \mathbb{N} \text{ để } (\text{ad}_x)^n = 0).$

1.6.5 Tâm của đại số Lie

Với mỗi đại số Lie $\mathcal{G}$, tập hợp $(\mathcal{G}) := \{a \in \mathcal{G} / [a, b] = 0, \forall b \in \mathcal{G}\}$ là một ideal của $\mathcal{G}$ và được gọi là *tâm* của đại số Lie $\mathcal{G}$. Ta thường kí hiệu tâm của của đại số Lie $\mathcal{G}$ là $Z(\mathcal{G})$.

1.6.6 Bổ đề

Cho $\mathcal{G}$ là một đại số Lie

1) Nếu $\mathcal{G}$ là lũy linh thì bất kỳ một đại số Lie con nào cũng lũy linh.

2) Nếu $\mathcal{G}/Z(\mathcal{G})$ là lũy linh thì $\mathcal{G}$ lũy linh.

Chứng minh

1) Để chứng minh ta dựa vào định nghĩa.

2) Bằng quy nạp và ta có $(\mathcal{G}/Z(\mathcal{G}))^k = (\mathcal{G}^k + Z(\mathcal{G}))/Z(\mathcal{G})$. Do vậy, nếu $(\mathcal{G}/Z(\mathcal{G}))^m = 0$ thì $\mathcal{G}^m \subseteq Z(\mathcal{G})$ và do vậy $\mathcal{G}^{m+1} = 0$. Vậy $\mathcal{G}$ lũy linh. $\square$

1.7 ĐẠI SỐ LIE ĐƠN VÀ NỬA ĐƠN

1.7.1 Định nghĩa

Đại số Lie $\mathcal{G}$ được gọi là *đơn* nếu ngoài ideal tầm thường $\{0\}$ và chính nó, $\mathcal{G}$ không chứa một ideal không tầm thường thực sự nào khác.

1.7.2 Định nghĩa

Đại số Lie $\mathcal{G}$ được gọi là *nửa đơn* nếu ngoài ideal tầm thường $\{0\}$, $\mathcal{G}$ không chứa một ideal không tầm thường giao hoán nào khác. Điều này tương đương với $\mathcal{G}$ không có ideal giải được nào khác không, điều này có nghĩa là $\mathcal{R} = 0$.

1.7.3 Ví dụ

Đại số Lie tuyến tính đặc biệt $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})$ với $\text{ch}(\mathbf{K}) \neq 2$ là đại số Lie đơn.

1.7.4 Định lý (Cartan – Levi – Malcev)

Cho đại số Lie $\mathcal{G}$. Khi đó, tất cả các ideal giải được của $\mathcal{G}$ đều được chứa trong một ideal giải được tối đại $\mathcal{R}$ (mà được gọi là căn giải được của $\mathcal{G}$). Hơn nữa, tồn tại một đại số con nửa đơn $\mathcal{S}$ của $\mathcal{G}$ sao cho $\mathcal{G} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ (tổng trực tiếp của các không gian vector). Nếu còn có một đại số con $\mathcal{S}'$ cũng có tính chất như $\mathcal{S}$ thì cái này là ảnh của cái kia bởi một tự đẳng cấu của $\mathcal{G}$ bảo toàn $\mathcal{R}$. Nói riêng $\mathcal{S} \approx \mathcal{G}/\mathcal{R}$.

1.7.5 Bổ đề

Nếu $\mathcal{G}$ là một đại số Lie thì $\mathcal{G}/\mathcal{R}$ là nửa đơn.

Chứng minh

Đặt $\bar{J}$ là ideal giải được bất kỳ của $\mathcal{G}/\mathcal{R}$. Khi đó, tồn tại một ideal J của $\mathcal{G}$ sao cho $\bar{J} = J/\mathcal{R}$. Vì $\mathcal{R}$ và $\bar{J}$ giải được nên theo bổ đề 1.5.7 ta có J là giải được. Vì $\mathcal{R}$ là ideal giải được lớn nhất nên $J \subseteq \mathcal{R}$. Do đó $\bar{J} = 0$. $\square$

1.7.6 Nhận xét

1.7.6.1 Như vậy, việc nghiên cứu đại số Lie quy về nghiên cứu các đại số Lie giải được và đại số Lie nửa đơn.

1.7.6.2 Các đại số Lie giải được có cấu trúc dường như không quá phức tạp nhưng việc phân loại chúng cho đến nay vẫn chưa được giải quyết triệt để.

1.7.6.3 Các đại số Lie nửa đơn đã được phân loại đầy đủ. Cụ thể, mỗi đại số Lie nửa đơn đều là tổng trực tiếp của các ideal Lie đơn. Do đó chỉ cần phân loại các đại số Lie đơn, rồi lấy tổng trực tiếp ta được phân loại các đại số Lie nửa đơn.

CHƯƠNG 2: CÁC KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC

Đây là chương đầu tiên trong hai chương chính của bản luận văn. Nội dung cơ bản của chương trình bày các khái niệm mở đầu và các tính chất cơ bản của đại số Lie quadratic, đại số Lie quadratic địa phương, mở rộng kép,... Hầu hết các khái niệm đều khá mới và mới được nghiên cứu vài thập niên gần đây, khá nhiều phép chứng minh phức tạp nên chúng tôi không giới thiệu mà chỉ dẫn đọc giả đến các tài liệu tham khảo. Phần lớn các vấn đề trong chương này được lấy từ cuốn tài liệu tham khảo chính [5] và [9].

2.1. ĐỊNH NGHĨA ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC. VÀI VÍ DỤ

2.1.1 Định nghĩa đại số Lie quadratic

Trong phần này, nếu không nói khác đi, trường cơ sở $\mathbf{K}$ luôn được hiểu là trường đóng đại số và có đặc số 0.

2.1.1.1 Định nghĩa về dạng song tuyến tính bất biến (xem [5, trang 726])

Cho g là đại số Lie trên trường $\mathbf{K}$. Một dạng song tuyến tính B được gọi là dạng song tuyến tính *bất biến* trên g nếu $B([X,Y], Z) = B(X, [Y,Z])$ với mọi X, Y, Z thuộc g .

2.1.1.2 Định nghĩa về tích vô hướng bất biến (xem [5, trang 726])

Cho B là một dạng song tuyến tính trên đại số Lie g . B được gọi là *một tích vô hướng bất biến* trên g nếu B đối xứng, không suy biến và bất biến.

2.1.1.3 Định nghĩa về đại số Lie quadratic (xem [5, trang 726])

Khi trên $\mathbf{K}$ – đại số Lie g đã được trang bị một tích vô hướng bất biến B thì g được gọi là *đại số Lie quadratic* trên $\mathbf{K}$ hay $\mathbf{K}$ – *đại số Lie quadratic*, kí hiệu (g,B) . Đương nhiên, khi $\mathbf{K}$ là trường thực hay phức thì (g,B) cũng gọi là đại số Lie quadratic *thực* hay *phức*.

2.1.1.4 Chú ý

+ Với mỗi không gian con V của đại số Lie quadratic $(\mathfrak{g}, B)$, ta kí hiệu $V^\perp$ là không gian con trực giao của V đối với B .

+ Lưu ý rằng, đối với đại số Lie quadratic, biểu diễn phụ hợp tương đương với biểu diễn đối phụ hợp. Các đại số Lie như thế được gọi là đại số Lie *tự đối ngẫu đối xứng*.

2.1.2 Vài ví dụ

2.1.2.1 Cặp $(\mathbb{R}^3, B)$ gồm đại số Lie thực 3 – chiều $\mathbb{R}^3$ (móc Lie là tích có hướng thông thường) và tích vô hướng chính tắc B là một đại số Lie quadratic thực 3 – chiều.

2.1.2.2 Cặp $(\mathbb{R}^n, B)$ gồm đại số Lie thực n – chiều giao hoán $\mathbb{R}^n$ (móc Lie tầm thường) và tích vô hướng chính tắc B là một đại số Lie quadratic thực n – chiều giao hoán.

2.1.2.3 Tương tự, cặp $(\mathbb{C}^n, B)$ gồm đại số Lie phức n – chiều giao hoán $\mathbb{C}^n$ (móc Lie tầm thường) và tích vô hướng hermite chính tắc cũng là một đại số Lie quadratic phức n – chiều giao hoán.

2.1.2.4 Đại số Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{K})$ các ma trận vuông cấp n trên $\mathbf{K}$ cảm sinh từ đại số ma trận $\text{Mat}(n, \mathbf{K})$ với móc Lie được cho bởi các hoán tử $[A, B] = AB - BA$ với mọi cặp A, B thuộc $\text{Mat}(n, \mathbf{K})$ cũng trở thành đại số Lie quadratic (trên $\mathbf{K}$) khi trang bị tích vô hướng bất biến là dạng song tuyến tính $B(A, B) := \text{Tr}(AB)$ với mọi cặp A, B thuộc $\text{Mat}(n, \mathbf{K})$.

2.2. VÀI TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC

2.2.1 Vài khái niệm

2.2.1.1 Đại số Lie các toán tử vi phân phản xứng của đại số Lie quadratic (xem [5, trang 726])

Cho $\mathbf{K}$ – đại số Lie quadratic (g, B) . Xét đại số Lie $\text{Der}(g)$ các toán tử vi phân trên g . Kí hiệu $\text{Der}_a(g, B)$ là tập con của $\text{Der}(g)$ bao gồm các toán tử vi phân F trên g phản xứng đối với B , tức là $B(Fx, y) = -B(x, Fy)$ với mọi x, y thuộc g . Khi đó, $\text{Der}_a(g, B)$ là đại số Lie con của $\text{Der}(g)$ và được gọi là *đại số Lie các toán tử vi phân phản xứng* của g .

2.2.1.2 Đại số Lie quadratic đầy đủ

 (xem [5, trang 726])

Đại số Lie quadratic (g, B) được gọi là *đầy đủ* nếu g đầy đủ, tức là $g = g^1 := [g, g]$.

2.2.1.3 Ideal suy biến và ideal đẳng hướng

 (xem [9, trang 14245])

Cho (g, B) là đại số Lie quadratic, H là một ideal của g . Ta bảo H *không suy biến* (đối với B) nếu $B|_{H \times H}$ không suy biến. Ta bảo H *đẳng hướng* (đối với B) nếu $B|_{H \times H} = 0$.

2.2.1.4 Mở rộng kép

 (xem [5, trang 726])

Giả sử (A, T) là một $\mathbf{K}$ – đại số Lie quadratic, b là một $\mathbf{K}$ – đại số Lie. Xét một phép biểu diễn $\psi : b \rightarrow \text{Der}_a(A, T)$. Gọi π là biểu diễn đối phụ hợp của b và $\varphi(x, y)z := B(\psi(z)x, y)$, $\forall x, y \in g, z \in b$. Xét không gian vector $g = b^* \oplus A \oplus b$ với móc $[.,.]$ được xác định bởi hệ thức:

$$\begin{aligned} [f_1 + x_1 + y_1, f_2 + x_2 + y_2] = & (\pi(y_1)(f_2) - \pi(y_2)(f_1) + \varphi(x_1, x_2)) \\ & + ([x_1, x_2]_A + \psi(y_1)(x_2) - \psi(y_2)(x_1)) + ([y_1, y_2]_b) \end{aligned}$$

với mọi $f_1, f_2 \in b^*, x_1, x_2 \in A, y_1, y_2 \in b$. Khi đó, g trở thành một đại số Lie và được gọi là *mở rộng kép* của A bởi b qua (hay nhờ) phép biểu diễn ψ .

Mặt khác, kiểm tra được dạng song tuyến tính $B: g \times g \rightarrow \mathbf{K}$ được xác định bởi

$$B(f_1 + x_1 + y_1, f_2 + x_2 + y_2) = T(x_1, x_2) + f_1(y_2) + f_2(y_1)$$

với mọi $f_1, f_2 \in b^*, x_1, x_2 \in A, y_1, y_2 \in b$ là một tích vô hướng bất biến tức là một song tuyến tính đối xứng không suy biến trên g . Do đó, (g, B) trở thành một đại số Lie quadratic.

Hơn nữa, với mỗi dạng song tuyến tính đối xứng bất biến γ (không cần không suy biến) trên b có thể xác định một tích vô hướng bất biến mới B_γ trên g . Cụ thể,

B_γ xác định như sau: $B_\gamma : g \times g \rightarrow \mathbf{K}$

$$B_\gamma(f_1 + x_1 + y_1, f_2 + x_2 + y_2) = T(x_1, x_2) + \gamma(y_1, y_2) + f_1(y_2) + f_2(y_1)$$

với mọi $f_1, f_2 \in b^*, x_1, x_2 \in A, y_1, y_2 \in b$.

2.2.1.5 Chiều quadratic (xem [5, trang 727])

Cho g là một đại số Lie trên $\mathbf{K}$. Khi đó ta có:

+ Tập tất cả các dạng song tuyến tính đối xứng bất biến trên g lập thành một không gian vector trên $\mathbf{K}$ và được ký hiệu là $\mathcal{F}(g)$.

+ Tập tất cả các tích vô hướng bất biến (tức là các dạng song tuyến tính đối xứng bất biến không suy biến) trên g lập thành một không gian vector trên $\mathbf{K}$ và được ký hiệu là $\mathcal{B}(g)$. Rõ ràng, $\mathcal{B}(g)$ là không gian vector con của $\mathcal{F}(g)$.

+ Ta định nghĩa *chiều quadratic* của đại số Lie (g, B) , kí hiệu $d_q(g)$, là chiều của không gian vector $\mathcal{B}(g)$ gồm các tích vô hướng bất biến trên g . Nghĩa là, chiều quadratic của đại số Lie g là $d_q(g) := \dim_{\mathbf{K}} \mathcal{B}(g)$.

2.2.1.6 Chú ý

Trong tài liệu [5], người ta đã chứng minh được rằng nếu (g, B) là đại số Lie quadratic thì $\mathcal{F}(g) = \mathcal{B}(g)$. Nói riêng $d_q(g) = \dim_{\mathbf{K}} \mathcal{F}(g)$.

2.2.1.7 Trọng (xem [5, trang 727])

+ Cho đại số Lie g . *Trọng* của g là tập hợp các tự đồng cấu tuyến tính F của g thỏa mãn điều kiện $F[X, Y] = [FX, Y]$ với mọi $X, Y \in g$.

+ Cho B là một dạng song tuyến tính trên g . Ta kí hiệu $\text{Cent}_s(g, B)$ là tập tất cả các phần tử B - đối xứng trong trọng của g . Tức là, nếu $F \in \text{Cent}_s(g, B)$ thì $B(FX, Y) = B(X, FY)$ và $F[X, Y] = [FX, Y]$, $\forall X, Y \in g$.

2.2.1.8 Tính khả quy và bất khả quy (xem [5, trang 727])

Cho (g, B) là một đại số Lie quadratic.

+ Ta bảo g *khả quy* nếu trong g tồn tại một ideal J không tầm thường thực sự ($J \neq 0$, $J \neq g$) sao cho B thu hẹp trên $J \times J$ vẫn còn là dạng song tuyến tính đối xứng không suy biến.

+ Trái lại, g được gọi là *bất khả quy* nếu trong g không tồn tại ideal J ($J \neq 0$, $J \neq g$) nào để B thu hẹp trên $J \times J$ vẫn còn là dạng song tuyến tính đối xứng không suy biến.

2.2.2 Các tính chất

2.2.2.1 Tính chất 1 (xem [5, trang 726])

Đại số Lie quadratic (g, B) đầy đủ khi và chỉ khi tâm của nó triệt tiêu: $Z(g) = 0$.

Chứng minh

Dựa vào định nghĩa.

2.2.2.2 Tính chất 2 (xem [9, trang 14245])

Giả sử (g, B) là đại số Lie quadratic. Khi đó ta có các khẳng định sau:

i) $Z(g) = [g, g]^\perp$.

ii) Gọi H là ideal của g . Khi đó, $H^\perp$ cũng là một ideal của g . Hơn nữa, nếu H không suy biến thì $H^\perp$ cũng không suy biến và $g = H \oplus H^\perp$.

2.2.2.3 Tính chất 3 (xem [5, trang 727])

Cho (g, B) là một đại số Lie quadratic và C là một dạng song tuyến tính khác B trên g . Khi đó tồn tại một tự đồng cấu D của g sao cho

$C(X, Y) = B(DX, Y)$ với mọi X, Y thuộc g . Hơn nữa, lúc đó C đối xứng và bất biến khi và chỉ khi $B(DX, Y) = B(X, DY)$ và $D[X, Y] = [DX, Y]$ với mọi $X, Y \in g$.

2.2.2.4 Tính chất 4 (xem [5, trang 727])

$\text{Cent}_s(g, B)$ chính là tập hợp các dạng song tuyến tính đối xứng bất biến trên g , nói riêng $d_q(g) = \dim \text{Cent}_s(g, B)$.

2.2.2.5 *Tính chất 5* (xem [5, trang 727])

Cho (g, B) là một đại số Lie quadratic, g khác 0 và g không là đại số Lie 1-chiều. Khi đó, (g, B) là đại số Lie quadratic đơn khi và chỉ khi $d_q(g) = 1$.

2.2.2.6 *Tính chất 6* (xem [11, trang 479])

Cho W, V là không gian con của đại số Lie g và $x \in g$. Khi đó, các điều kiện sau tương đương:

- i) $x \in [W, V]^\perp$,
- ii) $[x, W] \subseteq V^\perp$,
- iii) $[x, V] \subseteq W^\perp$.

2.2.2.7 *Tính chất 7* (xem [11, trang 479])

Cho W là một ideal của đại số Lie quadratic g . Khi đó ta luôn có:

- i) $[W, g]^\perp = Z_W(g)$ (tâm của W trong g),
- ii) $W^\perp$ là ideal của g . Hơn nữa, nếu $[g, W] = W$ thì $W^\perp = Z_g(W)$,
- iii) $[g, g]^\perp = Z(g)$,
- iv) Giả sử W không suy biến. Thì khi đó, $W^\perp$ cũng không suy biến và $g = W \oplus W^\perp$.

2.2.2.8 *Tính chất 8* (xem [11, trang 480])

Cho (g, B) là một đại số Lie quadratic. Khi đó,

$Z(g) \subseteq Z(g)^\perp$ khi và chỉ khi g không có ideal 1-chiều không suy biến.

2.3. ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC ĐỊA PHƯƠNG

2.3.1 Vài khái niệm

2.3.1.1 Đại số Lie quadratic địa phương (xem [5, trang 727])

Một đại số Lie quadratic (g, B) được gọi là *địa phương* nếu g có duy nhất một ideal cực đại.

2.3.1.2 Ideal cực tiểu (xem [5, trang 727])

Cho g là một đại số Lie và đặt $M(g)$ là tập tất cả các ideal cực tiểu trên g . Rõ ràng nếu g là đại số Lie 1-chiều hoặc g là đơn thì $M(g) = \emptyset$.

Ta định nghĩa, $Soc(g)$ là tổng các ideal cực tiểu trong g . Nếu g đơn hoặc 1-chiều thì $Soc(g) = \{0\}$.

2.3.1.3 Chú ý (xem [5, Remark 3.1])

Trong đại số Lie quadratic, trục giao với ideal cực đại là ideal cực tiểu. Như vậy, nếu (g, B) là đại số Lie quadratic thì (g, B) là địa phương khi và chỉ khi g có duy nhất một ideal cực tiểu. Do đó, *một đại số Lie quadratic là địa phương khi và chỉ khi $Soc(g)$ là một ideal cực tiểu.*

2.3.2 Các tính chất

2.3.2.1 Tính chất 1 (xem [5, trang 727])

Cho (g, B) là một đại số Lie quadratic có chiều quadratic $d_q(g) = 2$. Các điều sau đây là tương đương với nhau:

- (i) g khả qui,
- (ii) g không bất khả qui,
- (iii) g là tổng trực tiếp của hai ideal đơn hoặc là tổng trực tiếp của một ideal đơn và một ideal một chiều.

Chứng minh

(i) $\Rightarrow$ (ii) Hiển nhiên

(iii) $\Rightarrow$ (i) Khi g là tổng trực tiếp của 2 ideal đơn hoặc là tổng trực tiếp của một ideal đơn và một ideal một chiều thì khi đó trên g luôn tồn tại một ideal không tầm thường thực sự mà hạn chế của B trên nó vẫn còn dạng không suy biến, cụ thể ideal đó là ideal đơn. Vậy g khả qui.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Giả sử g không khả quy. Khi đó, $g = \bigoplus_{k=1}^n J_k$ với $n \geq 2$ và J_k với $1 \leq k \leq n$ là những ideal khả quy, không suy biến trên g thỏa $B(J_k, J_l) = \{0\}$,

$\forall k \neq l$. Rõ ràng $\sum_{k=1}^n d_q(J_k) \leq d_q(g)$ vì $d_q(g) = 2$ và $n \geq 2$ nên $d_q(J_1) = d_q(J_2) = 1$.

Khi đó, J_1, J_2 là những ideal đơn hoặc là những ideal 1-chiều. Nếu cả hai là những ideal 1-chiều thì $g = J_1 \oplus J_2$ là đại số Lie 2-chiều giao hoán. Thật vậy, $x, y \in g$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, khi đó $[x, y] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [x_1, y_1] + [x_1, y_2] + [x_2, y_1] + [x_2, y_2] = 0$. Nên g là đại số Lie giao hoán. Do đó, $d_q(g) = 3$ (trái với giả thiết). Vậy J_1 và J_2 không đồng thời là những ideal một chiều. Hay g là tổng trực tiếp của hai ideal đơn hoặc là một ideal đơn và một ideal một chiều. Vậy, ta đã chứng minh xong. $\square$

2.3.2.2 Tính chất 2 (xem [5, trang 727])

Mọi đại số Lie quadratic khác 0 bất khả quy và có chiều quadratic bằng 2 là một đại số Lie quadratic địa phương.

2.3.2.3 Tính chất 3 (xem [5, Proposition 3.2])

Cho (g, B) là một đại số Lie quadratic không khả quy. Đại số Lie g là địa phương khi và chỉ khi g là đại số Lie giải được có tâm là 1-chiều hoặc g là đại số Lie đầy đủ với "nhân tử Levi" đơn.

Chứng minh

Đặt $p(g)$ là số chiều của $Z(g)$ (tâm của g)

$s(g)$ là số ideal đơn của hạng tử Levi của g

$m(g)$ là số ideal cực tiểu trong phân tích của $\text{Soc}(g)$.

Giả sử (g, B) là đại số Lie quadratic địa phương. Điều này có nghĩa là $\text{Soc}(g)$ là một ideal cực tiểu và do đó $s(g) + p(g) = 1$. Ta có hai trường hợp:

+ Nếu $s(g) = 0$ và $p(g) = 1$ thì g là giải được và có tâm 1-chiều.

+ Nếu $s(g) = 1$ và $p(g) = 0$ thì g là đại số Lie quadratic đầy đủ với hạng tử Levi đơn.

Ngược lại, nếu g là đại số Lie giải được có tâm 1 - chiều hoặc g là đại số Lie đầy đủ với hạng tử Levi đơn thì chúng ta có $m(g) = s(g) + p(g) = 1$. Điều này có nghĩa $\text{Soc}(g)$ là ideal cực tiểu hay g là đại số Lie địa phương. $\square$

2.3.2.4 Tính chất 4

Với $\mathcal{S}$ là đại số Lie, kí hiệu: $V^{\mathcal{S}} = \{x \in V: \psi(s)x = 0 \text{ với } \forall s \in \mathcal{S}\}$ là không gian bất biến của V có liên quan đến phép biểu diễn $\psi: \mathcal{S} \rightarrow \text{gl}(A)$ với V là không gian con tuyến tính của A được xác định bởi ψ .

Định lý sau đây nêu một tính chất cơ bản khá thú vị về đại số Lie quadratic không khả quy.

Định lý (xem [5, Theorem 3.1])

Cho (g, B) là một đại số Lie quadratic không khả quy.

i) g là địa phương và giải được khi và chỉ khi (g, B) là mở rộng kép của một đại số Lie quadratic lũy linh khác không (A, T) bởi toán tử đạo hàm δ khả nghịch trên tâm $Z(A)$ của A .

ii) g là địa phương và đầy đủ khi và chỉ khi (g, B) là mở rộng kép của đại số Lie quadratic lũy linh (A, T) bởi đại số Lie đơn $\mathcal{S}$ qua phép biểu diễn

$$\psi: \mathcal{S} \rightarrow \text{Der}_a(A, T) \text{ sao cho } (Z(A))^{\mathcal{S}} = \{0\}.$$

Chứng minh

i) Giả sử g là đại số Lie quadratic địa phương và giải được. Theo tính chất 2.3.2.3 $Z(g)$ có chiều là 1. Do vậy, $Z(g) = KX$, với mọi $X \in g$.

Vì $[g, g] = (Z(g))^{\perp}$, do đó tồn tại $Y \in g$ sao cho $g = [g, g] \oplus KY$. Điều này cho ta thấy rằng $[g, g]$ là ideal cực đại và KY là một đại số Lie con của g . Theo [6, định lý 2], nếu $A = [g, g]/KX$ thì g phải là mở rộng kép của (A, T) bởi toán tử đạo hàm $\delta \in \text{Der}_a(A, T)$ được cho bởi $\delta(N(Z)) = N[Y, Z]$ với mọi $Z \in [g, g]$ với $N: [g, g] \rightarrow A$ là một phép chiếu chính tắc. Khi đó, $A = [g, g]/KX$ là một đại số Lie lũy linh, do vậy $[g, g]$ của đại số Lie giải được g cũng lũy linh.

Bây giờ ta chứng minh $A \neq \{0\}$. Giả sử $A = \{0\}$ thì $[g, g] = KX$. Khi đó, g là đại số Lie 2-chiều và lũy linh, do vậy g là đại số Lie giao hoán. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là g là đại số Lie địa phương mà có đến 2 ideal cực tiểu.

Ta chứng minh δ khả nghịch trên tâm của A với $\delta(N(Z)) = N[Y, Z]$ với mọi $Z \in [g, g]$, $N: [g, g] \rightarrow A$. Lấy $a \in [g, g]$ sao cho $N(a) \in Z(A)$ và $\delta(N(a)) = 0$. Vì $\delta(N(a)) = 0$ nên $N[Y, a] = 0 \in A = [g, g]/KX$, điều này tương đương với $[Y, a] \in KX = Z(g)$. Do đó, $B([Y, a], [g, g]) = \{0\}$ vì $[g, g] = (Z(g))^\perp$. Bên cạnh đó, $B([Y, a], Y) = -B(a, [Y, Y]) = 0$. Suy ra $B([Y, a], g) = \{0\}$ hay $[Y, a] = 0$. Vì $N(a) \in Z(A)$ nên $[a, [g, g]] \subseteq Z(g)$. Do vậy $B([a, [g, g]], [g, g]) = \{0\}$. Vì tính bất biến của B nên $B([a, [g, g]], Y) = -B([g, g], [a, Y]) = \{0\}$ (do $[Y, a] = 0$.) Điều này dẫn đến $B([a, [g, g]], g) = \{0\}$, suy ra $[a, [g, g]] = \{0\}$ hay $a \in Z(g) = KX$, do vậy $N(a) = 0$. Điều này cho ta δ khả nghịch trên tâm của A .

Ngược lại, giả sử (g, B) là mở rộng kép của đại số Lie quadratic lũy linh (A, T) với $A \neq \{0\}$ bởi toán tử đạo hàm δ khả nghịch trên $Z(A)$. Khi đó, ta có $g = Ke^* \oplus A \oplus Ke$, với Ke là đại số Lie 1- chiều. Vì g là tích nửa trực tiếp của hai đại số Lie giải được là A và Ke nên g cũng giải được và do đó $Soc(g) = Z(g)$. Ta chứng minh $Z(g) = Ke^*$. Từ định nghĩa mở rộng kép rõ ràng $e^* \in Z(g)$. Thật vậy, với $Y \in g$, ta có $[e^*, Y] = [e^*, \alpha e^* + a + \lambda e] = \lambda [e^*, e] = 0$ vì Ke là đại số Lie 1- chiều. Vậy $Ke^* \subseteq Z(g)$. Ngược lại, lấy

$X = \alpha e^* + a + \lambda e \in Z(g)$. Với $\alpha, \lambda \in K, a \in A, b \in A$, ta có:

$$[X, b]_g = [\alpha e^* + a + \lambda e, b] = [a, b]_A + T(\delta(a), b)e^* + \lambda \delta(b) = 0.$$

Rõ ràng $T(\delta(a), b) = 0$ và $[a, b] = -\lambda \delta(b)$. Nếu chọn $b \neq 0, b \in Z(A)$ thì $\lambda \delta(b) = 0$. Vì δ khả nghịch trên $Z(A)$ nên $\delta(b) \neq 0$ suy ra $\lambda = 0$. Khi đó $[a, b]_A = 0$ với mọi $b \in A$, điều này suy ra $a \in Z(A)$. Hơn nữa $T(\delta(a), b) = 0$ với mọi $b \in A$ nên $\delta(a) = 0$ mà δ khả nghịch trên $Z(A)$ nên $a = 0$. Do vậy, $X = \alpha e^*$. Do đó, $Z(g) \subseteq Ke^*$. Vậy $Z(g) = Ke^*$ và g là đại số Lie giải được nên theo tính chất 2.3.2.3 g là đại số Lie địa phương.

ii) Giả sử g là đại số Lie đầy đủ địa phương. Từ tính chất 2.3.2.3 hạng tử Levi của nó là hạng tử đơn. Điều này có nghĩa là căn $\mathcal{R}(g)$ là ideal cực đại của g . Thật vậy,

nếu $\mathcal{S}$ là hạng tử Levi của g , theo [9, định lý 2] g là mở rộng kép của $A = \mathcal{R}(g)/(\mathcal{R}(g))^\perp$ bởi $\mathcal{S}$ qua phép biểu diễn $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \text{Der}_a(A, T)$ được xác định bởi $\psi(X)(N(Y)) = N[X, Y]$, $\forall X \in \mathcal{S}, Y \in \mathcal{R}(g)$ và $N : \mathcal{R}(g) \rightarrow A$ là một phép chiếu chính tắc. Vì g là đại số Lie đầy đủ nên $\mathcal{R}(g)$ là ideal lũy linh, do vậy A cũng là đại số Lie lũy linh.

Ta chứng minh $(Z(A))^\mathcal{S} = \{0\} \Leftrightarrow \psi(X)N(Y) = 0, \forall X \in \mathcal{S}, Y \in \mathcal{R}(g)$.

Bây giờ ta chứng minh $(\mathcal{R}(g))^\perp = Z(\mathcal{R}(g))$ là tâm của $\mathcal{R}(g)$. Vì B bất biến và $[g, \mathcal{R}(g)] = \mathcal{R}(g)$ nên $Z(\mathcal{R}(g)) \subset (\mathcal{R}(g))^\perp$. Hơn nữa,

$B((\mathcal{R}(g))^\perp, \mathcal{R}(g)) = B((\mathcal{R}(g))^\perp, [g, \mathcal{R}(g)]) = B([(\mathcal{R}(g))^\perp, \mathcal{R}(g)], g) = \{0\}$ (vì B bất biến), điều này cho ta thấy rằng $[(\mathcal{R}(g))^\perp, \mathcal{R}(g)] = \{0\}$, khi đó

$(\mathcal{R}(g))^\perp \subset Z(\mathcal{R}(g))$. Vậy $(\mathcal{R}(g))^\perp = Z(\mathcal{R}(g))$ hay $A = \mathcal{R}(g)/Z(\mathcal{R}(g))$.

Để chứng minh $(Z(A))^\mathcal{S} = \{0\}$, ta lấy $Y \in \mathcal{R}(g)$ sao cho $N(Y) \in Z(A)$ và $N[X, Y] = 0$ với mọi $X \in \mathcal{S}$. Ta có $[Y, \mathcal{R}(g)] \subset Z(\mathcal{R}(g))$ và $[Y, \mathcal{S}] \subset Z(\mathcal{R}(g))$ điều này cho ta $[Y, g] \subset Z(\mathcal{R}(g))$. Do đó, $B(\mathcal{R}(g), [Y, g]) = B([Y, \mathcal{R}(g)], g) = \{0\}$ suy ra $[Y, \mathcal{R}(g)] = 0$ hay $Y \in Z(\mathcal{R}(g))$. Do vậy, $N(Y) = 0$ vì $A = \mathcal{R}(g)/Z(\mathcal{R}(g))$,

$N : \mathcal{R}(g) \rightarrow A$. Vậy $(Z(A))^\mathcal{S} = \{0\}$.

Ngược lại, giả sử (g, B) là mở rộng kép của đại số Lie quadratic lũy linh (A, T) bởi đại số đơn $\mathcal{S}$ qua phép biểu diễn $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \text{Der}_a(A, T)$ thỏa mãn $(Z(A))^\mathcal{S} = \{0\}$. Khi đó, $g = \mathcal{S}^* \oplus A \oplus \mathcal{S}$, với $\mathcal{S}$ là đại số đơn của g và $\mathcal{S}^* \oplus A$ là ideal giải được của g vì nó là mở rộng tâm của một đại số Lie lũy linh. Chúng ta có $\mathcal{R}(g) = \mathcal{S}^* \oplus A$ và $\mathcal{S}$ là hạng tử Levi của g . Bây giờ ta chứng minh g là đầy đủ và địa phương.

Để chứng minh g đầy đủ ta chứng minh $Z(g) = \{0\}$. Thật vậy, xét

$f \in \mathcal{S}^*$, $a \in A$, $s \in \mathcal{S}$ sao cho $X = f + a + s \in Z(g)$. Khi đó, với $s' \in \mathcal{S}$ thì

$0 = [s', X] = [s', f + a + s] = -f_0 ad_s s' + \psi(s')(a) + [s', s]_s$. Điều này sẽ dẫn đến $f_0 ad_s s' = 0$, $[s', s] = 0$; $\psi(s')(a) = 0$ với mọi $s' \in \mathcal{S}$. Do vậy, $f = 0$; $s = 0$. Vì $\mathcal{S}$ là đơn, điều này có nghĩa là $a \in (Z(A))^{\mathcal{S}}$. Bây giờ với $a' \in A$ ta có:

$0 = [a', X] = [a', f + a + s] = [a', a]_A + \varphi(a', a)$ với $\varphi(a', a) \in \mathcal{S}^*$ được cho bởi $\varphi(a', a)(s') = B(\psi(s')(a'), a) = -B(a', \psi(s')(a))$ với mọi $s' \in \mathcal{S}$. Vì $a' \in (Z(A))^{\mathcal{S}}$ nên $\psi(s')(a) = 0$, do vậy $\varphi(a', a) = 0$ hay $[a', a]_A = 0$ với mọi $a' \in A$. Nên $a \in Z(A)$ hay $a \in Z(A) \cap (Z(A))^{\mathcal{S}} = (Z(A))^{\mathcal{S}} = \{0\}$. Điều này có nghĩa là $Z(g) = \{0\}$. Vậy g là đại số Lie đầy đủ.

Hơn nữa, $\text{Soc}(g) = (\mathcal{R}(g))^{\perp}$ là một ideal cực tiểu vì hạng tử Levi $\mathcal{S}$ của g là một ideal đơn, do đó g là đại số Lie quadratic địa phương.

2.3.2.5 Nhận xét

+ Kết quả của định lý trên cho ta thấy rằng để nghiên cứu đại số quadratic với chiều bằng 2 ta chú ý đến hai trường hợp đại số Lie giải được và đại số Lie đầy đủ.

+ Chúng ta biết mọi đại số Lie quadratic bất khả quy sao cho $d_q(g) = 2$ là một đại số Lie địa phương nhưng chiều ngược lại không đúng. Thực tế, cũng có những đại số Lie địa phương có chiều quadratic lớn hơn 2.

CHƯƠNG 3: ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC CÓ CHIỀU QUADRATIC BẰNG 2

Đây là chương cuối và cũng là chương chính thứ hai của bản luận văn. Nội dung cơ bản của chương trình bày các tính chất cơ bản của đại số Lie quadratic giải được và đại số Lie quadratic đầy đủ với số chiều quadratic thấp, cụ thể là bằng 2. Cũng như chương 2, các vấn đề được đề cập ở đây đều khá mới và mới được nghiên cứu vài thập niên gần đây, khá nhiều phép chứng minh phức tạp nên chúng tôi không giới thiệu mà chỉ dẫn độc giả đến các tài liệu tham khảo. Phần lớn các vấn đề trong chương này được lấy từ cuốn tài liệu tham khảo chính [5] của Ignacio Bajo, Said Benayadi.

3.1. ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC GIẢI ĐƯỢC VỚI CHIỀU QUADRATIC BẰNG 2

3.1.1. Các tính chất

3.1.1.1 Tính chất 1 (xem [5, Proposition 4.1])

Cho (A, T) là một đại số Lie quadratic và $\delta \in \text{Der}_a(A, T)$ là một toán tử khả nghịch. Khi đó mở rộng kép (g, B) của (A, T) bằng phương pháp bởi δ có chiều quadratic bằng 2.

Chứng minh

Vì (g, B) là mở rộng kép của (A, T) bởi δ nên $g = Ke^* \oplus A \oplus Ke$ (với $Ke^* = Z(g)$). Gọi K là một dạng song tuyến tính đối xứng bất biến trên g . Đặt $\alpha = K(e, e)$, $\beta = K(e, e^*)$. Với mọi $x \in A$, ta có

$$K(e, x) = K(e, [e, \delta^{-1}x]) = K([e, e], \delta^{-1}x) = 0 \text{ (tính bất biến của } K \text{)}. \text{ Tương tự,}$$

$$K(e^*, x) = K(e^*, [e, \delta^{-1}x]) = 0 \text{ vì } Ke^* = Z(g) \text{ (do tính chất 2.3.2.4)}$$

Bây giờ, nếu $x, y \in A$ sao cho $T(x, y) \neq 0$ thì

$$0 = K([[\delta^{-1}x, y], e^*]) = K([[\delta^{-1}x, y]A, e^*]) + T(x, y)K(e^*, e^*)$$

$= T(x, y)K(e^*, e^*)$. Điều này suy ra $K(e^*, e^*) = 0$. Hơn nữa, với mọi

$x, y \in A$ chúng ta có:

$$K(x, y) = K(x, [e, \delta^{-1}y]) = K([\delta^{-1}y, x], e) = T(x, y)K(e^*, e) = \beta T(x, y)$$

$$= \beta B(x, y) \text{ (vì } (g, B) \text{ là mở rộng kép của } (A, T) \text{ nên } B(x, y) = T(x, y) \text{ với}$$

mọi $x, y \in A$). Do vậy, nếu S là dạng song tuyến tính được xác định bởi $S(e, e) = 1$,

$S(Ke^* \oplus A, g) = 0$ thì dễ dàng chứng minh được rằng $K = \alpha S + \beta B$, do đó

$$\dim \mathcal{F}(g) = 2. \quad \square$$

3.1.1.2 Nhận xét

Điều kiện khả nghịch của vi phân δ trong tính chất trên có thể được thay thế bởi điều kiện khả nghịch tốt hơn trên cả $[A, A]$ và $Z(A)$. Thực chất, hai điều kiện này được xem như tương đương với $U = [A, A] + Z(A)$ và sẽ được xem xét trong phần hệ quả.

Bây giờ ta xét không gian con tuyến tính. Gọi (A, T) là đại số Lie quadratic và $\delta \in \text{Der}_a(A, T)$. Sau đây, ta sẽ xét không gian con tuyến tính $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times A \times \text{End}(A)$:

$$\mathcal{E}(A, T, \delta) = \left\{ (\alpha, \lambda, m, l) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times A \times \text{Ker}(\delta) \times \text{Cent}_s(A, T) \text{ sao cho } \begin{cases} \delta l = l\delta = \alpha\delta + \text{ad}_A(m) \end{cases} \right\}.$$

3.1.1.3 Tính chất 2 (xem [5, Proposition 4.2])

Gọi (g, B) là mở rộng kép của đại số Lie quadratic (A, T) bằng phương pháp bởi δ , giả sử $Z(g) = \mathbb{K}e^*$.

i) Nếu $(\alpha, \lambda, \mu, l) \in \mathcal{E}(A, T, \delta)$ thì tự đồng cấu tuyến tính $D_{(\alpha, \lambda, m, l)}$ của g được định nghĩa bởi:

$$D_{(\alpha, \lambda, m, l)}(e^*) = \alpha e^*$$

$$D_{(\alpha, \lambda, m, l)}(e) = \lambda e^* + m + \alpha e$$

$$D_{(\alpha, \lambda, m, l)}(a) = l(a) + T(m, a)e^*, \forall a \in A$$

là một phần tử trong $Cent_s(g, B)$.

ii) Ánh xạ $\phi : \mathcal{E}(A, T, \delta) \rightarrow Cent_s(g, B)$ được xác định bởi

$\phi(\alpha, \lambda, m, l) = D_{(\alpha, \lambda, m, l)}$ với $\forall (\alpha, \lambda, m, l) \in \mathcal{E}(A, T, \delta)$ là một phép đẳng cấu không gian vector.

iii) Điều kiện cần và đủ để $d_q(g) = 2$ là

$$\mathcal{E}(A, T, \delta) = \{(\alpha, \lambda, 0, \alpha id_A), \alpha, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

3.1.1.4 Tính chất 3 (xem [5, Proposition 4.3])

Gọi (A, T) là đại số Lie quadratic lũy linh và $\delta \in Der_a(A, T)$ khả nghịch trên $Z(A)$. Xét $A = K \oplus C$ là khai triển thích hợp của A đối với δ và n là số nguyên dương sao cho $K = Ker(\delta^n)$ và $C = \delta^n(A)$. Khi đó $K = C^\perp$, $[K, K] \subset K$ và $[K, C] \subset C$. Hơn nữa, nếu $\theta : A \rightarrow K$ là phép chiếu của A vào K được định nghĩa bởi $\theta(k + c) = k, \forall k \in K, \forall c \in C$ thì $\theta([C, C]) = K$.

Chứng minh

Rõ ràng, $\delta(K) \subset K, \delta(C) \subset C$. Vì δ là đối xứng lệch đối với T nên ta có $K = C^\perp$.

Hơn nữa, $[K, K] \subset K$ vì với $\forall x, y \in K$, ta có:

$$\delta^{2n}[x, y] = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} [\delta^k x, \delta^{2n-k} y] = 0 \Rightarrow [x, y] \in \text{Ker}(\delta^{2n}) = \text{Ker}(\delta^n).$$

Do đó, $[K, C] \subset C$ vì T bất biến và $K = C^\perp$.

Tiếp theo, ta xét $I = \theta([C, C])$ và chỉ ra rằng I là ideal của K . Lấy $k \in K$ và $x, y \in C$. Nếu $[x, y] = k' + c'$ (với $(k', c') \in K \times C$) thì

$$\theta([x, y]) = [x, y] - c'. \text{ Nên}$$

$$[k, \theta([x, y])] = [k, [x, y]] - [k, c'] = [x, [k, y]] + [y, [x, k]] + [c', k].$$

Vì $[K, C] \subset C$ nên $[k, \theta([x, y])] = \theta([x, [k, y]] + [y, [x, k]]) \in I \Rightarrow I$ là ideal của

K . Bây giờ, ta xét tập hợp $J = I^\perp \cap K$, trong đó $I^\perp$ là trực giao của I đối với T . Vì T bất biến nên J là ideal của K . Hơn nữa,

$$T([J, C], C) = T(J, [C, C]) = T(J, I) = \{0\} \text{ vì } T(K, C) = \{0\} \text{ nên}$$

$$[J, C] = \{0\} \text{ vì } [K, C] \subset C \text{ và } T|_{C \times C} \text{ không suy biến. Do đó, } J \text{ là ideal của } A.$$

Nếu $J \neq \{0\}$ thì $J \cap Z(A) \neq \{0\}$, điều này mâu thuẫn với tính khả nghịch của δ trên $Z(A)$. Vì vậy $J = \{0\}$ nên $K = I = \theta([C, C])$. $\square$

3.1.1.5 Tính chất 4 (xem [5, Theorem 4.1])

Gọi (g, B) là mở rộng kép của đại số Lie quadratic lũy linh (A, T) bằng phương pháp bởi δ . Nếu $\dim \mathcal{F}(g) = 2$ thì δ phải khả nghịch trên $Z_A([A, A])$.

Chứng minh

Gọi $A = K \oplus C$ là khai triển thích hợp của A với $K = \text{Ker}(\delta^n)$ và $C = \delta^n(A)$. Giả sử δ không khả nghịch trên $Z_A([A, A])$ và lấy $m \in Z_A([A, A]) \cap \text{Ker}(\delta)$. Khi đó $m \in Z(K)$ vì $C([A, A]) \subset Z_A(K)$.

Gọi $l : A \rightarrow A$ là ánh xạ tuyến tính được định nghĩa bởi:

$$l(k + c) = [m, \delta^{n-1}(a)], \quad k \in K, \quad c = \delta^n a \in \delta(A).$$

Ánh xạ l được định nghĩa tốt vì nếu $c = \delta^n a = \delta^n a'$ thì ta có $(a - a') \in K$

$$\Rightarrow \delta^{n-1}(a - a') \in K. \text{ Vì } m \in Z(K) \text{ nên } [m, \delta^{n-1}(a - a')] = 0.$$

Mặt khác, K, C ổn định bởi δ , với $k \in K$ và $c = \delta^n a \in C$ ta có:

$$l\delta(k + c) = l(\delta(k) + \delta(c)) = l(\delta^{n+1}(a)) = [m, \delta^n a] = [m, c] = [m, k + c]$$

$$\delta l(k + c) = \delta [m, \delta^{n-1}(a)] = [\delta(m), \delta^{n-1}(a)] + [m, \delta^n(a)] = [m, \delta^n a] = [m, k + c]$$

$$\Rightarrow l\delta = \delta l = ad_A(m). \text{ Hơn nữa, } l \text{ đối xứng vì ta thử lại với } \delta(m) = 0 \text{ nhận}$$

$$\begin{aligned} T(l(k + \delta^n a), k' + \delta^n a') &= T([m, \delta^{n-1}(a)], \delta^n a') \\ &= -T(\delta[m, \delta^{n-1}a], \delta^{n-1}(a')) = T(k + \delta^n a, l(k + \delta^n a')). \end{aligned}$$

Bây giờ ta chứng minh rằng $l[x, y] = [lx, y] = 0, \forall x, y \in A$. Vì l đối xứng đối với T nên đủ để ta kết luận $[lx, y] = 0, \forall x, y \in A$. Giả sử

$x = k + c, k \in K, c = \delta^n a \in C, y, z \in A$, ta có:

$$T([lx, y], z) = T(lx, [y, z]) = T([m, \delta^{n-1}a], [y, z]) = T(m, [\delta^{n-1}a, [y, z]]) = 0$$

$$\Rightarrow [lx, y] = 0. \text{ Nên } m \in \text{Ker}(\delta), m \neq 0 \text{ và } l \in \text{Cent}_s(A, T) \text{ sao cho}$$

$$(0, 0, m, l) \in \varepsilon(A, T, \delta). \text{ Điều này mâu thuẫn với tính chất 3.1.1.3 là } d_q(A) \geq 3. \square$$

Sau đây ta sẽ chứng minh điều kiện khả nghịch của δ trên $Z_A(\delta^{n-1}([A, A]))$ và trên $Z_A([A, A])$ là tương đương nhau. Nhắc lại rằng, nếu V là không gian con của đại số Lie A , ta kí hiệu

$$Z_A(V) = \{x \in A : [x, v] = 0, \forall v \in V\} \text{ là tâm của } V.$$

3.1.1.6 Tính chất 5 (xem [5, Proposition 4.4])

Gọi (g, B) là mở rộng kép của đại số Lie quadratic lũy linh (A, T) bằng phương pháp vi phân δ . Đặt $A = K \oplus C$ là khai triển thích hợp của A đối với δ và n là số nguyên dương sao cho $K = \text{Ker}(\delta^n)$ và $C = \delta^n(A)$. Khi đó, δ khả nghịch trên $Z_A(\delta^{n-1}([A, A])) \Leftrightarrow \delta$ khả nghịch trên $Z_A([A, A])$.

Chứng minh

($\Rightarrow$) Vì δ bảo toàn $[A, A]$ nên $Z_A([A, A]) \subseteq Z_A(\delta^{n-1}([A, A]))$. Do đó, δ khả nghịch trên $Z_A(\delta^{n-1}([A, A]))$ thì nó khả nghịch trên $Z_A([A, A])$.

($\Leftarrow$) Giả sử δ không khả nghịch trên $Z_A(\delta^{n-1}([A, A]))$. Xét

$m \in Z_A(\delta^{n-1}([A, A])) \cap \text{Ker}(\delta)$. Với mỗi $k \in K$, $x, y \in C$, tồn tại

$x', y' \in C$ sao cho $\delta^n(a) = x$, $\delta^n(a') = y$. Khi đó,

$$\begin{aligned} T([m, k], \theta[\delta^n(a), \delta^n(a')]) &= T([m, k], [\delta^n(a), \delta^n(a')]) \\ &= -T(k, [m, [\delta^n(a), \delta^n(a')]]) \\ &= T(k, [\delta^n(a), [\delta^n(a'), m]]) + T(k, [\delta^n(a'), [m, \delta^n(a)]]) \\ &= (-1)^n T([\delta^n([[\delta^n(a), k]], m), a') + (-1)^n T([\delta^n([k, \delta^n(a')]), m], a) = 0 \end{aligned}$$

vì $\delta[A, A] \subset [A, A]$ và $m \in Z_A(\delta^{n-1}([A, A]))$.

Mặt khác, $K = \theta([C, C])$ và $T_{|_{K \times K}}$ không suy biến nên $[m, k] = 0$.

$\Rightarrow m \in Z(K) \Rightarrow m \in Z(\text{Ker}(\delta))$. Vì $m \in Z_A(\delta^{n-1}([A, A])) \cap \text{Ker}(\delta)$ nên

$\delta^{n-1}([m, [x, y]]) = [m, \delta^{n-1}([x, y])] = 0$, $\forall x, y \in A$. $\Rightarrow [m, [x, y]] \in \text{Ker}(\delta^n) = K$. Nói

cách khác, nếu $x, y \in A$ và $[x, y] = k + c$ với $k \in K$, $c \in C$ và $m \in Z(K)$, khi đó

$$[m, [x, y]] = [m, c] \in [K, C] \subset C.$$

Vì vậy, $[m, [x, y]] \in [K, C] = \{0\} \Rightarrow m \in Z_A([A, A]) \cap \text{Ker}(\delta)$. $\square$

3.1.1.7 Nhận xét

Theo [3.1.1.5 Tính chất] thì điều kiện đủ để δ khả nghịch được cho trong [3.1.1.1 Tính chất] là không cần thiết. Ví dụ sự mở rộng của đại số Lie quadratic giải được (g, B) với $d_q(g) = 2$ và ở đó (g, B) là mở rộng kép của đại số Lie quadratic lũy linh (A, T) bằng phương pháp vi phân bởi $\delta \in \text{Der}_a(A, T)$ là không khả nghịch trên toàn bộ A .

3.1.2 Các hệ quả

3.1.2.1 Hệ quả 1 (xem [5, Lemma 4.1])

Gọi (V, B) là không gian vectơ có dạng song tuyến tính đối xứng không suy biến và δ là tự đồng cấu phản xứng của V . Gọi U là không gian con tuyến tính của V ổn định bởi δ và $U^\perp \subset U$. Nếu δ khả nghịch trên U thì δ khả nghịch trên toàn thể V .

Chứng minh

Vì $U^\perp$ hoàn toàn đẳng hướng và B không suy biến nên tồn tại không gian con W của V sao cho $V = U \oplus W$ và thỏa $B(w, U^\perp) = \{0\}$, $w \in W$ chỉ có thể nếu $w = 0$.

Ta xét vectơ $v = u + w \in V$ với $u \in U$, $w \in W$ và giả sử $\delta(v) = 0$ do đó $\delta(w) + \delta(u) = 0 \Rightarrow \delta(w) = -\delta(u) \in U$. Lưu ý rằng vì δ là phản xứng và U ổn định bởi δ nên $U^\perp$ cũng ổn định bởi δ . Do đó $\delta(U^\perp) = U^\perp$. Khi đó với mỗi $a \in U^\perp$ ta có $B(\delta(a), w) = -B(a, \delta(w)) = 0$. Điều này chứng tỏ w trực giao với $U^\perp$ nên $w = 0$. $\square$

3.1.2.2 Hệ quả 2 (xem [5, Corollary 4.1])

Gọi (A, T) là đại số Lie quadratic lũy linh và $\delta \in \text{Der}_a(A, T)$ khả nghịch trên $Z(A)$. Xét $A = K \oplus C$ là khai triển thích hợp của A đối với δ và n là số nguyên dương sao cho $K = \text{Ker}(\delta^n)$ và $C = \delta^n(A)$. Vì phân δ khả nghịch trên A nếu và chỉ nếu C là đại số Lie con của A .

3.1.2.3 Hệ quả 3 (xem [5, Lemma 4.2])

Nếu (A, T) là đại số Lie quadratic thì $Z_A([A, A]) = [A, [A, A]]^\perp = Z_2(A)$, trong đó $Z_2(A) = \{x \in A : [x, A] \subset Z(A)\}$. Từ đó ta có hệ quả, với mỗi $\delta \in \text{Der}_a(A, T)$ ta có $\delta(Z_A([A, A])) \subset Z_A([A, A])$.

3.1.3 Các ví dụ

3.1.3.1 Ví dụ 1

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ chúng ta xét một đại số giao hoán kết hợp không đơn vị $P_n = tK[t] / t^n K[t]$. Với mọi không gian vector $\Omega_n = g \oplus P_n$ cùng với móc Lie: $[x \otimes \overline{t^p}, y \otimes \overline{t^q}] = [x, y]_g \otimes \overline{t^{p+q}}$ với mọi $x, y \in g$, $p, q \in \mathbb{N}^*$ là một đại số Lie lũy linh.

Một tự đồng cấu D của Ω_n được xác định như sau :

$D(x \otimes \overline{t^p}) = p(x \otimes \overline{t^p}) \quad x \in g, \quad 1 \leq p \leq n-1$ là một đạo hàm khả nghịch của $\Omega_n = g \oplus P_n$.

Không gian vector $A_n = \Omega_n \oplus (\Omega_n)^*$ với móc $[X + f, Y + g] = [X, Y]_{\Omega_n} - g_0 \text{ad}_{\Omega_n}(X) + f_0 \text{ad}_{\Omega_n}(Y)$ với mọi $X, Y \in \Omega_n$, $f, g \in (\Omega_n)^*$ là một đại số Lie. Và một dạng song tuyến tính $T(X + f, Y + g) = f(X) + g(Y)$ với $X, Y \in \Omega_n$, $f, g \in (\Omega_n)^*$. Khi đó, (A_n, T) là một đại số Lie quadratic. Vì (A_n, T) là mở rộng kép của đại số Lie $\{0\}$ bởi Ω_n .

Hơn nữa, tự đồng cấu tuyến tính δ của A_n được xác định bởi

$\delta(X+f) = D(X) - f_0D$ với $X \in g, f \in g^*$ là một đạo hàm phản xứng khả nghịch. Và mở rộng kép của (A_n, T) bởi δ là một đại số Lie quadratic với chiều quadratic bằng 2.

3.1.3.2 Ví dụ 2

Gọi A là một không gian tuyến tính được tạo bởi tám vector $\{x_i, f_i : 1 \leq i \leq 4\}$ là một đại số Lie với móc Lie được xác định như sau:

$$[x_1, x_i] = x_{i+1}, 2 \leq i \leq 3$$

$$[x_1, f_i] = -f_{i-1}, 3 \leq i \leq 4$$

$$[x_i, f_{i+1}] = f_1, 2 \leq i \leq 3$$

và gọi T là một dạng song tuyến tính trên A được xác định bởi

$$T(x_i, x_j) = T(f_i, f_j) = 0, \forall i, j$$

$$T(x_i, f_j) = 0, i \neq j \text{ và } T(x_i, f_i) = 1, \forall i \leq 4. \text{ Khi đó, cặp } (A, T) \text{ là một đại số}$$

Lie quadratic lũy linh. Và một tự đồng cấu tuyến tính δ của A được xác định như sau:

$$\delta(x_1) = x_1, \delta(x_2) = -x_2, \delta(x_3) = 0, \delta(x_4) = x_4$$

$$\delta(f_1) = -f_1, \delta(f_2) = f_2, \delta(f_3) = 0, \delta(f_4) = -f_4$$

là một đạo hàm phản xứng của (A, T) .

Vì $Z(A)$ được tạo bởi $\{x_4, f_1\}$ nên rõ ràng δ khả nghịch trên $Z(A)$ vì

$Z(A) \cap \ker(\delta) = \{0\}$. Tuy $Z_2(A) \cap \ker(\delta) \neq \{0\}$ vì $x_3, f_3 \in Z_2(A) \cap \ker(\delta)$, do vậy δ không khả nghịch trên $Z_2(A)$. Vì vậy, mở rộng kép (g, B) của (A, T) bởi δ là một đại số Lie quadratic địa phương nhưng có số chiều quadratic $d_q(g) > 2$.

3.2. ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC ĐẦY ĐỦ VỚI CHIỀU QUADRATIC BẰNG 2

Theo [2.3.2.4 Tính chất] mở rộng kép của đại số Lie lũy linh quadratic bởi đại số Lie đơn là một đại số Lie quadratic đầy đủ. Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu những tính chất của đại số Lie quadratic đầy đủ có chiều quadratic bằng 2.

3.2.1 Mệnh đề (xem [5, trang 726])

Đại số Lie quadratic là đầy đủ khi và chỉ khi tâm của nó bằng 0.

3.2.2 Định lý (xem [5, Theorem 5.1])

Gọi (A, T) là đại số Lie quadratic và $\mathcal{S}$ là đại số Lie đơn. Giả sử tồn tại biểu diễn $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \text{Der}_a(A, T)$. Gọi (g, B) là mở rộng kép $g = \mathcal{S}^* \oplus A \oplus \mathcal{S}$ của (A, T) bởi $\mathcal{S}$ theo ψ . Xét không gian con tuyến tính

$\mathbf{E} = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \text{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}, A) \times \text{Cent}_{\mathcal{S}}(A, T)$ được cho bởi:

$$\varepsilon(A, T, \mathcal{S}, \psi) = \{(\alpha, \lambda, F, l) \in \mathbf{E} : l \circ \psi(x) = \psi(x) \circ l = \alpha \psi(x) + \text{ad}_A F(x), \forall x \in \mathcal{S}\}$$

Ta có các tính chất sau:

(1) Nếu $(\alpha, \lambda, F, l) \in \varepsilon(A, T, \mathcal{S}, \psi)$ thì tự đồng cấu tuyến tính $D_{(\alpha, \lambda, F, l)}$ của g được cho bởi:

$$D_{(\alpha, \lambda, F, l)}(f) = \alpha f, \forall f \in \mathcal{S}^*$$

$$D_{(\alpha, \lambda, F, l)}(a) = T(a, F(\cdot)) + l(a), \forall a \in A$$

$$D_{(\alpha, \lambda, F, l)}(x) = \lambda \kappa(x, \cdot) + F(x) + \alpha x, \forall x \in \mathcal{S}$$

trong đó κ kí hiệu là dạng Killing của g , là một phần tử trong $\text{Cent}_{\mathcal{S}}(g, B)$.

(2) Ánh xạ $\phi : \varepsilon(A, T, \mathcal{S}, \psi) \rightarrow \text{Cent}_{\mathcal{S}}(g, f)$ được cho bởi

$\phi(\alpha, \lambda, F, l) = D_{(\alpha, \lambda, F, l)}$ là một phép đẳng cấu không gian vector.

(3) Điều kiện cần và đủ để $d_q(g) = 2$ là

$$\varepsilon(A, T, \mathcal{S}, \psi) = \left\{ (\alpha, \lambda, 0, \alpha id_A), \alpha, \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

3.2.3 Ví dụ

Các ví dụ sau cho ta thấy lớp đại số Lie quadratic đầy đủ luôn tồn tại.

(1) Nếu S là một đại số Lie đơn, khi đó mở rộng kép $g = S \oplus S^*$ của $\{0\}$ qua phép biểu diễn $\psi = 0$ có chiều quadratic là 2.

(2) Xét $S = \mathfrak{sl}(2)$ và A là $\mathfrak{sl}(2)$ - module bất khả qui khác 0 sao cho $\dim A = 2k+1$, $k \geq 2$. Vì A đẳng cấu với A^* (A^* là $\mathfrak{sl}(2)$ - module đối ngẫu của A) nên tồn tại một song tuyến tính đối xứng không suy biến $T : A \times A \rightarrow K$ và T cũng là $\mathfrak{sl}(2)$ - bất biến có nghĩa là $T(x.a, a') = -T(a, x.a')$ với mọi $x \in \mathfrak{sl}(2)$, $a, a' \in A$. A là đại số Lie giao hoán và $\psi : \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \mathfrak{gl}(A)$ là phép biểu diễn của $\mathfrak{sl}(2)$ kết hợp với $\mathfrak{sl}(2)$ - module trong A . Khi đó, nếu g là mở rộng kép của (A, T) bởi $\mathfrak{sl}(2)$ qua phép biểu diễn ψ thì $d_q(g) = 2$.

Hơn nữa, nếu A là $\mathfrak{sl}(2)$ - module sao cho mọi $\mathfrak{sl}(2)$ - module con của A khác 0 và có số chiều lẻ lớn hơn 4 thì A nhận một dạng song tuyến tính T đối xứng, không suy biến và T là $\mathfrak{sl}(2)$ - bất biến. Theo [2.4.1 Mệnh đề] mở rộng kép của đại số Lie giao hoán quadratic (A, T) bởi $\mathfrak{sl}(2)$ qua phép biểu diễn

$\psi : \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \mathfrak{gl}(A)$ có chiều quadratic bằng 2.

3.3. ĐẠI SỐ LIE QUADRATIC THỰC VỚI CHIỀU QUADRATIC BẰNG 2

Trong phần này, chúng ta sẽ xét $K = \mathbb{R}$.

Nếu g là đại số Lie thực và $g^{\mathbb{C}}$ được kí hiệu là sự mở rộng phức của g thì $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(g) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(g^{\mathbb{C}})$. Theo [2.2.2.5 Tính chất 5] và [5, trang 736] đã chứng minh được rằng đại số Lie thực thỏa $d_q(g) = 1$ khi và chỉ khi g là 1-chiều hoặc g là đại số Lie đơn sao cho $g^{\mathbb{C}}$ cũng là đại số Lie đơn. Hơn nữa, nếu g đơn nhưng $g^{\mathbb{C}}$

không đơn thì $d_q(g) = 2$. Chúng ta nói rằng, một đại số Lie thực đơn là *hoàn toàn đơn* khi mở rộng phức của nó $g^{\mathbb{C}}$ cũng là đại số Lie đơn.

Trong phần này, các tính chất của đại số Lie thực quadratic khá mới mẻ, việc chứng minh tương đối phức tạp. Nếu độc giả nào quan tâm, xin hãy xem thêm trong các tài liệu tham khảo.

3.3.1 Tính chất về số chiều quadratic của đại số Lie thực quadratic

(xem [5, Proposition 6.1])

Cho (g, B) là một đại số Lie thực quadratic. Kí hiệu $p(g)$ là chiều của tâm $Z(g)$, $s_1(g)$, $s_2(g)$ lần lượt là số ideal đơn hoàn toàn và số ideal đơn không hoàn toàn của hạng tử Levi.

(1) Nếu g khả qui thì $d_q(g) = s_1(g) + 2s_2(g) + p(g)(1 + p(g)) / 2$.

(2) Nếu g không khả qui thì

$$d_q(g) \geq 1 + s_1(g) + 2s_2(g) + p(g)(1 + p(g)) / 2.$$

3.3.2 Tính chất bất khả qui của đại số Lie thực quadratic có chiều quadratic bằng 2 (xem [5, Proposition 6.2])

Cho (g, B) là một đại số Lie quadratic trên $\mathbb{R}$ sao cho $d_q(g) = 2$. Khi đó, g bất khả quy khi và chỉ khi g là tổng trực tiếp của hai ideal đơn hoàn toàn hoặc nó là tổng trực tiếp của một ideal đơn hoàn toàn và một ideal 1-chiều hoặc g là ideal đơn nhưng $g^{\mathbb{C}}$ không đơn.

3.3.3 Bổ đề (xem [5, Lemma 6.1])

Cho (g, B) là một đại số Lie đầy đủ thực không khả quy. Nếu $d_q(g) = 2$ thì g là mở rộng kép của một đại số Lie quadratic lũy linh (A, T) bởi một đại số Lie đơn hoàn toàn S qua phép biểu diễn $\psi : S \rightarrow \text{Der}_a(A, T)$ sao cho

$$Z(A)^S = \{0\}.$$

3.3.4 Tính chất (xem [5, Proposition 6.3])

Gọi (g, B) là mở rộng kép của đại số Lie thực quadratic lũy linh (A, T) bởi đại số Lie đơn tuyệt đối S qua biểu diễn $\psi : S \rightarrow \text{Der}_a(A, T)$.

(1) Điều kiện $\varepsilon(A, T, \mathcal{S}, A, T) = \{(\alpha, \lambda, 0, \alpha \text{id}_A), \alpha, \lambda \in \mathbb{R}\}$ là điều kiện cần và đủ

$$\text{để } d_q(g) = 2.$$

(2) Nếu $\mathcal{S}$ -mô đun A không nhận $\mathcal{S}$ -mô đun con đẳng cấu với $\mathcal{S}$ và $A^{\mathcal{S}} = \{0\}$

$$\text{thì } d_q(g) = 2.$$

(3) Nếu $d_q(g) = 2$ thì $\mathcal{S}$ -mô đun $Z(A)$ không nhận $\mathcal{S}$ -mô đun con đẳng cấu với

$\mathcal{S}$ -mô đun phụ hợp $\mathcal{S}$.

KẾT LUẬN

Qua những phần đã trình bày, chúng ta đã nắm được đại cương về đại số quadratic, đặc biệt là đại số Lie quadratic số chiều quadratic bằng 2. Từ các kết quả trên, một cách tự nhiên gợi ý cho chúng ta cần nghiên cứu sâu hơn về các vấn đề sau:

- *Đại số Lie quadratic có số chiều quadratic cao hơn.*
- *Sự phân loại đại số Lie quadratic.*
- *Ứng dụng của đại số Lie quadratic.*

Do những hạn chế về nhiều mặt như: trình độ, thời gian,... chúng tôi chưa có điều kiện tìm hiểu các vấn đề nêu trên. Tác giả hy vọng còn có dịp tiếp tục nghiên cứu những vấn đề trên trong tương lai.

Sau cùng, mặc dù tác giả đã có nhiều cố gắng trong việc tìm hiểu đề tài nhưng những sai sót là khó tránh khỏi, tác giả xin chân thành tiếp thu và cảm ơn các độc giả đã, đang và sẽ đóng góp ý kiến cho bản luận văn này.

CHỈ MỤC

Thuật ngữ	Trang
B	
Bất khả quy	22
Biểu diễn phụ hợp	19
Biểu diễn đối phụ hợp	19
C	
Căn giải được	14
Chiều quadratic	22
D, Đ	
Dạng Killing κ	42
Dạng song tuyến tính bất biến	18
Dừng	14
Đại số	7
Đại số kết hợp	7
Đại số giao hoán (hay phản giao hoán)	7
Đại số thực (hay phức)	7
Đại số Lie	8
Đại số Lie con	10
Đại số Lie thương	10
Đại số dẫn xuất	11
Đại số hoán tử	11
Đại số Lie quadratic	18
Đại số Lie thực (hay phức)	8
Đại số Lie đơn	16
Đại số Lie nửa đơn	16
Đại số Lie tự đối ngẫu đối xứng	19
Đẳng hướng	6
Đẳng cấu đại số Lie	10
Đầy đủ	20

Địa phương	24
Đối xứng	5
Đồng cấu đại số Lie	10
G	
Giải được	12
H	
Hoàn toàn đơn	43
I	
Ideal suy biến	20
Ideal đẳng hướng	20
Ideal cực tiểu	24
K	
Khả quy	22
Không suy biến	5
Không gian con	5
Không gian con trực giao	19
M	
Ma trận tam giác trên	9
Ma trận tam giác trên ngặt	9
Móc Lie	8
Mở rộng kép	20
P	
Phản giao hoán	7
Phản xứng	5
S	
$\mathcal{S}$ - mô đun	44
T	
Tâm của đại số Lie $\mathcal{G}$	15
Tầm thường	8

Tích vô hướng bất biến	18
Toán tử vi phân $\text{Der}(g)$	20
Toán tử tuyến tính $\text{End}(V)$	7
Trọng	22
V	
Vết	9

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. [Do] Nguyễn Văn Đoàn (2006), *Đa tạp khả vi*, NXB Đại học Sư phạm Hà Nội.
2. [Do-Hu] Nguyễn Viết Đông – Trần Huyền (2006), *Đại số đồng điều*, NXB Đại học quốc gia TP HCM.
3. [Do-Hu-Tu-Vu] Nguyễn Viết Đông – Lê Thị Thiên Hương – Nguyễn Anh Tuấn – Lê Anh Vũ (2003), *Toán cao cấp* (Tập 2), NXB Đại học quốc gia TP HCM.

Tiếng Anh

4. [Ba] J.A. Bahturin, *Lectures on Lie Algebras* (1978), Springer – Verlag, Berlin – Heidenberg – New York
5. [Ba-Be] Ignacio Bajo, Said Benayadi, *Lie algebras with quadratic dimension equal to 2*, Journal of Pure and Applied Algebra 209(2007) 725-737, 2006.
6. [Ba-Be] I. Bajo, S. Benayadi, *Lie algebras admitting a unique quadratic structure*, Comm. Algebra 25 (9) (1997) 2795-2805.
7. [Be] S. Benayadi, *Socle and some invariants of quadratic Lie superalgebras*, J. Algebra 261 (2003) 245-291.
8. [Be-Be] H. Benamor, S. Benayadi, *Double extension of quadratic Lie superalgebras*, Comm. Algebra 27 (1) (1999) 67-88.
9. [Bu-De-Ve] Dietrich Burde, Karel Dekimpe, Kim Vercautmen, *Novikov algebras and Novikov structures on Lie algebras*, Linear algebra and its applications 429 (2008) 31 – 41.
10. [Er-Wi] Karin Erdmann and Mark J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer, 2006.
11. [Li] Zhu Linsheng, *Solvable quadratic Lie algebras*, Series A Mathematics 2006 Vol.49 No.4 477-493, 2005.

12. [Me-Re] A. Medina, Ph. Revoy, *Algèbres de Lie et produit scalaire invariant*, *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.*, 4ème sér. T.18 (1985) 553-561.
13. [Vu] Le Anh Vu (2007), *On a Subclass of 5-dimensional Solvable Lie Algebras Which Have Commutative Derived Ideal*, *Advances in Algebra and combinatorics*, World Scientific Publishing Co., 2008, pp. 353 – 371.
14. [Zh-Ch] Fhai Zhu and Zhiqi Chen, *Novikov algebras with associative bilinear forms*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 40 (2007) 14243-14251, 2007.