BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Nguyễn Thị Duyên

DẠY HỌC SỐ PHỨC Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

Chuyên ngành : **Lý luận và phương pháp dạy học môn Toán**
Mã số : **60 14 10**

LUẬN VĂN THẠC SĨ GIÁO DỤC HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. LÊ VĂN TIẾN

Thành phố Hồ Chí Minh – 2009

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, tôi xin gởi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất đến PGS.TS. Lê Văn Tiến, người Thầy đã luôn tận tình hướng dẫn và động viên tôi trong suốt thời gian qua để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi xin gửi lời tri ân tới ban giám hiệu cùng tập thể giáo viên trường THPT Trung Phú, huyện Củ Chi, thành phố Hồ Chí Minh vì đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình tham gia học tập và làm luận văn.

Cuối cùng, xin cảm ơn gia đình đã luôn động viên và ở bên tôi. Luận văn này xin dành tặng cho Cha Mẹ, cho chồng và những người thân yêu trong gia đình.

Nguyễn Thị Duyên

MỤC LỤC

DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

HS	**:**	**Học sinh**
GV	**:**	**Giáo viên**
SGK	**:**	**Sách giáo khoa**
SGV	**:**	**Sách giáo viên**
THPT	**:**	**Trung học phổ thông**
BT	**:**	**Bài tập**
VD	**:**	**Ví dụ**
SGK 12CB	**:**	**Sách giáo khoa giải tích 12 cơ bản hiện hành**

MỞ ĐẦU

1.Những ghi nhận ban đầu và câu hỏi xuất phát

Số phức đóng vai trò quan trọng không chỉ trong các lĩnh vực của Toán học như: đại số, giải tích, hình học, lượng giác… mà còn cả trong Sinh học, Vật lý... Nó đã xâm nhập vào các phương trình tĩnh điện, thuỷ động lực học, khí động lực học, lý thuyết dao động và cả trong cơ học lượng tử. Ngày nay, có rất nhiều công trình về kỹ thuật, vật lý lý thuyết đã được viết bằng ngôn ngữ của số phức.

Ở bậc phổ thông, số phức xuất hiện trong chương trình toán ở nhiều nước trên thế giới từ rất lâu. Nhưng ở Việt nam, nó chỉ mới xuất hiện lần đầu tiên trong sách giáo khoa toán lớp 12 được đưa vào thí điểm trong năm học 2007-2008 và chính thức được sử dụng đại trà từ năm học 2008-2009 (ngoại trừ chương trình THPT ở miền nam Việt Nam trước giải phóng).

Từ đó, thực sự có ích và thú vị khi có được câu trả lời cho các câu hỏi sau :

- Vì sao lại có sự khác biệt này ?
- Mục tiêu của đưa số phức vào chương trình toán THPT là gì ? Nói cách khác, đối tượng mới này có vai trò và chức năng gì ?
- Khái niệm số phức đã nảy sinh và tiến triển như thế nào trong lịch sử ? Nó có những đặc trưng cơ bản nào ?
- Trong hệ thống dạy Toán ở trường phổ thông, nó đã được tiếp cận ra sao? Có sự tương đồng và khác biệt nào của cùng khái niệm số phức trong lịch sử phát triển và trong hệ thống dạy học.
- Những ràng buộc của hệ thống dạy học ảnh hưởng thế nào trên hiểu biết của giáo viên và học sinh về khái niệm số phức ?

2.Mục đích nghiên cứu và phạm vi lý thuyết tham chiếu

Mục đích tổng quát của luận văn là tìm câu trả lời cho một số trong các câu hỏi đặt ra ở trên. Để làm được điều đó, chúng tôi sẽ vận dụng các yếu tố công cụ của lý thuyết didactique Toán. Cụ thể, đó là một số khái niệm công cụ của lý thuyết nhân chủng học (mối quan hệ thể chế, mối quan hệ cá nhân) và của lý thuyết tình huống (khái niệm hợp đồng didactique).

Trong phạm vi lý thuyết nêu trên, các câu hỏi cấu thành nên mục đích nghiên cứu của chúng tôi có thể được trình bày lại như sau:

Q1. Trong lịch sử phát triển của Toán học, quá trình hình thành và tiến triển của khái niệm số phức có những đặc trưng cơ bản nào? Những đối tượng toán học nào góp phần làm nảy sinh và tiến triển khái niệm này?

Q2. Lí do và cách thức đưa số phức vào giảng dạy trong thể chế dạy học Toán trung học phổ thông ở Việt Nam? Vị trí và chức năng của đối tượng mới này? Mối quan hệ thể chế với đối tượng số phức đã được xây dựng và tiến triển ra sao? Nó có những đặc trưng cơ bản nào so với quá trình phát triển của nó trong lịch sử? Nó phải chịu những ràng buộc nào?

Q3. Những quy tắc nào của hợp đồng didactique được hình thành giữa giáo viên và học sinh trong quá trình dạy – học số phức?

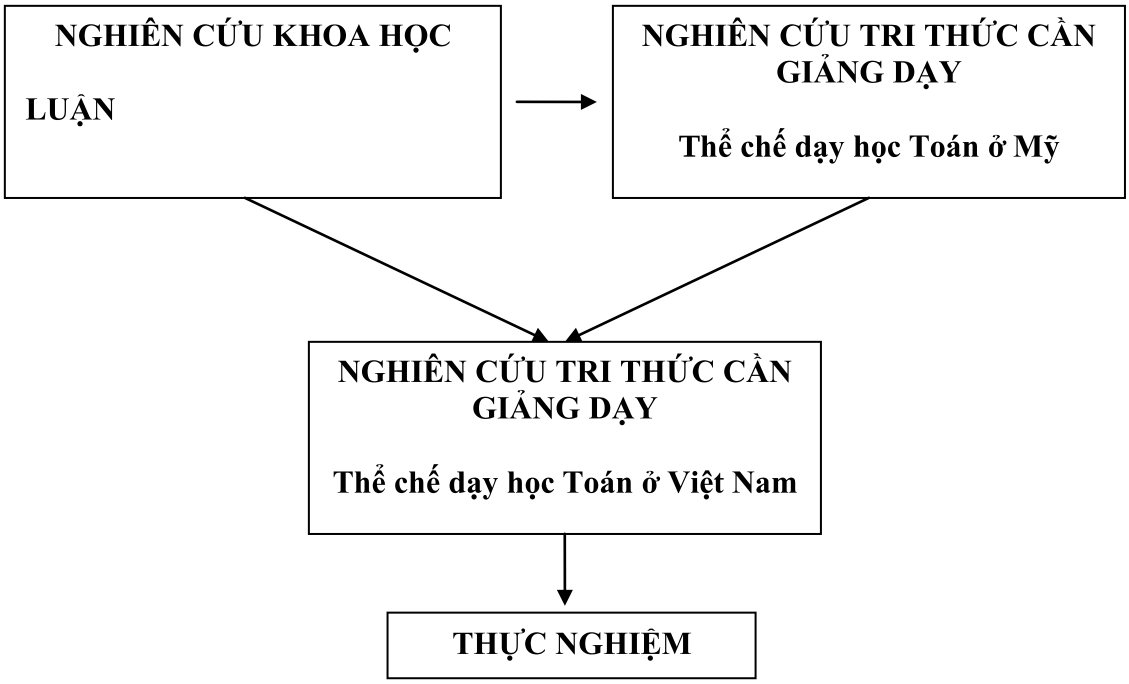
3.Phương pháp và tổ chức nghiên cứu

Phương pháp luận nghiên cứu mà chúng tôi áp dụng trong luận văn này là thực hiện đồng thời hai nghiên cứu: Nghiên cứu khoa học luận và nghiên cứu thể chế. Nghiên cứu khoa học luận sẽ là tham chiếu cho nghiên cứu mối quan hệ thể chế. Sau đó, tổ hợp kết quả hai nghiên cứu này sẽ là cơ sở đề xuất các câu hỏi và đặc biệt là các giả thuyết nghiên cứu mà chúng tôi sẽ tìm cách trả lời hay hợp thức hoá bằng các thực nghiệm.

Dựa vào phương pháp luận nghiên cứu nêu trên, có thể trình bày tổ chức nghiên cứu của chúng tôi như sau:

- Phân tích, tổng hợp một số nghiên cứu khoa học luận về lịch sử hình thành và tiến triển của số phức để làm rõ những đặc trưng khoa học luận của đối tượng này: số phức xuất hiện trong tình huống nào? để giải quyết vấn đề gì? chức năng và "nghĩa" của nó? những đối tượng toán học nào gắn liền với sự nảy sinh và tiến triển của số phức?
- Dựa vào những phân tích trên, chúng tôi sẽ nghiên cứu thể chế dạy học Toán ở Pháp và Mỹ liên quan đến số phức. Kết quả nghiên cứu này sẽ là tham chiếu cho việc phân tích thể chế dạy học Toán ở Việt Nam, vấn đề khái niệm số phức.
- Tổng hợp kết quả của hai phân tích trên để đề xuất các câu hỏi mới hay giả thuyết nghiên cứu mà tính thích đáng của chúng sẽ được kiểm chứng bằng thực nghiệm.
- Xây dựng tình huống thực nghiệm cho phép tìm câu trả lời cho một số trong các câu hỏi mới hay đưa vào thử nghiệm giả thuyết nghiên cứu đã đặt ra ở trên.

Phương pháp nghiên cứu trên được sơ đồ hoá như sau



4.Tổ chức của luận văn

Luận văn gồm 5 phần:

Phần mở đầu

Trong phần này chúng tôi trình bày những ghi nhận ban đầu, lợi ích của đề tài nghiên cứu, mục đích của đề tài, phương pháp và tổ chức nghiên cứu cũng như tổ chức của luận văn.

Chương 1

Trình bày nghiên cứu khoa học luận về khái niệm số phức. Cụ thể, chúng tôi tổng hợp các công trình nghiên cứu đã có về khái niệm số phức để làm rõ các đặc trưng cơ bản của khái niệm số phức trong lịch sử tiến triển của nó.

Chương 2

Phân tích chương trình và sách giáo khoa Toán phổ thông để làm rõ mối quan hệ thể chế với khái niệm số phức.

Đầu tiên chúng tôi phân tích hai bộ SGK của Pháp và của Mỹ. Tiếp đó, chúng tôi phân tích mối quan hệ thể chế của thể chế dạy học ở trường THPT tại Việt Nam với khái niệm số phức.

Từ phân tích trên, chúng tôi làm rõ các ràng buộc của thể chế và các quy tắc hợp đồng didactique chuyên biệt gắn liền với khái niệm số phức.

Đề ra giả thuyết nghiên cứu như là hệ quả của việc phân tích khoa học luận ở chương 1 và quan hệ thể chế ở chương 2.

Chương 3

Trình bày các thực nghiệm nhằm kiểm chứng tính thoả đáng của các giả thuyết mà chúng tôi đã đặt ra ở cuối chương 2.

Phần kết luận

Tóm tắt những kết quả đạt được ở chương 1, 2, 3 và đề xuất một số hướng nghiên cứu có thể mở ra từ luận văn này.

Chương 1. ĐẶC TRƯNG KHOA HỌC LUẬN CỦA KHÁI NIỆM SỐ PHỨC

1.1. Mục tiêu của chương

Mục đích trong chương này cuả chúng tôi là tìm câu trả lời cho câu hỏi Q1 đã được nêu ở phần mở đầu, nghĩa là tiến hành phân tích, tổng hợp một số nghiên cứu khoa học luận về lịch sử hình thành và tiến triển của số phức để làm rõ những đặc trưng khoa học luận của đối tượng này: số phức xuất hiện trong tình huống nào? để giải quyết vấn đề gì? chức năng và "nghĩa" của nó? những đối tượng toán học nào gắn liền với sự nảy sinh và tiến triển của số phức?

Chương này được trình bày dựa vào việc tham khảo các nguồn tài liệu sau đây:

- Đề tài nghiên cứu khoa học cấp bộ: "Vai trò của phân tích khoa học luận lịch sử toán học trong nghiên cứu và thực hành dạy – học môn Toán" của Lê Thị Hoài Châu và Lê Văn Tiến, TPHCM 2003.
- Toán học trong thế giới ngày nay, Trần Trịnh Ninh, Trần Trí Đức (dịch), NXB Khoa Học và Kĩ Thuật, Hà Nội 1976.
- A short history of Complex Numbers, Orlando Merino, 2006.

1.2. Đặc trưng khoa học luận của khái niệm số phức

Lịch sử hình thành và phát triển của số phức có thể chia làm bốn giai đoạn chủ yếu sau đây:

1.2.1. Giai đoạn 1: Giai đoạn "Cách viết trung gian"

Nghiên cứu các tài liệu trên ta thấy, trong công trình Algebra của mình, Al-Khawarizmi (780-850) đã tìm ra phương pháp giải các phương trình bậc hai bằng nhiều cách. Các cách chứng minh đều dựa trên nền tảng hình học, lấy nguồn gốc từ Toán học Hi Lạp và Hinđu.

Bắt đầu từ các công trình của Al Hawarismi, sau đó là Aboul Wafa, Al Kahri và Léonard de Pise, người ta đã biết giải tất cả các trường hợp có thể và biết phân biệt các phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm, một nghiệm hay vô nghiệm. Như vậy, lúc bấy giờ, giải phương trình bậc hai không còn là vấn đề được đặt ra với các nhà Toán học nữa.

Chính bài toán tìm nghiệm thực của phương trình bậc ba mới đặt ra vấn đề: Mọi phương trình bậc ba có nghiệm thực hay không, nếu có thì làm sao xác định được nó?

Trước thế kỷ XVI, phương trình bậc ba đã được các nhà Toán học Hy Lạp giải nhờ vào các phép dựng hình học. Các phép dựng hình học nghiệm thực của phương trình bậc ba này đã thành công ở nhiều nhà Toán học, chẳng hạn như Ibn Al – Haytham (965 – 1093).

Chỉ đến đầu thế kỉ XVI, người ta mới thành công trong việc giải phương trình bậc ba bằng đại số. Người đầu tiên đưa ra công thức giải phương trình bậc ba tổng quát $x^3+ax^2+bx+c=0$ là Scipione del Ferro, giáo sư của đại học Bologna (công thức giải được ông truyền cho học trò mình là Fiore năm 1526, trên giường bệnh, trước khi ông qua đời). Năm 1547, Cardan là người công bố phương pháp giải tổng quát một phương trình bậc ba.

Có một khó khăn nảy trong quá trình giải đó là xuất hiện căn bậc hai của số âm. Khó khăn này được Cardano "lờ đi" trong Ars Magna. Để giải quyết khó khăn đó, Rafael Bombelli đưa vào kí hiệu "*pìu di meno" (p.d.m)* và *"meno di meno" (m.d.m)*. Với các kí hiệu này, ông đã ***tìm được nghiệm thực của phương trình bậc ba bằng cách thực hiện các phép tính tương tự như trong phạm vi số quen thuộc.***

Ta hãy xem xét cách các nhà Toán học xây dựng phương pháp giải phương trình bậc 3:

Phương trình cần giải là $x^3=a+bx$ (1)

Đặt $x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$ với điều kiện $\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v}=\frac{b}{3}$ (2), ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}\right)^3=a+b\left(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}\right)\Leftrightarrow u+v+3\sqrt[3]{uv}\left(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}\right)=a+b\left(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}\right)$$

$$u+v+b\left(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}\right)=a+b\left(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}\right)\Leftrightarrow u+v=a\ (3)$$

Từ (2), (3) suy ra $u^2-au+\left(\frac{b}{3}\right)^3=0\Leftrightarrow\left(u-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3$

+ Nếu $\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3$ **không âm:**

$u=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}$ và $v=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}$

hoặc $u=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}$ và $v=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}$

+ **Nếu** $\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3$ **âm,** khó khăn gặp phải là lấy căn bậc hai của một số âm. Để tránh khó khăn này, người ta đưa vào những "dấu" (hay "kí hiệu") mới: p.d.m hay m.d.m, và đạt được:

Ví dụ

Giải phương trình: $x^3 = 104 + 51x$

$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$

$x^3 = u + v + 3\sqrt[3]{uv}\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right)$

suy ra $\begin{cases} u + v = 104 \\ \sqrt[3]{uv} = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 104 \\ uv = 17^3 \end{cases}$

suy ra u, v là hai nghiệm của phương trình:

$u^2 - 104u + 17^3 = 0 \Leftrightarrow (u - 52)^2 = -47^2$

$u - 52 = p.d.m.47 = (4p.d.m1)^3$

$u - 52 = m.d.m.47 = (4m.d.m1)^3$

Vậy $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = 4p.d.m1 + 4m.d.m1 = 8$

Kết luận

Mầm mống xuất hiện số phức là để giải quyết nhu cầu tìm nghiệm thực của phương trình bậc 3.

Như vậy, việc tìm nghiệm thực của phương trình bậc 3 là động lực để làm nảy sinh đối tượng mới.

Số phức xuất hiện trong ***vai trò công cụ*** để giải quyết bài toán tìm nghiệm thực của phương trình bậc 3, chưa có nghĩa xác định..

Số phức xuất hiện đầu tiên không phải là một số mới mà có sự nảy sinh của các dấu hay cách viết trung gian và các quy tắc với chúng để thực hiện các phép tính.

1.2.2. Giai đoạn 2: Kí hiệu hình thức các đại lượng ảo

Trong giai đoạn trước, thuật ngữ "đại lượng ảo" cũng như "kí hiệu" căn bậc hai của số âm chưa xuất hiện. Số phức lúc đó chưa có cơ chế của một "số" mà chỉ là các kí hiệu làm trung gian cho phép tính nghiệm của phương trình bậc ba.

Bước sang giai đoạn mới, khi niềm tin vào các đối tượng này ngày càng gia tăng do việc thao tác với chúng không đưa đến mâu thuẫn, căn bậc hai của số âm xuất hiện mặc dù chúng vẫn chưa có một "nghĩa" xác định mà chỉ đóng vai trò công cụ tính. Sau đó các nhà hình học Đức đã thay cách viết $\sqrt{-1}$ bằng chữ i.

Mặc dù đại lượng ảo trong giai đoạn này vẫn chưa mang cơ chế của một "số" nhưng người ta đã áp dụng các quy tắc quen thuộc trong phạm vi các số đã biết lên chúng để đạt được những kết quả tính toán mong muốn.

Chúng ta hãy xem xét một sự kiện quan trọng trong lịch sử phát triển số phức có sự hiện diện của kí hiệu $\sqrt{-1}$ hay chữ i:

Bernoulli đã tính logarit của $\sqrt{-1}$ như sau:

Từ đẳng thức vi phân: $\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+ix}+\frac{1}{1-ix}\right)dx$, bằng cách đổi biến $x=i.\frac{t-1}{t+1}$ và ***<u>lấy tích phân bình thường như đã làm với số thực,</u>*** ông đã tính được logarit của $\sqrt{-1}$ bằng $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ và do đó logarit của bình phương của $\sqrt{-1}$ (nghĩa là của -1) bằng $\pi\sqrt{-1}$.

Bernoulli còn cho rằng một số và số đối của nó có cùng logarit.

Ông lý giải rằng với mọi số dương a, ta có $(-a)^2=a^2$ và do đó:

$$\ln(-a)^2=\ln(a)^2$$
$$2\ln(-a)=2\ln(a)$$

Suy ra $\ln(-a)=\ln(a)$

Đặc biệt $\ln(-1)=\ln(1)=0$.

Trong cách lí giải này, Bernoulli đã áp dụng các quy tắc tính vẫn được sử dụng trong phạm vi số thực mà không tính đến phạm vi hợp thức của nó khi áp dụng để tính logarit của số âm và số ảo:

$$a=b\Rightarrow\ln(a)=\ln(b)$$

$$\ln x^2=2\ln(x)$$

$$2a=2b\Rightarrow a=b.$$

Cũng bằng cách áp dụng các quy tắc tính quen thuộc trong phạm vi các số đã biết mà nhiều đồng nhất thức tuyệt đẹp đã ra đời, mặc dù lúc bấy giờ không ai hiểu rõ $\sqrt{-1}$ hay i là gì.

Abraham de Moivre (1667-1754) đã đưa ra công thức: $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

Còn Euler (1707-1783) đã thiết lập hệ thức : $e^{\pi\sqrt{-1}}=-1$.

Kết luận :

Trong giai đoạn này, mặc dù « kí hiệu » căn bậc hai của số âm, i, thậm chí là $a+\sqrt{-b}$ đã xuất hiện nhưng số phức vẫn chưa có một « nghĩa » xác định, vẫn chỉ mang **cơ chế công cụ**. Người ta đã dựa vào các quy tắc đã biết trong phạm vi các số quen thuộc để áp dụng cho đối tượng mới này. Tuy kết quả rút ra như thế nào thì việc vận *"nguyên tắc thường trực"* của các nhà Toán học lúc đó đã đóng vai trò quan trọng tạo ra những đối tượng toán học mới. Việc áp dụng quy tắc ngoài phạm vi hợp thức của nó có thể dẫn đến kết quả phù hợp hoặc mâu thuẫn với kết quả đã có, tuy nhiên, việc vượt ra ngoài phạm vi, nguyên tắc… quen thuộc có thể là tiền đề cho sáng tạo và phát triển.

1.2.3. Giai đoạn 3: Biểu diễn hình học các đại lượng ảo

Phân tích hai giai đoạn đầu cho thấy, mặc dù thuật ngữ « đại lượng ảo » đã xuất hiện cùng với sự xuất hiện của « kí hiệu » căn bậc hai của số âm, $\sqrt{-1}$ hay i, tuy nhiên, số phức lúc bấy giờ cũng chỉ mang cơ chế **công cụ**, cũng chỉ là các « kí hiệu hình thức » chứ chưa hề có một « nghĩa » xác định nào.

Hình ảnh hình học sơ khai của số phức được nhà toán học Anh Jonh Wallis (1616-1703) đề cập đến trong quyển « Algebra » xuất bản năm 1685. Ông đã tưởng tượng rằng $40\sqrt{-1}$ là cạnh của một hình vuông diện tích -1600 với lí giải như sau :

« Nếu ta giả sử rằng mặt rộng này là -1600 perches, nghĩa là 1600 perches mất, và rằng mặt rộng có dạng hình vuông, thì liệu có hay không cạnh của hình vuông này ? Nếu có, thì nó bằng bao nhiêu ? Chắc chắn, cạnh này không thể là +40 hay -40, vì hình vuông tương ứng cho +1600 mà không phải là -1600. Đó phải là $\sqrt{-1600}$ (căn giả định của một số âm), hay $10\sqrt{-16}$, $20\sqrt{-4}$ hay $40\sqrt{-1}$. »

Như vậy, trước thế kỉ XIX, hình ảnh hình học của số phức đã xuất hiện nhưng vẫn chỉ tồn tại trong tưởng tượng.

Mãi đến thế kỉ thứ XIX, các nhà Toán học mới bắt đầu tìm ra cho chúng những cách biểu diễn cụ thể, đem về cho số phức một « nghĩa » xác định. Điều đó tạo nền móng cho một công trình toán học tuyệt vời mà ngày nay chúng ta vẫn gọi là lí thuyết hàm số biến số phức.

Nhà toán học Thuỵ Sỹ Robert Argand đã đề cập đến biểu diễn hình học của số phức từ năm 1806, trong một tiểu luận của mình, ông đã nêu cách biểu diễn hình học của phép cộng, phép nhân các số phức.

Từ những kết quả có được khi nghiên cứu số âm, Argand đã nảy sinh ý tưởng về chiều, từ đó dẫn đến chỗ đưa vào một mô hình biểu diễn các số thực trên một trục định hướng. Khi tìm cách biểu diễn đại lượng x thoả mãn $+1:x::x:-1$, được hiểu là $\frac{+1}{x}=\frac{x}{-1}$, tương đương với $x.x=-1$. Ông đã lập luận rằng vì đại lượng x nói trên không thể dương cũng không thể âm nên phải có một hướng thứ ba chứa x. Từ lập luận đó, ông đã biểu diễn các số thực trên một trục (gọi là trục thực) và dựng một trục thứ hai đi qua gốc của trục thực và vuông góc với nó. Trên trục thứ hai này, ông xác định hai đại lượng đơn vị ảo là $+\sqrt{-1}$ và $-\sqrt{-1}$.

Từ đó, khái niệm đường định hướng được ông đưa vào như sau :

« Đường định hướng được phân biệt với đường tuyệt đối (ligne absolue) – đường mà người ta chỉ có thể xem xét chiều dài, không quan tâm gì về hướng » (Argand, 1806, tr.11) [1]

Để gắn kết khái niệm đường định hướng với các đại lượng ảo, ông chỉ ra rằng những đường song song với trục thực được viết là $\pm a$ còn những đường vuông góc với nó được viết là $\pm b\sqrt{-1}$. Như vậy, tất cả các đường định hướng trong mặt phẳng đều có thể viết dưới dạng $\pm a \pm b\sqrt{-1}$. Từ đó, các phép toán trên các đại lượng ảo được ông thiết lập thông qua phép dựng hình học được thực hiện trên các đường định hướng.

Chính nhờ ý tưởng về chiều kéo theo sự xuất hiện của các đường định hướng mà vấn đề biểu diễn hình học của số phức và các phép toán cộng, nhân số phức được giải quyết. *Phép tương tự* đóng vai trò quyết định trong quá trình này. Argand viết rằng :

« Nhưng, vì chúng ta đã thấy rằng, đại lượng âm – đại lượng thoạt tiên có vẻ chỉ tồn tại trong tưởng tượng, nay đã tồn tại thực sự, khi chúng ta kết hợp tư tưởng đại lượng tuyệt đối với đại lượng có hướng, phép tương tự phải dẫn chúng ta tới việc tìm hiểu xem ta có thể đạt được một kết quả tương tự về đại lượng đối. (đó là trung bình ảo + 1 : *x :: x : -1*) »

Các đường định hướng mà Argand xây dựng ở đây chính là tiền thân của đối tượng vectơ. Trong trường hợp này, đại lượng ảo vừa đối tượng nghiên cứu, vừa là động lực thúc đẩy sự nảy sinh và phát triển đối tượng vectơ.

Bên cạnh đó, việc xuất hiện biểu diễn hình học của số phức không thể phủ nhận vai trò của *« trực giác hình học »*. Quá trình tìm tòi biểu diễn hình học của số phức của Argand được xuất phát từ đại số. Nhờ vào trực giác, ông đã đưa vào khái niệm đường thẳng định hướng. Đường thẳng định hướng đến lượt nó lại cho hình ảnh hình học đầu tiên của đối tượng vectơ.

Kết luận

---

[1] trang 26 tài liệu 1

Như vậy, trong giai đoạn này, số phức từ cơ chế **đối tượng** đơn thuần trong hai giai đoạn trước đã chuyển sang mang cơ chế **công cụ**. Từ việc chỉ là những **"kí hiệu hình thức"**, số phức nay đã có một **« nghĩa »** hình học xác định.

Phép tương tự và trực giác hình học đóng một vai trò quan trọng trong sự xuất hiện dạng biểu diễn hình học của số phức nói riêng và trong sự phát triển của Toán học nói chung.

Việc tìm cho các đại lượng ảo một « nghĩa » xác định trong hình học bằng cách tìm cho nó và các phép toán trên nó một cách biểu diễn xác định đã làm tiền đề và động lực cho việc xuất hiện các đường định hướng, một tiền thân của đối tượng vectơ.

1.2.4. Giai đoạn 4: Đại số các số phức

Việc số phức mang « nghĩa » hình học không làm thoả mãn các nhà Toán học. Trong mắt các nhà Toán học lúc bấy giờ, số phức phải mang bản chất đại số, chúng phải được xây dựng từ tập số đã biết là tập số thực và câu hỏi : « Số phức » là gì phải được trả lời trong phạm vi của đại số chứ không phải trong phạm vi của hình học.

Thậm chí, cả những phương trình chứa các đại lượng ảo cũng bị xem là không có nghĩa. Chỉ đến đầu thế kỉ XIX, Cauchy và Hamilton mới đem đến cho số phức một « nghĩa » đại số xác định. Số phức lúc này chính thức là những đối tượng đại số- những đối tượng trên đó có thể thực hiện các phép tính đại số.

Cũng trong thời gian ấy, các nhà vật lí đã khẳng định có thể dùng số phức để mô tả các hiện tượng vật lí khác nhau một cách tiện lợi. Các số này bắt đầu xâm nhập vào các phương trình tĩnh điện, thuỷ động lực học, khí động lực học, lí thuyết dao động và cả cơ học lượng tử. Ngày nay, rất nhiều công trình về kĩ thuật và vật lí lí thuyết đã được viết bằng ngôn ngữ của các số phức.

Quatenion là một sáng tạo vĩ đại của Hamilton. Trong suốt nhiều năm, ông không thể bằng lòng với sự kiện cho rằng phép nhân các số phức có thể biểu diễn một cách thuần tuý bởi phép quay trên mặt phẳng. Chẳng lẽ không thể nào đưa ra một dạng mới của các số và xác định phương pháp nhân chúng bằng cách biểu diễn qua một phép quay nào đấy trong không gian ba chiều ? Những số mới này được Hamilton gọi là triplet. Cũng như Bessel đã biểu diễn các số phức bằng các điểm trên mặt phẳng hai chiều, triplet là biểu diễn của các điểm trong không gian ba chiều.

Hamilton khởi đầu từ quan niệm cho rằng: hình học là khoa học của không gian còn đại số là khoa học về thời gian thuần tuý. Theo quan điểm này, ông giải thích số âm như sự quay về trong thời gian.

Để tìm "nghĩa" các đại lượng ảo, ông xây dựng một đại số của các cặp số thực mà ông gọi là "coupes d'instants et de moments". Phép nhân các cặp được định nghĩa như sau: $\left(a_1, a_2\right)\left(b_1, b_2\right) = \left(a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1\right)$

Phép nhân này bảo toàn các tính chất của các phép tính đại số quen thuộc và hơn nữa: $(0,1)(0,1) = (-1,0)$

Từ đó, trong đại số này, các số phức được xem như là cặp số thực. Như vậy, số phức chính thức lấy cơ chế của một đối tượng đại số - những đối tượng mà trên đó có thể thực hiện các phép tính toán đại số, chứ không còn là "đối tượng kí hiệu".

Mở rộng kết quả trên, Hamilton đi xây dựng đại số của các bộ ba số thực, đại số các quaternion. Đó là đại số của các biểu thức có dạng a + bi + cj + dk (gọi là một quaternion), trong đó a, b, c, d là những số thực và i, j, k là các kí hiệu hình thức nào đó liên hệ với nhau và với số 1 theo bảng nhân sau đây:

X	**1**	**I**	**j**	**K**
1	1	I	j	K
I	i	-1	k	-j
J	j	-k	-1	I
K	K	J	-i	-1

Kết luận

Số phức trong giai đoạn này đã mang một nghĩa xác định trong đại số, trên đó, ta có thể thực hiện các tính toán đại số.

Việc Hamilton không ngừng tìm tòi nghiên cứu tính hợp thức của số phức cộng với sự tác động qua lại giữa Đại Số và Hình Học đã là động lực nảy sinh đối tượng mới trong lĩnh vực Toán học: Đại số các quaternions của Hamilton.

1.3. Kết luận chương 1

Qua chương này, chúng tôi rút ra một số kết luận sau đây:

- **Tiến trình xuất hiện của số phức**

	Vai trò	Nghĩa
Giai đoạn 1 Giai đoạn "Cách viết trung gian"	Công cụ	Chưa có nghĩa xác định
Giai đoạn 2 Giai đoạn kí hiệu hình thức các "đại lượng ảo"	Công cụ	Chưa có nghĩa xác định
Giai đoạn 3 Biểu diễn hình học các đại lượng ảo	Đối tượng	Nghĩa hình học sơ khai
Giai đoạn 4 Đại số các số phức	Đối tượng	Nghĩa đại số

- **Các đối tượng liên quan**

Như vậy, việc tìm nghiệm thực của phương trình bậc ba là nguyên nhân làm nảy sinh đối tượng số phức. Và đến lượt mình, việc nghiên cứu các số phức để tìm cho nó một "nghĩa" xác định lại là nguyên nhân và động lực để nảy sinh các đối tượng Toán học khác.

Trong giai đoạn thứ 3, khi cố gắng tìm kiếm ý nghĩa hình học của số phức, các nhà Toán học đã đưa ra khái niệm đường định hướng, đó là tiền thân cho đối tượng vectơ. Có thể nói rằng, việc nghiên cứu số phức là động lực thúc đẩy sự nảy sinh và phát triển của đối tượng vectơ.

Cũng từ động cơ nghiên cứu tính hợp thức của số phức mà Hamilton đã khám phá ra các quaternions.

Chương 2. KHÁI NIỆM SỐ PHỨC Ở CẤP ĐỘ TRI THỨC CẦN GIẢNG DẠY

Mục tiêu của chương

Mục đích của chương này là làm rõ mối quan hệ thể chế với đối tượng số phức. Cụ thể hơn, chúng tôi nhắm tới việc trả lời các câu hỏi sau:

- Khái niệm số phức đã được đưa vào chương trình và sách giáo khoa toán phổ thông như thế nào? Những tổ chức toán học nào được xây dựng xung quanh khái niệm này? Những đặc trưng của chúng?
- Những đặc trưng khoa học luận nào của khái niệm số phức (trong số những đặc trưng đã được làm rõ ở chương trước) hiện diện trong thể chế dạy học Toán ở trường phổ thông?
- Những điều kiện và ràng buộc nào của thể chế trên việc dạy học khái niệm này?

Những kết quả đạt được trong chương 1 sẽ là cơ sở tham chiếu đầu tiên cho phân tích trong chương này. Ngoài ra, chúng tôi cũng phân tích SGK của thể chế dạy học Mỹ nhằm mục đích hình thành nên cơ sở tham chiếu thứ 2 cho phân tích.

Để đạt được mục tiêu trên, chúng tôi chọn phân tích các SGK sau:

1/ CAMBRIDGE Mathematics 4 unit, YEAR 12, Cambridge University Press. (Chúng tôi kí hiệu là [A])

2/ GIẢI TÍCH 12 CƠ BẢN, 2008, NXB Giáo dục. (SGK 12CB)

3/ SÁCH GIÁO VIÊN GIẢI TÍCH 12 CƠ BẢN, 2008, NXB Giáo dục. (SGV)

2.1. Khái niệm số phức trong một sách giáo khoa Mỹ

2.1.1. Lý thuyết

Trong tài liệu [A] “Số phức” được trình bày ở chương 2, theo trình tự sau đây:

2.1. Số học về số phức và nghiệm của phương trình bậc 2.

- Tại sao chúng ta cần số phức?
- Cấu trúc của hệ thống số phức
- Các phép toán cộng và nhân trên $\mathbb{C}$. Số phức liên hợp và số phức nghịch đảo.
- Số phức bằng nhau
- Căn bậc hai của số phức
- Giải phương trình bậc hai với hệ số thực
- Giải phương trình bậc hai với hệ số phức
- Bài tập

2.2. Biểu diễn hình học của số phức như là một điểm trong sơ đồ Argand

- Số phức được biểu diễn bởi một điểm trên sơ đồ Argand.
- Môđun và Argument của số phức
- Tìm tích và thương của hai số phức bằng cách sử dụng dạng Môđun/Argument.
- Mối quan hệ hình học giữa các điểm trên sơ đồ Argand.
- Bài tập.

2.3. Biểu diễn hình học của số phức dưới dạng một vectơ

- Mỗi số phức có thể biểu diễn bởi một vectơ trên sơ đồ Argand.
- Các phép toán trên vectơ
- Các phép toán trên số phức được biểu diễn bởi vectơ.
- Cấu trúc vectơ của tích hai số phức.
- Bài tập

2.4. Luỹ thừa và căn của số phức

- Công thức Moirve
- Ứng dụng công thức Moirve để tìm căn của số phức

2.5. Các đường cong và vùng miền trên sơ đồ Argand.

Trước tiên, chúng tôi sẽ đi vào phân tích các vấn đề sau đây:

2.1.1.1. Khái niệm số phức

Tiến trình đưa vào đối tượng số phức trong [A] là :

Dạng đại số của số phức và ứng dụng

↓

Biểu diễn hình học của số phức và ứng dụng

Trình tự này không tuân theo lịch sử hình thành khái niệm số phức như ta đã phân tích ở chương trước : số phức xuất hiện trước tiên chỉ với vai trò làm công cụ tính, sau đó biểu diễn hình học của số phức mới xuất hiện và mãi tới thế kỉ thứ 19 thì số phức mới chính thức được mang nghĩa đại số.

Ngược với tiến trình này trong lịch sử, [A] bỏ qua giai đoạn mà ở đó khái niệm số phức chỉ xuất hiện dưới dạng kí hiệu hình thức. Thời điểm đầu tiên khái niệm số phức xuất hiện trong [A] cũng chính là lúc nó đã mang nghĩa đại số tường minh :

[A] đưa ra định nghĩa số *i* như sau:

Cho số i xác định bởi $i^2 = -1$. *Tập số được mở rộng cần bao gồm tất cả những số có dạng* $b \times i,\ b \in \mathbb{R}$, *trong đó phép toán* $\times$ *tuân theo những quy tắc thông thường trong tập số thực. Khi đó, mọi số thực sẽ có hai căn bậc hai.*

Ví dụ: -4 *có thể viết thành* $-4 = 4 \times i^2$.

Do đó, -4 *có hai căn bậc hai, đó là* $2 \times i$ *và* $-2 \times i$.

Sau khi đưa ra những số có dạng $b \times i,\ b \in \mathbb{R}$, [A] đưa ra định nghĩa tập hợp số phức $\mathbb{C}$:

Xét tập $\mathbb{C}$ *bao gồm tất cả những số có dạng* $a + bi$*, trong đó a, b là những số thực. Phép toán* $+$ *và* $\times$ *giữa các phần tử của* $\mathbb{C}$ *được xác định một cách hình thức theo quy tắc cộng, nhân các biểu thức tuyến tính* $a + bi$ *(i là biến) với* i^2 *được thay thế bằng* -1.

Theo **[A]** thì số phức được đưa vào chương trình với mục đích

Để giải tất cả các phương trình bậc hai với hệ số thực chúng ta cần mở rộng hệ thống số thực thành một hệ thống số mới, trong hệ thống số mới đó bao gồm những số có bình phương là số âm.

Như vậy, theo [A] thì tập số phức được đưa ra để giải quyết nhu cầu *giải tất cả các phương trình bậc hai với hệ số thực,* điều này khác với lí do xuất hiện số phức trong lịch sử mà ta đã phân tích trong phần khoa học luận ở chương trước: số phức nảy sinh là để phục vụ cho nhu cầu tìm nghiệm thực của phương trình bậc ba.

Gắn liền với dạng đại số của số phức là các khái niệm: số phức liên hợp, số phức nghịch đảo, các phép toán cộng, trừ, nhân, chia số phức cũng được [A] giới thiệu đầy đủ. Bên cạnh đó, ứng dụng của dạng đại số giải phương trình bậc hai hệ số thực và hệ số phức cũng được đưa vào.

2.1.1.2. Các phép toán trên số phức

- **Phép cộng, trừ và nhân**

Ngay sau khi đưa vào định nghĩa số phức, phép toán cộng và nhân ban đầu được giới thiệu một cách "hình thức" theo phép cộng và nhân các đa thức:

Phép toán $+$ *và* $\times$ *giữa các phần tử của* $\mathbb{C}$ *được xác định một cách hình thức theo quy tắc cộng, nhân các biểu thức tuyến tính* $a + bi$ *(i là biến) với* i^2 *được thay thế bằng* -1. (trang 24SGK Mỹ)

Để minh hoạ, [A] đưa ra một ví dụ:

$$\begin{aligned}(2+5i)+(1+3i) &= 3+8i\\ (2+5i)(1+3i) &= 2+15i^2+5i+6i\\ &= 1-15+11i\\ &= -13+11i\end{aligned}$$

(trang 25)

Trong ví dụ trên, ta thấy các phép toán trên số phức đã được thao tác như các phép toán trên đa thức.

Tuy nhiên, để giới thiệu **số phức nghịch đảo**, [A] đưa ra một đa thức cụ thể hơn là $a + b\sqrt{2}$:

Cộng, trừ và nhân các số phức tuân theo cùng một cách thức như khi ta cộng, trừ và nhân các đa thức dạng $a+b\sqrt{2}$, trong đó a, b là các số hữu tỉ, chỉ có điều, nếu $\left(\sqrt{2}\right)^2$ được thay bằ 2 thì i^2 được thay bằng −1.

Cộng: $\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

(tương tự cho phép trừ)

Nhân: $\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=ac+bd\left(\sqrt{2}\right)^2+(ac+bd)\sqrt{2}$

$$=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

$$(a+ib)(c+id)=ac+i^2bd+i(ad+bc)$$

$$=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

Những phân tích trên đưa chúng tôi tới suy nghĩ rằng: cách trình bày về khái niệm số phức cũng như các phép toán như thế có thể dẫn đến cách hiểu: *Số phức là* ***một đa thức*** *dạng $a+bi$ với a, b là số thực và i là ẩn.*

- **Phép chia**

Phép chia không được đề cập đến một cách trực tiếp mà chỉ được đề cập gián tiếp thông qua ví dụ 4b:

Viết $(2+3i)\div(1-2i)$ dưới dạng $a+bi$.

Giải :

$$\frac{2+3i}{1-2i}=\frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{(2-6)+(4+3)i}{1+4}$$

$$=-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$$

Khi đưa vào biểu diễn hình học của số phức, một lần nữa các phép toán này được [A] xây dựng lại, nhưng theo một hướng khác.

Nếu số phức được biểu diễn bởi một điểm thì phép cộng, trừ, nhân, nghịch đảo và thậm chí là luỹ thừa của số phức được giới thiệu gắn liền với dạng môđun/argument của nó cùng những công thức như:

Nếu ta có : $z_1=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ và $z_2=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$

Thì : $z_1.z_2=r_1.r_2\left[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\right]$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_1}\right) => \left\{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |z_1|.\left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|.\frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right.$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 + \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$ trong đó $z = r\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$

Nếu số phức được biểu diễn bởi một vectơ thì sự mô tả bằng hình học của các phép toán cộng, trừ và nhân của các số phức càng rõ nét hơn: thông qua phép cộng, trừ, nhân của các vectơ, biểu diễn dễ dàng trên hệ trục toạ độ Decarte.

Tuy có thể thao tác dễ dàng dựa vào các quy tắc đã biết trên đa thức nhưng chỉ khi được gắn liền với biểu diễn hình học của số phức thì các phép toán mới thực sự mang một "nghĩa" xác định, điều này phù hợp với lịch sử khoa học luận của số phức.

- **Phép luỹ thừa**

Phép luỹ thừa được đưa vào chủ yếu khi đã giới thiệu biểu diễn hình học của số phức. [A] đề cập nhiều đến luỹ thừa của các số phức khi đã được viết dưới dạng môđun/argument, luỹ thừa của số phức ở dạng đại số hầu như không được quan tâm tới, trừ một số bài tính toán tới luỹ thừa 2, 3 đơn giản.

- **Phép khai căn**

Căn bậc hai của số phức được đưa vào qua VD10/29:

Cho $z^2 = 3 + 4i$, *tìm z.*

Tìm căn bậc hai của số phức bằng phương pháp "đồng nhất thức":

"Tổng quát, để tìm căn bậc hai của số phức $a + ib$, *với a, b* $\in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, *chúng ta giải phương trình* $z^2 = a + ib$, *trong đó* $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$*."*

2.1.1.3. Số phức và vấn đề giải phương trình bậc hai

SGK đưa vào cả phương trình bậc hai với hệ số thực và phương trình bậc hai với hệ số phức. Vấn đề ở đây không phải là xây dựng công thức nghiệm bởi công thức nghiệm không thay đổi với phương trình bậc hai có nghiệm thực thông thường. Vấn đề ở đây là giải quyết trường hợp biệt thức $\Delta < 0$.

- Phương trình bậc hai với hệ số thực được [A] đưa vào thông qua *(VD8/28)*

Dùng phương pháp « completing the square » để giải phương trình : $x^2 + 2x + 3 = 0$

- Phương trình bậc hai với hệ số phức được đưa vào sau khi học sinh được tiếp cận với căn bậc hai của số phức.

- Cách giải: Tính Δ. Nếu $\Delta \neq 0$ thì gọi $\alpha, -\alpha$ là hai căn bậc hai của Δ. Khi đó, phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm: $x = \dfrac{-b \pm \alpha}{2a}, \alpha \neq 0, \alpha^2 = \Delta$.

  Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có hai nghiệm bằng nhau: $x = -\dfrac{b}{2a}$.

2.1.1.4. Biểu diễn hình học của số phức

Có hai cách biểu diễn hình học của số phức được trình bày ở đây, đó là biểu diễn số phức bằng một điểm và bằng một vectơ.

- Biểu diễn số phức bằng một điểm

Biểu diễn hình học của số phức được đưa vào ngay sau khi nhận xét rằng có một tương ứng một-một giữa số phức $a+ib$ với một cặp số thực có thứ tự (a,b).

"Hai số phức bằng nhau nếu phần thực và phần ảo tương ứng của chúng bằng nhau. Như vậy có tương ứng một một giữa số phức $a+ib$ với một cặp số thực có thứ tự (a,b). Điều này dẫn tới việc người ta dùng điểm A với tọa độ Đề-các (a,b) để biểu diễn số phức $a+ib$"

Điều này cũng phù hợp với khoa học luận.

Gắn liền với dạng biểu diễn này là sự xuất hiện: môđun, argument của một số phức, dạng môđun/argument của số phức (ở Việt Nam gọi là dạng lượng giác). [A] cũng đi xây dựng công thức cho các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, luỹ thừa và số phức nghịch đảo để làm yếu tố công nghệ giải thích cho các kỹ thuật tính toán số phức về sau.

- Biểu diễn số phức bằng một vectơ

« Để việc biểu diễn số phức bằng một vectơ trở nên có ích, cách thức thông thường để cộng hay trừ vectơ được dùng để cộng, trừ các số phức » (trang 47)

[A] lần lượt đưa ra các cách để xác định tổng, hiệu, tích của các số phức dựa vào công cụ vectơ. Nếu nhìn theo khía cạnh khoa học luận thì các phép cộng, trừ, nhân số phức đã được « hợp thức hoá » và đã mang một « nghĩa » cụ thể.

2.1.2. Các tổ chức toán học gắn liền với khái niệm số phức

Kiểu nhiệm vụ T1: Cộng, trừ, nhân số phức

KNV	**Kỹ thuật**	**Công nghệ**	**Ví dụ minh họa**

T1: Cộng, trừ, nhân số phức	τ_{11}: Cộng trừ, nhân các số phức như nhân các đa thức.	θ_{11}: Định nghĩa số phức, các tính chất của đa thức.	*"Tìm tổng và tích của hai số phức* $2+5i$ *và* $1+3i$ *"* (Ví dụ 1, trang 25) Giải: $(2+5i)+(1+3i)=3+8i$ $(2+5i)(1+3i)=2+15i^2+5i+6i$ $=2-15+11i$ $=-13+11i$
	τ_{12}: Đưa số phức về dạng lượng giác $z_1=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ và $z_2=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$ Khi đó $z_1.z_2=r_1.r_2\left[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha\right.$	θ_{12}: Định nghĩa dạng mođun/argument của số phức, các kiến thức về lượng giác.	*Nếu* $z_1=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ *và* $z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ *Viết* $z_1.z_2$ *dưới dạng môđun/argument.* (trích ví dụ 18, trang 37)
	τ_{13}**:** Biểu diễn số phức z_1 bằng vectơ $\overrightarrow{OA}$, z_2 bằng vectơ $\overrightarrow{OB}$. Dựng hình bình hành OBCA, khi đó : $\overrightarrow{OC}$ là vectơ biểu diễn số phức z_1+z_2. Dựng hình bình hành OBAD, khi đó: $\overrightarrow{OD}$ là vectơ biểu diễn số phức z_1-z_2.	θ_{13}: Tính chất của vectơ. Biểu diễn hình học của số phức bởi 1 vectơ	

Kiểu nhiệm vụ này xuất hiện cả 2.1, 2.2 và 2.3 nhưng ở mỗi mục được kĩ thuật được sử dụng là khác nhau.

Ở 2.1, khi khái niệm số phức mới được đưa vào dưới dạng đại số thì τ_1 được sử dụng.

Ở 2.2, khi dạng môđun/argument đã được giới thiệu thì ta gặp τ_2 và tương tự, khi số phức được biểu diễn bởi một vectơ ở 2.3 thì τ_3 trở nên hữu hiệu.

τ_1, τ_2, τ_3 đều được mô tả rất tường minh và dễ sử dụng thông qua các ví dụ trong SGK.

Như đã trình bày ở phần lí thuyết, phép chia hai số phức không được nói đến một cách tường minh nên không có kiểu nhiệm vụ rõ ràng là tìm thương của hai số phức mà chỉ có kiểu nhiệm vụ T2 sau:

Kiểu nhiệm vụ T2: Viết $\frac{z_1}{z_2}$ dưới dạng $a+bi$.

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ	Ví dụ minh họa
T2: Viết $\frac{z_1}{z_2}$ dưới dạng $a+bi$	τ_{21} : Nhân tử và mẫu với số phức liên hợp của mẫu. Đưa kết quả có được về dạng *a + bi.*	θ_{21} : Tính chất: $z\overline{z} = a^2 + b^2$.	*Viết* $(2+3i) \div (1-2i)$ *dưới dạng* $a+bi$ *Giải* $\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{(2-6)+(4+3)}{1+4}$ $= -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$
	τ_{22} : Dùng công thức : $\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_1}\right) \Rightarrow \left\lbrace \left\vert \frac{z_1}{z_2} \right\vert = \lvert z_1 \rvert . \left\vert \frac{1}{z_2} \right\vert = \lvert z_1 \rvert . \frac{1}{\lvert z_2 \rvert} = \frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert} \right.$ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 + \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$	θ_{22} : Các công thức lượng giác. Tính chất của dạng môđun/argument	

T2 có một kiểu nhiệm vụ con, đó là:

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ
T2*: Tìm số phức nghịch đảo	τ_{21}* Đưa $\frac{1}{z}$ về dạng *a + bi.* Kết luận	θ_{21}* Tính chất: $z\overline{z} = a^2 + b^2$.
	τ_{22}* Nếu $z = r\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$ thì dùng công thức: $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$	θ_{22}* :
	τ_{23}* Dùng công thức $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$	

Phép chia số phức xuất hiện ít, chỉ xuất hiện có 3 lần trong 2.1, ở các phần biểu diễn hình học số phức thì phép chia chỉ xuất hiện 5 lần, chủ yếu là để phục vụ cho các yêu cầu khác của bài toán.

Kiểu nhiệm vụ T3: Tìm phần thực, phần ảo của số phức

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ	Ví dụ minh họa
T3 Tìm phần thực, phần ảo của số phức	τ_3: Đưa số phức đã cho về dạng $a+bi$. Kết luận: a là phần thực, b là phần ảo.	θ_3: Định nghĩa số phức.	VD5/27: *Cho* $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1+i$. *Tìm* $(a)\,\mathrm{Re}(z_1+z_2)$ $(b)\,\mathrm{Im}\left(z_1\overline{z_2}\right)$

Kiểu nhiệm vụ T4: Tìm căn bậc hai của số phức $a+ib,\ a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0$

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ	Ví dụ minh họa
T4 : Tìm căn bậc hai của số phức $a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$	τ_4: Gọi z là căn bậc hai của số phức $a+ib$. Giả sử : $z = x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$. Giải phương trình $z^2 = a+ib$ (1) Đưa phương trình (1) về dạng $A+iB = C+iD$. Đồng nhất thức, ta được $A=C$ và $B=D$. Giải hệ $\begin{cases} A=C \\ B=D \end{cases}$ để suy ra *x*, *y*.	θ_4: Định nghĩa căn bậc hai của số phức. Tính chất hai số phức bằng nhau.	*Cho* $z^2 = 3+4i$, *tìm z.* ***Giải :*** *Giả sử :* $z = x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$. *Khi đó :* $(x+iy)^2 = 3+4i \Rightarrow (x^2-y^2)+(2xy)i = 3$ *Cho phần thực và phần ảo bằng nhau, ta có :* $x^2-y^2=3$ *và* $2xy=4$ *Suy ra :* $x^4 - x^2y^2 = 3x^2$ *và* $x^2y^2 = 4$. *Khi đó :* $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ $\Rightarrow (x^2-4)(x^2+1) = 0, x\in\mathbb{R}$ *Suy ra :* $x=2;\ y=1 \Rightarrow z = 2+i$ *hoặc* $x=-2;\ y=-1 \Rightarrow z=-2-i$. *Như vậy,* $3+4i$ *có hai căn bậc hai là* $2+i$ *và* $-2-i$.

Kiểu nhiệm vụ này được đưa ra nhằm phục vụ cho việc giải phương trình bậc hai với hệ số phức mà ta sẽ nói tới tiếp sau đây. Thực ra, còn một kiểu nhiệm vụ nữa mà T4 là con của kiểu nhiệm vụ đó, nhưng do kỹ thuật được sách giáo khoa đề cập cho T4 khác hẳn nên chúng tôi tách riêng thành hai kiểu nhiệm vụ khác nhau.

Kiểu nhiệm vụ T5 : Giải phương trình bậc hai hệ số thực

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ	Ví dụ minh họa
T5 : Giải phương trình bậc hai hệ số thực	τ_{51}: Đưa phương trình về dạng : $(ax+b)^2 = -c = c.i^2 \ (c>0)$	θ_{51}: Định nghĩa số *i*. Tính chất: $A^2 = B^2 \Rightarrow A = B \vee A = -B$	*VD8 trang 28: Dùng phương pháp « completing the square » để giải phương trình :* $x^2 + 2x + 3 = 0$
	$\tau_{52:}$ _Tìm biệt thức Δ. _Nếu $\Delta \geq 0$: phương trình có hai nghiệm : $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ _Nếu $\Delta < 0$, khi đó $\Delta = i^2 \vert\Delta\vert$ có hai căn bậc hai là $i\sqrt{\vert\Delta\vert}$ và $-i\sqrt{\vert\Delta\vert}$. Vì thế, phương trình bậc hai có hai nghiệm được cho bởi công thức : $x = \frac{-b \pm i\sqrt{\vert\Delta\vert}}{2a}$.	$\theta_{52:}$ Công thức nghiệm của phương trình bậc 2	*VD9 trang 29 : Giải phương trình :* $(a)\ x^2 - 2x + 5 = 0$ $(b)\ 2x^2 + \sqrt{3}x + 1$

VD8 cùng τ_{51} chỉ là một bước đệm dẫn tới việc xây dựng công thức nghiệm để giải phương trình bậc hai tổng quát như đã trình bày ở τ_{52}.

Kiểu nhiệm vụ T6 : Giải phương trình bậc hai hệ số phức

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ	Ví dụ minh họa
Giải phương trình bậc hai	τ_6**:** + Tính biệt thức Δ. + Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có hai nghiệm bằng nhau: $x = -\frac{b}{2a}$	θ_6: Công thức nghiệm của ptb2 với hệ số phức.	**VD11/30** *Giải phương trình :* $2x^2 + (1-i)x + (1-i) = 0$

hệ số phức	. + Nếu $\Delta \neq 0$ thì : Tìm căn bậc hai của Δ. Gọi $\alpha, -\alpha$ là hai căn bậc hai của Δ. Khi đó, phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm: $x=\dfrac{-b\pm\alpha}{2a}, \alpha \neq 0, \alpha^2=\Delta$.	Công nghệ của **T4**	

Kiểu nhiệm vụ T7 : Tìm số phức liên hợp của số phức $z=a+bi$

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ	Ví dụ minh họa
Tìm số phức liên hợp của số phức $z=a+bi$	τ_7: Đổi dấu b. Kết luận : Số phức liên hợp của z là $a-bi$.	θ_7: Định nghĩa số phức liên hợp trang 26SGK.	*VD3/26* *Với mỗi giá trị sau của z, hãy tìm* $\bar{z}$ *và* $z\bar{z}$. $a)\,2-3i$ $\quad b)\,i$ $\quad c)\,2$

Kiểu nhiệm vụ T8 : Biểu diễn số phức $a+ib$ **trên sơ đồ Argand.**

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ	Ví dụ minh họa
T8 : Biểu diễn số phức $a+ib$ **trên sơ đồ Argand.**	τ_8: Biểu diễn điểm M có tọa độ (a,b). M chính là điểm biểu diễn số phức $a+ib$.	θ_8 : Định nghĩa biểu diễn hình học của số phức bởi 1 điểm.	VD12,13 / 32,33: *Trên sơ đồ Argand hãy chỉ ra các điểm* P_1, P_2, P_3, P_4 *biểu diễn các số phức* $4, -3, i, -2i$

Kiểu nhiệm vụ T9 : Tìm môđun và argument gốc của số phức $z=a+ib$

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ	Ví dụ minh họa

T9: Tìm môđun và argument gốc của số phức $z=a+ib$	τ_{91} : Môđun của z : $\|z\|=\sqrt{a^2+b^2}$. Argument : + Gọi $\beta=\tan^{-1}\left\|\frac{b}{a}\right\|$ + Nếu $a>0,b>0$: $\arg z=\beta$ + Nếu $a<0,b>0:\arg z=\pi-\beta$ + Nếu $a<0,b<0:\arg z=-\pi+\beta$ + Nếu $a>0,b<0:\arg z=-\beta$	θ_{91}: Định nghĩa môđun và argument số phức.	*VD14/36 : Tìm môđun và argument gốc của :* $(a)2+4i$ $(b)-2+4i$ $(c)-2-4i$ $(d)2-4i$
	τ_{92} Đưa z về dạng môđun/argument : $z=\|z\|(\cos\theta+i\sin\theta)$, với $-\pi<\theta\le\pi$. Khi đó θ chính là argument chính của z.	θ_{92}: Định nghĩa biểu diễn số phức bởi dạng môđun /argument	
	τ_{93} Biểu diễn số phức $z=a+ib$ bằng điểm M trên sơ đồ Argand. Tìm góc định hướng θ tạo bởi tia *Ox* và tia OM. Khi đó θ chính là argument chính của z.	θ_{91}	

Trong 3 kĩ thuật trên thì chỉ có τ_{92} là không cần sử dụng đến yếu tố hình học.

Kiểu nhiệm vụ T10 : Viết số phức $z=a+ib$ dưới dạng môđun/argument :

KNV	**Kỹ thuật**	**Công nghệ**	**Ví dụ minh họa**
Viết số phức $z=a+ib$	τ_{10} : + Tìm môđun $\|z\|$ và	θ_{10}: Định nghĩa dạng	*Viết $-2-6i$ dưới dạng môđun/argument.*

dưới dạng môđun/ Argument	argument θ của z. + Kết luận $z=\lvert z\rvert(\cos\theta+i\sin\theta)$	môđun/argument của số phức. θ_{91}	*(VD17a/37)*

Kiểu nhiệm vụ T11 : Viết số phức tích z_1z_2 dưới dạng $a+ib$

KNV	**Kỹ thuật**	**Công nghệ**	**Ví dụ minh họa**
T11 : Viết số phức bất kì dưới dạng đại số	Đưa z_1, z_2 về dạng $a+ib$. τ_{11-1}: Nhân các số phức như nhân các đa thức. τ_{11-2}: Đưa số phức về dạng lượng giác $z_1=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ và $z_2=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$ Khi đó $z_1.z_2=r_1.r_2\left[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\right]$	Các tính chất trên đa thức. Các tính chất của dạng lượng giác của số phức.	*Cho:* $z_1=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ *và* $z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ *Viết $z_1.z_2$ dưới dạng $a+ib$* . (VD18,19 trang 37)

Kiểu nhiệm vụ T12 : Cho số phức z. Miêu tả phép biến đổi $z\to\alpha z$, minh họa trên hình vẽ

KNV	**Kỹ thuật**	**Ví dụ minh họa**
Cho số phức z. Miêu tả phép biến đổi $z\to\alpha z$	τ_{12}: Gọi P, Q là hai điểm biểu diễn số phức z và αz trên một sơ đồ Argand. $\lvert\alpha z\rvert=\lvert\alpha\rvert\lvert z\rvert\Rightarrow OQ=\lvert\alpha\rvert.OP$ $\arg(\alpha z)=\arg\alpha+\arg z=0+\arg z=\arg z$ Nếu $\alpha>1$ thì $z\to\alpha z$ là một mở rộng từ O với hệ số α.	*VD21: Cho $z=1+i$. Mô tả những phép biến đổi sau và minh họa chúng trên sơ đồ Argand.* *a)* $z\to 2z$ *b)* $z\to iz$ *c)* $z\to -z$ *d)* $z\to -3z$ Giải: *Cho P, Q là hai điểm biểu diễn số phức z và $2z$ trên một sơ đồ Argand.* $\lvert 2z\rvert=2\lvert z\rvert\Rightarrow OQ=2OP$

	Nếu $\alpha \le 1$ thì $z \to \alpha z$ là một thu hẹp từ O với hệ số α.	$\arg(2z) = 0 + \arg z = \arg z \Rightarrow P, Q$ *cùng nằm về một phía đối với O.* *Suy ra phép biến đổi* $z \to 2z$ *là một mở rộng từ O với hệ số 2.* *Với* $z = 1+i$ *thì* $P(1,1), Q(2,2)$ *biểu diễn số phức* $z, 2z$.

Kiểu nhiệm vụ T13 : Biểu diễn số phức bằng vectơ

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ	Ví dụ minh họa
T13 : Biểu diễn số phức bằng vectơ	τ_{13}: Biểu diễn trên sơ đồ Argand điểm $P(a,b)$. $\overrightarrow{OP}$ là vectơ biểu diễn số phức $z = a+ib$.	θ_{13} Định nghĩa của biểu diễn số phức bằng một vectơ. Các tính chất của vectơ.	*VD 23/50 :* *Cho* $z_1 = 3-2i, z_2 = -1+4i$. *Chỉ ra trên sơ đồ Argand các vectơ* $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OC}$ *biểu diễn* z_1, z_2 *và* $z_1 + z_2$. *Gọi tên vectơ biểu diễn* $z_1 - z_2$.

Kiểu nhiệm vụ T14 : Tìm số phức z biết vectơ biểu diễn nó là $\vec{a}$

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ
T14 : Tìm số phức z biết vectơ biểu diễn nó là $\vec{a}$	τ_{14}: Tìm điểm P sao cho $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$. Đọc toạ độ P trên sơ đồ Argand, giả sử là (x,y), khi đó, $z = x+iy$	θ_{14} Các tính chất vectơ. Tính chất của biểu diễn số phức bởi 1 vectơ.

Kiểu nhiệm vụ T15 : Tìm luỹ thừa của số phức

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ	Ví dụ minh họa

Tìm luỹ thừa của số phức	τ_{15}: Áp dụng công thức Moirve.	θ_{15} Các tính chất của dạng lượng giác của số phức.	*VD 29/55:* *Viết* $\left(\sqrt{3}+i\right)^8+\left(\sqrt{3}-i\right)^8$ *dưới dạng* $a+ib$

Kiểu nhiệm vụ T16 : Biểu diễn $\cos n\theta, \sin n\theta$ theo luỹ thừa của $\cos\theta$ và $\sin\theta$

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ	Ví dụ minh họa
Biểu diễn $\cos n\theta, \sin n\theta$ **theo luỹ thừa của** $\cos\theta$ **và** $\sin\theta$	τ_{16}: Dùng công thức Moirve : $\cos n\theta + i\sin n\theta = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n$ (1) Khai triển vế trái của (1) Đồng nhất thức hai vế của (1), cho phần thực và phần ảo tương ứng bằng nhau để được kết quả cần tìm.	θ_{16} Công thức Moirve. θ_{15}. Các tính chất lượng giác	*(VD 30/56SGK)* *Bằng cách biểu diễn* $\cos 4\theta, \sin 4\theta$ *dưới dạng luỹ thừa của* $\cos\theta, \sin\theta$, *chứng minh rằng* $\tan\theta = \dfrac{4\tan\theta - 4\tan^2\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}$

Kiểu nhiệm vụ T17 : Biểu diễn luỹ thừa của $\cos\theta$ và $\sin\theta$ theo cos hoặc sin của thừa số của θ.

KNV	Kỹ thuật	Ví dụ minh họa
Biểu diễn luỹ thừa của $\cos\theta$ **và** $\sin\theta$ **theo cos hoặc sin của thừa số của** θ**.**	τ_{17}: Dùng dạng môđun/argument của z: $z=\cos\theta + i\sin\theta$. Nếu muốn biểu diễn theo $\sin n\theta$ thì dùng công thức $z^n - z^{-n} = 2i\sin n\theta$, mũ n hai vế, sẽ có điều cần tìm. Nếu muốn biểu diễn theo $\cos n\theta$ thì dùng công thức $z^n + z^{-n} = 2\cos n\theta$, mũ n hai vế, sẽ có điều cần tìm.	*Chứng minh* $\sin^3 a = \frac{1}{4}\left(3\sin a - \sin 3a\right)$. *(Ví dụ 31/56)*

Kiểu nhiệm vụ T18 : Dùng công thức Moirve để tìm căn của số phức đơn vị

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ

T18 : Dùng công thức Moirve để tìm căn của số phức đơn vị	τ_{18-1}: **Dựa vào biểu diễn hình học của số phức**	θ_{18-1} Các tính chất vectơ.
	τ_{18-2}: **Dựa vào dạng đại số**	τ_{18-2} Các tính chất trên đa thức

Kiểu nhiệm vụ T19 : Phác thảo vùng của điểm P biểu diễn số phức *z* được cho trước bởi một phương trình hay bất phương trình trên sơ đồ Argand.

KNV	Kỹ thuật	Công nghệ
Phác thảo vùng của điểm P biểu diễn số phức z được cho trước bởi một phương trình hay bất phương trình trên sơ đồ Argand.	τ_{19-1}: • Dùng dạng đại số $z = x + iy$ để viết phương trình hay bất phương trình đại số của quỹ tích các điểm P biểu diễn số phức *z* đó. • Vẽ đồ thị của vùng hay (miền) và từ đó biểu diễn được quỹ tích một cách hình học.	θ_{19-1}: Các tính chất của đa thức. Các tính chất của hình học giải tích.
	τ_{19-2}: Dùng biểu diễn vectơ của một số phức xác định quỹ tích của P bằng công cụ hình học, sau đó vẽ quỹ tích và suy ra phương trình dạng đại số Decart của nó.	τ_{19-2}: Tính chất vectơ. Tính chất của hình học giải tích.

SGK đã nhấn mạnh rằng : « *Bằng cách tiếp cận bằng vectơ, chúng ta có thể vận dụng các kết quả hình học đã biết và thường thì cách này hiệu quả hơn* »

2.1.3. Kết luận

- Lí do mà [A] trình bày để đưa số phức vào chương trình học không phù hợp với lịch sử hình thành và phát triển của số phức.
- Ta thấy rằng, trong 5 mục lớn của chương số phức thì có đến 4 mục dành cho biểu diễn hình học của số phức và các ứng dụng, chỉ có 1/5 trong số đó (mục đầu tiên: 2.1) là dành cho dạng đại số của số phức và các khái niệm cũng như các vấn đề liên quan. Mục này chỉ chiếm vị trí

khiêm tốn 8/50 trang trong toàn chương. Điều đó cho thấy thể chế dạy học Mỹ định hướng đề cao biểu diễn hình học của số phức và các ứng dụng của nó.

- Cách trình bày dạng đại số của số phức luôn gắn liền với đa thức có thể dẫn tới việc học sinh sẽ đồng nhất số phức và đa thức hay không? Bản chất "số" của số phức không được thể hiện rõ.

Bảng 2.1 Thống kê số lượng bài tập và ví dụ trong [A]

Kiểu nhiệm vụ	Ví dụ	Bài tập	Tổng cộng
T_1	6	0	6
T_2	6	0	6
T_3	1	0	1
T_4	2	0	2
T_5	3	0	3
T_6	2	0	2
T_7	3	0	3
T_8[2]	3	1	4
T9	3	8	11
T10	4	5	9
T11	2	1	3
T12	3	0	3
T13	3	0	3
T14	2	8	10
T15	3	5	8
T16	2	5	7
T17	5	10	15
T18	1	3	4
T19	**12**	**10**	**22**

Bảng 2.2 Bảng thống kê số lần xuất hiện của các loại bài tập trong [A]

Loại bài tập	Số lượng	Tỉ lệ (%)
Sử dụng dạng đại số của số	35	28.7

phức		
Sử dụng dạng môđun/argument (đơn thuần, không thêm công thức Moivre hay biểu diễn hình học)	15	12.2
Sử dụng công thức Moivre	13	10.7
Biểu diễn hình học	59	48.4

- Kiểu nhiệm vụ T19 và các kiểu nhiệm vụ liên quan đến biểu diễn hình học của số phức chiếm ưu thế rõ rệt.
- Ta thấy rằng, có 35/122 bài tập và ví dụ liên quan đến dạng đại số của số phức, nghĩa là xem số phức như là một đa thức và thực hiện các phép tính toán, biến đổi trên đa thức đó, chiếm 28.5%.

2.2. Số phức trong sách giáo khoa Giải tích 12 ban cơ bản

2.2.1. Lí thuyết

2.2.1.1.Định nghĩa số phức

Cũng như SGK Mỹ, SGK 12CB chọn con đường đưa vào khái niệm số phức ngược với quy trình xuất hiện của nó trong lịch sử. Giai đoạn số phức xuất hiện chỉ với vai trò công cụ tính không được thể chế dạy học SGK 12CB đề cập tới. Trình tự số phức xuất hiện trong SGK 12CB như sau:

Dạng đại số của số phức

↓

Biểu diễn hình học của số phức dưới dạng một điểm

↓

Ứng dụng của dạng đại số của số phức

Dạng đại số của số phức được đưa vào trước tiên và lí do xuất hiện của số phức cũng được giải thích tương tự như trong SGK Mỹ :

"Ta đã biết các phương trình bậc hai với biệt số âm không có nghiệm thực. Phương trình bậc hai đơn giản nhất không có nghiệm thực là phương trình $x^2+1=0$.

*Với **mong muốn mở rộng tập hợp số thực** để mọi phương trình bậc n đều có nghiệm, người ta đưa ra một số mới, kí hiệu là i và coi nó là nghiệm của phương trình trên. Như vậy: $i^2 = -1$."*

Ngay sau đó là định nghĩa số phức:

*"Mỗi **biểu thức** dạng $a+bi$ trong đó $a,b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$ được gọi là một **số phức.** Đối với số phức $z = a+bi$, ta nói a là phần thực, b là phần ảo của z. Tập hợp các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$"*

Cách đưa vào số phức như trên của thể chế khác với với lí do xuất hiện số phức trong lịch sử đã được phân tích trong phần khoa học luận. Tuy nhiên, việc các nhà Toán học tìm ra số phức trong lịch sử là cả một quá trình phức tạp, xuất phát từ việc tìm nghiệm thực của phương trình bậc ba, sẽ là khó khăn với học sinh phổ thông khi tiếp cận nó, bởi thế, có thể vì lí do sư phạm nên SGK 12CB của Việt Nam (cũng như SGK Mỹ) đã chọn cách giới thiệu về lí do xuất hiện số phức như trên.

2.2.1.2. Biểu diễn hình học số phức

Theo SGV trang 147 thì việc đưa vào biểu diễn hình học của số phức là ***cơ sở để trình bày khái niệm môđun của số phức và khái niệm số phức liên hợp***. Cách lí giải này khác với lí do xuất hiện biểu diễn hình học của số phức trong lịch sử, đó là để tìm "nghĩa" của số phức và các phép toán trên số phức.

Trong SGK Mỹ mà chúng tôi chọn làm tham chiếu, việc biểu diễn hình học của số phức nhằm để đưa vào môđun và argument của số phức, kéo theo đó là dạng môđun/argument của số phức (mà VN gọi là dạng lượng giác của số phức) với rất nhiều ứng dụng của nó được dùng để giải các bài toán trong khoa học toán học, vật lí và trong kĩ thuật. Bên cạnh đó, SGK Mỹ còn dùng biểu diễn hình học của số phức để giải thích ý nghĩa của các phép toán trên số phức, đem đến cho các phép toán một "nghĩa" hình học thoả đáng.

Trong thể chế dạy học Giải tích 12CB, biểu diễn hình học của số phức được giới thiệu là một điểm trong hệ trục toạ độ.

Điểm $M(a;b)$ trong một hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z = a+bi$.

(trang 131 SGK 12CB)

Hệ trục tọa độ *Oxy* đã được học trước đây được gồm có trục hoành *Ox* và trục tung *Oy*. Sang mặt phẳng phức, trục *Oy* chuyển thành trục ảo, trục *Ox* là trục thực. Tuy nhiên, yếu tố "ảo" không được thể hiện trên hệ trục. Biểu diễn hình học của **số phức** $z = a+bi$ được chuyển hoàn toàn thành việc biểu diễn **điểm** $M(a;b)$ trên hệ trục *Oxy* như đã biết ở các lớp trước. Câu hỏi được đặt ra ở đây là:

Liệu có sự lẫn lộn nào giữa mặt phẳng thực và mặt phẳng phức trong học sinh? Học sinh có gặp khó khăn gì khi tiếp cận với mặt phẳng phức hay không?

2.2.1.3. Các phép toán trên số phức

Được xây dựng hoàn toàn trên dạng đại số của số phức, không có minh hoạ bằng hình học. Tất cả các phép toán đều được thực hiện theo các quy tắc của các phép toán trên đa thức.

SGV trang 148: *"Chú ý rằng SGK chỉ yêu cầu học sinh biết tính toán thành thạo trên các số phức. Các tính chất của phép toán như giao hoán, kết hợp... mặc nhiên được thừa nhận"*

"Nghĩa" của các phép toán trên số phức không hề được đề cập đến trong SGK 12CB. Các phép toán được thực hiện hoàn toàn theo các quy tắc đã biết trên đa thức, có thể thấy ở đây, số phức đã được thể chế giới thiệu như là một "đa thức", bản chất số của nó hoàn toàn mờ nhạt.

Máy tính bỏ túi hoàn toàn không được nhắc đến trong chương "số phức" mặc dù nó tỏ ra rất hữu hiệu trong việc tính toán số phức. Câu hỏi được đặt ra ở đây là: *Trong dạy học số phức, giáo viên và học sinh ứng xử ra sao với việc sử dụng máy tính bỏ túi trong tính toán số phức và giải toán trên số phức nói chung?*

2.2.1.4. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Bước sang bài 4: "Phương trình bậc hai với hệ số thực", số phức trong SGK 12CB chuyển sang giai đoạn mang cơ chế công cụ, thay vì mang cơ chế đối tượng như trong ba bài đầu tiên của chương "Số phức".

Công thức giải được đưa ra với đầy đủ ba trường hợp của biệt thức Δ thì phương trình bậc hai đều có nghiệm trong tập số phức.

Căn bậc hai của số thực âm được giới thiệu ***một cách hình thức***:

SGK trang 139: *"các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$."*

SGV trang 157: *"Chú ý rằng kí hiệu $\sqrt{|a|}$ gọi là căn số học, chỉ giá trị dương của căn bậc hai của $|a|$, ta không đưa ra kí hiệu căn bậc hai của số thực âm.*

Như vậy, các căn bậc hai phức của một số thực âm được trình bày khá nhẹ nhàng: Không có định nghĩa chính thức về căn bậc hai phức, các căn bậc hai của một số thực âm tìm được chỉ bằng trực giác."

2.2.2.Các tổ chức toán học

Kiểu nhiệm vụ T3: Tìm phần thực và phần ảo của số phức

Ví dụ

Hoạt động 1: *Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau:* $-3+5i,\ 4-i\sqrt{2},\ 0+\pi i, 1+0i$.

(trang 130 SGK 12CB)

Cũng giống như [A], kĩ thuật τ_3 sau đây cũng được SGK 12CB sử dụng để giải quyết kiểu nhiệm vụ T3:

τ_3**:** Đưa số phức về dạng $a+bi$. Kết luận a là phần thực, b là phần ảo của số phức.

Đặc điểm của T3 trong SGK 12CB:

Kiểu nhiệm vụ này chỉ xuất hiện một lần trong hoạt động 1 sau khi nêu định nghĩa của số phức. Theo SGV trang 149 thì: *"Hoạt động 1 nhằm củng cố các khái niệm phần thực, phần ảo của số phức".*

Các số phức đều được cho đúng dưới dạng $a+bi$ hoặc $a+ib$, học sinh chỉ việc kết luận a là phần thực, b là phần ảo mà không cần phải biến đổi thêm gì. Kiểu nhiệm vụ này chỉ nhằm mục đích củng cố khái niệm vừa học nên được SGK cho rất đơn giản.

Phần thực và phần ảo của số phức được SGK giới thiệu hết sức nhẹ nhàng, chỉ được đề cập đến một lần qua định nghĩa và hoạt động 1 trang 149 như trên. Tuy nhiên ở đây có một câu hỏi đặt ra là: i *- đơn vị ảo, là đại lượng đặc trưng cho số phức, liệu khi tìm phần ảo của số phức* $a+bi$*, học sinh có nhầm lẫn giữa* bi *và* b *?*

Kiểu nhiệm vụ T'1: Tìm số thực x và y biết biểu thức $f(x,y)+g(x,y)i=f'(x,y)+g'(x,y)i$ **(1)**

τ'_1: _Lập hệ: $\begin{cases} f(x,y)=g(x,y) \\ f'(x,y)=g'(x,y) \end{cases}$

_Giải hệ phương trình trên, suy ra x, y.

Ví dụ

Tìm các số thực x và y, biết $(2x+1)+(3y-2)i=(x+2)+(y+4)i$

[Ví dụ 2, SGK CB, tr.131]

Kiểu nhiệm vụ này nhằm củng cố khái niệm hai số phức bằng nhau (theo SGV trang 149), đáp ứng được yêu cầu của chương: *"Học sinh… nắm vững khái niệm phần thực, phần ảo, môđun của số phức"*

Đặc điểm của T'1:

+ $f(x,y), g(x,y), f'(x,y), g'(x,y)$ đều được cho dưới dạng hàm số bậc nhất hai ẩn x, y.

+ **(1)** được cho đúng dạng, học sinh không cần biến đổi, chỉ việc tách lấy phần thực và phần ảo của hai số phức ở hai bên đẳng thức là có được hệ phương trình **(*)**.

+ Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} f(x,y) = g(x,y) \\ f'(x,y) = g'(x,y) \end{cases}$ **luôn luôn có nghiệm.**

+ (1) có ba tham số x, y, i trong đó x, y được đề bài xác định là ẩn số, i mặc nhiên được **thừa nhận là đơn vị ảo**. Hai vế của **(1)** được xem như là hai số phức và điều kiện để hai số phức bằng nhau chính là công nghệ giải thích cho kĩ thuật giải được nêu ra ở trên. Điều này cho phép chúng tôi dự đoán sự tồn tại ngầm ẩn của quy tắc hợp đồng sau:

R1: *"i luôn được xem là đơn vị ảo với* $i^2 = -1$"

Kiểu nhiệm vụ T'2: Tìm số phức biết phần thực và phần ảo của nó

Ví dụ

Viết số phức z có phần thực bằng $\frac{1}{2}$, *phần ảo bằng* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(SGK trang 131)

τ'_2: Phần thực được cho là *a*, phần ảo được cho là *b* thì số phức cần tìm là $z = a + bi$.

Đặc điểm của T'2:

Kiểu nhiệm vụ này chỉ xuất hiện đúng một lần sau khi đưa ra định nghĩa số phức bằng nhau. Theo SGV trang 149 thì đây "*là bài toán ngược của bài toán tìm phần thực và phần ảo của một số phức"*. Thiết nghĩ, kiểu nhiệm vụ này xuất hiện chỉ để củng cố thêm cho học sinh khái niệm số phức.

Kiểu nhiệm vụ T8: Biểu diễn số phức trên mặt phẳng toạ độ.

Kiểu nhiệm vụ này trong [A] được gọi tên là "Biểu diễn số phức $a + bi$ trên sơ đồ Argand" (để phân biệt với biểu diễn số phức bởi một vectơ)

Kĩ thuật để giải quyết T8 trong SGK 12CB hoàn toàn giống với kĩ thuật τ_8 đã được sử dụng trong [A]:

τ_8**:** Số phức $z = a + bi$

Biểu diễn đường thẳng thực $x = a$ lên mặt phẳng toạ độ.

Biểu diễn đường thẳng ảo $y = b$ lên mặt phẳng toạ độ.

Giao phần thực và phần ảo lại sẽ ra phần biểu diễn của số phức z.

θ_8: "Điểm $M(a;b)$ trong một hệ toạ độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$" (trang 131SGK)

Ví dụ

Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện:
a) Phần thực của z bằng -2 *;* *b) Phần ảo của z bằng 3 ;* *c) Phần thực của z thuộc khoảng* $(-1;2)$ *;* *d) Phần ảo của z thuộc đoạn* $[1;3]$ *;* *e) Phần thực và phần ảo của z đều thuộc đoạn* $[-2;2]$ *.*

(trang 134 SGK 12CB)

Ví dụ trên chính là kiểu nhiệm vụ biểu diễn điểm trên đồ thị hàm số mà học sinh đã học ở lớp dưới: "Biểu diễn điểm *M(a,b)* biết *a, b* thuộc một vùng, miền cho trước"

Đặc điểm của T8 trong SGK 12CB:

+ Các ràng buộc cho phần thực và phần ảo luôn nằm trong khoảng $[-4;3]$

+ Các số **xuất hiện** trong ràng buộc của phần thực và phần ảo luôn là số nguyên.

+ Trình tự bài tập biểu diễn tập hợp số phức z luôn cho theo thứ tự:

_Chỉ ràng buộc phần thực của z bằng hằng số.

_Chỉ ràng buộc phần ảo của z bằng hằng số.

_ Ràng buộc cả phần thực và phần ảo bởi một khoảng (hoặc đoạn)

_ Ràng buộc bởi môđun của z.

Trong SGK 12CB còn xuất hiện một kiểu nhiệm vụ con của T8:

T8*: Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z biết ràng buộc của môđun $|z|$.

Ví dụ:

Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện: $a)|z| = 1 \quad b)|z| < 1 \quad c) 1 < |z| \leq 2$ $d)|z| = 1$ *và phần ảo của* z *bằng 1.*

(BT 5 trang 134 SGK)

Bài tập này cho thấy rõ hơn ý nghĩa hình học của môđun của số phức. Học sinh phải biết quy việc tìm tập hợp các số phức về tìm tập hợp các điểm M thoả các điều kiện cho trước của độ dài OM.

Đặc điểm của T8*:

+ T8* xuất hiện 5 lần và các con số **"xuất hiện"** chỉ là 1 hoặc 2.

+ Không thấy xuất hiện dạng $|z| > m \quad (|z| \geq m)$ với m là số thực.

Kiểu nhiệm vụ T9*: Tìm môđun của số phức $a+bi$

Đây là một kiểu nhiệm vụ con của kiểu nhiệm vụ T9 đã được chúng tôi nêu ở phần A, mục 2:

T9: Tìm môđun và argument gốc của số phức $z = a+bi$**.**

Trong [A], có ba kĩ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ này, chúng tôi xin trích dẫn lại sau đây:

τ_{91} : Môđun của z : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Argument :

+ Gọi $\beta = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$

+ Nếu $a>0, b>0$: $\arg z = \beta$

+ Nếu $a<0, b>0 : \arg z = \pi - \beta$

+ Nếu $a<0, b<0 : \arg z = -\pi + \beta$

+ Nếu $a>0, b<0 : \arg z = -\beta$

τ_{92} : Đưa z về dạng môđun/argument : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ với $-\pi < \theta \leq \pi$

Khi đó $|z|$ chính là môđun của z và θ là argument chính của z.

τ_{93} Biểu diễn số phức $z = a+ib$ bằng điểm M trên sơ đồ Argand.

Môđun của z : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Tìm góc định hướng θ tạo bởi tia Ox và tia OM.

Khi đó θ chính là argument chính của z.

Như vậy, do SGK 12CB không đề cập đến argument của số phức nên có thể nói, chỉ có một kĩ thuật duy nhất được dùng để giải quyết T9* đó là τ_{91}^* (τ_{91}^* là một phần của τ_{91} và τ_{93})

τ_{91}* : Môđun của z : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Ví dụ:

Tính $|z|$ *với:*

$a) z = -2 + i\sqrt{3}$ $\qquad$ $b) z = \sqrt{2} - 3i$

$c) z = -5$ $\qquad$ $d) z = i\sqrt{3}$

(BT 4 trang 134 SGK 12CB)

Trong sách giáo khoa Mỹ thì môđun số phức gắn liền với dạng môđun/argument của số phức (dạng lượng giác theo như cách gọi ở VN). Còn theo SGK 12CB của VN thì môđun số phức đơn thuần chỉ là một khái niệm gắn liền với số phức.

Đặc điểm của T9* trong SGK 12CB:

Số phức luôn được cho dưới dạng đại số chuẩn $a+bi$ hoặc $a+ib$, học sinh chỉ cần nhớ công thức môđun của số phức rồi tính toán thuần tuý như ở số thực.

Kiểu nhiệm vụ T7: Tìm số phức liên hợp

Kĩ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ này hoàn toàn giống kĩ thuật đã được sử dụng trong [A]

τ_7: Xác định phần thực a và phần ảo b của số phức z.

Khi đó, số phức liên hợp của z là $\overline{z}=a-bi$.

Ví dụ:

Tìm $\overline{z}$ biết :

$a)\ z=1-i\sqrt{2}$ $\quad b)\ z=-\sqrt{2}+i\sqrt{3}$

$c)\ z=5$ $\quad d)\ z=7i$

(Bài tập 6 trang 134 SGK)

Đặc điểm của T7:

Biểu diễn hình học của số phức liên hợp được giới thiệu duy nhất một lần khi đưa vào khái niệm. Còn lại kiểu nhiệm vụ này chỉ được đề cập đến ở dạng đại số của số phức.

Kiểu nhiệm vụ T1: Cộng, trừ, nhân số phức

Trong [A] có 3 kĩ thuật giải quyết kiểu nhiệm vụ này, trong đó τ_{11} dùng dạng đại số, τ_{12} dùng dạng lượng giác và τ_{13} dùng biểu diễn hình học của số phức dưới dạng vectơ. Chúng tôi trích dẫn lại sau đây:

Kĩ thuật τ_{11}:

τ_{11}: Cộng trừ, nhân các số phức như nhân các đa thức

θ_{11}: Định nghĩa số phức, các tính chất của đa thức.

Kĩ thuật τ_{12}:

τ_{12}: Đưa số phức về dạng lượng giác $z_1=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ và $z_2=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$

Khi đó : $z_1.z_2 = r_1.r_2\left[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\right]$

θ_{12} : Định nghĩa dạng mođun/argument của số phức, các kiến thức về lượng giác.

Kĩ thuật τ_{13}:

τ_{13}**:** Biểu diễn số phức z_1 bằng vectơ $\overrightarrow{OA}$, z_2 bằng vectơ $\overrightarrow{OB}$.

Dựng hình bình hành OBCA, khi đó : $\overrightarrow{OC}$ là vectơ biểu diễn số phức z_1+z_2.

Dựng hình bình hành OBAD, khi đó: $\overrightarrow{OD}$ là vectơ biểu diễn số phức z_1-z_2.

Không như [A], SGK 12CB không đề cập đến dạng lượng giác và biểu diễn hình học của số phức dưới dạng vectơ nên chỉ có τ_{11} được sử dụng để giải quyết kiểu nhiệm vụ T1.

Một ví dụ T1 trong SGK 12CB:

Thực hiện các phép tính sau:
a) $(3-5i)+(2+4i)$ *b)* $(4+3i)-(5-7i)$

(trích bài tập 1 trang 135 SGK 12CB)

Thực hiện các phép tính sau:
a) $(3-2i)(2-3i)$ *b)* $(-1+i)(3+7i)$

(trích bài tập 3 trang 136 SGK 12CB)

Kiểu nhiệm vụ T2: Chia số phức (trong [A], kiểu nhiệm vụ này được gọi tên là: "V**iết** $\frac{z_1}{z_2}$ **dưới dạng** $a+bi$**")**

Để giải quyết kiểu nhiệm vụ này, [A] đưa ra hai kĩ thuật :

τ_{21} **:**

Nhân tử và mẫu với số phức liên hợp của mẫu.

Đưa kết quả có được về dạng $a + bi$.

Tính chất: $z\bar{z} = a^2+b^2$.

τ_{22} :

Dùng công thức :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_1}\right) => \left\{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |z_1|.\left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|.\frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right.$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 + \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

Tương tự như giải thích ở trên, chỉ có τ_{21} được sử dụng để giải quyết T2.

T1, T2 là hai kiểu nhiệm vụ xuất hiện nhiều nhất trong tất cả các kiểu nhiệm vụ xuất hiện trong chương "Số phức", bởi một trong hai yêu cầu của chương này theo SGV trang 148 là: "*Học sinh có kĩ năng tính toán cộng, trừ, nhân, chia các số phức, biết giải phương trình bậc hai với hệ số thực"*

Kĩ thuật chung được sử dụng để giải quyết hai kiểu nhiệm vụ này là áp dụng các quy tắc đã biết trong tập số thực với các đa thức và chỉ chú ý thêm rằng $i^2 = -1$.

Đặc điểm của T1, T2 trong SGK 12CB:

+ Các thương số được cho $\frac{z_1}{z_2}$ luôn có z_2 không là số thực.

+ Tất cả số phức trong các phép toán đều được cho dưới dạng đại số *a + bi* hoặc *a + ib.*

+ Các kĩ thuật giải được đề cập đến hoàn toàn được áp dụng từ các quy tắc đã biết trên các đa thức trên tập số thực.

+ Ý nghĩa của các phép toán không hề được đề cập tới.

+ Phép luỹ thừa chỉ được cho cao nhất là bậc 3, những trường hợp cho lũy thừa cao hơn chỉ áp dụng với số phức thuần ảo.

+ Mặc dù máy tính bỏ túi là một công cụ rất đắc lực trong tính toán số phức nhưng sách giáo khoa và cả sách giáo viên đều không đề cập tới việc dùng máy tính bỏ túi để tính toán số phức. Cũng như đã đề cập đến ở **1.3,** ở đây chúng tôi cũng đặt ra câu hỏi tương tự: *Trong dạy học số phức, giáo viên và học sinh ứng xử ra sao với việc sử dụng máy tính bỏ túi trong tính toán số phức và giải toán trên số phức nói chung?*

Kiểu nhiệm vụ T5: Giải phương trình bậc hai với hệ số thực

Bước sang kiểu nhiệm vụ này, số phức đã mang vai trò công cụ. Yêu cầu của chương "Số phức" trong SGV trang 148 là: "*Học sinh có kĩ năng tính toán cộng, trừ, nhân, chia các số phức, biết giải phương trình bậc hai với hệ số thực*".

Có 2 kĩ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ này:

τ_{51}: Tính $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm $x = -\frac{b}{2a}$;

Nếu $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;

Nếu $\Delta < 0$ phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

τ_{52}: Đưa phương trình về dạng: $(Ax+B)^2 = -C = Ci^2$ với *A, B, C* là số thực, $C > 0$.

Khi đó: $Ax + B = i\sqrt{C}$ hay $Ax + B = -i\sqrt{C}$.

Tuy nhiên, trong khi [A] sử dụng cả hai kĩ thuật trên để giải quyết T5 thì SGK 12CB chỉ đưa vào kĩ thuật thứ nhất, kĩ thuật thứ 2 rất hữu ích trong một số bài toán giải phương trình bậc hai dạng đơn giản không hề được đề cập tới.

Một ví dụ của T5 trong SGK 12CB:

Giải phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ trên tập số phức.

Giải:

Ta có $\Delta = 1 - 4 = -3$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phức là

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

(ví dụ trang 140 SGK 12CB)

Đặc điểm của T5 trong SGK 12CB:

Phương trình bậc hai được cho luôn là phương trình bậc hai đầy đủ, nghĩa là có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a,b,c \neq 0$. Thiết nghĩ SGK chỉ đưa ra dạng bậc hai đầy đủ vì muốn **ưu tiên kĩ thuật τ_{51}.**

Phương trình bậc hai được cho luôn có biệt thức $\Delta < 0$, có lẽ bởi hai trường hợp còn lại đã được nghiên cứu kĩ ở lớp dưới và lí do quan trọng hơn là để học sinh làm quen với nghiệm phức của phương trình bậc 2.

Đối với phương trình trùng phương thì luôn tìm được hai giá trị khác dấu hoặc đều âm của z^2.

Có thể nhận thấy một khác biệt đối với kiểu nhiệm vụ giải phương trình bậc hai mà học sinh đã được học ở các lớp dưới. Trước đây, đề bài toán luôn là: "Giải phương trình" và học sinh có trách nhiệm tự hiểu mình phải tìm nghiệm của phương trình trong tập số thực, tập số lớn nhất mà học sinh đã được học. Tuy nhiên, ở kiểu nhiệm vụ này, SGK 12CB luôn ghi rõ yêu cầu: "Giải phương trình ***trong tập số phức***". Sách giáo viên không có lí giải cho sự khác biệt này. Tuy nhiên, chúng tôi thiết nghĩ, phải chăng cần phải nhấn mạnh như thế để tránh cho học sinh sự lúng túng và những nhầm lẫn không cần thiết khi giải phương trình trong tập số phức? Lí do gây ra sự lúng túng đó có thể được lí giải như sau:

- Do đã giải phương trình bậc hai trong tập số thực một thời gian quá lâu (từ lớp 9 tới lớp 12), việc tìm nghiệm thực của phương trình bậc hai đã trở nên quá quen thuộc dẫn đến dễ nhầm lẫn theo thói quen nếu gặp một đề toán giải phương trình bậc hai như thế trong chương số phức.
- Song song với việc giải phương trình bậc hai trong chương "số phức", học sinh vẫn phải giải phương trình bậc hai trong một số chương khác. Ví dụ như trong chương I với kiểu nhiệm vụ "Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số", chương II với kiểu nhiệm vụ "Giải phương trình mũ, phương trình logarit"… Trong các chương đó, các phương trình bậc hai mà học sinh gặp luôn phải giải trong tập số thực. Thế nên có lẽ để tránh sự lúng túng và nhầm lẫn trong ôn tập cuối năm và thi tốt nghiệp cho học sinh, đối với kiểu nhiệm vụ giải phương trình bậc hai trong chương "Số phức", thể chế đã thể hiện rõ yêu cầu trên đề bài: "Giải các phương trình sau ***trên tập số phức".***

Cùng với giải phương trình bậc hai, phương trình trùng phương, ngay trong chương "số phức" còn có kiểu nhiệm vụ T'9: "Giải phương trình với hệ số phức" gồm những phương trình có thể quy về phương trình bậc nhất với hệ số phức sẽ được trình bày ngay phần dưới đây. Trong khi 100% các bài tập giải phương trình bậc hai, trùng phương đều thể hiện rõ trên yêu cầu là "Giải phương trình ***trên tập số phức"*** thì kiểu nhiệm vụ T'9, tỉ lệ này là 50 – 50. Có hai bài thuộc T'9 thì một bài yêu cầu "Giải các phương trình sau" (BT4 trang 134) còn một bài yêu cầu: "Giải các phương trình sau **trên tập số phức"** (BT9, trang 144 SGK). Như vậy, câu hỏi đặt ra là: G*iáo viên sẽ ứng xử ra sao trong quá trình dạy học kiểu nhiệm vụ "Giải phương trình" trong chương số phức? Liệu việc xác định rõ tập nghiệm trên đề bài có được lưu ý?*

Bên cạnh đó, với việc mọi phương trình bậc hai, phương trình trùng phương trong chương số phức đều có xác định rõ nghiệm cần tìm thuộc tập số nào, điều này cho phép chúng tôi dự đoán sự tồn tại của quy tắc hợp đồng **R2** sau:

R2: "Học sinh không có nghĩa vụ tìm nghiệm phức đối với kiểu bài toán "giải phương trình" mà không ghi rõ tập nghiệm cần tìm là tập phức"

Kiểu nhiệm vụ T'3: Giải phương trình với hệ số phức

Tất cả các phương trình được cho đều là phương trình bậc nhất. Kiểu nhiệm vụ này không có trong [A].

τ'_3: Đưa phương trình về dạng $Az = B$. ($A \neq 0$)

Nghiệm $z=\dfrac{B}{A}$.

Ví dụ:
Giải các phương trình sau:
$a)\,2i(3+i)(2+4i)$; $\quad$ $b)\,(1+3i)z-(2+5i)=(2+i)z$;
$c)\,\dfrac{z}{4-3i}+(2-3i)=5-2i$

(BT 4 trang 138 SGK 12CB)

Thực chất của kiểu nhiệm vụ này cũng chỉ là thực hiện các phép tính toán cộng, trừ, nhân, chia số phức thông thường.

Đặc điểm của T'3:

Các phương trình được cho luôn có nghiệm, luôn đưa được về dạng $Az=B$. ($A\neq 0$). Học sinh không có nghĩa vụ kiểm tra tính có nghiệm của phương trình.

Có thể thấy ở các phương trình này luôn xuất hiện cùng lúc hai "chữ": *z* và *i*. "Chữ" xuất hiện trong một biểu thức hay một phương trình toán học có thể có nhiều nghĩa: là một tham số, một ẩn số, một biến số, một hằng số… Tuy nhiên, trong trường hợp này, *z* luôn được xem là ẩn và *i,* thay vì mang nghĩa một tham số bất kì như thông thường thì trong chương này, *i* lại mang một nghĩa khác, đó là đơn vị ảo thỏa $i^2=-1$.

Như vậy, giống như chúng tôi đã dự đoán ở phần trước, ở đây cũng cho phép dự đoán sự xuất hiện của quy tắc ngầm ẩn **R1:**

R1: "i luôn được xem là đơn vị ảo với $i^2=-1$"

Kiểu nhiệm vụ T2*: Tìm nghịch đảo của số phức

Là kiểu nhiệm vụ con của kiểu nhiệm vụ T2.

Kiểu nhiệm vụ T'4: Tìm căn bậc hai của số thực a âm

Kiểu nhiệm vụ này được SGK 12CB đưa vào để giải quyết kiểu nhiệm vụ T5.

τ'_4: kết luận ngay căn bậc hai của số thực $a<0$ là $\pm i\sqrt{|a|}$.

θ'_4: Nhận xét: "Các căn bậc hai của số thực $a<0$ là $\pm i\sqrt{|a|}$" (trang 139 SGK 12CB)

Ví dụ:

"*Tìm các căn bậc hai phức của các số sau: -7, -8, -12, -20, -121.*

(BT 1 trang 140 SGK)

*“Không có định nghĩa chính thức về căn bậc hai phức, các căn bậc hai của một số thực âm tìm được **chỉ bằng trực giác**” (SGV trang 157)*

Đặc điểm của T’4 trong SGK 12CB:

Theo yêu cầu của SGK và SGV thì học sinh không được dùng kí hiệu căn bậc hai của số thực âm, mà chỉ có thể dùng lời để diễn tả.

Kiểu nhiệm vụ T’5: Ứng dụng của hệ thức Viet trong phương trình bậc hai.

Hệ thức Viet trong phương trình bậc hai trong tập số phức được ứng dụng hoàn toàn như trong tập số thực.

Bảng 2.3 Bảng thống kê số lần xuất hiện của các kiểu nhiệm vụ trong SGK 12CB

Kiểu nhiệm vụ	Số lần xuất hiện (lần)	Tỉ lệ (%)
T3: Tìm phần thực và phần ảo của số phức	2	2.1
T’1: Tìm số thực x và y biết biểu thức $f(x,y)+g(x,y)i=f'(x,y)+g'(x,y)i$ **(1)**	5	5.4
T’2: Tìm số phức biết phần thực và phần ảo của nó	1	1.1
T8: Biểu diễn số phức trên mặt phẳng toạ độ.	13	14.3
T9*: Tìm môđun của số phức $a+bi$	6	6.6
T7: Tìm số phức liên hợp	8	8.8
T1: Cộng, trừ, nhân số phức		
T2: Chia số phức	**33**	**36.3**
T5: Giải phương trình bậc hai với hệ số thực	6	6.6
T’3: Giải phương trình bậc nhất với hệ số phức	3	3.3
T2*: Tìm nghịch đảo của số phức	4	4.4
T’4: Tìm căn bậc hai của số thực a **âm**	8	8.8
T’5: Ứng dụng của hệ thức Viet trong phương trình bậc hai.	2	2.2
Tổng:	**91**	

2.2.3. Kết luận

- Số phức được đưa vào SGK 12CB theo trình tự như sau

ĐẠI SỐ => **HÌNH HỌC** => **ĐẠI SỐ**

(cơ chế đối tượng) (cơ chế đối tượng) (cơ chế công cụ)

- Như vậy, trình tự xuất hiện của số phức trong lịch sử đã được noospheer chuyển đổi. Trong lịch sử, số phức xuất hiện trước hết với cơ chế công cụ và chỉ là các kí hiệu hình thức chứ chưa có nghĩa đại số hay hình học cụ thể, còn trong thể chế dạy học SGK 12CB, số phức đi theo trình tự ngược lại. Dạng đại số của số phức, trong lịch sử xuất hiện cuối cùng thì trong thể chế được giới thiệu đầu tiên, số phức lúc bấy giờ đóng vai trò đối tượng nghiên cứu. Khi các khái niệm liên quan cùng các phép toán đã được giới thiệu thì mới kết thúc vai trò đối tượng của số phức để chuyển sang cơ chế công cụ: ứng dụng số phức để giải phương trình bậc hai với hệ số thực. Cách thức chuyển đổi này cũng thường gặp trong quá trình chuyển đổi từ tri thức khoa học sang tri thức giảng dạy, nhằm mục đích sư phạm.
- Ý nghĩa hình học của các phép toán hoàn toàn không được đề cập tới.
- Định nghĩa và cách xây dựng các phép toán hoàn toàn dựa trên các quy tắc đã biết trên tập số thực với các đa thức bậc nhất hệ số *i*.
- Kiểu nhiệm vụ T1, T2 về các phép toán trên số phức chiếm tỉ lệ vượt trội hơn hẳn so với các kiểu nhiệm vụ khác với 36.3 %. Như vậy, thể chế dạy học Giải Tích 12CB ưu tiên tính toán trên số phức. Tuy nhiên, chỉ là tính toán dựa trên các quy tắc đã biết trên đa thức và máy tính không được ưu tiên sử dụng, mặc dù máy tính bỏ túi tỏ ra vô cùng hữu hiệu trong việc tính toán số phức, kể cả giải phương trình trên tập phức. Câu hỏi đặt ra ở đây là:

Liệu trong dạy học số phức, học sinh có được phép sử dụng máy tính để giải toán? Giáo viên sẽ ứng xử thế nào trước việc thể chế hạn chế việc sử dụng máy tính của học sinh trong việc dạy học số phức?

Đây là một câu hỏi sẽ được chúng tôi tìm câu trả lời trong phần thực nghiệm ở chương sau.

- Đối với tất cả các kiểu nhiệm vụ có cho số phức thì giáo viên có nghĩa vụ cho các số phức dưới dạng đại số $a+bi$ hay $a+ib$ (có thể khuyết *a* hoặc *b*). Dạng đại số của số phức hoàn toàn chiếm ưu thế trong thể chế dạy học Giải tích 12CB.
- Biểu diễn hình học của số phức bởi một điểm trên mặt phẳng toạ độ chỉ được đưa vào với mục đích làm cơ sở cho việc giới thiệu môđun của số phức. Trong khi đó, nghiên cứu khoa học luận của số phức lại chỉ ra rằng, biểu diễn hình học của số phức được ra đời trong quá trình người ta đi tìm "nghĩa" của số phức, hơn nữa, qua biểu diễn hình học của số phức, "nghĩa" của các phép toán trên số phức cũng được làm rõ.

Tóm lại, nghiên cứu mối quan hệ thể chế với khái niệm số phức cho phép xác định các quy tắc hợp đồng **R1, R2** cũng như trả lời các câu hỏi đã đặt ra **Q2, Q3.** Điều này hướng chúng tôi tới phát biểu các giả thuyết nghiên cứu sau:

- **Giả thuyết H1:** Tồn tại các quy tắc hợp đồng R1 và R2:

  R1: i luôn được xem là đơn vị ảo với $i^2 = -1$

  R2: Học sinh không có nghĩa vụ tìm nghiệm phức đối với kiểu bài toán "giải phương trình" mà không ghi rõ tập nghiệm cần tìm là tập phức.

- **Giả thuyết H2:**

  Có sự lẫn lộn giữa nghiệm thực và nghiệm phức khi giải phương trình, giữa hệ trục tọa độ trong mặt phẳng phức và hệ trục tọa độ trong mặt phẳng thực.

Liệu các giả thuyết chúng tôi đặt ra có thỏa đáng trong thực tế dạy học? Việc nghiên cứu thực nghiệm để kiểm chứng các giả thuyết trên và trả lời các câu hỏi nghiên cứu được đặt ra là nhiệm vụ chúng tôi phải làm trong chương 3.

Chương 3. THỰC NGHIỆM

3.1. Mục đích thực nghiệm

Trong chương này chúng tôi triển khai một thực nghiệm cho phép nghiên cứu ảnh hưởng của mối quan hệ thể chế lên quan hệ cá nhân của học sinh. Đặc biệt, thực nghiệm sẽ đưa vào kiểm chứng tính thỏa đáng của hai giả thuyết mà chúng tôi đã nêu ở cuối chương 2:

- **Giả thuyết H1:** Tồn tại các quy tắc hợp đồng R1 và R2:

  R1: i luôn được xem là đơn vị ảo với $i^2=-1$

  R2: Học sinh không có nghĩa vụ tìm nghiệm phức đối với kiểu bài toán "giải phương trình bậc hai" mà không ghi rõ tập nghiệm cần tìm là tập phức.

- **Giả thuyết H2:**

  Ở học sinh, có sự lẫn lộn giữa nghiệm thực và nghiệm phức khi giải phương trình, giữa hệ trục tọa độ trong mặt phẳng phức và hệ trục tọa độ trong mặt phẳng thực.

Ngoài ra, thực nghiệm cũng nhằm trả lời các câu hỏi sau:

- Liệu trong dạy học số phức, học sinh có được phép sử dụng máy tính để giải toán? Giáo viên sẽ ứng xử thế nào trước việc thể chế hạn chế việc sử dụng máy tính của học sinh trong việc dạy học số phức?
- Với kiểu nhiệm vụ "giải phương trình" trong tập số phức, giáo viên sẽ chọn phương án nào khi có hai phương án được đưa ra trong thể chế: thể hiện rõ hoặc không cần thể hiện yêu cầu tập nghiệm cần tìm là tập phức trên đề bài?

3.2. Hình thức và tổ chức thực nghiệm

Chúng tôi tiến hành thực nghiệm trên hai đối tượng: giáo viên và sinh viên năm nhất, đối tượng sinh viên vừa được học khái niệm số phức vào cuối năm học lớp 12 ở trường THPT.

- Về phía giáo viên: Chúng tôi sẽ phát phiếu điều tra giáo viên.
- Về phía sinh viên: Sinh viên sẽ được yêu cầu làm việc cá nhân để trả lời các câu hỏi hoặc giải các bài toán mà chúng tôi đưa ra.

Do thời gian chúng tôi tiến hành thực nghiệm, học sinh ở các trường THPT chưa học tới chương số phức nên thực nghiệm của chúng tôi tiến hành trên các sinh viên của trường cao đẳng sư phạm Tây

Ninh. Chúng tôi đã tiến hành khảo sát **90** sinh viên cao đẳng thuộc các khoa: Toán – Tin, Cao đẳng tiểu học và lớp quản trị văn phòng khóa 34 của trường cao đẳng sư phạm Tây Ninh.

3.3. Thực nghiệm đối với sinh viên

Thực nghiệm trên sinh viên tiến hành theo hai pha:

- Pha 1: Phát phiếu **thực nghiệm số 1**, sinh viên trả lời 2 câu hỏi mở trong vòng 5 phút.
- Pha 2: Phát phiếu **thực nghiệm số 2**, sinh viên trả lời các câu hỏi và giải các bài tập chúng tôi đưa ra trong vòng 40 phút.

Việc chia ra hai pha khác nhau dựa trên lí do sau đây: Pha 1 gồm 2 câu hỏi mở nhằm tìm hiểu quan điểm của học sinh về khái niệm số phức nên chúng tôi không muốn đối tượng thực nghiệm bị “nhiễu” bởi những thông tin về số phức có ở các câu sau trong pha 2.

3.3.1. Pha 1

3.3.1.1. Mục đích thực nghiệm

Nhằm tìm hiểu quan điểm của học sinh về khái niệm số phức.

3.3.1.2. Giới thiệu câu hỏi thực nghiệm

Ở **pha 1** chúng tôi đưa ra 2 câu hỏi thực nghiệm (bộ câu hỏi thực nghiệm được đính kèm trong phần PHỤ LỤC)

Câu 1 : Bạn muốn giải thích cho một bạn ***Số phức là gì***, bạn giải thích như thế nào ?

Với câu hỏi 1, chúng tôi sử dụng câu hỏi mở nhằm tìm hiểu xem hình ảnh và suy nghĩ đầu tiên của học sinh về khái niệm số phức như thế nào.

Câu trả lời cho câu hỏi này có thể rất đa dạng, nhưng chúng tôi dự kiến chúng thuộc các nhóm chính sau đây:

Xoay quanh dạng đại số của số phức

- **S1a:** Số phức là một biểu thức có dạng $a+bi$ trong đó $a,b\in\mathbb{R}$ với $i^2=-1$.

  a là phần thực, b là phần ảo.
- **S1b:** Số phức là số gồm có phần thực và phần ảo, kí hiệu $a+bi$.

  Học sinh chỉ còn ấn tượng về dạng đại số của số phức, đó là một đa thức bậc nhất ẩn *i*, không quan tâm đến đặc trưng $i^2=-1$.
- **S1c:** Số phức là một biểu thức có dạng $a+bi$, trong đó $a,b\in\mathbb{R}$

  a là phần thực, bi là phần ảo.

Xoay quanh mục đích xuất hiện của số phức

- **S1d:** Số phức là số làm cho mọi phương trình bậc hai đều có nghiệm.

  Với những sinh viên chọn câu trả lời này, điều được quan tâm là mục đích đưa số phức vào giảng dạy ở THPT.

Xoay quanh dạng hình học của số phức

- **S1e:** Số phức là một điểm có thể biểu diễn trên trục số.
- **S1f**: Số phức là một vectơ.

Theo như kết quả phân tích được ở chương 2, dạng đại số của số phức $a+bi$ chiếm vị trí hầu như áp đảo trong sách giáo khoa, thế nên chúng tôi dự đoán, đối với đối tượng sinh viên cao đẳng, câu trả lời thuộc phạm vi đại số **S1a và S1b** sẽ chiếm ưu thế, sẽ không có câu trả lời thuộc phạm vi hình học và câu trả lời xoay quanh mục đích xuất hiện của số phức có thể xuất hiện nhưng rất ít hoặc không xuất hiện.

Câu 2 : Hãy cho 3 ví dụ khác nhau về số phức.

Trong câu hỏi 2 này, chúng tôi muốn làm rõ hơn quan điểm của học sinh về khái niệm của số phức thông qua các ví dụ mà các em sẽ đưa ra. Các ví dụ có thể thuộc các nhóm chính sau :

- Số phức được cho ví dụ có dạng $a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}^*$.
- Số phức được cho ví dụ có dạng a với $a\in\mathbb{R}$.
- Số phức được cho ví dụ có dạng bi với $b\in\mathbb{R}$.

Chúng tôi dự đoán các ví dụ số phức dạng đầy đủ $a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}^*$ sẽ chiếm ưu thế.

3.3.1.3 Phân tích kết quả thu được

Đối với câu hỏi 1, chúng tôi đã thu được rất nhiều câu trả lời khác nhau về khái niệm số phức.

Sau đây là bảng tổng kết kết quả thu được:

Bảng 3.1. Bảng thống kê số lượng các chiến lược giải cho pha 1

	Số lượng
S1a	**28**
S1b	11
S1c	4
S1d	2
S1f	0
Chiến lược khác	9

Nhìn vào bảng tổng kết có thể nhận thấy **S1a** và **S1b** hoàn toàn chiếm ưu thế. Như vậy, có 50/54 sinh viên được khảo sát cho rằng số phức là một biểu thức đại số có dạng $a+bi$, trong đó, 28 sinh viên có để ý đến chi tiết *i* là đơn vị ảo thỏa $i^2=-1$, 11 sinh viên chỉ quan tâm đến số phức là số có phần thực và phần ảo mà không quan tâm tới điều kiện $i^2=-1$ của *i*.

Sau đây là trích dẫn một số câu trả lời tiêu biểu cho hai chiến lược này:

- *Số phức là **một biểu thức** có dạng $a+bi$ trong đó a là phần thực, b là phần ảo và $i^2=-1$.*
- *Số phức là số gồm có phần thực và phần ảo, có dạng $a+bi$, trong đó a là phần thực, b là phần ảo.*
- *Số phức có dạng $a+bi$, trong đó a là phần thực, bi là phần ảo ($i^2=-1$).*

Bên cạnh đó, chỉ có hai câu trả lời xoay quanh **mục đích xuất hiện của số phức**:

- **H11:** *Là tập hợp tất cả các số trong đó có thêm số ảo có dạng $a+bi$, a là phần thực, b là phần ảo. **Số phức dùng để giải phương trình** $x^2+1=0$.*
- **H46:** *Số phức là một loại số mới được hình thành **do nhu cầu giải các bài toán mà ta không thể giải trên tập số thực hay trên các tập số khác.** Số phức gồm có hai phần: phần thực và phần ảo. Số phức có dạng $a+bi$, người ta quy định $i^2=-1$.*

Các đáp án mà chúng tôi xếp vào nhóm "chiến lược khác":

- **H51:** *Số phức là một **hàm** gồm có hai phần: phần ảo và phần thực: $ai+b$. i là số ảo. a, b là số thực.*
- **H47, H53, H39:** *Số phức là số có dạng $a+bi$ với **a, b là phần thực, i là phần ảo.***

Có thể thấy rằng, trong nhóm 9 sinh viên chọn "chiến lược khác" này, số phức được hiểu như là một số **khác với số thực** và được đặc trưng bởi sự xuất hiện của đơn vị ảo *i*:

- **H4, H6:** *Số phức là số gồm tập hợp tất cả các số không có thực.*
- **H8:** *Số phức là số ở dạng ảo, không có thực.*
- **H9:** *Số phức là một số hoàn toàn khác với những số đơn giản. Số phức là số có từ hai hay nhiều số trở lên và gồm có hai phần: phần thực và phần ảo. VD: $z=2+5i$.*
- **H10:** *Số phức là số ảo, có nghĩa là số khó tìm thấy nhưng sẽ tìm thấy.*

Nhận xét

Dạng đại số của số phức chiếm ưu thế tuyệt đối: 93% sinh viên được khảo sát chọn cho mình cách giải thích số phức mang nghĩa đại số, không có ai chọn câu trả lời trong phạm vi hình học trong khi về ý nghĩa xuất hiện của số phức thì có 2 câu trả lời như đã trích dẫn ở trên. Điều này cho thấy kết luận rút ra từ phân tích thể chế ở chương 2 của chúng tôi là hoàn toàn có cơ sở.

Câu 2:

Phân tích bài làm của sinh viên, chúng tôi nhận thấy **57/60** bài làm đưa ví dụ số phức dạng $a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}^*$ (chiếm **95%**). Trong đó:

- có 5/60 bài cho ví dụ số phức là số thực hoặc số thuần ảo, chiếm 8.3%.
- 3/60 bài (chiếm 5%) cho số phức dạng các biểu thức đại số biến *i* như sau:

  H12: $(2i+1)(3i-2)$

  H40: $\dfrac{(3-2i)(5i+1)}{3i+2}$

Như vậy, có thể kết luận rằng, hình ảnh của số phức trong học sinh là một **biểu thức đại số biến *i*.**

3.3.1.4. Kết luận cho pha 1

- Như đã phân tích ở chương trước, dạng đại số của số phức được ưu tiên cả trong cả hai bộ sách giáo khoa cơ bản và nâng cao, trong toàn bộ chương số phức của SGK cơ bản thì chỉ có 1 phần nhỏ đề cập tới dạng biểu diễn hình học của số phức, còn lại số phức đều được nghiên cứu dưới dạng đại số. SGK nâng cao ngoài biểu diễn hình học của số phức thì còn dạng lượng giác, tuy nhiên cũng chỉ chiếm một vị trí khiêm tốn. Theo chúng tôi, đây chính là lí do làm cho tỉ lệ các câu trả lời trong phạm vi đại số chiếm ưu thế tuyệt đối trong câu hỏi này.
- Quan niệm về số phức trong học sinh gắn liền với dạng đại số $a+bi$ - đa thức bậc nhất ẩn i, gắn liền với phần thực và phần ảo – một đặc trưng của số phức.
- Số phức đặc trưng bởi sự tồn tại của hai phần: phần thực và phần ảo, đặc biệt là sự tồn tại của đơn vị ảo i trong thành phần.

3.3.2. Pha 2

3.3.2.1. Mục đích thực nghiệm

Tiếp tục tìm hiểu mối quan hệ cá nhân của học sinh với khái niệm số phức đồng thời kiểm chứng hai giả thuyết:

- **Giả thuyết H1:** Tồn tại các quy tắc hợp đồng R1 và R2:

  R1: i luôn được xem là đơn vị ảo với $i^2=-1$

  R2: Học sinh không có nghĩa vụ tìm nghiệm phức đối với kiểu bài toán “giải phương trình bậc hai” mà không ghi rõ tập nghiệm cần tìm là tập phức.

- **Giả thuyết H2:**

Ở học sinh có sự lẫn lộn giữa nghiệm thực và nghiệm phức khi giải phương trình, giữa hệ trục tọa độ trong mặt phẳng phức và hệ trục tọa độ trong mặt phẳng thực.

3.3.2.2. Cách xây dựng bộ câu hỏi thực nghiệm

Ở pha này chúng tôi đưa ra 9 câu hỏi thực nghiệm được đánh số từ câu 3 đến câu 11 (bộ câu hỏi thực nghiệm được đính kèm trong phần PHỤ LỤC)

Sau đây chúng tôi sẽ đi vào phân tích từng câu trong bộ câu hỏi thực nghiệm này.

Câu 3: Các phát biểu sau đây đúng hay sai? Đánh dấu $\surd$ vào ô mà bạn chọn.

Phát biểu	Đúng	Sai
a) Số phức là một đa thức ẩn *i*		
b) Số phức là biểu thức đại số biến *i*		
c) Số phức là một vectơ		
d) Số phức là một điểm		

Sau hai câu hỏi mở ở phiếu thực nghiệm số 1, câu hỏi 3 được chúng tôi đưa ra cũng nhằm khảo sát quan niệm về số phức trong học sinh.

Như đã phân tích ở chương trước, số phức được học sinh tiếp cận dưới dạng đại số và dạng hình học. Tuy nhiên, dạng đại số chiếm vai trò chủ đạo. Trong các lựa chọn chúng tôi đưa ra ở câu hỏi này thì hai câu đầu số phức mang nghĩa đại số, hai câu sau số phức mang nghĩa hình học. Bởi ảnh hưởng của thể chế nên dự đoán câu trả lời ***đúng*** cho hai phát biểu a và b sẽ chiếm đa số.

Tiếp theo, **trong câu hỏi 4**, chúng tôi đưa ra một loạt 8 dữ kiện và yêu cầu học sinh kiểm tra xem đó có phải là số phức không. Nếu có hoặc không thì giải thích tại sao. Việc học sinh lựa chọn số nào là số phức cũng không nằm ngoài mục tiêu tìm hiểu quan niệm của học sinh về đối tượng này và các giải thích cho phép chúng tôi khẳng định lại lần nữa quan niệm ấy.

Phần thực và phần ảo là hai đại lượng đặc trưng cho đối tượng số phức nên việc yêu cầu học sinh chỉ rõ phần thực và phần ảo của nó cũng cho phép chúng tôi hiểu rõ hơn hình ảnh về số phức trong học sinh.

Câu 4: Các số cho trong bảng sau có phải là số phức không? Vì sao?

STT	Số	Là số phức	Không là số phức	Giải thích vì sao? *(Nếu là số phức thì chỉ rõ phần thực và phần ảo của nó)*
1	0			
2	$\sqrt{3}$			
3	$7i-1$			
4	$2+8a$			
5	$1+5i+3i$			
6	$2x+5i\times 4i$ với $x\in\mathbb{R}$			
7	$3x+2y+5i$ với $x,y\in\mathbb{R}$			
8	$6+5y$ với $y^2=-1$			

Các số chúng tôi đưa ra trong cột thứ nhất gồm 4 nhóm:

- **Nhóm các số thực và không có tham số :** 0, $\sqrt{3}$. Sở dĩ chúng tôi chọn hai số thuộc nhóm này là vì mặc dù cùng là số thực nhưng 0 là số thực đặc biệt. Nó là số phức có cả phần thực và phần ảo đều bằng 0. Liệu có sự lúng túng nào khi sinh viên tìm câu trả lời cho câu hỏi 0 và $\sqrt{3}$ có phải là số phức? Liệu có sự khác biệt nào khi lựa chọn câu trả lời cho hai dữ kiện được cho này?
- **Các số được cho dưới dạng đa thức ẩn i:** $a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$: $7i-1$.
- **Các số được cho dưới dạng đa thức ẩn i *có thể quy về dạng*** $a+bi$ **với** $a,b\in\mathbb{R}$: $1+5i+3i$, $2x+5i\times 4i$, $3x+2y+5i$.
- **Nhóm khác** : $2+8a$, $6+5y$ với $y^2=-1$

Trong các số phức chúng tôi đưa ra ở trên chỉ có $7i-1$ là số phức có dạng $a + bi$ đầy đủ, nghĩa là a, b đều khác 0.

0 và $\sqrt{3}$ là số phức đặc biệt có phần ảo bằng 0. Nếu học sinh lựa chọn 0 và $\sqrt{3}$ không là số phức sẽ khẳng định mạnh mẽ quan niệm số phức là đa thức ẩn i và trong thành phần phải có đơn vị ảo *i*.

$1+5i+3i$ cũng là dạng đa thức ẩn *i* nhưng không có dạng chuẩn $a + bi$.

$2+8a$ là đa thức bậc nhất ẩn a, không chứa *i*. Ở đây chúng tôi cố tình bỏ lửng không cho miền xác định của tham số a. Dự đoán sẽ có rất ít lựa chọn phương án đây là số phức vì không có sự xuất hiện của đơn vị ảo *i* và $2+8a$ cũng không được hiển thị dưới dạng số thực "một cách rõ ràng".

Tiếp sau đó, $2x+5i\times 4i$ là đa thức chứa hai tham số *x* và *i*. Ở câu này, thay vì *i* bậc nhất, chúng tôi cho i xuất hiện dưới dạng bậc hai $i\times i$ nhằm phá vỡ hình ảnh quen thuộc về một đa thức bậc nhất ẩn i vẫn thường gặp ở các số phức mà sách giáo khoa trình bày. Dự đoán sẽ có ít sinh viên trả lời đây là số phức vì nó không có dạng quen thuộc hay ít ra cũng có sự lưỡng lự khi chọn lựa giữa hai đáp án cho câu này.

$3x+2y+5i$ cũng là đa thức có ẩn i tuy nhiên còn có hai ẩn x và y.

Dự kiến các câu trả lời "*là số phức*" sẽ tập trung vào các câu có chứa *i*.

Các câu trả lời của học sinh và lời giải thích có thể quan sát được

Câu 4 – 1

- **S41a:** 0 không phải là số phức vì không có sự xuất hiện của i.
- **S41b:** 0 là số phức vì nó có phần thực là 0, phần ảo là 0.
- **S41c:** Các câu trả lời khác.

Câu 4 – 2

- **S42a:** $\sqrt{3}$ không phải là số phức vì không có notation i.
- **S42b:** $\sqrt{3}$ là số phức vì nó có phần thực là $\sqrt{3}$, phần ảo là 0.

Câu 4 – 3

- **S43a:** $7i-1$ là số phức vì nó có dạng $a+bi$, phần thực là – 1, phần ảo là 7.
- **S43b:** $7i-1$ là số phức vì nó có dạng $a+bi$, phần thực là – 1, phần ảo là 7*i*.

Câu 4 – 4

- **S44a:** $2+8\mathrm{a}$ không là số phức vì không có *i*.
- **S44b:** $2+8\mathrm{a}$ không là số phức vì không biết a là số gì.
- **S44c:** $2+8\mathrm{a}$ là số phức vì phần thực là $2+8\mathrm{a}$ và phần ảo là 0.

Câu 4 – 5

- **S45a:** $1+5i+3i$ không là số phức vì không có dạng $a+bi$.
- **S45b:** $1+5i+3i$ là số phức vì có dạng $a+bi$. Phần thực là 1, phần ảo là $8i$.
- **S45c:** $1+5i+3i$ là số phức vì có dạng $a+bi$. Phần thực là 1, phần ảo là 8.

Câu 4 – 6:

- **S46a:** $2x+5i\times 4i$ không là số phức vì không có dạng $a+bi$.
- **S46b:** $2x+5i\times 4i$ là số phức vì có dạng $a+bi$. Phần thực là $2x$, phần ảo là $20i$.
- **S46c:** $2x+5i\times 4i$ là số phức vì có dạng $a+bi$. Phần thực là $2x$, phần ảo là -20.
- **S46d:** $2x+5i\times 4i$ là số phức vì có dạng $a+bi$. Phần thực là $2x$-20.

Chúng tôi dự đoán ở câu hỏi này, **S46b** sẽ chiếm ưu thế.

Câu 4 – 7

- **S47a:** $3x+2y+5i$ không là số phức vì không có dạng $a+bi$.
- **S47b:** $3x+2y+5i$ là số phức vì có i. Phần thực là $3x+2y$, phần ảo là $5i$.
- **S47c:** $3x+2y+5i$ là số phức vì có i. Phần thực là $3x+2y$, phần ảo là 5.

Dự đoán ở câu hỏi này, **S47b** chiếm ưu thế hơn các câu trả lời còn lại, vì học sinh chỉ cần nhận diện có *i* là có thể kết luận *"là số phức"*

Câu 4 – 8:

$6+5y$ với $y^2=-1$ là một số phức nhưng được cho dưới dạng không quen thuộc. Thay vì đại lượng ảo là *i*, chúng tôi thay đại lượng ảo bằng *y*. Có hai khả năng xảy ra:

- **S48a:** $6+5y$ với $y^2=-1$ là số phức thì lời giải thích sẽ là vì có xuất hiện yếu tố bình phương của $y^2=-1$.
- **S48b:** $6+5y$ với $y^2=-1$ không là số phức thì lời giải thích sẽ là vì không có đơn vị ảo i nên $6+5y$ với $y^2=-1$ không phải là số phức.

Dự đoán là sẽ có ít học sinh lựa chọn phương án $6+5y$ với $y^2=-1$ là số phức.

Câu 5: Để *2x+5i* là số phức thì *x* phải thỏa điều kiện gì?

Đây là một câu hỏi mở mang tính khảo sát. *2x+5i* là một dạng đa thức bậc nhất, "có thể coi" là đa thức bậc nhất ẩn *i*. Việc xem xét các câu trả lời cho câu hỏi này sẽ cho thấy rõ ràng quan niệm về số phức trong học sinh. Câu trả lời đúng cho câu hỏi này rất đa dạng: *x* có thể là số thực, là số phức, hay là tổng, tích của các số thực, các số phức, *x* có thể là một đa thức ẩn *i* với các hệ số thuộc $\mathbb{R}$ … Có rất nhiều câu trả lời cho học sinh lựa chọn. Tuy nhiên, chúng tôi dự đoán, câu trả lời *"để 2x+5i là số phức thì x phải là số thực"* sẽ chiếm ưu thế. Điều này cho phép chúng tôi khẳng định hình ảnh về số phức trong học sinh chỉ là một ***đa thức bậc nhất ẩn i dạng*** $a+bi$**.**

Câu 6 và câu 7 cũng không nằm ngoài nhiệm vụ khảo sát quan niệm của học sinh về số phức. Chúng tôi muốn đi vào khảo sát quan hệ cá nhân của học sinh với khái niệm phần thực, phần ảo của số phức – hai khái niệm gắn liền với khái niệm số phức.

Ở câu 6, chúng tôi đưa ra một số phức có dạng đại số đúng như định nghĩa: $a+bi$ và yêu cầu học sinh chọn một hay nhiều đáp án đúng trong các đáp án có ghi phần thực và phần ảo của số phức được cho. Đây là một kiểu nhiệm vụ quen thuộc. Việc học sinh lựa chọn phương án nào sẽ là cơ sở để ta nhận biết được quan niệm của học sinh về phần thực và phần ảo của số phức.

Đáp án a chúng tôi chọn cho phần thực là 1, phần ảo là $\sqrt{2}i$, xuất phát từ dự đoán có sự phân chia số phức ra làm hai phần. Số phức $a+bi$ sẽ được hiểu là tổng của hai phần: phần thực a và phần ảo bi. Đáp án c và d cũng xuất phát từ dự đoán đó, nhưng sự phân chia ở đây không theo nghĩa "tổng" mà theo nghĩa tách biệt đơn thuần. Câu c là tách riêng phần số thực và i được xem là phần ảo.

Câu 6: Đánh dấu $\sqrt{\ }$ vào ***một hay nhiều ô*** sau đây mà bạn cho là đúng.

Số phức $1+\sqrt{2}i$ có:

a) ▪ Phần thực là 1, phần ảo là $\sqrt{2}i$

b) ▪ Phần thực là 1, phần ảo là $\sqrt{2}$

c) ▪ Phần thực là $1+\sqrt{2}$, phần ảo là i

d) ▪ Phần thực là 1, phần ảo là i

Trong số 4 đáp án chúng tôi đưa ra thì chỉ có một đáp án đúng là đáp án b, theo như định nghĩa trong sách giáo khoa :

« Đối với số phức $z=a+bi$, ta nói a là phần thực, b là phần ảo của z. » (SGK CB trang 130)

Tuy nhiên, chúng tôi dự đoán đa số học sinh sẽ lựa chọn phương án a bởi quan niệm phần ảo phải gắn liền với "kí hiệu" *i*.

Câu 7: Đánh dấu $\sqrt{\ }$ vào ***một hay nhiều ô*** sau đây mà bạn cho là đúng.

Số phức $(2+3i)^2$ có:

a) ▪ Phần thực là 2, phần ảo là 3

b) ▪ Phần thực là 4, phần ảo là 9

c) ▪ Phần thực là 2, phần ảo là $3i$

d) ▪ Phần thực là -5, phần ảo là $12i$

e) ▪ Phần thực là -5, phần ảo là 12.

Câu 7 được đưa ra tương tự như câu 6, cũng với kiểu nhiệm vụ quen thuộc, tuy nhiên dữ kiện chúng tôi cho ở đây có sự khác biệt. Số phức được cho không thuộc dạng chuẩn mực $a+bi$ mà cho dưới dạng bình phương của một số phức: $(2+3i)^2$. Liệu $(2+3i)^2$ có được học sinh "nhìn nhận" là một số phức? Và họ xác định phần thực và phần ảo của số phức này như thế nào?

Ở câu này chúng tôi đưa ra 5 lựa chọn.

Câu a : chỉ chú ý tới « biểu thức » $2+3i$, là số phức theo đúng dạng đại số chuẩn mà không chú ý tới yếu tố bình phương.

Câu c : cũng như câu a nhưng quan niệm phần ảo của số phức phải gắn liền với đơn vị ảo *i.*

Câu d và câu e : $(2+3i)^2$ được "nhìn nhận" là một số phức và được đưa về dạng đại số chuẩn $a+bi$.

Sở dĩ chúng tôi lựa chọn đưa vào 2 câu d và e tách biệt là để phân biệt những quan điểm khác nhau về phần ảo tương tự như đã trình bày ở câu a và câu c.

Câu 8: Giải các phương trình ***ẩn x, y*** sau đây:

a) $ix+3y=i+1$

b) $4x^2.i+x=4i+1$

Kiểu nhiệm vụ đưa ra ở câu 8 là kiểu nhiệm vụ quen thuộc, tuy nhiên, trong bài toán này, kí hiệu *i* chúng tôi chọn không hẳn là đại lượng ảo với $i^2=-1$ mà *i* có thể là tham số bất kì.

Biến didactique, biến tình huống:

- **V1 :** Đề bài toán. **« Giải phương trình »** có chỉ rõ yêu cầu **ẩn cần tìm** là x, y hay không.

  V1 có thể nhận các giá trị :

  a) có chỉ rõ yêu cầu về ẩn cần tìm.

  b) không chỉ rõ yêu cầu về ẩn cần tìm.

  Ở câu hỏi 8 này, chúng tôi chọn giá trị a của biến V1 để tránh sự « phân tán » không cần thiết các chiến lược giải khác.

- **V2 :** Hai vế của phương trình có i hay không.

  V2 có thể nhận các giá trị :

  a) hai vế của phương trình có i.

  b) hai vế của phương trình **không có** i.

  Giá trị a của V2 tạo điều kiện thuận lợi cho sự xuất hiện của chiến lược **S8a1.**

  Giá trị b của V2 khóa **S8a1**.

Các chiến lược có thể và những cái có thể quan sát được

a) $ix+3y=i+1$

Chiến lược		Những cái có thể quan sát được
S8a1	$ix+3y=i+1$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$	
S8a2	$ix+3y=i+1$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\y=\dfrac{i+1-x}{3}\end{cases}$	
S8a3	$ix+3y=i+1$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{C}\\y=\dfrac{i+1-x}{3}\end{cases}$	
S8a4	$ix+3y=i+1$ $\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{i+1-x}{3}\\x=\dfrac{1-3y}{i}+1\end{cases}$	
S8a5	Chiến lược khác hoặc bỏ trống	

b) $4x^2.i+x=4i+1$

Các chiến lược có thể và những cái có thể quan sát được

Chiến lược		Những cái có thể quan sát được
S8b1	$4x^2.i+x=4i+1$ $\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2=4\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$	

S8b2	$4x^2.i + x = 4i + 1$ $\Leftrightarrow 4x^2.i + x - 4i - 1 = 0$ $\Leftrightarrow 4i\left(x^2 - 1\right) + \left(x - 1\right) = 0$ $\Leftrightarrow 4i\left(x+1\right)\left(x-1\right) + \left(x-1\right) = 0$ $\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left[4i\left(x+1\right)+1\right] = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 4i\left(x+1\right)+1=0 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x+1=\dfrac{-1}{4i} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1}{4i}-1=\dfrac{-1-4i}{4i} \end{array}\right.$	Phương pháp chuyển vế, đổi dấu rồi phân tích thành nhân tử được sử dụng. Bài giải có thể bị gián đoạn giữa chừng vì kĩ năng phân tích thành nhân tử của sinh viên có thể không thành thạo vì đã lâu tiếp xúc với kiểu bài tập này.
S8b3	Chiến lược khác hoặc bỏ trống	Sinh viên có thể chuyển vế $4x^2.i + x = 4i + 1$ $\Leftrightarrow 4x^2.i - 4i = 1 - x$ $\Leftrightarrow 4i\left(x^2-1\right) = \left(1-x\right)$ $\Leftrightarrow i = \dfrac{1-x}{4\left(x^2-1\right)} = \dfrac{1}{4\left(x+1\right)}$ Hoặc bỏ trống giữa chừng vì thấy ẩn cần tìm không phải là *x* như yêu cầu bài toán.

Câu 9: Giải các phương trình ***ẩn x*** sau đây:

a) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

b) $x^2 - x + 1 = 0$

Biến didactique, biến tình huống:

V3: Yêu cầu bài toán có chỉ rõ nghiệm cần tìm thuộc tập số phức hay không.

Nhận các giá trị:

a) có

b) không

Ở bài toán này, chúng tôi chọn giá trị **b** của biến **V3** nhằm kiểm chứng giả thuyết "có sự phân biệt giữa nghiệm thực và nghiệm phức, nếu đề bài toán không ghi rõ tìm nghiệm phức thì dự đoán chiến lược tìm nghiệm thực của phương trình sẽ chiếm ưu thế hơn.

V4: Các tham số a, b, c.

Biến này sẽ nhận các giá trị: tham số a, b, c sao cho biệt thức $\Delta < 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0, \ldots$

Ở bài toán này chúng tôi chọn giá trị biến là tham số a, b, c sao cho biệt thức $\Delta < 0$ với mục đích khảo sát giả thuyết nêu trên.

Các chiến lược có thể:

S9a-1:

Đặt $t = x^2$

Phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ trở thành

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i \\ t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

S9a-2:

Đặt $t = x^2$

Phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ trở thành

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$\Leftrightarrow t = -1$ (loại) hoặc $t = 3$ (nhận)

$t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

S9a-3: Chiến lược khác hoặc bỏ trống.

Dự đoán ở câu này, **S9a-2** sẽ chiếm ưu thế.

b) $x^2 - x + 1 = 0$

S9b-1: $x^2 - x + 1 = 0$

$$\Delta = -3 \;\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$$

Khi đã học chương số phức thì đây là chiến lược tối ưu, vì tập số lớn nhất mà học sinh đã được học là tập số phức, khi được yêu cầu giải phương trình, nghiệm của phương trình phải được xét trong tập số phức.

S9b-2:

$\Delta = -3 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

S9b-3: Chiến lược khác hoặc bỏ trống.

Chiến lược **S9b-2** chứng tỏ có sự phân biệt giữa nghiệm thực và nghiệm ảo. Nếu không chỉ rõ nghiệm cần tìm thuộc tập số phức trên đề bài, học sinh sẽ “mặc định” là đề bài yêu cầu tìm nghiệm thực của phương trình, cho dù đã được học chương số phức.

Chúng tôi dự đoán ở câu b, chiến lược **S9b-2** sẽ chiếm đa số.

Câu 10: Giải các phương trình ***ẩn i*** sau đây:

a) $a+4ai=2a$

b) $i+3=9-2i$

Các chiến lược có thể

a) $a+4ai=2a$

S10a-1:

$a+4ai=2a$

$\Leftrightarrow 4ai=a$

$\Leftrightarrow i=\dfrac{1}{4}$

S10a-2

$a+4ai=2a$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2a \\ 4ai=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=2 \\ 4ai=0i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=2 \\ a=0 \end{cases} \quad (ptvn)$

b) $i+3=9-2i$

S10b-1:

$i+3=9-2i$

$\Leftrightarrow 3i=6$

$\Leftrightarrow i=2$

S10b-2

$i+3=9-2i$

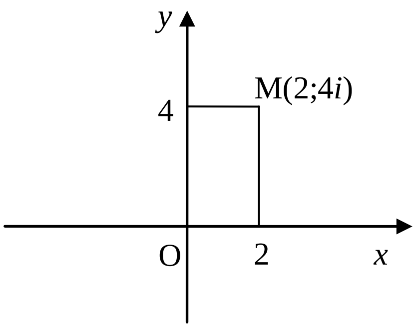
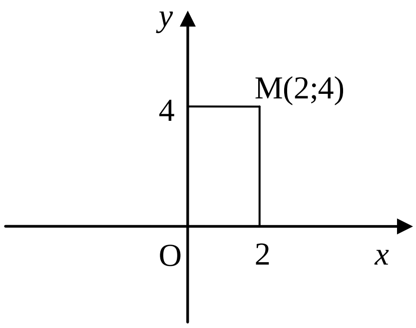
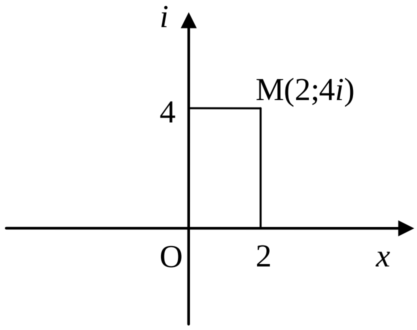
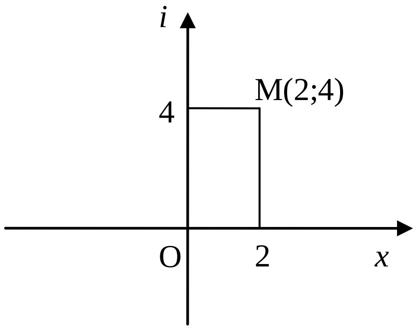
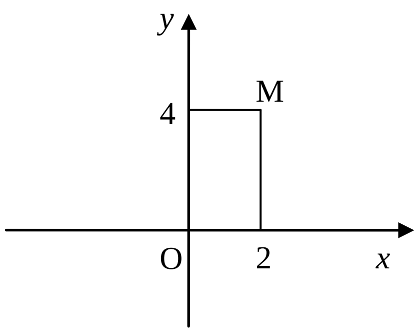
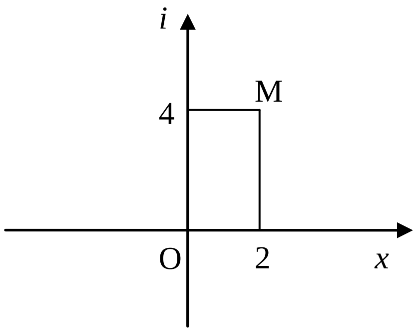
$\Leftrightarrow i+3=-2i+9$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=-2 \\ 3=9 \end{cases} \quad (ptvn)$

Đây là hai câu giải phương trình bậc nhất ẩn i, a trong đề bài có thể hiểu là tham số và chiến lược đúng cho hai câu này là đi giải và biện luận phương trình bậc nhất ẩn i với tham số a. Với câu hỏi này, dự đoán đa số sinh viên sẽ chọn được chiến lược tối ưu ở câu a và nhất là câu b. Tuy nhiên, điều chúng tôi muốn khảo sát ở đây là liệu với những bài toán đơn giản như thế này, có sinh viên nào vẫn nhầm lẫn i là số ảo với $i^2=-1$ và chọn kĩ thuật giải τ_2 như ở câu 9?

Câu 11: M là điểm biểu diễn số phức $2+4i$. Hình vẽ nào sau đây là đúng?

(Hãy khoanh tròn vào các câu mà bạn cho là đúng)

a) 	b) 
c) 	d) 
e) 	f) 

Như chúng tôi đã phân tích ở chương trước, câu hỏi đặt ra là liệu có sự lẫn lộn giữa hệ trục tọa độ trong mặt phẳng phức và hệ trục tọa độ trong mặt phẳng thực. Hình vẽ tương tự như nhau, cũng có hai trục vuông góc và cũng kí hiệu là *Oxy*. Câu hỏi này nhằm khảo sát xem học sinh có sự phân biệt giữa mặt phẳng thực và mặt phẳng phức không.

Điểm M được biểu diễn đúng, tuy nhiên có sự khác biệt giữa các kí hiệu của trục ảo và của tọa độ điểm M trên hình vẽ.

Câu a chúng tôi chọn hệ trục tọa độ *Oxy* nhưng tọa độ điểm M chúng tôi kí hiệu là $M\left(2;4i\right)$. Sở dĩ có sự lựa chọn như vậy là vì chúng tôi muốn tìm hiểu liệu học sinh có sự nhầm lẫn giữa tọa độ của điểm *M* khi biểu diễn điểm có tọa độ $\left(2;4\right)$ trong hệ tọa độ thực và tọa độ điểm *M* khi biểu diễn số phức $2+4i$?

Cũng với điểm *M* được kí hiệu tọa độ như câu a nhưng câu b chúng tôi có thay đổi ở hệ trục tọa độ. Liệu có tồn tại trong học sinh quan niệm điểm M biểu diễn số phức $a+bi$ sẽ có tọa độ $M\left(a;bi\right)$?

Ở các câu c, d, f, thay vì là hệ trục *Oxy*, chúng tôi thay kí hiệu trục *Oy* bằng *Oi.* Với định nghĩa trục ảo là trục thẳng đứng và trục thực là trục nằm ngang như thể chế trình bày, liệu có sự nhầm lẫn hay lưỡng lự khi kí hiệu trục ảo? Thay vì trục *Oy* như trong mặt phẳng thực, liệu chuyển sang mặt phẳng tọa độ phức, học sinh có phân vân về sự đúng đắn và hợp lí khi thay kí hiệu trục ảo *Oy* thành *Oi*? Chúng tôi sẽ có câu trả trả lời cho câu hỏi này khi phân tích những kết quả đạt được cho câu hỏi 11.

Chỉ có hình vẽ b và e được cho chính xác.

Dự đoán sẽ có nhiều lựa chọn đáp án b, tuy nhiên cũng sẽ có nhiều lựa chọn cho a, c và d.

3.3.2.3. Phân tích các kết quả thu được

Câu 3:

Bảng 3.2 Bảng thống kê các câu trả lời cho câu hỏi 3, pha 1

Phát biểu	Đúng	Sai
a) Số phức là một đa thức ẩn *i*	71	15
	82.6 %	17.4 %
b) Số phức là biểu thức đại số biến *i*	61	25
	70.9 %	29.1 %
c) Số phức là một vectơ	18	68
	20.9 %	**79.1 %**
d) Số phức là một điểm	40	46
	46.5 %	**53.5 %**

Bảng số liệu 3.2 trên cho thấy học sinh hoàn toàn nghiêng về định nghĩa số phức dưới dạng đại số.

Câu 4:

Bảng 3.3 Bảng thống kê các câu trả lời cho câu hỏi 4, pha 2

STT	Số	Là số phức	Không là số phức
1	0	33	53
		38.4 %	**61.6 %**
2	$\sqrt{3}$	39	47
		45.3 %	**54.7%**
3	$7i-1$	86	0
		100%	0%
4	$2+8a$	10	76
		11.6%	**88.4%**
5	$1+5i+3i$	84	2
		97.7%	**2.3%**
6	$2x+5i\times 4i$ với $x\in\mathbb{R}$	50	36
		58.1%	41.9%
7	$3x+2y+5i$ với $x,y\in\mathbb{R}$	67	19
		77.9%	22.1%
8	$6+5y$ với $y^2=-1$	33	53
		38.4 %	**61.6 %**

Chúng tôi sẽ phân tích kết quả thu được theo nhóm:

Nhóm các số phức được cho là số thực:

Ở câu 4-1 và 4-2 thì tỉ lệ nghiêng hẳn về phía đáp án "không phải là số phức".

Nhóm các số phức có dạng $a+bi$ hay có thể quy về dạng $a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$:

Theo như bảng thống kê trên, **100%** sinh viên được khảo sát chọn câu trả lời ***"là số phức"*** cho câu 4-3 và **97.7%** chọn câu trả lời đó cho câu 4-5, điều này khẳng định lại một lần quan điểm "số phức là một đa thức bậc nhất ẩn i" trong học sinh.

Tương tự như thế, tỉ lệ **77.9%** cho đáp án "$3x+2y+5i$ với $x,y\in\mathbb{R}$ là số phức" ở câu 4-7 là tỉ lệ hoàn toàn áp đảo.

Có thể thấy, nhóm các số dạng này được ưu tiên lựa chọn phương án "là số phức" bởi hai nguyên nhân sau:

- Nguyên nhân gây ảnh hưởng mạnh mẽ nhất là sự xuất hiện của đơn vị ảo *i*.
- Nguyên nhân thứ hai là các số này đều được cho dưới dạng ***đa thức bậc nhất ẩn i.***

Cũng với sự xuất hiện của *i* nhưng sang câu 4.6 thì xuất hiện sự ***lưỡng lự*** khi *i* xuất hiện không phải dưới dạng bậc nhất mà dưới dạng bậc hai: $i \times i$. Có thể thấy được sự lưỡng lự này khi quan sát rất nhiều bài làm chọn đáp án "không là số phức" rồi gạch bỏ, chọn lại phương án "là số phức". Hơn nữa, cũng cần nói thêm rằng, trong số 50 sinh viên chọn đáp án "*$2x+5i\times 4i$ với $x \in \mathbb{R}$ là số phức*" thì có 10 lời giải thích như sau:

H12: *Vì có phần thực là $2x$ và phần ảo là $20i$.*

Như thế, sở dĩ 10 sinh viên này lựa chọn như thế là vì đã nhầm lẫn khi tính toán $5i \times 4i = 20i$.

Nhóm hai số còn lại:

Ở câu 4-4 thì đáp án "$2+8a$ không phải là số phức" lại chiếm ưu thế hoàn toàn với **88.4%.** Đa số sinh viên bỏ trống lời giải thích, tuy nhiên, có một số lời giải thích xuất hiện mà ta có thể xem xét, chúng tôi đưa ra một số lời giải thích điển hình:

H15: *Vì không có i.*

H50: *Vì không có phần thực, phần ảo.*

…

Như vậy, có thể nhận thấy ở đây nhiều lí do để sinh viên cho rằng $2+8\text{a}$ không là số phức: không có sự xuất hiện của *i*, không thể xác định được phần thực và phần ảo của $2+8\text{a}$,

Câu 4-8, kết quả thu được cũng là ưu thế nghiêng về đáp án "$6+5y$ với $y^2=-1$ không phải là số phức". Tuy nhiên, tỉ lệ 38.4% sinh viên chọn đáp án "là số phức" cho câu này cũng không phải là quá nhỏ. Điều này cho thấy quan điểm: **Sự tồn tại hay không** đơn vị ảo (là số sao cho bình phương bằng -1) cũng đóng một vai trò quan trọng trong việc xác định một số có phải là số phức hay không.

Câu 5:

Bảng 3.4 Bảng thống kê các câu trả lời cho câu hỏi 5, pha 2

Trả lời	Số lượng	Tỉ lệ
$x \in \mathbb{R}$	57	**73.1** %
$x \neq 0$ và $x \in \mathbb{R}$	4	5.1 %
x là số nguyên	1	1.3 %
Chiến lược khác	16	20.5 %
	78	100

Nhìn vào bảng thống kê trên có thể thấy câu trả lời "$x \in \mathbb{R}$" hoàn toàn chiếm ưu thế với 73.1%. Như đã phân tích ở phần 3.3.2.2, sự áp đảo về số lượng câu trả lời cho "$x \in \mathbb{R}$" khẳng định một lần nữa quan điểm **số phức là một đa thức bậc nhất ẩn i** trong học sinh. Nó phù hợp với phân tích của chúng tôi trong chương 2.

Có 4 ý kiến lưu ý thêm điều kiện $x \neq 0$, thiết nghĩ là do quan điểm số phức phải có hai phần, phần thực và phần ảo.

20.5% mà chúng tôi xếp vào "chiến lược khác" không đáng để bàn tới. Thật vậy, hãy thử xem hai câu chúng tôi trích dẫn sau đây:

- **H43** : Để *2x+5i* là số phức thì *x* phải thỏa điều kiện: $x \in i$.
- **H71 :** Để *2x+5i* là số phức thì *x* phải thỏa điều kiện: $x = \frac{-5}{2}$

Kết luận cho câu 3, câu 4 và câu 5

Qua thực kết quả thu được từ ba câu trên, có thể rút ra một số quan điểm về số phức của học sinh như sau:

- số phức là một biểu thức đại số biến i hay là một đa thức ẩn i.
- xác định một số có phải là số phức không cần quan tâm đến một trong các yếu tố sau:
  + sự xuất hiện của i.
  + sự tồn tại của đơn vị ảo (được hiểu là số mà bình phương của nó bằng -1)

Câu 6:

Bảng 3.5 Bảng thống kê các câu trả lời cho câu hỏi 6, pha 2

Lựa chọn	Số lượng	Tỉ lệ
▪ Phần thực là 1, phần ảo là $\sqrt{2}i$	40	40 %
▪ Phần thực là 1, phần ảo là $\sqrt{2}$	50	50 %
▪ Phần thực là $1+\sqrt{2}$, phần ảo là i	5	5 %
▪ Phần thực là 1, phần ảo là i.	5	5 %
Tổng	100	100%

Hai lựa chọn đầu chiếm ưu thế hoàn toàn, và chúng gần như đương nhau, điều đó cho thấy có ***sự lưỡng lự*** khi xác đinh phần thực và phần ảo của số phức. Có thể « mô tả » sự lưỡng lự này như sau : « Số phức $a+bi$ có phần ảo là b hay bi ? »

Nhìn lại sách giáo khoa, ta có định nghĩa :

« Đối với số phức $z = a+bi$, ta nói a là phần thực, b là phần ảo của z. » (SGK CB trang 130)

Tuy nhiên, sở dĩ có sự lưỡng lự này trong học sinh, thiết nghĩ, có lẽ là quan điểm « số phức là tổng của hai phần, phần thực và phần ảo, trong đó, phần ảo gắn liền với đơn vị ảo i ». Quan điểm này đã được chúng tôi rút ra sau khi phân tích kết quả thực nghiệm ở câu 1 dành cho sinh viên.

Câu 7 :

Bảng 3.6 Bảng thống kê các câu trả lời cho câu hỏi 7, pha 2

	Số lượng
a) ▪ Phần thực là 2, phần ảo là 3	**9**
b) ▪ Phần thực là 4, phần ảo là 9	**30**
c) ▪ Phần thực là 2, phần ảo là $3i$	**20**
d) ▪ Phần thực là -5, phần ảo là $12i$	**35**
e) ▪ Phần thực là -5, phần ảo là 12.	**40**
	134

Có 105 lựa chọn cho ba câu : b, d, e. Kết quả thống kê đó cho ta thấy phần lớn sinh viên có sự nhìn nhận $(2+3i)^2$ là một số phức và ta hình dung họ đã cố gắng biến đổi để đưa $(2+3i)^2$ về dạng đại số chuẩn $a+bi$ rồi xác định phần thực, phần ảo. Tuy nhiên, kết quả tương đối tương đương nhau ở hai câu d và e vẫn cho thấy sự ***lưỡng lự*** khi xác định phần ảo của số phức.

Kết luận cho câu 6 và câu 7

Học sinh gặp khó khăn khi xác định phần ảo của số phức và thường mắc sai lầm khi kết luận phần ảo của số phức $a+bi$ là bi.

Câu 8 :

Bảng 3.7 Bảng thống kê số lượng các chiến lược giải cho câu hỏi 8-a, pha 2

	S8a1	**S8a2**	**S8a3**	**S8a4**	**S8a5**
Số lượng	**50**	**0**	**0**	**0**	**30**

Bảng 3.8 Bảng thống kê số lượng các chiến lược giải cho câu hỏi 8-b, pha 2

	S8b1	**S8b2**	**S8b3**
Số lượng	**45**	**6**	**29**

Với hai bảng thống kê trên, ta thấy, hai chiến lược S8a1 và S8b1 hoàn toàn chiếm ưu thế.

Ở câu 8a, ngoài các bài làm sử dụng S8a1, các bài làm còn lại hầu như không đánh giá được vì hầu như không có chiến lược nào rõ ràng đang được sử dụng ngoài việc biến đổi một vài dòng bằng phương pháp chuyển vế đổi dấu. Ví dụ :

H45 :

$ix+3y=i+1$
$\Leftrightarrow ix+i=1-3y$
$\Leftrightarrow i(x+1)=1-3y$

H29 :

$ix+3y=i+1$
$\Leftrightarrow ix-i=3y+1$
$\Leftrightarrow x=3y+1$
$\Leftrightarrow x-3y-1=0$

Tương tự như thế, ở câu b, ngoài chiến lược Sb1, chỉ có 9 bài sử dụng chiến lược đúng Sb2, còn lại cũng là các bài bỏ trống hoặc chỉ biến đổi tương đương, chuyển vế đổi dấu vài dòng rồi dừng lại.

Vấn đề đáng để quan tâm ở câu 8 là trong phương trình đề cho ngoài hai ẩn x, y còn xuất hiện tham số i. i ở đây có thể là một tham số bất kì, tuy nhiên các sinh viên được khảo sát đã không ngần ngại xem i như là đơn vị ảo và thực hiện bài toán giải phương trình đã cho bằng kĩ thuật τ_2 (kĩ thuật được dùng để giải quyết kiểu nhiệm vụ T2 : « Tìm số thực x và y biết biểu thức $f(x,y)+g(x,y)i=f'(x,y)+g'(x,y)i$ »)

Như vậy, theo như thống kê thu được từ câu 8, có thể khẳng định sự đúng đắn của hợp đồng **R1 :** i **luôn được xem là đơn vị ảo với** $i^2=-1$**.**

Câu 9 :

Bảng 3.9 Bảng thống kê số lượng các chiến lược giải cho câu hỏi 9-a, pha 2

	S9a-1	S9a-2	S9a-3	Tổng	Không biết làm
Số lượng	9	39	12	**60**	20
Tỉ lệ	15%	**65%**	20%		

Phân tích bài làm của học sinh cho thấy ở câu 9-a, S9a-2 hoàn toàn chiếm ưu thế với **39/60** bài làm **(65%)**. Quan sát sinh viên làm bài trong quá trình thực nghiệm, chúng tôi nhận thấy, điều lúng túng duy nhất ở câu hỏi này là các em quên công thức tính biệt thức Δ, quên công thức tính nghiệm của phương trình bậc hai…

Đa số sinh viên được khảo sát đều bắt đầu từ :

Đặt $t=x^2$ suy ra

Phương trình $x^4-2x^2-3=0$ trở thành $t^2-2t-3=0$.

Sự khác biệt giữa các bài bắt đầu từ đây. Số học sinh sai lầm trong tính toán do không thuộc công thức sẽ ra hai nghiệm *t* sai, như vậy mục đích khảo sát của chúng tôi coi như không đạt được nên chúng tôi xếp các bài này vào nhóm "không biết làm" và chỉ xem xét trong số còn lại.

Trong số các bài còn lại thì S9a-3 (chiến lược khác) chiếm 12/60. 100% trong số 12 bài này đều là các chiến lược giải sai. Ví dụ như bài làm chúng tôi xin trích dẫn sau đây:

H12:

Đặt $t = x^2$ suy ra

Phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ trở thành $t^2 - 2t - 3 = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} t = -1 => x = 1 \\ t = 3 => x = 9 \end{array}\right.$$

Như vậy, loại trừ các bài sử dụng S9a-3 và các bài thuộc nhóm "không biết làm", sự chiếm ưu thế tuyệt đối của **S9a-2** cho thấy sự đúng đắn của hợp đồng **R2**: **Học sinh không có nghĩa vụ tìm nghiệm phức với kiểu bài toán "giải phương trình" mà đề bài không ghi rõ tập nghiệm cần tìm là tập phức"**

Câu 9-b

Bảng 3.10 Bảng thống kê số lượng các chiến lược giải cho câu hỏi 9-b, pha 2

	S9b-1	**S9b-2**	**S9b-3**	**Tổng**	**Không biết làm**
Số lượng	22	43	2	67	13
Tỉ lệ	32.8%	**64.2%**	3%		

Tương tự như câu 9-a, ở câu 9-b, ưu thế tuyệt đối thuộc về chiến lược S9b-2, chiến lược « tìm nghiệm thực ». Trong quá trình theo dõi học sinh làm bài, chúng tôi nhận thấy các học sinh này khi tính ra $\Delta < 0$ thì kết luận ngay phương trình vô nghiệm **không chút do dự**.

Như vậy, rõ ràng là ở bài toán này, chiến lược « tìm nghiệm thực » được ưu tiên ở cả hai câu a và b, mặc dù tập số lớn nhất mà học sinh đã được học là tập số phức chứ không phải tập số thực. Điều này đúng như đã dự đoán của chúng tôi ở chương 2, theo như mong muốn của thể chế. Đối với loại toán giải phương trình bậc hai hoặc trùng phương trong tập phức, tất cả các bài toán SGK đưa ra đều có ghi rõ « giải phương trình **trong tập số phức ».**

Như vậy, với kết quả thu được của câu 9, chúng tôi đã kiểm chứng được sự đúng đắn của hợp đồng **R2**: **Học sinh không có nghĩa vụ tìm nghiệm phức với kiểu bài toán "giải phương trình" mà đề bài không ghi rõ tập nghiệm cần tìm là tập phức.**

Bên cạnh đó, một phần của giả thuyết H2: "Có sự lẫn lộn giữa nghiệm thực và nghiệm phức" cũng được kiểm chứng.

Câu 10 :

Bảng 3.11 Bảng thống kê số lượng các chiến lược giải cho câu hỏi 10-a, pha 2

Chiến lược	**Số lượng**

S10a-1	**40**
S10a-2	**21**
Chiến lược khác	**25**

Bảng 3.12 Bảng thống kê số lượng các chiến lược giải cho câu hỏi 10-b, pha 2

Chiến lược	**Số lượng**
S10b-1	55
S10b-2	19
Chiến lược khác	22

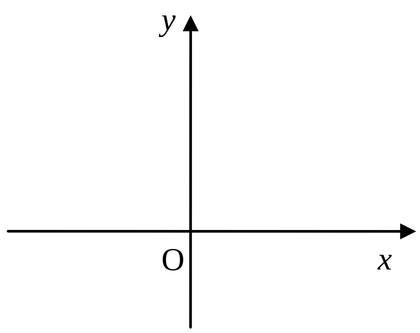
Các số liệu trong bảng thống kê trên cho thấy những dự đoán trong phân tích tiên nghiệm của chúng tôi đã được kiểm chứng. Với hai phương trình được cho, các chiến lược giải S10a-2 và S10b-2 tưởng chừng như không thể xảy ra nhưng vẫn có đến 21 sinh viên chon S10a-2 và 19 sinh viên chọn S10b-2, điều đó phần nào khẳng định tính hợp thức của hợp đồng **R1.**

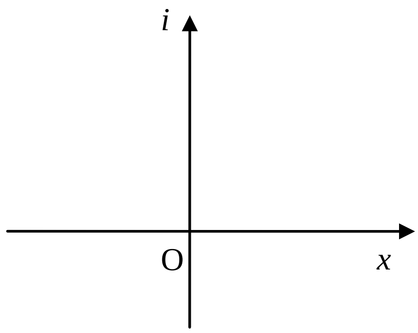
Câu 11 :

Bảng 3.13 Bảng thống kê số lượng các câu trả lời được học sinh lựa khoanh tròn cho câu hỏi 11, pha 2

	a	**b**	**C**	**d**	**E**	**F**
Số lượng	15/80	41/80	17/80	37/80	18/80	6
Tỉ lệ	18.8%	**51.3%**	21.2%	**46.3%**	22.5%	4.5%

Theo như số liệu trên bảng thống kê trên thì rõ ràng đáp án b và d chiếm ưu thế. Trong khi tiến hành thực nghiệm, chúng tôi quan sát thấy sinh viên đã rất phân vân khi chọn lựa giữa các đáp án b, d và e. Đáng lưu ý là có 20 bài làm chọn cả 2 đáp án b và d. Và có 10 bài chọn đáp án d xong rồi gạch bỏ. Như thế, có thể nhận thấy rõ sự **phân vân** của học sinh khi đứng trước hai hệ trục tọa độ :





Hệ trục nào là hệ trục tọa độ trong mặt phẳng phức ?

Tổng số sinh viên chọn hai đáp án a và c là **32/80 (40%),** một con số không nhỏ cho thấy trong học sinh có sự tồn tại sự lẫn lộn giữa **tọa độ của điểm trong mặt phẳng tọa độ thực và tọa độ của điểm biểu diễn số phức.**

Bên cạnh đó, có thể nhận thấy các đáp án a, c, e có tỉ lệ gần như tương đương nhau và không có sự chênh lệch rõ rệt.

Điều này càng khẳng định lại lần nữa sự đúng đắn của một phần giả thuyết **H2: « Có sự lẫn lộn giữa mặt phẳng tọa độ thực và mặt phẳng tọa độ phức ».**

3.4. Thực nghiệm đối với giáo viên

Thực nghiệm được tiến hành trên 20 giáo viên dạy khối 12 của các trường THPT Ngô Quyền tại Biên Hòa, Đồng Nai và các trường THPT Trung Phú, THPT Trần Đại Nghĩa, THPT Trường Chinh tại Thành phố Hồ Chí Minh.

3.4.1. Mục đích thực nghiệm

Tìm hiểu quan điểm của giáo viên khi giảng dạy dạng toán Giải phương trình trong chương số phức. Qua đó, kiểm chứng một phần giả thuyết H2: "Có sự nhầm lẫn giữa nghiệm thực và nghiệm ảo trong dạy học số phức" và trả lời các câu hỏi chúng tôi nêu ra ở cuối chương 2.

3.4.2. Giới thiệu và phân tích bộ câu hỏi điều tra

Ở phần thực nghiệm này chúng tôi đưa ra 3 câu hỏi điều tra (bộ câu hỏi điều tra chi tiết được đính kèm trong phần PHỤ LỤC)

Câu 1:

Cho bài toán:

Giải các phương trình ẩn x sau đây:

1) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

2) $x^2 - x + 1 = 0$

a) Thầy (cô) hãy cho lời giải mà thầy (cô) mong đợi từ học sinh của mình cho bài toán trên.

b) Khi dạy chương số phức, thầy (cô) có cho học sinh làm bài toán trên hay không? Tại sao?

Nếu không, theo thầy (cô) nên chỉnh sửa bài toán trên thế nào cho phù hợp? Xin thầy (cô) vui lòng ghi đầy đủ đề toán mà thầy (cô) đề nghị nên cho học sinh làm thay bài toán trên.

Với câu hỏi 1, bài toán chúng tôi đưa ra là một kiểu nhiệm vụ quen thuộc trong SGK Giải tích toán 12 cả ban nâng cao lẫn ban cơ bản. Chỉ khác ở chỗ, trong SGK, đề bài ghi rõ "Giải phương trình sau trong tập số phức", còn bài toán chúng tôi đưa ra thì chỉ yêu cầu tìm nghiệm chứ không nhắc đến tập số. Tuy nhiên, chúng tôi dự đoán, chiến lược giải mà nghiệm của phương trình có chứa cả nghiệm phức sẽ chiếm ưu thế. Đa số giáo viên mong muốn học sinh sẽ tìm cả nghiệm thực và ảo, điều đó cho phép chúng tôi khẳng định giáo viên không có nghĩa vụ phân biệt cho học sinh nghiệm thực hay nghiệm ảo.

Trong giảng dạy, chúng tôi dự đoán 100% giáo viên sẽ chọn có cho học sinh giải các phương trình có dạng như bài toán chúng tôi đưa ra. Lí do được trả lời sẽ là: do yêu cầu của chương trình, để luyện tập cho học sinh các kĩ năng giải phương trình trong tập số phức, ... Tuy nhiên, yêu cầu mà giáo viên kèm theo đó là cần ghi rõ là giải phương trình ***trong tập số phức.***

Câu 2: Theo thầy (cô) thì học sinh thường gặp những sai lầm gì khi học chương số phức?

Ở câu hỏi 2 này, thông qua những sai lầm mà học sinh thường gặp khi học số phức mà giáo viên nêu lên, chúng tôi mong muốn sẽ kiểm chứng được một phần giả thuyết H2. Theo như phân tích sách giáo khoa và phỏng vấn trực tiếp giáo viên trước khi thực nghiệm, tuy đây là câu hỏi mở, nhưng các câu trả lời của giáo viên về những sai lầm của học sinh có thể xoay quanh việc tính toán số phức, đặc biệt học sinh sẽ hay nhầm lẫn khi giải phương trình trong tập số phức, thường nhầm lẫn là đi tìm nghiệm thực thay vì phải đi tìm nghiệm phức, có sự lẫn lộn giữa số thực và số phức.

Câu 3: Khi dạy chương số phức, thầy (cô) có cho phép học sinh sử dụng máy tính bỏ túi không? Tại sao? Nếu có, thầy (cô) thường cho học sinh sử dụng trong hững phần nào của chương?

Khi phân tích sách giáo khoa, chúng tôi rút ra được rằng mặc dù máy tính bỏ túi rất hữu dụng trong tính toán và làm việc trên số phức nhưng thể chế lại hạn chế việc sử dụng máy tính của học sinh. Câu hỏi 3 chúng tôi đưa ra nhằm khảo sát xem trong thực tế giảng dạy, việc sử dụng máy tính bỏ túi có được giáo viên tuân theo đúng như ràng buộc của thể chế hay không. Dự đoán của chúng tôi là mặc dù sách giáo khoa không hướng dẫn học sinh sử dụng máy tính bỏ túi (đồng nghĩa với việc "hạn chế") tuy nhiên, trong giảng dạy, máy tính bỏ túi vẫn được giáo viên đồng ý cho học sinh sử dụng. Nhưng do thể chế không cho phép nên việc sử dụng máy tính bỏ túi trong khi làm việc với số phức của học sinh chỉ được hạn chế trong phạm vi thử lại kết quả bài toán, sau khi giải bằng các phương pháp đại số không dùng máy tính.

3.4.3. Phân tích kết quả thu được

Sau khi gửi phiếu tham khảo ý kiến cho giáo viên đang giảng dạy lớp 12 của 4 trường nói trên, chúng tôi thu về được 20 phiếu trả lời.

Ở câu hỏi 1:

8/20 giáo viên được hỏi chọn chiến lược **S1b** cho câu 1) và chiến lược **S2a** cho câu 2):

1) Đặt $t = x^2$

Phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ *trở thành*

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = -1$ *(loại) hoặc* $t = 3$ *(nhận)*

$t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

2) $\Delta = -3 < 0 \Rightarrow$ *phương trình vô nghiệm.*

Như vậy, với yêu cầu như trên của bài toán, giáo viên đã mong đợi học sinh sẽ giải bài toán này trên tập số thực chứ không phải tập số lớn nhất là tập số phức như các em đã được học.

Đi kèm theo đó, chúng tôi sẽ trích dẫn ra đây một số câu trả lời của các giáo viên thuộc nhóm này cho câu b:

G1 đã đề nghị sửa bài toán này lại như sau:

"Nên ghi lại: Giải các phương trình ẩn x ***trên tập số phức.*** *Khi đó, lời giải sẽ là:*

1) $x^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow x = \pm i$

2) $\Delta = -3 = 3i^2 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ *"*

Còn G2 thì cho rằng:

"Khi dạy chương số phức, tôi cho học sinh làm bài toán trên vì đây là các phương trình bậc 2 cơ bản có nghiệm phức.

Tuy nhiên, bài toán trên phải chỉnh sửa:

Giải các phương trình ẩn x sau đây ***trên tập số phức:***

1) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ *2)* $x^2 - x + 1 = 0$ *"*

G3: *"Khi dạy chương số phức có cho học sinh làm bài toán trên. Nhưng phải ghi rõ là* ***giải phương trình trong số phức****"*

Như vậy, đối với các giáo viên này, cần phải phân biệt rõ cho học sinh là các em cần tìm nghiệm của phương trình trong tập số nào. Hay "học sinh không có nghĩa vụ tìm nghiệm phức với loại bài tập "giải phương trình" nếu đề bài không ghi rõ "trên tập số phức""

Bên cạnh đó, 12/20 giáo viên chọn lời giải cho bài toán như sau:

a) Đặt $t = x^2$

Phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ *trở thành*

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i \\ t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

b)

$$\Delta = -3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$$

Có thể hiểu rằng theo nhóm 12 giáo viên này, đối với yêu cầu như trên của bài toán thì phải tìm nghiệm của phương trình trong tập số phức – tập số lớn nhất mà học sinh đã học. Tuy nhiên, khi xem xét câu trả lời cho câu hỏi 2 của 12 giáo viên trong nhóm này, chúng tôi nhận thấy 100% trong số họ đều khẳng định học sinh thường xuyên mắc sai lầm khi giải phương trình dạng như trên. Ví dụ như nhận xét của G10:

G10: *Giải phương trình có hệ số thực nhưng có nghiệm phức (như hai VD trên, học sinh có thể kết luận phương trình 1) có hai nghiệm* $x = \pm\sqrt{3}$*, phương trình 2) vô nghiệm.*

Như vậy, tỉ lệ gần như tương đương nhau của hai nhóm giáo viên giữa hai chiến lược được chọn cho thấy ngay cả trong giáo viên cũng có hai luồng quan điểm chưa thống nhất:

- Với yêu cầu bài toán là "Giải phương trình" thì học sinh có nghĩa vụ phải tìm cả nghiệm phức của phương trình đó.
- Với yêu cầu bài toán là "Giải phương trình" thì học sinh không có nghĩa vụ phải tìm cả nghiệm phức của phương trình đó. Học sinh chỉ có nghĩa vụ tìm nghiệm phức khi trong yêu cầu của bài toán có nêu rõ tập nghiệm cần tìm là tập số phức.

Trở lại nghiên cứu của chúng tôi ở chương 2 (xem phần B mục 2, kiểu nhiệm vụ T'8), có thể lí giải hiện tượng này như sau: ngay trong chương "Số phức", kiểu nhiệm vụ "Giải phương trình" cũng được trình bày theo hai cách: có hoặc không có xác định rõ nghiệm có thuộc tập số phức không ngay trên đề bài.

Như thế, có thể kết luận rằng sự tồn tại song song hai quan điểm trên của giáo viên là do ràng buộc của thể chế.

Sang câu hỏi 2,

Kết quả thu được cho thấy 100% giáo viên được hỏi cho rằng học sinh thường xuyên gặp những sai lầm khi giải phương trình trong tập số phức. Sau đây chúng tôi trích dẫn một số câu trả lời của giáo viên:

- **G1:** *các em quen giải phương trình trên* $\mathbb{R}$ *nên khi gặp* $\Delta < 0$ *hay* $x^2 = -1$ *thường kết luận phương trình vô nghiệm.*
- **G12:** *giải phương trình bậc 4 trùng phương bằng phương pháp đặt ẩn phụ ra* $t < 0$ *loại.*
- **G8:** *không biết* $x^2 = -1$ *có nghiệm phức.*
- **G6:** *Học sinh thường theo thói quen kết luận phương trình vô nghiệm.*
- **G16:** *Khi giải phương trình học sinh hay nhận loại sai nghiệm (vì trên* $\mathbb{R}$ *thì phương trình có thể vô nghiệm nhưng trên* $\mathbb{C}$ *thì có nghiệm)*
- **G11:** *Thường nhầm lẫn nghiệm thực và nghiệm phức khi giải phương trình trên tập số phức.*
- **G3:** *Những sai lầm khi học sinh đặt* $t = x^2$ *các em hay loại* $t < 0$.
- **G20:** *Do học sinh quen cách giải phương trình bậc 2 trong tập số thực nên học sinh thường dừng lời giải khi tính* $\Delta < 0$ *và kết luận phương trình vô nghiệm.*

Bên cạnh đó, một khó khăn nữa của học sinh cũng được số đông giáo viên đề cập đến đó là phân biệt giữa số thực và số phức.

- **G16:** không phân biệt được $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}$.
- **G11:** thường nhầm lẫn giữa số thực và số phức.

Như vậy, với 100% câu trả lời cho việc học sinh thường xuyên gặp sai lầm khi giải phương trình trong tập số phức là nhầm lẫn giữa việc tìm nghiệm phức với nghiệm thực. Điều đó cho phép chúng tôi hợp thức một phần giả thuyết H2: có sự lẫn lộn giữa nghiệm thực và nghiệm phức khi giải phương trình.

Cuối cùng là câu hỏi 3,

17/20 giáo viên được khảo sát trả lời rằng cho phép học sinh sử dụng máy tính nhưng với lưu ý là chỉ cho sử dụng để kiểm tra kết quả chứ không được ra kết quả trực tiếp bằng máy tính. Điều này cho thấy ràng buộc của sách giáo khoa có hiệu lực. Tuy trong cả sách giáo khoa lẫn sách giáo viên không hề đề cập đến việc sử dụng máy tính trong giải toán chương "số phức" nhưng qua các câu trả lời của giáo viên, ta có thể nhận thấy giáo viên nhìn nhận sự việc đó theo nghĩa ***"không được phép"*** và trong giảng dạy, họ đã tuân thủ đúng như thể chế mong muốn: không cho học sinh sử dụng máy tính để tính toán ra đáp án một cách trực tiếp trong bài làm mà chỉ dùng như một cách để kiểm tra kết quả.

Sau đây là trích dẫn một số ý kiến của giáo viên:

- **G2:** *cho học sinh sử dụng máy tính trong tất cả các phần của chương. Chỉ lưu ý học sinh là* ***phải trình bày dầy đủ không làm tắt*** *(máy tính có thể dùng để* ***kiểm tra kết quả*** khi làm bài)
- **G20:** *khi giải phương trình trong tập phức, dùng máy tính để* ***kiểm tra kết quả*** **-** *kịp thời phát hiện những sai sót khi làm bài.*
- **G7:** *chỉ cho học sinh sử dụng máy tính để thực hiện* ***kiểm tra kết quả*** *sau khi đã tính toán theo đúng lí thuyết đã học.*
- **G18:** *có, nhưng chỉ khuyến khích học sinh dùng máy tính để* ***kiểm tra lại các kết quả đã tính toán****.*

Chỉ có 3/20 giáo viên cho rằng không nên cho học sinh dùng máy tính, lí do được đưa ra là :

- **G3:** *Không nên cho học sinh sử dụng máy tính bỏ túi vì có một số máy tính hiện nay giải được phương trình trên tập hợp số phức và ra luôn cả căn sô. Nên cho học sinh kiểm tra lại đáp số sau khi tự bản thân học sinh giải phương trình xong vì nếu lạm dụng máy tính bỏ túi học sinh sẽ không biết thuật toán tìm nghiệm phức của phương trình, khi không có máy tính các em sẽ không làm được.*
- **G11:** *Đối với các bài trong sách giáo khoa thì không cần thiết. Khi tính toán học sinh nhận biết dạng số phức và rèn luyện kĩ năng biến đổi.*
- **G5:** *Cũng không cần thiết phải sử dụng máy tính.*

Một số kết luận

- Như vậy, qua ba câu hỏi đã được chúng tôi lựa chọn để khảo sát trên giáo viên, các kết quả thu được cho phép chúng tôi khẳng định phần nào giả thuyết **H2** và có thể phần nào góp phần lí giải cho ứng xử của học sinh đối với kiểu nhiệm vụ "giải phương trình" trong tập số phức.
- Qua thực nghiệm này, chúng tôi đã rút ra được ứng xử của giáo viên với vấn đề sử dụng máy tính bỏ túi của học sinh trong khi học chương "số phức": chỉ được dùng máy tính bỏ túi để kiểm tra kết quả chứ không được dùng để ra kết quả trực tiếp trong bài làm. Điều này dẫn chúng tôi tới câu hỏi: Tại sao máy tính bỏ túi hữu dụng như thế trong tính toán số phức và giải các phương trình số phức nhưng lại không được thể chế ưu tiên sử dụng?

KẾT LUẬN

Đề tài nghiên cứu của chúng tôi khép lại với các kết quả chính thu được như sau:

Việc nghiên cứu khoa học luận của khái niệm số phức trong **chương 1** đã giúp chúng tôi tìm ra câu trả lời cho câu hỏi nghiên cứu **Q1,** làm rõ các giai đoạn phát triển, những đặc trưng cơ bản và những đối tượng toán học đã góp phần làm nảy sinh và tiến triển khái niệm này. Chúng tôi đã xác định được:

- Tiến trình xuất hiện của khái niệm số phức trong lịch sử gồm 4 giai đoạn:
  - Giai đoạn 1: Giai đoạn “Cách viết trung gian”
  - Giai đoạn 2: Giai đoạn kí hiệu hình thức các “đại lượng ảo”
  - Giai đoạn 3: Biểu diễn hình học các đại lượng ảo
  - Giai đoạn 4: Đại số các số phức

  Những đặc trưng cơ bản của số phức trong mỗi giai đoạn đã được chúng tôi tổng kết trong phần kết luận của chương 1.
- Số phức được nảy sinh trong lịch sử là để giải quyết nhu cầu tìm nghiệm thực của **phương trình bậc ba**. Và đến lượt mình, việc nghiên cứu số phức là động lực thúc đẩy sự nảy sinh và phát triển của **đối tượng vectơ**. Bên cạnh đó, cũng từ động cơ nghiên cứu tính hợp thức của số phức mà Hamilton đã khám phá ra các **quaternions**.

Nghiên cứu mối quan hệ thể chế đối với khái niệm số phức trong **chương 2** đã cho phép làm rõ những đặc trưng cơ bản của mối quan hệ thể chế với khái niệm số phức. Qua đó, chúng tôi đã tìm hiểu được lí do và cách thức đưa số phức vào giảng dạy trong thể chế dạy học toán THPT ở Việt Nam, những ràng buộc của thể chế lên việc dạy học số phức ở giáo viên và học sinh. Đặc biệt, chúng tôi đã trả lời được các câu hỏi nghiên cứu **Q2, Q3** đặt ra ở phần mở đầu.

Kết quả phân tích mối quan hệ thể chế cũng dẫn chúng tôi đến với hai giả thuyết **H1, H2** và một số câu hỏi nghiên cứu mới. Kết quả nghiên cứu trong phần thực nghiệm ở **chương 3** đã hợp thức hóa các giả thuyết và tìm lời giải đáp cho các câu hỏi mới này.

Hướng nghiên cứu mới mở ra từ luận văn: Nghiên cứu tiến trình và xây dựng những tình huống đưa vào khái niệm số phức trong hệ thống dạy học ở trường phổ thông sao cho khái niệm này có được tối đa những đặc trưng khoa học luận cơ bản như đã làm rõ trong chương 1.

PHỤ LỤC

- Phiếu thực nghiệm số 1 dành cho sinh viên.
- Phiếu thực nghiệm số 2 dành cho sinh viên.
- Phiếu thực nghiệm dành cho giáo viên.

Họ tên sinh viên:___________________________________ Lớp:_____________

Trường: Cao Đẳng Sư Phạm Tây Ninh

PHIẾU SỐ 1

(Thời gian làm bài: 5 phút)

Câu 1 : Bạn muốn giải thích cho một bạn ***Số phức là gì***, bạn giải thích như thế nào ?

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 2 : Hãy cho 3 ví dụ khác nhau về số phức :

....

....

....

Cám ơn các bạn đã nhiệt tình giúp đỡ chúng tôi hoàn thành bài thực nghiệm này.

Họ tên sinh viên:_________________ Lớp:_______________

Trường: Cao Đẳng Sư Phạm Tây Ninh

PHIẾU SỐ 2

(Thời gian làm bài: 40 phút)

Câu 3: Các phát biểu sau đây đúng hay sai? Đánh dấu $\sqrt{}$ vào ô mà bạn chọn.

Phát biểu	Đúng	Sai
a) Số phức là một đa thức ẩn *i*		
b) Số phức là biểu thức đại số biến *i*		
c) Số phức là một vectơ		
d) Số phức là một điểm		

Câu 4: Các số cho trong bảng sau có phải là số phức không? Vì sao?

Số	Là số phức	Không là số phức	Giải thích vì sao? *(Nếu là số phức thì chỉ rõ phần thực và phần ảo của nó)*
0			
$\sqrt{3}$			
$7i-1$			
$2+8a$			
$1+5i+3i$			
$2x+5i\times 4i$ với $x\in\mathbb{R}$			
$3x+2y+5i$ với $x,y\in\mathbb{R}$			
$6+5y$ với $y^2=-1$			

Câu 5: Để $2x+5i$ là số phức thì x phải thỏa điều kiện gì?

....

....

....

Câu 6: Đánh dấu $\sqrt{}$ vào ***một hay nhiều ô*** sau đây mà bạn cho là đúng.

Số phức $1+\sqrt{2}i$ có:

- Phần thực là 1, phần ảo là $\sqrt{2}i$
- Phần thực là 1, phần ảo là $\sqrt{2}$
- Phần thực là $1+\sqrt{2}$, phần ảo là i
- Phần thực là 1, phần ảo là i.

Câu 7: Đánh dấu $\sqrt{}$ vào ***một hay nhiều ô*** sau đây mà bạn cho là đúng.

Số phức $(2+3i)^2$ có:

- Phần thực là 2, phần ảo là 3
- Phần thực là 4, phần ảo là 9
- Phần thực là 2, phần ảo là $3i$
- Phần thực là -5, phần ảo là $12i$
- Phần thực là -5, phần ảo là 12.

Câu 8: Giải các phương trình ***ẩn x, y*** sau đây:

Phương trình	**Lời giải**
a) $ix+3y=i+1$	....
b) $4x^2.i+x=4i+1$	....

Câu 9: Giải các phương trình ***ẩn x*** sau đây:

Phương trình	**Lời giải**
a) $x^4-2x^2-3=0$	....

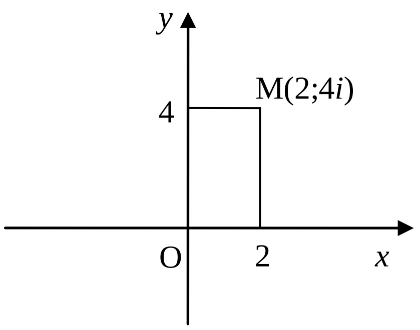
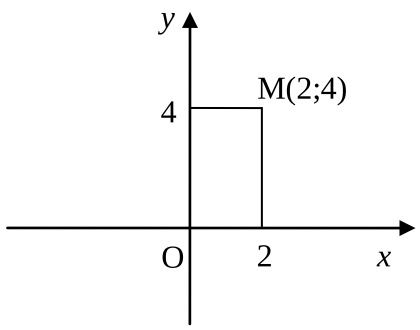
	…………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………
b) $x^2 - x + 1 = 0$	…………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………

Câu 10: Giải các phương trình ***ẩn i*** sau đây:

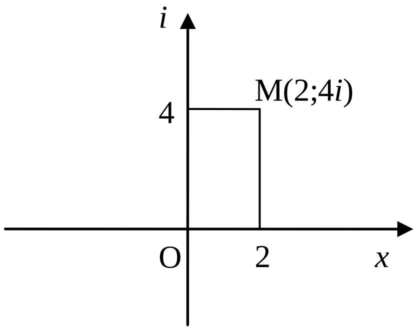
Phương trình	Lời giải
a) $a + 4ai = 2a$	…………………………………………………………………………….. …………………………………………………………………………….. …………………………………………………………………………….. …………………………………………………………………………….. ……………………………………………………………………………..
b) $i + 3 = 9 - 2i$	…………………………………………………………………………….. …………………………………………………………………………….. …………………………………………………………………………….. …………………………………………………………………………….. ……………………………………………………………………………..

Câu 11: M là điểm biểu diễn số phức $2 + 4i$. Hình vẽ nào sau đây là đúng?

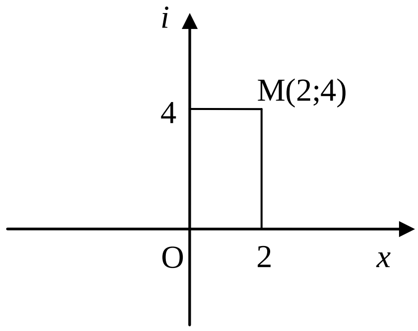
(Hãy khoanh tròn vào các câu mà bạn cho là đúng)

a)	b)
	

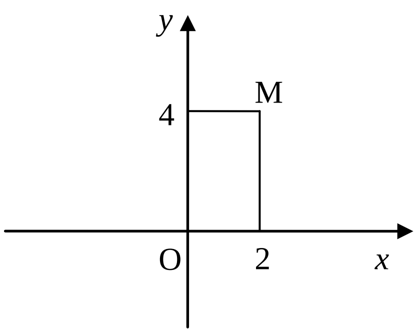
c)



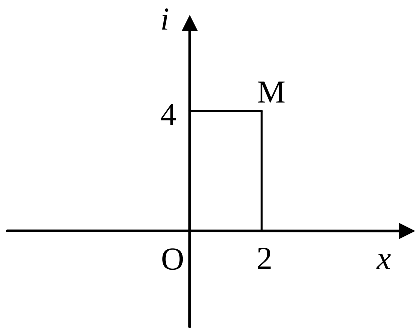
d)



e)



f)



Cám ơn các bạn đã nhiệt tình giúp đỡ chúng tôi hoàn thành bài thực nghiệm này.

Kính thưa quý thầy cô,

Chúng tôi đang thực hiện một nghiên cứu nhỏ với đề tài: "Dạy học số phức ở trường phổ thông", rất mong được tham khảo ý kiến của quý thầy cô. Cám ơn quý thầy cô đã dành chút ít thời gian để giúp đỡ chúng tôi trả lời các câu hỏi trong phiếu này.

Câu 1: Cho bài toán:

*Giải các phương trình **ẩn x** sau đây:*
1) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
2) $x^2 - x + 1 = 0$

a) Thầy (cô) hãy cho lời giải mà thầy (cô) mong đợi từ học sinh của mình cho bài toán trên

....

....

....

....

....

....

b) Khi dạy chương số phức, thầy (cô) có cho học sinh làm bài toán trên hay không? Tại sao?

....

....

....

....

....

Nếu không, theo thầy (cô) nên chỉnh sửa bài toán trên thế nào cho phù hợp? Xin thầy (cô) vui lòng ghi đầy đủ đề toán mà thầy (cô) đề nghị nên cho học sinh làm thay bài toán trên.

....

....

....

....

....

....

....

Câu 2: Theo thầy (cô) thì học sinh thường gặp những sai lầm gì khi học chương số phức?

....

....

....

....

....

....

....

Câu 3: Khi dạy chương số phức, thầy (cô) có cho phép học sinh sử dụng máy tính bỏ túi không? Tại sao? Nếu có, thầy (cô) thường cho học sinh sử dụng trong những phần nào của chương?

....
....
....
....
....
....
....

Cám ơn quý thầy cô đã nhiệt tình giúp đỡ chúng tôi trả lời phiếu câu hỏi này

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến (2003), *Vai trò của phân tích khoa học luận lịch sử toán học trong nghiên cứu và thưc hành dạy học môn toán,* Đề tài nghiên cứu khoa học cấp bộ, mã số B2001–23-02.

2. Lê Văn Tiến (2003), "Trong nghiên cứu toán học, "biết vi phạm qui tắc" có thể lại là khởi nguồn của sáng tạo", *Tạp chí "Dạy và học ngày nay" số 6, Tạp chí "Thế giới toán –tin" – Khoa toán ĐHSP tp. HCM tháng 4/2003.*

3. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên, 2008), *Giải tích 12,* NXB Giáo dục.

4. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên, 2008), *Giải tích 12, sách giáo viên,* NXB Giáo dục.

5. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên, 2008), *Giải tích 12 nâng cao,* NXB Giáo dục.

6. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên, 2008), *Giải tích 12 nâng cao, sách giáo viên.* NXB Giáo dục.

7. Hoàng Dũng (1999), *Nhập môn cơ học lượng tử,* NXB Giáo dục.

8. Nguyễn Kim Đính (2003), *Kỹ thuật điện,* NXB Đại học quốc gia Tp.HCM.

9. Phạm Thị Cư (1996), *Mạch điện,* NXB Giáo dục.

10. Trần Trịnh Ninh, Trần Trí Đức (dịch, 1976), *Toán học trong thế giới ngày nay,* NXB Khoa Học và Kĩ Thuật, Hà Nội.

Tiếng Anh

11. Denise Arnold, Graham Arnold (2001), *Cambridge Mathematics 4 unit*, Cambridge University Press.

12. Orlando Merino (2006), *A short history of Complex Numbers.*

13. CS Toh (2007), *A-Level Study Guide Mathematics (Higher 2),* Step-by-step Managements Pte.Ltd, Singapore.