

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HỒ CHÍ MINH**

Nguyễn Viết Thăng

**ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA MỘT SỐ LỚP ÁNH
XẠ ĐA TRỊ**

Chuyên ngành: **Toán giải tích**

Mã số: **60 46 01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

TS. TRẦN ĐÌNH THANH

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin chân thành cảm ơn sâu sắc đến PGS.TS. Nguyễn Bích Huy và TS. Trần Đình Thanh đã tận tình hướng dẫn tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các Thầy phản biện đã nhận xét và đóng góp cho tôi những ý kiến quý báu.

Tôi xin chân thành cảm ơn quý thầy cô đã nhiệt tình giảng dạy trong thời gian tôi học tập tại trường Đại học Sư phạm Tp HCM và đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin cảm ơn bạn bè và người thân đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và thực hiện luận văn này.

Tp. HCM, tháng 10 năm 2010

Học viên

Nguyễn Viết Thắng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Nhiều hiện tượng trong tự nhiên và xã hội dẫn đến việc nghiên cứu sự tồn tại, duy nhất và xây dựng xấp xỉ cho các phương trình phi tuyến. Phương pháp điểm bất động là một trong các phương pháp quan trọng và hữu hiệu nhất để chứng minh sự tồn tại và nghiên cứu cấu trúc tập nghiệm của các lớp phương trình phi tuyến khác nhau. Lý thuyết điểm bất động ra đời từ những năm 1920, được phát triển và hoàn thiện cho tới ngày nay để có thể áp dụng cho ngày càng nhiều lớp phương trình.

Cùng với sự phát triển của khoa học và do nhu cầu phát triển nội tại của Toán học, các ánh xạ đa trị đã được đưa vào nghiên cứu từ những năm 1950. Chúng là công cụ hữu hiệu để mô tả nhiều hiện tượng của tự nhiên, xã hội, kinh tế... Từ đó nảy sinh ra yêu cầu phát triển các phương pháp nghiên cứu với ánh xạ đa trị, trong đó có phương pháp điểm bất động.

Cho đến nay, lý thuyết điểm bất động cho các ánh xạ đa trị đã thu được nhiều kết quả có giá trị. Tuy nhiên đây vẫn là hướng nghiên cứu đang được các nhà Toán học quan tâm nghiên cứu và hứa hẹn được tới những kết quả thú vị về lý thuyết cũng như ứng dụng.

Mục tiêu của luận văn là giới thiệu những kết quả ban đầu về lý thuyết điểm bất động của các ánh xạ đa trị. Cụ thể luận văn trình bày các định lý điểm bất động và các vấn đề liên quan cho các lớp ánh xạ dạng co, ánh xạ đa trị có giá trị lõi và không lõi, ánh xạ đa trị tăng và các ánh xạ đưa về ánh xạ tăng trong không gian có thứ tự. Các lớp ánh xạ này được nghiên cứu bằng các phương pháp khác nhau như phương pháp sử dụng lát cắt đơn điệu, phương pháp bậc tôpô, phương pháp sử dụng nguyên lý Entropy...

2. Nội dung luận văn

Ngoài phần mở đầu và phần kết luận, luận văn có 2 chương.

Chương 1 gồm các khái niệm về ánh xạ đa trị, các định lý về điểm bất động của các lớp ánh xạ có tính chất co, có giá trị lõi và không lõi.

Phần 1.1 nhắc lại các khái niệm về ánh xạ đa trị; một số thuật ngữ và ký hiệu liên quan. Các kết quả này được trích từ tài liệu tham khảo.

Phần 1.2 trình bày định lý về điểm bất động của ánh xạ đa trị có tính chất co, tính chất của tập điểm bất động của ánh xạ đa trị có tính chất co. Đây là mở rộng nguyên lý điểm bất động của Banach, phần này chúng tôi tham khảo [3]

Phần 1.3 trình bày các định lý về điểm bất động của ánh xạ đa trị có giá trị lõi, từ Định lý định lý điểm bất động Bruwer $\Rightarrow$ Bất đẳng thức KyFan $\Rightarrow$ Định lý 1.3.6 về điểm cân bằng $\Rightarrow$ Định lý điểm bất động Kakutani. Phần này chúng tôi tham khảo trong [3], [6], [7].

Phần 1.4 trình bày các định lý liên quan đến điểm bất động của ánh xạ có giá trị không lõi. Phần này chúng tôi tham khảo trong [3].

Chương 2 gồm các khái niệm về không gian Banach có thứ tự, các định lý điểm bất động của ánh xạ đa trị tăng có tính chất co, compact và T – đơn điệu trong không gian Banach có thứ tự. Phần này chúng tôi tham khảo [2], [4], [5].

Phần 2.1, 2.2 trình bày các khái niệm và kết quả của không gian Banach có thứ tự và ánh xạ đa trị đơn điệu.

Phần 2.3 trình bày các định lý về điểm bất động của ánh xạ đa trị tăng là mở rộng định lý Tarskii.

Phần 2.4 trình bày các định lý về điểm bất động của ánh xạ đa trị tăng có tính chất co.

Phần 2.5 trình bày các toán tử có liên quan tới tính chất compact.

Phần 2.6 trình bày về điểm bất động của ánh xạ T – đơn điệu đa trị.

3. Phương pháp nghiên cứu

1. Phương pháp lát cắt đơn điệu, ứng dụng các định lý cơ bản về tập có thứ tự.
2. Phương pháp bậc tôpô.
3. phương pháp sử dụng nguyên lý Entropy...

Chương 1

ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA MỘT SỐ LỚP ÁNH XẠ ĐA TRỊ

1.1. CÁC KHÁI NIỆM – KẾT QUẢ ĐƯỢC SỬ DỤNG

1.1.1. Ánh xạ đa trị

Cho X, Y là hai tập bất kỳ, ta ký hiệu 2^Y là họ tất cả các tập con của Y . Một ánh xạ $F: X \rightarrow 2^Y$ gọi là một ánh xạ đa trị từ X vào Y .

Điểm x^* được gọi là điểm bất động của ánh xạ đa trị $F: X \rightarrow 2^X$ nếu $x^* \in F(x^*)$

1.1.2. Một số thuật ngữ và ký hiệu liên quan

- Đồ thị của $F: X \rightarrow 2^Y$ là tập con của $X \times Y$ ký hiệu $\text{gph}F$, định nghĩa bởi $\text{gph}F = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$
- Domain của F (miền hữu hạn) được ký hiệu và định nghĩa: $\text{dom}F = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$
- Miền ảnh ký hiệu $\text{rge}F: \text{rge}F = \{y \in Y : \exists x \in X, y \in F(x)\}$
- Ánh xạ ngược: $F^{-1}: Y \rightarrow 2^X$ của ánh xạ $F: X \rightarrow 2^Y$ được định nghĩa bởi công thức $F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}$, ($y \in Y$)

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \text{gph}F$$

- Đối với mỗi tập $M \subset Y$ ta phân biệt hai loại ảnh ngược sau đây:
 - + Nghịch ảnh của M là: $F^{-}(M) = \{x : F(x) \cap M \neq \emptyset\}$
 - + Nhân của M qua F là: $F^{+}(M) = \{x : F(x) \subset M\}$
- Giả sử $G: X \rightarrow 2^Y; H: Y \rightarrow 2^Z$. Khi đó $H \circ G: X \rightarrow 2^Z$ xác định bởi:
$$(H \circ G)(x) = \bigcup_{y \in G(x)} H(y), \quad \forall x \in X$$
- Cho $F: X \rightarrow 2^Y$ là các ánh xạ đa trị, X, Y là các không gian tôpô.
 - + Nếu $\text{gph}F$ là tập đóng trong không gian tôpô tuyến tính $X \times Y$ thì F được gọi là ánh xạ đóng.
 - + Nếu X, Y là các không gian tuyến tính tôpô và nếu $\text{gph}F$ là tập lồi trong không gian tích $X \times Y$ thì F được gọi là ánh xạ đa trị lồi.
 - + Nếu $F(x)$ là tập đóng $\forall x \in X$ thì F được gọi là ánh xạ có giá trị đóng.
 - + Nếu Y là không gian tuyến tính tôpô và nếu $F(x)$ là tập lồi, $\forall x \in X$ thì F được gọi là ánh xạ có giá trị lồi.

1.1.3. Tính liên tục của ánh xạ đa trị

Định nghĩa 1.1.3.1

Ta nói ánh xạ đa trị F là nửa liên tục trên tại $x \in \text{dom}F$ nếu với mọi tập mở $V \subset Y$ thỏa mãn $F(x) \subset V$ tồn tại lân cận U của x sao cho

$$F(x) \subset V, \quad \forall x \in U$$

Nếu F là nửa liên tục trên tại mọi điểm thuộc $\text{dom}F$, thì F được gọi là nửa liên tục trên ở trong X .

Định nghĩa 1.1.3.2

Ta nói ánh xạ đa trị F là nửa liên tục dưới tại $x \in \text{dom}F$ nếu với mọi tập mở $V \subset Y$ thỏa mãn $F(x) \cap V \neq \emptyset$ tồn tại lân cận U của x sao cho

$$F(x) \cap V \neq \emptyset, \quad \forall x \in U \cap \text{dom}F$$

Nếu F là nửa liên tục dưới tại mọi điểm thuộc $\text{dom}F$, thì F được gọi là nửa liên tục dưới ở trong X .

Định nghĩa 1.1.3.3

Ta nói F là liên tục tại $x \in \text{dom}F$ nếu F đồng thời là nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới tại x .

Nếu F là liên tục tại mọi điểm thuộc $\text{dom}F$, thì F được gọi là liên tục trên X .

Định nghĩa 1.1.3.4 (Ánh xạ hêmi liên tục trên)

Ta nói $F: X \longrightarrow 2^Y$ là hêmi liên tục trên tại $x_0 \in \text{dom}F$ nếu với mọi $p \in Y^*$, hàm số $x \longrightarrow \sigma(F(x), p)$ là nửa liên tục trên tại x_0 .

F gọi là hêmi liên tục nếu nó là hêmi liên tục tại mọi $x \in \text{dom}F$.

1.2. ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ CÓ TÍNH CHẤT CO

Định nghĩa 1.2.1

Cho (X, d_X) là một không gian metric và $A, C \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$.

Đặt $h(A, C) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d_X(a, C), \sup_{c \in C} d_X(c, A) \right\}$, với $h(A, C) = +\infty$ được cho phép. Số thực

$h(A, C)$ được gọi là khoảng cách Housdorff giữa A và C liên quan đến metric d_X .

Với $d_X(x, A)$ là khoảng cách giữa điểm x và tập A nghĩa là $d_X(x, A) = \min_{y \in A} d_X(x, y)$.

Định lý 1.2.2 (Định lý điểm bất động Naler) [3]

Nếu (X, d_X) là một không gian metric đầy đủ và $F: X \rightarrow P_f(X)$ là một ánh xạ h -co (tức là $h(F(x), F(y)) \leq k d_X(x, y)$ với $x, y \in X, k \in [0, 1)$) thì F có điểm bất động tức là $\exists x \in X: x \in F(x)$.

Chứng minh

Chọn $k_1 \in (k, 1)$ và $x_0 \in X$. Sau đó lấy $x_1 \in F(x_0)$ thỏa $x_1 \neq x_0$, tức là $d_X(x_0, x_1) > 0$

(Nếu x_1 không tồn tại thì x_0 là điểm bất động cần tìm của F)

Vì

$$\begin{aligned} d_X(x_1, F(x_1)) &\leq \sup_{x \in F(x_0)} d_X(x, F(x_1)) \\ &\leq \max \left\{ \sup_{x \in F(x_0)} d_X(x, F(x_1)), \sup_{y \in F(x_1)} d_X(y, F(x_0)) \right\} \\ &= h(F(x_0), F(x_1)) \leq k d_X(x_0, x_1) < k_1 d_X(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Theo tính chất inf, ta có $x_2 \in F(x_1)$ sao cho $d_X(x_1, x_2) < k_1 d_X(x_0, x_1)$.

Bằng quy nạp, chúng ta chọn được một dãy $\{x_n\}_{n \geq 1}$ sao cho $x_{n+1} \in F(x_n), \forall n \geq 1$ và

$$d_X(x_n, x_{n+1}) < k_1^n d_X(x_0, x_1), \forall n \geq 1 \quad (1.2.1)$$

Từ bất đẳng thức (1.2.1) ta suy ra rằng $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq X$ là dãy Cauchy.

Do X là đầy đủ nên suy ra $x_n \rightarrow x$ trong X .

Ta chứng minh $x \in F(x)$.

Thật vậy ta có: $d_X(x_{n+1}, F(x)) \leq h(F(x_n), F(x)) \leq k d_X(x_n, x) \rightarrow 0$

Vì vậy $d_X(x, F(x)) = 0$ và vì $F(x)$ là đóng nên chúng ta có $x \in F(x)$.

Ghi chú 2.1.3

- i) Điểm bất động trong Định lý 1.2.1 là không duy nhất.
- ii) Tập các điểm bất động của F (kí hiệu là $\text{Fix}(F)$) là tập đóng.

Chứng minh

i) Nếu $F(x) = X, \forall x \in X$ thì với mọi $x \in X$ là điểm bất động của F .

Lấy $\{x_n\} \subset \text{Fix}(F)$.

ii) Giả sử $x_n \rightarrow x$, ta chứng minh $x \in \text{Fix}(F)$ nghĩa là chứng minh $x \in F(x)$.

Ta có $d_X(x_n, F(x)) \leq h(F(x_n), F(x)) \leq k d_X(x_n, x) \rightarrow 0$

Suy ra $d_X(x, F(x)) = 0$

Vậy $\text{Fix}(F)$ là đóng.

Mệnh đề 1.2.4 [3]

Nếu (X, d_X) là một không gian metric đầy đủ, $F_1, F_2 : X \rightarrow P_{bf}(X)$ là h -co với hằng số co

$k \in [0, 1)$ và $\text{Fix}(F_i)$ kí hiệu là tập điểm bất động của $F_i (i = 1, 2)$ thì

$$h(Fix(F_1), Fix(F_2)) \leq \frac{1}{1-k} \sup_{x \in X} h(F_1(x), F_2(x))$$

Chứng minh

Lấy $\varepsilon > 0$ và chọn $\xi > 0$ sao cho $\xi \sum_{n=1}^{\infty} n.k^n < 1$

$$\text{Đặt } \varepsilon_1 = \xi \varepsilon \frac{1}{1-k}$$

Lấy $x_0 \in Fix(F_1)$ và sau đó chọn $x_1 \in F_2(x_0)$ sao cho

$$d_X(x_0, x_1) \leq h(F_1(x_0), F_2(x_0)) + \varepsilon \quad (1.2.2)$$

Vì $x_0 \in Fix(F_1) \Rightarrow x_0 \in F_1(x_0)$.

$$\text{Đặt } A = \{d_X(x_0, x) : x \in F_2(x_0)\} \Rightarrow \inf A = d_X(x_0, F_2(x_0)) \leq h(F_1(x_0), F_2(x_0))$$

Suy ra $\exists x_1 \in F_2(x_0)$ sao cho $d_X(x_0, x_1) \leq h(F_1(x_0), F_2(x_0)) + \varepsilon$

Vì $h(F_2(x_1), F_2(x_0)) \leq kd_X(x_1, x_0)$ nên chúng ta có thể tìm $x_2 \in F_2(x_1)$ thỏa

$$d_X(x_2, x_1) \leq kd_X(x_1, x_0) + k\varepsilon_1.$$

Thật vậy ta có : $d(x_1; F_2(x_1)) \leq h(F_2(x_0), F_2(x_1)) \leq kd_X(x_0, x_1)$. Suy ra tồn tại $x_2 \in F_2(x_1)$ sao cho $d(x_2, x_1) \leq kd_X(x_0, x_1) + k\varepsilon_1$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chọn được một dãy $\{x_n\}_{n \geq 1}$ sao cho

$$x_{n+1} \in F_2(x_n), \forall n \geq 1 \quad (1.2.3)$$

$$\text{và } d_X(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d_X(x_0, x_1) + nk^n \varepsilon_1 \quad (1.2.4)$$

Từ bất đẳng thức (1.2.4) ta được

$$\sum_{n=m}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k^m}{1-k} d_X(x_0, x_1) + \varepsilon_1 \sum_{n=m}^{\infty} nk^n \quad (1.2.5)$$

Do (2.1.5) nên $\{x_n\}_{n \geq 1}$ là dãy Cauchy, và do (X, d_X) đầy đủ nên ta có:

$$x_n \rightarrow x \text{ trong } X$$

Từ (1.2.3) ta có: $d(x_{n+1}, F_2(x)) \leq h(F_2(x_n), F_2(x)) \leq kd_X(x_n, x) \rightarrow 0$

Suy ra $d(x, F_2(x)) = 0 \Rightarrow x \in F_2(x)$

Vậy $x \in Fix(F_2)$

Hơn nữa từ (1.2.5) và (1.2.2) ta có

$$\begin{aligned} d_X(x_0, x) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} d_X(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{1-k} d_X(x_0, x_1) + \varepsilon_1 \sum_{n=1}^{\infty} nk^n \\ &\leq \frac{1}{1-k} (h(F_1(x_0), F_2(x_0)) + 2\varepsilon) \end{aligned}$$

Suy ra

$$h(Fix(F_1), Fix(F_2)) \leq \frac{1}{1-k} \left\{ \sup_{x \in X} h(F_1(x), F_2(x)) + 2\varepsilon \right\}, \forall \varepsilon > 0.$$

$$\text{Suy ra, } h(Fix(F_1), Fix(F_2)) \leq \frac{1}{1-k} \sup_{x \in X} h(F_1(x), F_2(x)).$$

Hệ quả 1.2.5 [3]

Nếu (X, d_X) là một không gian metric đầy đủ, $F_n, F : X \rightarrow P_{bf}(X)$ với $n \geq 1$ là các hàm h-co với hằng số $k \in [0, 1)$ và $\sup_{x \in X} h(F_n(x), F(x)) \rightarrow 0$,

$$\text{thì } h(Fix(F_n), Fix(F)) \rightarrow 0.$$

Chứng minh

Áp dụng Định lý 1.2.3 ta có

$$h(Fix(F_n), Fix(F)) \leq \frac{1}{1-k} \sup_{x \in X} h(F_n(x), F(x))$$

$$\text{Do } \sup_{x \in X} h(F_n(x), F(x)) \rightarrow 0$$

$$\text{Suy ra, } h(Fix(F_n), Fix(F)) \rightarrow 0.$$

1.3. ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ CÓ GIÁ TRỊ LỖI

Định nghĩa 1.3.1

Giả sử X là không gian metric, $K \subset X$ và $\nu_i, i = 1, 2, \dots, n$ là phủ mở hữu hạn của K . Ta nói các hàm liên tục $\alpha_i : K \rightarrow \mathbb{R}$ là phân hoạch đơn vị liên tục ứng với họ phủ $\{\nu_i\}$ nếu

$$\text{supp}(\alpha_i) = \{x \in K : \alpha_i(x) \neq 0\} \subset \nu_i \text{ và với mọi}$$

$$x \in K, 0 \leq \alpha_i(x) \leq 1; \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) = 1.$$

Định nghĩa 1.3.2

Cho X là một không gian vector.

- Một tập C được gọi là đóng hữu hạn nếu nó giao với một phẳng hữu hạn chiều bất kì $Y \subseteq X$ ($Y = x + L$ với $x \in X$ và L là không gian con hữu hạn chiều của X) là đóng trong không gian tôpô Euclid Y .
- Một họ $\{C_i\}_{i \geq 1}$ của X được gọi là có tính chất giao hữu hạn nếu giao của mỗi họ con hữu hạn là khác rỗng.

Định lý 1.3.3 (Định lý điểm bất động Brouwer) [6]

Ánh xạ f đơn trị liên tục từ một tập lồi compact trong không gian hữu hạn chiều vào chính tập này luôn có điểm bất động, tức là tồn tại điểm x thỏa $f(x) = x$.

Định lý 1.3.4 (Bất đẳng thức Ky Fan) [6], [7]

Giả sử K là tập lồi, compact trong không gian định chuẩn X . Giả sử $\varphi: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa:

i) Với mọi $y \in K, \varphi(\cdot, y)$ là hàm nửa liên tục dưới.

ii) Với mọi $x \in K, \varphi(x, \cdot)$ là hàm lõm.

iii) Với mọi $y \in K, \varphi(y, y) \leq 0$

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in K$ sao cho $\varphi(\bar{x}, y) \leq 0, \forall y \in K$.

Chứng minh

i) Xét trường hợp X hữu hạn chiều.

Giả sử $\forall x \in K, \exists y \in K$ sao cho $\varphi(x, y) > 0$

Với mỗi $y \in K$, đặt $\nu_y = \{x \in K : \varphi(x, y) > 0\}$ (*)

Vì $\varphi(\cdot, y)$ là hàm nửa liên tục dưới nên ν_y là tập mở trong không gian tôpô cảm sinh K .

Từ (*) suy ra $\{\nu_y\}_{y \in K}$ là một phủ mở của K .

Do K compact nên tồn tại $y_1, y_2, \dots, y_n \in K$ sao cho $K \subset \bigcup_{i=1}^n \nu_{y_i}$. Khi đó tồn tại phân hoạch liên tục

$\{\alpha_i\}$ ứng với họ phủ $\{\nu_{y_i}\}_{i=1, \dots, n}$.

Xét ánh xạ (đơn trị) $f: K \rightarrow K$ như sau:

$$\forall x \in K, f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) y_i$$

Vì K là tập lồi, $y_i \in K$ với $i = 1, \dots, n$; $\alpha_i(x) \geq 0$ và $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) = 1$ nên $f(x) \in K, \forall x$.

Do $\alpha_i(\cdot)$ là các hàm liên tục nên $f(x)$ là ánh xạ liên tục.

Theo định lý Brouwer tồn tại $\bar{y} \in K$ sao cho $\bar{y} = f(\bar{y})$

Do giả thiết ii)

$$\varphi(\bar{y}, \bar{y}) = \varphi\left(\bar{y}, \sum_{i=1}^n \alpha_i(\bar{y}) y_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i(\bar{y}) \varphi(\bar{y}, y_i)$$

Đặt $I(\bar{y}) = \{i \in \{1, \dots, n\} : \alpha_i(\bar{y}) > 0\}$ thì $I(\bar{y}) \neq \emptyset$ vì $\sum_{i=1}^n \alpha_i(\bar{y}) = 1$

Ngoài ra ta có $i \in I(\bar{y})$ thì $\bar{y} \in \text{supp} \alpha_i \subset \nu_{y_i}$

Do đó theo định nghĩa ν_y , $\varphi(\bar{y}, y_i) > 0$ suy ra

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(\bar{y}) \varphi(\bar{y}, y_i) = \sum_{i \in I(\bar{y})} \alpha_i(\bar{y}) \varphi(\bar{y}, y_i) > 0$$

Tức $\varphi(\bar{y}, \bar{y}) > 0$ (mâu thuẫn với iii)).

b) Trường hợp X vô hạn chiều.

Gọi S là họ mọi tập hữu hạn, $M = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \subset K$ và đặt $\nu = \sup_{M \in S} \inf_{x \in K} \max_{y_i \in M} \varphi(x, y_i)$

Ta chứng minh $\nu \leq 0$

Gọi S^m là đơn hình $\left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$ và đặt $\varphi_M(\lambda, \mu) = \sum_{j=1}^m \mu_j \varphi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i y_i, y_j\right)$,

$$\lambda, \mu \in S^m$$

Ta thấy φ_M thỏa cả 3 giả thiết cho φ .

Thật vậy

i) Hiển nhiên thỏa.

ii) Thỏa vì φ_M tuyến tính theo μ .

iii) Thỏa vì $\varphi_M(\mu, \mu) = \sum_{i=1}^m \mu_i \varphi\left(\sum_{j=1}^m \mu_j y_i, y_j\right) \leq \varphi\left(\sum_{i=1}^m \mu_i y_i, \sum_{j=1}^m \mu_j y_j\right) \leq 0$

Do đó theo phần a) trên đây, tồn tại $\bar{\lambda} \in S^m$ sao cho

$$\forall \mu \in S^m, \sum_{j=1}^m \mu_j \varphi(\bar{x}, y_j) = \varphi_M(\bar{\lambda}, \mu) \leq 0$$

Với $\bar{x} = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i y_i \in \text{co}M \subset K$.

Bây giờ ta có:

$$\nu_M = \inf_{x \in K} \max_{y_j \in M} \varphi(x, y_j) \leq \max_{y_j \in M} \varphi(\bar{x}, y_j) \leq \sup_{\mu \in S^m} \sum_{j=1}^m \mu_j \varphi(\bar{x}, y_j) \leq 0$$

Vậy $\nu_M \equiv \sup_{\mu \in S^m} \nu_M \leq 0$

Ta còn phải chứng minh tồn tại $\bar{x} \in K$ để $\sup_{y \in K} \varphi(\bar{x}, y) \leq \nu$.

Đó là nội dung của bổ đề sau:

Bổ đề 1.3.4

Giả sử X là không gian tôpô, $K \subset X$ là tập compact, L là tập bất kỳ.

Giả sử $\varphi : K \times L \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa điều kiện $\varphi(\cdot, y)$ là nửa liên tục dưới $\forall y \in L$. Gọi S là họ các tập hữu

hạn của L . Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in K$ để $\sup_{y \in L} \varphi(\bar{x}, y) \leq \nu = \sup_{M \in S} \varphi(\bar{x}, y) \inf_{x \in K} \max_{y_j \in M} \varphi(x, y_j)$

Chứng minh

Đặt $S_y = \{x \in K : \varphi(x, y) \leq \nu\}$. S_y là tập đóng nằm trong tập compact K nên là compact. Ta sẽ chứng tỏ họ S_y có tính chất là mọi giao hữu hạn đều khác $\emptyset$. Xét $S_{y_i}, i = 1, 2, \dots, n$ nào đó. Gọi $M = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Vì $\varphi(., y)$ là hàm nửa liên tục dưới nên $\max_{y_i \in M} \varphi(., y)$ (của hữu hạn hàm) cũng là nửa liên tục dưới và do đó đạt minimum trên K tại $x_M \in K : \nu \geq \inf_{x \in K} \max_{y_i \in M} \varphi(x, y_i) = \max_{y_i \in M} \varphi(x_M, y_i)$

Vậy $x_M \in \bigcap_{i=1}^n S_{y_i}$. Do tính compact, giao toàn bộ $\bigcap_{y \in L} S_y \neq \emptyset$, điểm $\bar{x} \in \bigcap_{y \in L} S_y$ sẽ thỏa bổ đề.

Định nghĩa 1.3.4 (Điểm cân bằng)[6]

Giả sử X là không gian định chuẩn, $K \subset X$, $F : X \longrightarrow 2^X$. Điểm $\bar{x} \in K$ được gọi là điểm cân bằng của F với ràng buộc K nếu $0 \in F(\bar{x})$

Định nghĩa 1.3.5

Giả sử X là không gian định chuẩn, $F : X \longrightarrow 2^X$

Tập $K \subset \text{dom} F$ gọi là miền tồn tại của F nếu với mọi $x \in K$, $F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset$

Với $T_K(x)$ là bao đóng của nón sinh bởi $K - x$, tức là $T_K(x) = \text{cl} S_K(x) \equiv \text{cl} \bigcap_{h>0} \frac{K-x}{h}$

Định lý 1.3.6 (Định lý về sự tồn tại điểm cân bằng)[6]

Giả sử X là không gian định chuẩn, $F : X \longrightarrow 2^X$ là ánh xạ đa trị hêmi liên tục trên ở trong X , có giá trị lõi đóng. Nếu tập lõi compact khác rỗng $K \subset X$ là miền tồn tại của F thì tồn tại $\bar{x} \in K$ là điểm cân bằng của F , tức là $\exists \bar{x} \in K : 0 \in F(\bar{x})$

Chứng minh

Giả sử phản chứng là với mọi $x \in K, 0 \notin F(x)$

Với mỗi $x \in K$, do $F(x)$ là lõi đóng và $0 \notin F(x)$, sử dụng định lý tách các tập lõi, ta tìm được $p_x \in X^*$ sao cho $\sigma(F(x), p_x) < 0$

Khi đó với $p \in X^*$, họ $\nu_p = \{x \in K : \sigma(F(x), p) < 0\}$ là phủ mở của K

(ν_p mở do tính hêmi liên tục trên của F)

Do K compact nên tồn tại họ phủ hữu hạn $\nu_{p_i}, i = 1, 2, \dots, n$

Gọi $\{\alpha_i\}$ là phân hoạch đơn vị liên tục ứng với họ $\{\nu_{p_i}\}$

Xét hàm $\varphi: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi công thức: $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \langle p_i, x - y \rangle$

Rõ ràng là

- i) $\forall y \in K, \varphi(., y)$ là hàm số liên tục
- ii) $\forall x \in K, \varphi(x, .)$ là hàm số affine (do đó là hàm lồi)
- iii) $\forall y \in K, \varphi(y, y) = 0$

Vậy các giả thiết của định lý KyFan được thỏa

Do vậy $\exists \bar{x} \in K$ để với $\bar{p} = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\bar{x}) p_i$ và mọi $y \in K$, $\varphi(\bar{x}, y) = \langle \bar{p}, \bar{x} - y \rangle \leq 0$

Điều này tương đương với $\langle -\bar{p}, y - \bar{x} \rangle \leq 0$, tức $-\bar{p} \in T_K(\bar{x})$

Vì K là miền tồn tại của F nên tồn tại $v \in F(\bar{x}) \cap T_K(\bar{x})$

Vậy $\sigma(F(\bar{x}), \bar{p}) \geq \langle \bar{p}, v \rangle \geq 0$

Đặt $I(\bar{x}) = \{i = 1, 2, \dots, n : \alpha_i(\bar{x}) > 0\}$

Vì $\sum_{i=1}^n \alpha_i(\bar{x})$ và $\alpha_i(\bar{x}) \geq 0, \forall i$ nên $I(\bar{x}) \neq \emptyset$

Với mọi $i \in I(\bar{x})$, do $\alpha_i(\bar{x}) > 0$ nên $\bar{x} \in \nu_{p_i}$

Từ đó suy ra $\sigma(F(\bar{x}), \bar{p}) \leq \sum_{i \in I(\bar{x})} \alpha_i(\bar{x}) \sigma(F(\bar{x}), p_i) < 0$ (mâu thuẫn)

Định lý được chứng minh

Định lý 1.3.7 (Định lý điểm bất động Kakutani)[6]

Giả sử K là tập lồi, compact trong không gian Banach X , Cho $G: K \longrightarrow K$ là ánh xạ đa trị hêmi liên tục trên ở trong K , có giá trị lồi, đóng, khác rỗng. Khi đó, G có điểm bất động $\bar{x}$ trong K , tức là $\bar{x} \in K \cap G(\bar{x})$

Chứng minh

Đặt $F(x) = G(x) - x$. Từ các giả thiết đặt trên G suy ra rằng $F: K \longrightarrow X$ là ánh xạ đa trị hêmi liên tục trên, có giá trị lồi, đóng, khác rỗng.

Vì K lồi nên $K - x \subset T_K(x)$

Mặt khác $G(K) \subset K$ nên $F(x) = G(x) - x \subset K - x \subset T_K(x), \forall x \in K$

Do đó K là miền tồn tại của F

Theo Định lý 1.3.6, tồn tại $\bar{x} \in K$ sao cho $0 \in F(\bar{x})$ tức là tồn tại $\bar{x} \in K$ sao cho $\bar{x} \in G(\bar{x})$

Định nghĩa 1.3.8 (Ánh xạ hướng vào và hướng ra)

- i) Ánh xạ $G: K \longrightarrow 2^X$ thỏa $G(x) \cap (x + T_K(x)) \neq \emptyset, \forall x \in K$ được gọi là hướng vào.
- ii) Ánh xạ $G: K \longrightarrow 2^X$ thỏa $G(x) \cap (x - T_K(x)) \neq \emptyset, \forall x \in K$ được gọi là hướng ra.

Định lý 1.3.9 [6]

Giả sử X là không gian Banach, $K \subset X$ là tập lồi, compact. Giả sử $G: X \longrightarrow 2^X$ là ánh xạ đa trị hêmi liên tục trên với ảnh lồi, đóng, khác rỗng. Nếu G hướng vào hoặc hướng ra thì G có điểm bất động $\bar{x}$ trong K , tức là $\bar{x} \in K \cap G(\bar{x})$

Chứng minh

Rõ ràng K là miền tồn tại của $F = G - I$ nếu G hướng vào và của $F_- = I - G$ nếu G hướng ra.

Theo Định lý 1.3.6 về điểm cân bằng ta thấy $\bar{x}$ là điểm cân bằng của F hoặc F_- tương ứng. Chúng đều là điểm bất động của G .

Định lý 1.3.10 [3]

Nếu X là không gian lồi địa phương, $K \subseteq X$ là tập khá rỗng, compact và lồi và $F: K \longrightarrow 2^K \setminus \{\emptyset\}$ là ánh xạ đa trị với giá trị lồi, sao cho với mỗi $y \in K$, tập $F^+(\{y\}) = \{x \in K: y \in F(x)\}$ là mở thì tồn tại $x \in K$ sao cho $x \in F(x)$

Chứng minh

Họ $\{F^+(\{y\})\}_{y \in K}$ là một phủ mở của K .

Vì vậy chúng ta có thể tìm được một phủ con hữu hạn $\{F^+(\{y_k\})\}_{k=1}^n$ và một phân hoạch đơn vị liên tục tương ứng $(\alpha_i)_{i=1}^n$

Đặt $u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) y_i$

Thì $u: K \longrightarrow K$ là hàm chọn liên tục của F

Áp dụng định lý Brouwer, ta thu được $\exists x \in K: x = u(x) \in F(x)$

1.4. ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ CÓ GIÁ TRỊ KHÔNG LỒI

Định nghĩa 1.4.1

Cho X là không gian tô pô Hausdorff và $C \subseteq X$. Chúng ta nói rằng C là một tập co của X , nếu có một ánh xạ liên tục $r: X \longrightarrow C$, thỏa mãn

$$r|_C = id_C$$

Ảnh xạ r được gọi là ảnh xạ co.

Định nghĩa 1.4.2

Cho X là một không gian Banach và xem họ

$M = \{(\varphi, U, K) : K \subseteq X \text{ là một tập co; } U \subseteq K \text{ là tập bị chặn, mở tương đối, } \varphi : \overline{U} \longrightarrow K \text{ là compact và } \text{Fix}(\varphi) \cap \partial U = \emptyset\}$, với

$$\text{Fix}(\varphi) = \{u \in \overline{U} : \varphi(x) = x\}.$$

Nếu $r : X \longrightarrow K$ là một ảnh xạ co, thì với mỗi $(\varphi, U, K) \in M$, chúng ta có thể định nghĩa chỉ số điểm bất động giá trị $\mathbb{Z}$ theo K của φ trên U với mỗi quan hệ K , bởi $i(\varphi, U, K) = d_{LS}(id_X - \varphi \circ r, r^{-1}(U), 0)$, với d_{LS} được ký hiệu là bậc Leray – Schauder.

Định lý 1.4.3

Cho X, Y là hai không gian Banach và $C \subseteq X, D \subseteq Y$ là tập đóng, lồi và khác rỗng, tiếp theo ta ký hiệu (D, w) là tập D được trang bị với quan hệ tôpô yếu trên Y . Xem $G : C \longrightarrow 2^C \setminus \{\emptyset\}$ có sự phân tích sau: $G = K \circ N$ (1.4.3)

Với $N : C \longrightarrow 2^D \setminus \{\emptyset\}$ là ảnh xạ đa trị nửa liên tục trên vào (D, w) và có giá trị compact yếu, lồi, $K : (D, w) \longrightarrow C$ là hàm liên tục theo dãy nghĩa là nếu $y_n \xrightarrow{w} y$ trên D thì $K(y_n) \longrightarrow K(y)$ trên C .

Giả sử G là compact, nghĩa là ảnh xạ biến tập bị chặn thành tập compact tương đối. Nếu ký hiệu M là họ bội ba (G, U, C) với G và C như trên và $U \subseteq C$ là khác rỗng, bị chặn, mở tương đối sao cho $\text{Fix}(G) \cap \partial U = \emptyset$, thì trên M ta có thể định nghĩa điểm bất động tương tự như định nghĩa 1.4.2. Khi đó ta có kết quả:

Tồn tại một ảnh xạ $i : M \longrightarrow \mathbb{Z}$, sao cho

a) Sự tiêu chuẩn hóa: Nếu K trong (1.4.3) là một ảnh xạ hằng, nghĩa là

$$K(y) = v_0 \notin \partial U, \forall y \in Y, \text{ thì}$$

$$i(G, U, C) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } v_0 \in U \\ 0 \text{ nếu } v_0 \notin U \end{cases}$$

b) Sự cộng tính: Nếu $\text{Fix}(G) \cap U \subset U_1 \cap U_2$, với U_1 và U_2 là hai tập con mở rời nhau của U , thì $i(G, U, C) = i(G, U_1, C) + i(G, U_2, C)$

c) Bất biến đồng luân: Cho $F : C \longrightarrow 2^C \setminus \{\emptyset\}$ là một ảnh xạ đa trị với sự phân tích $F = S \circ L$ như trong (1.4.3) và giả sử G và F là đồng luân như sau: “Tồn tại một ảnh xạ đa trị nửa liên tục dưới $H : [0, 1] \times C \longrightarrow 2^D \setminus \{\emptyset\}$ (D với quan hệ tôpô yếu) có giá trị compact yếu,

lồi, thỏa $H(0, \cdot) = N$ và $H(1, \cdot) = L$ và một dãy ánh xạ liên tục $u: [0, 1] \times (D, w) \longrightarrow C$, thỏa $u(0, \cdot) = K$, $u(1, \cdot) = S$ ”.

Chúng ta đặt

$\psi(t, x) = u(t, H(t, x))$ và giả sử rằng ψ là compact và

$x \notin \psi(t, x) \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \partial U$ thì

$$i(G, U, C) = i(F, U, C)$$

d) *Tính phân tích:* Với bất cứ sự phân tích khác $G' = K' \circ N'$ với tập D' là khác rỗng, đóng, lồi của không gian Banach Y' , thỏa mãn tồn tại một dãy ánh xạ liên tục $p: (D, w) \longrightarrow (D', w)$ với $N' = p \circ N$, $K' \circ p = K$, chúng ta có $i(G, U, C) = i(G', U, C)$

e) *Tính giải được:* Nếu $i(G, U, C) \neq 0$, thì $\text{Fix}(G) \cap U \neq \emptyset$.

Định lý 1.4.4

Nếu X là không gian Banach, $G: \overline{B}_R \longrightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ là ánh xạ đa trị compact với sự phân tích như trong (1.4.3) thì ít nhất một trong hai phát biểu sau xảy ra:

a) Tồn tại $x_0 \in \partial B_R$ và $\lambda \in (0, 1)$, sao cho $x_0 \in \lambda G(x_0)$; hoặc

b) $\text{Fix}(G) \neq \emptyset$

Chứng minh

Đặt $r: X \longrightarrow \overline{B}_R$ là ánh xạ co và thu được sự phân tích

$$G \circ r = K \circ (N \circ r)$$

Giả sử rằng

$$\text{Fix}(G) \cap \partial \overline{B}_R = \emptyset$$

Thì $i(G \circ r, B_R, X)$ đã được định nghĩa.

Đặt $u: [0, 1] \times (D, w) \longrightarrow X$ được định nghĩa bởi

$$u(t, y) = tK(y)$$

Đối với hàm u ta thấy rằng $G \circ r$ và $D \circ (N \circ r) = 0$ là đồng luân trong định lý 1.4.3 với điều kiện a) là không hợp lệ.

Theo tính chất sự tiêu chuẩn hóa trong định lý 1.4.3, ta có

$$i(G \circ r, B_R, X) = i(0, B_R, X) = 1$$

Theo tính chất giải được của định lý 1.4.3, chúng ta tìm được $x \in B_R$, sao cho $x \in (G \circ r)(x) = G(x)$.

Định lý 1.4.5

Nếu X là không gian Banach, $G: C \longrightarrow 2^C \setminus \{\emptyset\}$ là một ánh xạ đa trị với sự phân tích như trong (1.4.3) và $0 \in C$, thì ít nhất một trong hai phát biểu sau xảy ra:

a) G có điểm bất động; hoặc.

b) Tập $S = \{x \in C : x \in \lambda G(x), 0 < \lambda < 1\}$ không bị chặn.

Chương 2

ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ TĂNG TRONG KHÔNG GIAN BANACH CÓ THỨ TỰ

2.1. KHÔNG GIAN BANACH VỚI THỨ TỰ SINH BỞI NÓN

Định nghĩa 2.1.1

Cho X là không gian Banach và K là tập con của X . K được gọi là nón nếu:

- i) K đóng khác rỗng và $K \neq \{0\}$.
- ii) $a, b \in \mathbb{R}; a, b \geq 0; x, y \in K \Rightarrow ax + by \in K$.
- iii) $x \in K$ và $-x \in K \Rightarrow x = 0$.

Ví dụ: Cho $X = \mathbb{R}^n$ và $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$. Thì K là nón trong X .

Định nghĩa 2.1.2

Trong không gian Banach X với nón K , ta xét quan hệ $\leq$ như sau:

$$\forall x, y \in X, x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K$$

Khi đó, quan hệ $\leq$ là một quan hệ thứ tự.

Thật vậy quan hệ $\leq$ có các tính chất:

- i) Phản xạ: $x - x = 0 \in K \Rightarrow x \leq x, \forall x \in X$.
- Phản đối xứng: $\forall x, y \in X$, nếu $x \leq y$ và $y \leq x$ thì $y - x \in K$ và $x - y \in K$.

Do iii) trong định nghĩa 2.1.1, ta có $x - y = 0 \Rightarrow x = y$

- bắc cầu:

$$\forall x, y, z \in X, \text{ nếu } x \leq y \text{ và } y \leq z \text{ thì } y - x \in K \text{ và } z - y \in K.$$

Do ii) trong định nghĩa 1, ta có

$$z - x = (z - y) + (y - x) \in K \Rightarrow x \leq z$$

Mệnh đề 2.1.3

Cho X là không gian Banach với thứ tự $\leq$ sinh bởi nón K . Khi đó:

- i) $\forall \lambda \geq 0, \forall x, y, z \in X$ nếu $x \leq y$ thì $\lambda x \leq \lambda y$ và $x + z \leq y + z$.
- ii) Nếu $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ thì $x \leq y$.
- iii) Nếu dãy (x_n) tăng (hoặc giảm) và hội tụ về x thì $x_n \leq x$ (hoặc $x_n \geq x$) với mọi n .

Chứng minh

$$\text{i) Nếu } x \leq y \text{ thì } x - y \in K \Rightarrow \lambda y - \lambda x = \lambda(x - y) \in K \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y.$$

$$\text{Nếu } x \leq y \text{ thì } x - y \in K \Rightarrow y - x = (y + z) - (x + z) \in K \Rightarrow x + z \leq y + z.$$

ii) Nếu $x_n \leq y_n, \forall n \in N$ thì $y_n - x_n \in K$. Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = y - x$ và K đóng nên

$$y - x \in K \Rightarrow x \leq y.$$

iii) Giả sử (x_n) tăng. Với mỗi n , ta có: $x_n \leq x_{n+m}$. Cho $m \rightarrow \infty$, ta được $x_n \leq x$, với mọi n .

Định nghĩa 2.1.4

Cho $(X, \leq)$ là một tập có thứ tự. Tập $M \subset X$ được gọi là tập sắp thẳng của X nếu:

$$\forall x, y \in M \text{ thì } x \leq y \text{ hoặc } y \leq x.$$

Bổ đề Zorn

Giả sử X là một tập có thứ tự. Nếu mọi tập con sắp thẳng của X đều có cận trên (cận dưới) thì X có ít nhất một phần tử cực đại (phần tử cực tiểu).

Mệnh đề 2.1.5

Cho X là không gian Banach với thứ tự $\leq$ sinh bởi nón K , tập $M \subset X$ là tập con sắp thẳng của X và dãy $(x_n) \subset M$. Khi đó từ dãy (x_n) ta có thể rút ra dãy con (x_{n_k}) đơn điệu.

Chứng minh

Ta đặt $N_0 = \{n \in N : x_n \geq x_k, \forall k \geq n\}$.

Ta có các trường hợp:

- N_0 hữu hạn:

Khi đó, tồn tại $n_0 \in N$ sao cho $\forall n \geq n_0$ thì $n \notin N_0$.

Lúc đó, tồn tại $k \geq n$ sao cho $x_n \leq x_k$ (Do M là tập sắp thẳng).

Do đó, từ dãy (x_n) ta có thể chọn được dãy con (x_{n_k}) với $x_{n_0} \leq x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq \dots$, đây chính là dãy con cần tìm.

- N_0 vô hạn:

Giả sử $N_0 = \{n_1, n_2, \dots\}$ với $n_1 < n_2 < \dots$.

Khi đó dãy (x_{n_k}) với $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq \dots$ là dãy con cần tìm.

Định nghĩa 2.1.6 (Nón chuẩn)

Nón K trong không gian Banach X được gọi là nón chuẩn nếu tồn tại $N > 0$ sao cho:

$$\forall x, y \in K, x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N \|y\|.$$

Khi đó, số N được gọi là hằng số chuẩn của nón K .

Ví dụ:

- Trong không gian $X = C^1[0,1]$, nón $K = \{f \in C^1[0,1] : f \geq 0\}$ không phải là nón chuẩn.

- Trong không gian $X = C^1[0,1]$, nón sau đây là nón chuẩn:

$$K = \{f \in C^1[0,1]: f(t) \geq 0, f'(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]\}.$$

Mệnh đề 2.1.7

Cho K là nón chuẩn trong không gian Banach X .

- $\forall u, v \in X, u \leq v$ thì $\langle u, v \rangle = \{x \in X: u \leq x \leq v\}$ là một tập đóng và bị chặn.
- Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n$ ($n = 1, 2, \dots$) và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$.
- Nếu dãy đơn điệu (x_n) có dãy con (x_{n_k}) hội tụ về x thì dãy (x_n) hội tụ về x .
- Nếu dãy (x_n) đơn điệu hội tụ yếu về x thì dãy (x_n) hội tụ về x .

Chứng minh

- Giả sử dãy $(x_n) \subset \langle u, v \rangle$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Ta có: $u \leq x_n \leq v, \forall n$. Suy ra $u \leq x \leq v \Rightarrow \langle u, v \rangle$ đóng.

- $\forall x \in \langle u, v \rangle$ thì $x - u \in K, v - u \in K$ và $x - u \leq v - u$. Do K là nón chuẩn nên có hằng số chuẩn N sao cho: $\|x - u\| \leq N \|v - u\|$

$$\text{Suy ra } \|x\| - \|u\| \leq N \|v - u\| \Rightarrow \|x\| \leq N \|v - u\| + \|u\|.$$

Vậy $\langle u, v \rangle$ là bị chặn.

iii)

Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n$ thì $0 \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n$

Do K là nón chuẩn nên $\|y_n - x_n\| \leq N \|z_n - x_n\|$.

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$ nên $z_n - x_n \rightarrow 0$

Suy ra $y_n - x_n \rightarrow 0$

Vậy $y_n = (y_n - x_n) + x_n \rightarrow x$.

- Giả sử (x_n) là dãy tăng có dãy con (x_{n_k}) hội tụ về x .

Ta có: $x_{n_k} \leq x, \forall k$ và $x_n \leq x_{n_k} \Rightarrow x_n \leq x, \forall n$.

Vì $x_{n_k} \rightarrow x$ nên $\forall \varepsilon, \exists k_0: \|x - x_{n_{k_0}}\| < \frac{\varepsilon}{N}$.

Khi đó $\forall n \geq n_{k_0}, x_{n_{k_0}} \leq x_n \leq x \Rightarrow 0 \leq x - x_n \leq x - x_{n_{k_0}} \Rightarrow \|x - x_n\| \leq N \|x - x_{n_{k_0}}\| < \varepsilon$

Vậy ta có $x_n \rightarrow x$.

iv)

Giả sử (x_n) là dãy đơn điệu và hội tụ yếu về x . Gọi N là hằng số chuẩn của nón chuẩn K .

Với mỗi $f \in K^*$, ta có:

$$f(x_n) \leq f(x_m) \text{ với } n \leq m.$$

Cho $m \rightarrow \infty$, ta được $f(x_n) \leq f(x) \Rightarrow x_n \leq x, \forall n$.

Theo định lý Mazur, $\forall \varepsilon > 0, \exists z = \sum_{i=1}^m t_i x_{n_i} : \|z - x\| < \frac{\varepsilon}{N+1}$

Đặt $n_0 = \max \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ thì ta có:

$$\forall n \geq n_0, z \leq x_n \Rightarrow 0 \leq x_n - z \leq x - z$$

$$\Rightarrow \|x_n - z\| \leq N \|x - z\| < \frac{N\varepsilon}{N+1}$$

$$\Rightarrow \|x_n - x\| \leq \|x_n - z\| + \|z - x\| < \varepsilon$$

Vậy dãy (x_n) hội tụ về x .

Định nghĩa 2.1.8 (Nón đều)

Nón K trong không gian Banach X được gọi là nón đều (chính quy) nếu mọi dãy đơn điệu tăng, bị chặn trên trong X đều hội tụ.

Ví dụ:

- i) Trong không gian $X = L[0,1]$, nón K là nón các hàm không âm hầu khắp nơi là nón đều.
- ii) Trong không gian $X = C[0,1]$, nón K là nón các hàm không âm không phải là nón đều.

Mệnh đề 2.1.9

Cho K là nón trong không gian Banach X .

- i) *K là nón đều trong X khi và chỉ khi mọi dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới trong X đều hội tụ.*
- ii) *K là nón đều thì K là nón chuẩn.*

Chứng minh

i)

Giả sử K là nón đều trong X .

Ta xét dãy (x_n) giảm, bị chặn dưới: $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots \geq x$.

Khi đó, dãy $(x_1 - x_n)$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi $x_1 - x$.

Vì K là nón đều nên dãy hội tụ.

Vậy (x_n) hội tụ.

Giả sử mọi dãy giảm, bị chặn dưới trong X đều hội tụ.

Ta xét dãy (x_n) tăng, bị chặn trên: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq x$.

Khi đó, dãy $(x_1 - x_n)$ là dãy giảm và bị chặn dưới bởi $(x_1 - x)$ nên dãy $(x_1 - x_n)$ hội tụ.

Suy ra (x_n) hội tụ.

Vậy K là nón đều.

ii)

Giả sử ngược lại K không phải là nón chuẩn.

Khi đó $\forall N, \exists x_N \in K, \exists y_N \in K, 0 \leq x_N \leq y_N$ nhưng $\|x_N\| \geq N \|y_N\|$.

Cho $N = n^2$, ta được các dãy $(x_n) \subset K, (y_n) \subset K$ thỏa mãn:

$$0 \leq x_n \leq y_n, \|x_n\| \geq n^2 \|y_n\|$$

Với $x_n \neq 0$, ta xét các dãy: $x'_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ và $y'_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$.

Ta có: $0 \leq x'_n \leq y'_n, \|x'_n\| = 1, \|y'_n\| < \frac{1}{n^2}$. Suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} y'_n$ hội tụ.

Đặt $y = \sum_{n=1}^{\infty} y'_n$ thì $\sum_{k=1}^n y'_n \leq y, \forall n$.

Ta thấy dãy $z_n = x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n$ tăng và bị chặn trên bởi y nên (z_n) hội tụ (vì K là nón đều).

Suy ra $x_n = (z_n - z_{n-1}) \rightarrow 0$

Mâu thuẫn với điều kiện $\|x'_n\| = 1$

Vậy K là nón chuẩn.

Mệnh đề 2.1.10

Cho X là không gian Banach phản xạ. Nếu K là nón chuẩn thì K là nón đều.

Chứng minh

Xét dãy (x_n) là dãy tăng bị chặn trên trong X .

Vì (x_n) bị chặn (theo chuẩn) và X là không gian phản xạ nên tồn tại dãy con (x_{n_k}) tăng sao cho (x_{n_k}) hội tụ yếu về x .

Theo iv) của Mệnh đề 2.1.7, suy ra dãy (x_{n_k}) hội tụ về x .

Vì K là nón chuẩn nên dãy (x_n) hội tụ về x .

Vậy, K là nón đều.

Định nghĩa 2.1.11 (Nón Minihedral mạnh)

Nón K trong không gian Banach X được gọi là nón Minihedral mạnh nếu mọi tập M bị chặn trong X đều tồn tại $\sup M$.

2.2. ẢNH XẠ ĐA TRỊ ĐƠN ĐIỀU

Định nghĩa 2.2.1

Cho X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . Gọi A, B là các tập con của X . Ta định nghĩa quan hệ thứ tự $\prec$ giữa hai tập A, B như sau:

$$A \prec B \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, \exists b \in B : a \leq b \\ \forall b \in B, \exists a \in A : a \leq b \end{cases}$$

Định nghĩa 2.2.2

Cho X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . Gọi A, B là các tập con của X . Ta định nghĩa quan hệ thứ tự $<$ giữa hai tập A, B như sau:

$$A < B \Leftrightarrow \forall a \in A, \exists b \in B : a \leq b$$

Định nghĩa 2.2.3

Cho X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . Gọi A, B là các tập con của X . Ta định nghĩa quan hệ thứ tự $<<$ giữa hai tập A, B như sau:

$$A << B \Leftrightarrow (\forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a \leq b)$$

Tính chất 2.2.4

Ta có một số tính chất sau đây:

Cho X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . Gọi A, B, C là các tập con của X . Khi đó:

i) $A \prec A, \forall A \in 2^X$

ii) Nếu $A \prec B, B \prec C$ thì $A \prec C$

iii) $A << B \Rightarrow A \prec B \Rightarrow A < B$

Chứng minh:

i) Hiển nhiên.

ii) $A \prec B$ thì $\forall a \in A, \exists b \in B : a \leq b$. Khi đó, do $B \prec C$ nên $\forall b \in B, \exists c \in C : b \leq c$

Nên $\forall a \in A, \exists c \in C : a \leq c$.

Đồng thời ta cũng có $\forall c \in C, \exists b \in A : b \leq c$ (do $B \prec C$)

Mà $A \prec B$ nên $\forall b \in B, \exists a \in A : a \leq b$. Suy ra $\forall c \in C, \exists a \in A : a \leq c$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \forall a \in A, \exists c \in C : a \leq c \\ \forall c \in C, \exists a \in A : a \leq c \end{cases} \Leftrightarrow A \prec C$$

iii) $A << B \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A \Rightarrow a \leq b, \forall b \in B \\ \forall b \in B \Rightarrow a \leq b, \forall a \in A \end{cases}$ nên $\begin{cases} \forall a \in A, \exists b \in B : a \leq b \\ \forall b \in B, \exists a \in A : a \leq b \end{cases}$ nghĩa là $A \prec B$

Ví dụ

Trong không gian Banach thực $X = \mathbf{R}$ với nón $K = [0, +\infty)$. Ta xét các tập con của X như sau: $A = [1, 2]$,

$B = [0,3], C = [2,3]$. Thì $A \ll C, A < B, B \prec C$.

Định nghĩa 2.2.5

Cho X là một không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . Toán tử đa trị $F : M \subset X \rightarrow 2^X$.

- i) Toán tử đa trị F được gọi là toán tử đa trị đơn điệu nếu: $\forall x, y \in M, x \leq y \Rightarrow F(x) < F(y)$.
- ii) Toán tử đa trị F được gọi là đơn điệu nghiêm ngặt nếu: $\forall x, y \in M, x \leq y \Rightarrow F(x) \ll F(y)$.

Tính chất 2.2.6

Cho X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . Toán tử đa trị $F : M \subset X \rightarrow 2^X$.

- i) Nếu F là toán tử đa trị đơn điệu và $A < B$ thì $F(A) < F(B)$.
- ii) Nếu F là toán tử đa trị đơn điệu nghiêm ngặt thì F cũng là toán tử đa trị đơn điệu.

Nguyên lý Entropy

Cho $(M, \leq)$ là một tập sắp thứ tự và hàm $S : M \rightarrow [-\infty; +\infty)$ thỏa:

- i) Mọi dãy tăng đơn điệu trong tập M đều có cận trên.
- ii) S đơn điệu tăng và bị chặn trên.

Khi đó, tồn tại $u \in M$ sao cho: $\forall v \in M, v \geq u \Rightarrow S(u) = S(v)$

2.3. ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ ĐƠN ĐIỆU

Định lý 2.3.1

Giả sử X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K , $M \subset X$ là tập đóng và $F : M \longrightarrow X$ là ánh xạ đơn điệu thỏa:

- i) $F(M) \subset M$, $\exists x_0 \in M$ sao cho $\{x_0\} < F(x_0)$
- ii) F biến mỗi dãy tăng thuộc M thành dãy hội tụ

Khi đó, F có điểm bất động trong M .

Chứng minh

Đặt $M_0 = \{x \in M / \{x\} < F(x)\}$

$g(x) = \sup \{\|F(y) - F(z)\| : y, z \in M_0, y \geq z \geq x\}$

• Ta sẽ áp dụng Nguyên lý Entropi cho tập M_0 và hàm $(-g)$.

- i) Với mọi dãy $(x_n) \subset M_0$, (x_n) tăng, suy ra tồn tại $x \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = x$

Suy ra $x_n \leq x$ (do $x_n \leq F(x_n) \leq x$).

- ii) Với $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \{(y, z) \in M_0^2 : y \geq z \geq x_2\} \subset \{(y, z) \in M_0^2 : y \geq z \geq x_1\}$ và $-g(x_1) \leq -g(x_2)$.

Do đó $\exists a \in M_0 : \forall u \in M_0, u \geq a \Rightarrow g(u) = g(a)$.

- Ta chứng minh $g(a) = 0$

Nếu $g(a) = c > 0$, ta có $\exists y_2, y_1 \in M_0 : y_2 \geq y_1 \geq a, \|F(y_2) - F(y_1)\| > c$

Do $g(y_2) = g(a) > c$ nên tồn tại $y_3, y_4 \in M_0 : y_4 \geq y_3 \geq y_2, \|F(y_4) - F(y_3)\| > c$

Lặp lại quá trình như trên, ta có dãy tăng $(y_n) \subset M, \|F(y_{2n}) - F(y_{2n-1})\| > c > 0$ (vô lý)

Do $g(a) = 0$ nên $F(y) = F(a), \forall y \in M, y \geq a$.

Vì $a \in M_0$ nên $F(a) \geq a \Rightarrow F(F(a)) = F(a)$ hay $\exists b = F(a)$ là điểm bất động của F trong M .

Định lý 2.3.2 (Định lý Tarskii cho ánh xạ đa trị đơn điệu)[5]

Giả sử X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . $M = \langle u, v \rangle, F : M \rightarrow 2^M$ là toán tử đa trị thỏa mãn:

- F là toán tử đa trị đơn điệu.*
- K là nón Minihedral mạnh.*
- $\sup F(x) \in F(x), \forall x \in M$.*

Khi đó, F có điểm bất động trong M .

Chứng minh

Ta xét tập $N = \{x \in M / \{x\} < F(x)\}$. Thì N khác rỗng và bị chặn trên bởi v .

Vì K là nón Minihedral mạnh nên tồn tại $x^* = \sup N$.

Đặt $y^* = \sup F(x^*)$. Ta có:

- $\forall x \in N, \{x\} < F(x)$.

Mặt khác: $x \leq x^* \Rightarrow F(x) < F(x^*)$. Từ đó suy ra $\{x\} < F(x^*) \Rightarrow x \leq y^* = \sup F(x^*) \Rightarrow x^* \leq y^*$ (1)

- Vì $x^* \leq y^*$ nên suy ra $F(x^*) < F(y^*)$ (do F đơn điệu)

Từ điều kiện c) suy ra $y^* \in F(x^*)$. Lúc đó tồn tại $z \in F(y^*)$ sao cho: $y^* \leq z$. Suy ra: $\{y^*\} < F(y^*)$ nên $y^* \in N$

$x^* = \sup N \Rightarrow y^* \leq x^*$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $x^* = y^* = \sup F(x^*) \in F(x^*)$.

Vậy F có điểm bất động trong M .

Định lý 2.3.3

Giả sử X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . Ta xét quan hệ thứ tự < như sau:

$A, B \in X, A < B \Leftrightarrow \forall a \in A, \exists b \in B : a \leq b$

$M = \langle u, v \rangle \subset X, F : M \rightarrow 2^M$ là toán tử đa trị thỏa mãn:

- F là toán tử đa trị đơn điệu.*

b) F là nón Miniherdal mạnh.

c) $\inf F(x) \in F(x), \forall x \in M$.

Khi đó, F có điểm bất động trong M .

Chứng minh

Ta xét tập $N = \{x \in M / \{x\} < F(x)\}$. Thì N khác rỗng và bị chặn trên bởi v .

Vì K là nón Miniherdal mạnh nên tồn tại $x^* = \sup N$.

Đặt $y^* = \inf F(x^*)$. Ta có:

- $\forall x \in N, \{x\} < F(x)$.

Mặt khác: $x \leq x^* \Rightarrow F(x) < F(x^*)$. Từ đó suy ra $\{x\} < F(x^*) \Rightarrow x \leq y^* = \sup F(x^*) \Rightarrow x^* \leq y^*$ (1)

- Vì $x^* \leq y^*$ nên suy ra $F(x^*) < F(y^*)$ (do F đơn điệu)

Từ điều kiện c) suy ra $y^* \in F(x^*)$. Lúc đó tồn tại $z \in F(y^*)$ sao cho: $y^* \leq z$. Suy ra: $\{y^*\} < F(y^*)$ nên $y^* \in N$

$x^* = \sup N \Rightarrow y^* \leq x^*$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $x^* = y^* = \inf F(x^*) \in F(x^*)$.

Vậy F có điểm bất động trong M .

Chú ý

Định lý 2.3.2 sẽ không còn đúng nếu không có điều kiện c) (tương tự như vậy đối với định lý 2.3.3). Ví dụ sau đây chứng tỏ tầm quan trọng của điều kiện c) trong định lý 2.3.2.

Ví dụ

Cho không gian số thực $X = \mathbb{R}$ với nón $K = [0, +\infty)$ và quan hệ thứ tự $<$ như sau:

$A, B \subset X, A < B \Leftrightarrow \forall a \in A, \exists b \in B : a \leq b$. Ta xét toán tử đa trị F xác định bởi:

$$F(x) = \begin{cases} (x, \frac{1}{2}) & \text{khi } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ (0, x) & \text{khi } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Ta có $x, y \in [0, 1]$ sao cho $x \leq y$ thì:

- $0 \leq x \leq y < \frac{1}{2} : F(x) = (x, \frac{1}{2}) < F(y) = (y, \frac{1}{2})$.
- $0 \leq x < \frac{1}{2} \leq y : F(x) = (x, \frac{1}{2}) < F(y) = (0, y)$
- $\frac{1}{2} \leq x \leq y \leq 1 : F(x) = (0, x) < F(y) = (0, y)$

Như vậy, F là toán tử đa trị tăng nhưng không có điểm bất động (vì không thể xảy ra $x \in F(x)$).

2.4. ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ TĂNG CÓ TÍNH CHẤT CO

Định lý 2.4.1

Giả sử X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . $F : X \rightarrow 2^X$ là toán tử đa trị thỏa mãn:

- a) $F(x)$ đóng với mọi x thuộc X .
- b) F là toán tử đa trị đơn điệu.
- c) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $\{x_0\} \subset F(x_0)$
- d) Tồn tại $q \in (0,1)$ sao cho $\forall x, y \in X, x \leq y$ thì $F(x) \subset F(y) - \overline{B}(0, q \cdot \|x - y\|) \cap K$ với $\overline{B}(0, q \cdot \|x - y\|)$ là quả cầu đóng tâm O bán kính là $q \cdot \|x - y\|$

Khi đó, F có điểm bất động $x^* \in X$ với $x^* \geq x_0$.

Chứng minh:

Điều kiện d) có thể viết nếu $x \leq y$ thì : $\forall u \in F(x), \exists v \in F(y) : u \leq v, \|v - u\| \leq q \cdot \|y - x\|$ (*)

Do điều kiện c) ta có : $x_1 \in F(x_0)$ sao cho $x_0 \leq x_1$.

Từ (*), suy ra tồn tại $x_2 \in F(x_1) : x_1 \leq x_2, \|x_2 - x_1\| \leq q \cdot \|x_1 - x_0\|$

Lặp lại quá trình như trên, ta tìm được dãy (x_n) thỏa mãn:

$$x_n \in F(x_{n-1}) : \|x_{n+1} - x_n\| \leq q^n \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} q^k \|x_1 - x_0\| \\ &= \|x_1 - x_0\| \sum_{k=n}^{n+p-1} q^k = \|x_1 - x_0\| \cdot \frac{q^n}{1-q} \end{aligned}$$

Do đó, dãy (x_n) là dãy Cauchy.

Vì X là không gian Banach nên tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x^* = \lim_n x_n$.

Dãy (x_n) tăng nên suy ra: $x_{n-1} \leq x^*, \forall n \Rightarrow F(x_{n-1}) \subset F(x^*), \forall n$.

Ta có $x_n \in F(x_{n-1})$ nên tồn tại $y_n \in F(x^*)$ sao cho: $\|y_n - x_n\| \leq q \|x^* - x_{n-1}\|$

Suy ra: $x^* = \lim_n y_n$

Dãy $(y_n) \subset F(x^*)$ và theo điều kiện a) ta suy ra $x^* \in F(x^*)$.

Vậy F có điểm bất động x^* và $x^* \geq x_0$.

Định lý 2.4.2

Giả sử X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . $M \subset X$ là một tập đóng, $F : M \rightarrow 2^M$ là toán tử đa trị thỏa mãn:

a) $F(x)$ đóng với mọi $x \in X$.

b) F là toán tử đa trị đơn điệu.

c) K là nón chuẩn.

d) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $\{x_0\} \subset F(x_0)$.

e) Tồn tại toán tử tuyến tính $L: X \rightarrow X$ có phổ $r(L) < 1, L(K) \subset K$ và thỏa mãn $x \leq y$

thì: $\forall u \in F(x), \forall v \in F(y): 0 \leq v - u \leq L(y - x)$.

Khi đó, F có điểm bất động trong M .

Chứng minh

Vì $\lim_n \left(\|L^n\| \right)^{\frac{1}{n}} = r(L) < 1$ nên tồn tại $q \in (0, 1)$ sao cho $\|L^n\| \leq q^n$ khi n đủ lớn.

Do điều kiện d), ta có: $x_1 \in F(x_0)$ sao cho $x_0 \leq x_1$.

Từ điều kiện e), ta suy ra:

$\exists x_2 \in F(x_1): x_1 \leq x_2, x_2 - x_1 \leq L(x_1 - x_0)$.

Lặp lại quá trình như trên, ta tìm được dãy số (x_n) thỏa mãn:

$$\exists x_{n+1} \in F(x_n): x_n \leq x_{n+1}, x_{n+1} - x_n \leq L^n(x_1 - x_0)$$

Vì K là nón chuẩn nên có hằng số N sao cho:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq N \cdot \|L^n\| \|x_1 - x_0\| \leq N \cdot q^n \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} N \cdot q^k \|x_1 - x_0\| \\ &= N \cdot \|x_1 - x_0\| \sum_{k=n}^{n+p-1} q^k = N \cdot \|x_1 - x_0\| \frac{q^n}{1-q} \end{aligned}$$

Do đó, dãy (x_n) là dãy Cauchy.

Vì X là không gian Banach nên tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x^* = \lim_n x_n$.

Dãy (x_n) tăng nên suy ra: $x_{n-1} \leq x^*, \forall n$. Suy ra $F(x_{n-1}) \subset F(x^*), \forall n$.

Ta có $x_n \in F(x_{n-1})$ nên tồn tại $y_n \in F(x^*)$ sao cho:

$$0 \leq y_n - x_n \leq L(x^* - x_{n-1}) \Rightarrow \|y_n - x_n\| \leq N \cdot \|L\| \|x^* - x_{n-1}\|$$

Suy ra: $x^* = \lim_n y_n$

Dãy $(y_n) \subset F(x^*)$ và theo điều kiện a) ta suy ra $x^* \in F(x^*)$.

Vậy F có điểm bất động x^* và $x^* \geq x_0$.

2.5. ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ TĂNG CÓ TÍNH COMPACT

Định lý 2.5.1

Giả sử X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K , $M \subset X$ là một tập đóng.

$F: M \rightarrow 2^M \setminus \{\emptyset\}$ là ánh xạ đa trị đơn điệu thỏa mãn:

- i) $F(x)$ đóng, $\forall x \in M$.
- ii) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $\{x_0\} < F(x_0)$.
- iii) $\forall x \in M, \forall y_1, y_2 \in F(x), \exists y \in F(x): y_1 \leq y, y_2 \leq y$.
- iv) Nếu các dãy $(x_n), (y_n)$ là các dãy tăng sao cho $y_n \in F(x_n)$ thì dãy (y_n) hội tụ.

Khi đó, F có điểm bất động cực đại trong M .

Chứng minh

Đặt $M_0 = \{x \in M : \{x\} < F(x)\}$

Ta có thể giả sử $x \leq y, \forall y \in F(x)$ với $x \in M_0$ (*).

Thật vậy, nếu ta định nghĩa toán tử G xác định trên M_0 như sau:

$G(x) = F(x) \cap [x, +\infty)$ thì $x \leq y, \forall y \in G(x)$.

Mặt khác, ta có $G: M_0 \rightarrow M_0$

Vì $\forall y \in G(x)$ thì $x \leq y$, từ đó suy ra $F(x) < F(y)$ mà $y \in F(x)$ nên $\{y\} < F(y)$, nghĩa là $y \in M_0$.

Ngoài ra, G cũng thỏa mãn các điều kiện i), ii), iii), iv) của định lý.

Thật vậy ta có:

Xét $x \in M$, giả sử dãy $(x_n) \subset G(x)$ và $x_n \rightarrow z$.

Khi đó: $(x_n) \subset F(x)$ và do $F(x)$ đóng nên $z \in F(x)$.

Mặt khác $x \leq x_n, \forall n$ nên suy ra $x \leq z$.

Suy ra $z \in G(x)$, nghĩa là $G(x)$ đóng.

+ Theo giả thiết tồn tại $x_0 \in M$ sao cho $\{x_0\} < F(x_0)$. Khi đó tồn tại $z_0 \in F(x_0)$ sao cho $x_0 \leq z_0$. Suy ra: $z_0 \in F(x_0) \cap [x_0, +\infty) = G(x_0)$, nghĩa là $\{x_0\} < G(x_0)$.

+ $\forall x \in M, \forall y_1, y_2 \in G(x)$. Suy ra $y_1, y_2 \in F(x)$ nên tồn tại $y \in F(x)$ sao cho $y_1 \leq y, y_2 \leq y$.

Vì $y_1, y_2 \in G(x)$ nên $x \leq y_1, x \leq y_2$ suy ra $x \leq y$ nghĩa là $y \in G(x)$.

Vậy ta có: $\forall x \in M, \forall y_1, y_2 \in G(x), \exists y \in G(x): y_1 \leq y, y_2 \leq y$.

+ Giả sử các dãy $(x_n), (y_n)$ là các dãy tăng sao cho $y_n \in G(x_n)$. Khi đó, $y_n \in F(x_n)$ nên dãy (y_n) hội tụ.

Từ (*), ta kiểm tra được $F(M_0) \subset M_0$

Thật vậy, với mỗi $y \in F(M_0)$ thì tồn tại $x \in M_0$ sao cho $y \in F(x)$

(vì $F(M_0) = \bigcup_{x \in M_0} F(x)$). Khi đó theo (*) ta có $x \leq y \Rightarrow F(x) < F(y) \Rightarrow \{y\} < F(y)$ nghĩa là $y \in M_0$.

Để áp dụng nguyên lý Entropy, ta kiểm tra hai điều kiện sau:

Điều kiện 1: Chứng minh mọi dãy tăng (x_n) trong M_0 đều có cận trên.

Khi đó, ta có thể chọn dãy tăng (y_n) sao cho $y_n \in F(x_n)$ (vì F đơn điệu)

Đặt $y = \lim_n y_n$ thì $y_n \leq y, \forall n$.

Vì $y_n \in F(x_n)$, nên theo (*), ta có $x_n \leq y, \forall n \Rightarrow F(x_n) \leq F(y), \forall n$.

Khi đó, tồn tại $z_n \in F(y)$ sao cho $y_n \leq z_n$. Do điều kiện c) ta có thể giả sử (z_n) là dãy tăng. Khi đó, dãy z_n hội tụ về $z \in F(y)$.

Ta có $z_n \leq z, \forall n \Rightarrow y_n \leq z, \forall n$

Suy ra: $y \leq z \Rightarrow \{y\} < F(y)$ nghĩa là $y \in M_0$.

Vậy dãy tăng (x_n) có cận trên $y \in M_0$.

Điều kiện 2: Tồn tại một hàm đơn điệu tăng và bị chặn trên xác định trên M_0 .

Với $x \in M_0$, ta đặt:

$$M_x = \{(u, v) \in M_0 \times M_0 / u \leq v, u \in F(y), v \in F(z), x \leq y \leq z; y, z \in M_0\}$$

Ta có $(x, x) \in M_x$ nên $M_x \neq \emptyset$.

Xét hàm $S : M_0 \rightarrow [0; +\infty]$ xác định bởi:

$$S(x) = \sup \{\|u - v\| / (u, v) \in M_x\}$$

Nếu $x \leq y$ thì $M_y \subset M_x$ nên S là hàm giảm. Do đó $(-S)$ là hàm tăng.

Áp dụng nguyên lý Entropy cho M_0 và hàm $(-S)$, thì tồn tại $a \in M_0$ sao cho:

$$x \in M_0, x \geq a \Rightarrow S(x) = S(a) \quad (**)$$

Ta chứng minh $S(a) = 0$.

Giả sử ngược lại tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $S(a) > \alpha$.

Tồn tại x_1, x_2, y_1, y_2 sao cho:

$$\begin{aligned}
a &\leq x_1 \leq x_2 \\
y_1 &\in F(x_1), y_2 \in F(x_2), y_1 \leq y_2 \\
\|y_1 - y_2\| &> \alpha
\end{aligned}$$

Vì $a \leq y_2 \in M_0$, theo (**), suy ra : $S(y_2) = S(a) > \alpha$.

Tiếp tục, ta chọn x_3, x_4, y_3, y_4 sao cho:

$$\begin{aligned}
y_2 &\leq x_3 \leq x_4 \\
y_3 &\in F(x_3), y_4 \in F(x_4), y_3 \leq y_4 \\
\|y_3 - y_4\| &> \alpha
\end{aligned}$$

Vì $y_2 \in F(x_2)$, nên theo (*), ta có : $x_2 \leq y_2$ suy ra $x_2 \leq x_3$.

Vì $y_3 \in F(x_3)$, nên theo (*), ta có : $x_3 \leq y_3$ suy ra $y_2 \leq y_3$.

Khi đó. $a \leq y_3 \in M_0$, suy ra: $S(y_3) = S(a) > \alpha$

Làm tương tự, ta sẽ có các dãy $(x_n), (y_n)$ tăng sao cho $y_n \in F(x_n)$ thỏa mãn : $\|y_{2n-1} - y_{2n}\| > \alpha$ (điều này mâu thuẫn với điều kiện d))

Vậy $S(a) = 0$

Ta chứng minh: mỗi $b \in F(a)$ là điểm bất động của F trong M .

Thật vậy, với mỗi $c \in F(b)$, ta có: $b \leq c \in F(b)$.

Vì $a \leq b \in F(a)$ nên suy ra $(b, c) \in M_a$

Suy ra: $\|b - c\| \leq S(a) = 0 \Rightarrow b = c \in F(b)$ nên b là điểm bất động của F .

Vậy F có điểm bất động $b \in F(a)$.

Ta chứng minh: $b \in F(a)$ là điểm bất động cực đại trong M .

Thật vậy, nếu x là điểm bất động của F trong M và $x \geq b$ thì:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} b \leq x \\ b \in F(a) \end{cases} &\Rightarrow a \leq x \\
&\Rightarrow (b, x) \in M_a \Rightarrow \|b - x\| \leq S(a) = 0
\end{aligned}$$

Suy ra $x = b$.

Vậy $b \in F(a)$ là điểm bất động cực đại của F trong M .

Hệ quả 2.5.2

Giả sử X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K .

$M = \langle u, v \rangle \subset X$, $F : M \rightarrow 2^M \setminus \{\emptyset\}$ là toán tử đa trị đơn điệu thỏa mãn:

- a) $F(x)$ đóng, $\forall x \in M$.
- b) $\forall x \in M, \forall y_1, y_2 \in F(x), \exists y \in F(x) : y_1 \leq y, y_2 \leq y$.
- c) K là nón đều.

Khi đó F có điểm bất động trong M .

Chứng minh

Do $M = \langle u, v \rangle$ nên $\{u\} < F(u)$.

Ta chứng minh: nếu $(x_n), (y_n)$ là các dãy tăng sao cho $y_n \in F(x_n)$ thì (y_n) hội tụ.

Thật vậy, do $y_n \leq v, \forall n$ và K là nón đều nên (y_n) hội tụ.

Như vậy các điều kiện a), b), c) của hệ quả 2.5.2 thỏa các điều kiện a), b), c), d) trong định lý 2.5.1.

Vậy F có điểm bất động.

Hệ quả 2.5.3

Giả sử X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K .

$M = \langle u, v \rangle \subset X$, $F : M \rightarrow 2^M \setminus \{\emptyset\}$ là toán tử đa trị đơn điệu thỏa mãn:

- a) $F(x)$ đóng, $\forall x \in M$.
- b) $\forall x \in M, \forall y_1, y_2 \in F(x), \exists y \in F(x) : y_1 \leq y, y_2 \leq y$.
- c) K là nón chuẩn và X là không gian phản xạ.

Khi đó F có điểm bất động trong M .

Chứng minh

Ta có, nếu K là nón chuẩn và X là không gian phản xạ thì K là nón đều. Từ đó áp dụng hệ quả 2.5.2 ta có kết quả toán tử F có điểm bất động.

Định lý 2.5.4

Giả sử X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . X_0 là không gian con đóng của X ,

M là tập con đóng của X , $F : M \rightarrow 2^M \setminus \{\emptyset\}$ là toán tử đa trị đơn điệu thỏa mãn:

- a) $F(x)$ đóng, $\forall x \in M$.
- b) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $\{x_0\} < F(x_0)$.
- c) $X_0 \cap F(x) \neq \emptyset, \forall x \in M$ và hơn nữa: $\forall y_1, y_2 \in F(x), \exists y \in F(x) : y_1 \leq y, y_2 \leq y$.
- d) Nếu các $(x_n), (y_n)$ là các dãy tăng sao cho $y_n \in F(x_n) \cap F(x)$ thì dãy (y_n) hội tụ.

Khi đó F có điểm bất động trong M .

Chứng minh

$$\text{Đặt } M_0 = \{x \in M : \{x\} < F(x)\}$$

Ta có thể giả sử $x \leq y, \forall y \in F(x)$ với $x \in M_0$ (*).

Thật vậy, nếu ta định nghĩa toán tử G xác định trên M_0 như sau:

$$G(x) = F(x) \cap [x, +\infty) \text{ thì } x \leq y, \forall y \in G(x).$$

Mặt khác, ta có $G: M_0 \rightarrow M_0$

Vì $\forall y \in G(x)$ thì $x \leq y$, từ đó suy ra $F(x) < F(y)$ mà $y \in F(x)$ nên $\{y\} < F(y)$, nghĩa là $y \in M_0$.

Ngoài ra, G cũng thỏa mãn các điều kiện a), b), c), d) của định lý.

Thật vậy ta có:

Xét $x \in M$, giả sử dãy $(x_n) \subset G(x)$ và $x_n \rightarrow z$.

Khi đó: $(x_n) \subset F(x)$ và do $F(x)$ đóng nên $z \in F(x)$.

Mặt khác $x \leq x_n, \forall n$ nên suy ra $x \leq z$.

Suy ra $z \in G(x)$, nghĩa là $G(x)$ đóng.

+ Theo giả thiết tồn tại $x_0 \in M$ sao cho $\{x_0\} < F(x_0)$. Khi đó tồn tại $z_0 \in F(x_0)$ sao cho $x_0 \leq z_0$. Suy ra: $z_0 \in F(x_0) \cap [x_0, +\infty) = G(x_0)$, nghĩa là $\{x_0\} < G(x_0)$.

+ Vì $X_0 \cap F(x) \neq \emptyset$ nên suy ra $\forall x \in M, \forall y_1, y_2 \in X_0 \cap G(x)$. Suy ra $y_1, y_2 \in X_0 \cap F(x)$ nên tồn tại $y \in X_0 \cap F(x)$ sao cho $y_1 \leq y, y_2 \leq y$. Vì $y_1, y_2 \in X_0 \cap G(x)$ nên $x \leq y_1, x \leq y_2$ suy ra $x \leq y$ nghĩa là $y \in X_0 \cap G(x)$.

Vậy ta có: $\forall x \in M, \forall y_1, y_2 \in X_0 \cap G(x), \exists y \in X_0 \cap G(x): y_1 \leq y, y_2 \leq y$.

+ Giả sử các dãy $(x_n), (y_n)$ là các dãy tăng sao cho $y_n \in X_0 \cap G(x_n)$.

Khi đó, $y_n \in X_0 \cap F(x_n)$ nên dãy (y_n) hội tụ.

Từ (*), ta kiểm tra được $F(M_0) \subset M_0$

Thật vậy, với mỗi $y \in F(M_0)$ thì tồn tại $x \in M_0$ sao cho $y \in F(x)$

(vì $F(M_0) = \bigcup_{x \in M_0} F(x)$). Khi đó theo (*) ta có $x \leq y \Rightarrow F(x) < F(y) \Rightarrow \{y\} < F(y)$ nghĩa là $y \in M_0$.

Để áp dụng nguyên lý Entropy, ta kiểm tra hai điều kiện sau:

Điều kiện 1: Chứng minh mọi dãy tăng (x_n) trong M_0 đều có cận trên.

Khi đó, ta có thể chọn dãy tăng (y_n) sao cho $y_n \in X_0 \cap F(x_n)$ (vì F đơn điệu)

Đặt $y = \lim_n y_n$ thì $y_n \leq y, \forall n$.

Vì $y_n \in X_0 \cap F(x_n)$, nên theo (*), ta có $x_n \leq y, \forall n \Rightarrow F(x_n) \leq F(y), \forall n$.

Khi đó, tồn tại $z_n \in X_0 \cap F(y)$ sao cho $y_n \leq z_n$. Do điều kiện c) ta có thể giả sử (z_n) là dãy tăng.

Khi đó, dãy z_n hội tụ về $z \in X_0 \cap F(y)$.

Ta có $z_n \leq z, \forall n \Rightarrow y_n \leq z, \forall n$

Suy ra: $y \leq z \Rightarrow \{y\} < F(y)$ nghĩa là $y \in M_0$.

Vậy dãy tăng (x_n) có cận trên $y \in M_0$.

Điều kiện 2: Tồn tại một hàm đơn điệu tăng và bị chặn trên xác định trên M_0 .

Với $x \in M_0$, ta đặt:

$$M_x = \{(u, v) \in M_0 \times M_0 / u \leq v, u \in F(y), v \in F(z), x \leq y \leq z; y, z \in M_0\}$$

Ta có $(x, x) \in M_x$ nên $M_x \neq \emptyset$.

Xét hàm $S : M_0 \rightarrow [0; +\infty]$ xác định bởi:

$$S(x) = \sup \{\|u - v\| / (u, v) \in M_x \cap (X_0 \times X_0)\}$$

Nếu $x \leq y$ thì $M_y \subset M_x \Rightarrow M_y \cap (X_0 \times X_0) \subset M_x \cap (X_0 \times X_0)$ nên S là hàm giảm. Do đó $(-S)$ là hàm tăng.

Áp dụng nguyên lý Entropy cho M_0 và hàm $(-S)$, thì tồn tại $a \in M_0$ sao cho:

$$x \in M_0, x \geq a \Rightarrow S(x) = S(a) \quad (**)$$

Ta chứng minh $S(a) = 0$.

Giả sử ngược lại tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $S(a) > \alpha$.

Tồn tại x_1, x_2, y_1, y_2 sao cho:

$$\begin{aligned} a &\leq x_1 \leq x_2 \\ y_1 &\in X_0 \cap F(x_1), y_2 \in X_0 \cap F(x_2), y_1 \leq y_2 \\ \|y_1 - y_2\| &> \alpha \end{aligned}$$

Vì $a \leq y_2 \in M_0$, theo (**), suy ra : $S(y_2) = S(a) > \alpha$.

Tiếp tục, ta chọn x_3, x_4, y_3, y_4 sao cho:

$$\begin{aligned}
& y_2 \leq x_3 \leq x_4 \\
& y_3 \in X_0 \cap F(x_3), y_4 \in X_0 \cap F(x_4), y_3 \leq y_4 \\
& \|y_3 - y_4\| > \alpha
\end{aligned}$$

Vì $y_2 \in F(x_2)$, nên theo (*), ta có : $x_2 \leq y_2$ suy ra $x_2 \leq x_3$.

Vì $y_3 \in F(x_3)$, nên theo (*), ta có : $x_3 \leq y_3$ suy ra $y_2 \leq y_3$.

Khi đó. $a \leq y_3 \in M_0$, suy ra: $S(y_3) = S(a) > \alpha$

Làm tương tự, ta sẽ có các dãy $(x_n), (y_n)$ tăng sao cho $y_n \in X_0 \cap F(x_n)$ thỏa mãn : $\|y_{2n-1} - y_{2n}\| > \alpha$

(điều này mâu thuẫn với điều kiện d))

Vậy $S(a) = 0$

Ta chứng minh: mỗi $b \in X_0 \cap F(a)$ là điểm bất động của F trong M .

Thật vậy, với mỗi $c \in X_0 \cap F(b)$, ta có: $b \leq c \in X_0 \cap F(b)$.

Vì $a \leq b \in X_0 \cap F(a)$ nên suy ra $(b, c) \in M_a \cap (X_0 \times X_0)$

Suy ra: $\|b - c\| \leq S(a) = 0 \Rightarrow b = c \in X_0 \cap F(b)$ nên b là điểm bất động của F .

Vậy F có điểm bất động $b \in F(a)$.

Định lý 2.5.5

Giả sử X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . $M = \langle u, v \rangle \subset X$, $F : M \rightarrow 2^M$ là toán tử đa trị đơn điệu thỏa mãn:

- K là nón chuẩn.*
- F là toán tử đa trị đơn điệu nghiêm ngặt.*
- Nếu (x_n) là dãy đơn điệu thì từ dãy $(F(x_n))$ ta có thể lấy dãy hội tụ (y_n) sao cho*

$$y_n \in F(x_n).$$

Khi đó F có điểm bất động trong M .

Chứng minh

Ta đặt $M_0 = \{x \in M : \{x\} \prec F(x)\}$ thì $M_0 \neq \emptyset$ (Vì $u \in M_0$).

Ta chứng minh: $F(M_0) \subset M_0$.

$\forall z \in F(M_0) = \bigcup_{x \in M_0} F(x)$, tồn tại $x \in M_0$ sao cho $z \in F(x)$.

Vì $x \prec F(x)$ nên $x \leq z$.

Do F đơn điệu nghiêm ngặt nên suy ra: $F(x) \ll F(z)$.

$\Rightarrow z \prec F(z)$ (vì $z \in F(x)$), suy ra $z \in M_0$

Vậy $F(M_0) \subset M_0$.

Giả sử $N \subset M_0$ là một tập con sắp thẳng nghĩa là $\forall x, y \in N \Rightarrow x \leq y$ hay $y \leq x$.

Ta chứng minh N có cận trên trong M_0 .

Trước hết ta chứng minh $F(N)$ là một tập compact tương đối.

Thật vậy, giả sử dãy $(y_n) \in F(N) = \bigcup_{x \in N} F(x)$. Khi đó với mỗi n , tồn tại $x_n \in N$ sao cho $y_n \in F(x_n)$.

Do N là tập sắp thẳng nên từ dãy (x_n) , ta có thể chọn được dãy con (x_{n_k}) hội tụ (theo mệnh đề 2.1.5)

Theo điều kiện c), tồn tại dãy (y'_{n_k}) với $y'_{n_k} \in F(x_{n_k}), \forall k$.

Đặt $\lim_k y'_{n_k} = y$.

Vì $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq \dots \leq x_{n_k} \leq \dots$ nên $F(x_{n_1}) \ll F(x_{n_2}) \ll \dots \ll F(x_{n_k}) \ll \dots$

Khi đó ta có: $y'_{n_{k-1}} \leq y_{n_k} \leq y'_{n_{k+1}}$.

Cho $k \rightarrow \infty$ thì ta có $y_{n_k} \rightarrow y$ (do K là nón chuẩn).

Vậy từ dãy $(y_n) \subset F(N)$, ta tìm được dãy con (y_{n_k}) hội tụ, nên $F(N)$ là tập compact tương đối.

Ta chứng minh N có cận trên.

Do $F(N)$ compact tương đối nên tồn tại dãy (z_n) trù mật khắp nơi trong $F(N)$. Khi đó

$\forall n, \exists u_n \in N : z_n \in F(u_n)$. Vì N là tập sắp thẳng nên ta có thể xây dựng dãy tăng $(u'_n) \subset (u_n)$ và $u_n \leq u'_n, \forall n$.

Theo điều kiện c), từ dãy tăng (u'_n) , tồn tại dãy tăng (v_n) hội tụ với $v_n \in F(u'_n)$.

Đặt $\lim_n v_n = x_0$.

Vì $v_n \leq x_0, \forall n$ nên $F(v_n) \ll F(x_0), \forall n \Rightarrow F(v_n) \prec F(x_0)$.

Mà $v_n \in F(u'_n) \subset F(M_0) \subset M_0 \Rightarrow v_n \prec F(v_n)$

Suy ra $v_n \prec F(x_0), \forall n \Rightarrow \{x_0\} \prec F(x_0)$ nghĩa là $x_0 \in M_0$.

Ta lại có $F(x) \prec \{x_0\}, \forall x \in N$. Thật vậy xét $x \in N$

$\forall t \in F(x)$ thì $t \in F(N)$ nên tồn tại dãy $(z_{n_k}) \subset (z_n)$ sao cho $z_{n_k} \rightarrow t$.

Vì $u'_{n_1} \leq u'_{n_2} \leq \dots \leq u'_{n_k} \leq \dots$ nên $F(u'_{n_1}) \ll F(u'_{n_2}) \ll \dots \ll F(u'_{n_k}) \ll \dots$

Suy ra: $z_{n_{k-1}} \leq z_{n_k} \leq z_{n_{k+1}}, \forall k \Rightarrow v_{n_k} \rightarrow t$ (do K là nón chuẩn).

Mà $v_{n_k} \leq x_0, \forall k$ nên suy ra $t \leq x_0$. Vậy $F(x) \prec \{x_0\}$.

Như vậy với mọi $x \in N$ ta có: $F(x) \prec \{x_0\}$ và $\{x_0\} \prec F(x)$ nên suy ra $x \leq x_0$.

Vậy N có cận trên.

Theo bổ đề Zorn, mọi tập con sắp thẳng N của M_0 có cận trên thì M_0 có phần tử cực đại x^* .

Ta chứng minh x^* là điểm bất động của F .

Thật vậy $\forall t \in F(x^*)$ thì $t \in M_0 \Rightarrow t \leq x^*$ (vì x^* là phần tử cực đại của M_0)

Mà $x^* \prec F(x^*)$ (vì $x^* \in M_0$) nên $x^* \leq t$.

Từ đó suy ra $x^* = t \in F(x^*)$.

Vậy x^* là điểm bất động của F .

Hệ quả 2.5.6

Giả sử X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . $M = \langle u, v \rangle \subset X$, $F : M \rightarrow 2^M$ là toán tử đa trị đơn điệu thỏa mãn:

- a) K là nón đều.
- b) F là toán tử đa trị đơn điệu nghiêm ngặt.

Khi đó F có điểm bất động trong M .

Chứng minh

Giả sử (x_n) là dãy đơn điệu tăng trong M , ta có:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq v.$$

Do F là toán tử đơn điệu nghiêm ngặt nên:

$$F(x_1) \ll F(x_2) \ll \dots \ll F(x_n) \ll \dots \ll F(v)$$

Ta có thể chọn $y_n \in F(x_n)$ sao cho:

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq v.$$

Suy ra dãy (y_n) tăng và bị chặn trên, nên dãy (y_n) hội tụ (vì K là nón đều).

Theo kết quả của định lý 2.5.4, F có điểm bất động trong M .

Hệ quả 2.5.7

Giả sử X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . $M = \langle u, v \rangle \subset X$, $F : M \rightarrow 2^M$ là toán tử đa trị đơn điệu thỏa mãn:

- a) K là nón chuẩn và K là không gian phản xạ.
- b) F là toán tử đa trị đơn điệu nghiêm ngặt.

Khi đó F có điểm bất động trong M .

Chứng minh

Theo mệnh đề 2.1.10 trong chương 1, nếu K là nón chuẩn và X là không gian phản xạ thì K là nón đều. Vậy ta suy ra được các điều kiện của hệ quả 2.5.6 nên F có điểm bất động trong M .

Hệ quả 2.5.8

Giả sử X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . $M = \langle u, v \rangle \subset X$, $F : M \rightarrow 2^M$ là toán tử đa trị đơn điệu thỏa mãn:

- a) K là nón chuẩn.
- b) F là toán tử đa trị đơn điệu nghiêm ngặt.
- c) F là toán tử compact.

Khi đó F có điểm bất động trong M .

Chứng minh

Giả sử (x_n) là dãy đơn điệu trong M , ta có: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq v$

Vì F là toán tử chặt nên ta có thể chọn được $y_n \in F(x_n)$. Do $F(M)$ là tập compact tương đối (vì F là toán tử compact) nên tồn tại $(y_{n_k}) \subset (y_n)$ sao cho (y_{n_k}) hội tụ.

Vì K là nón chuẩn nên suy ra (y_n) là dãy hội tụ.

Vậy với dãy đơn điệu (x_n) ta chọn được dãy (y_n) hội tụ với $y_n \in F(x_n)$.

Theo định lý 2.5.4, suy ra F có điểm bất động trong M .

2.6. ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ T – ĐƠN ĐIỀU ĐA TRỊ

Định nghĩa 2.6.1

Cho X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K và toán tử tuyến tính $T : X \rightarrow X$.

Số $\lambda \in C$ được gọi là điểm chính quy của T nếu $(\lambda I - T)$ là một song ánh, với I là toán tử đồng nhất trong X .

Ta ký hiệu $\rho(T) = \{\lambda / \lambda \text{ là điểm chính quy của } T\}$. Khi đó ta định nghĩa phổ của T là: $\sigma(T) = C \setminus \rho(T)$.

Định nghĩa 2.6.2

Cho X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . Cho toán tử tuyến tính $T : X \rightarrow X$ và toán tử đa trị $F : X \rightarrow 2^X$.

F được gọi là toán tử đa trị T – đơn điệu nếu thỏa mãn:

$$\forall x, y \in X, x \leq y \text{ thì } T(y - x) + F(x) < F(y).$$

Bổ đề 2.6.3

Cho X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K . Cho toán tử đa trị $F : M = \langle u, v \rangle \rightarrow 2^M$ và toán tử tuyến tính $T : X \rightarrow X$.

Xét $\lambda \in \mathbb{R}$. Nếu $(-\lambda) \notin \sigma(T)$ thì ta có:

$$x \in (\lambda.I + T)^{-1}.(\lambda.F + T)(x) \Leftrightarrow x \in F(x)$$

Chứng minh

Vì $(-\lambda) \notin \sigma(T)$ nên $(\lambda.I + T)$ là một song ánh.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} x \in F(x) &\Leftrightarrow \lambda x + T(x) \in \lambda F(x) + T(x) \\ &\Leftrightarrow (\lambda.I + T)(x) \in (\lambda F + T)(x) \\ &\Leftrightarrow (\lambda.I + T)^{-1}(\lambda.I + T)(x) \in (\lambda.I + T)^{-1}(\lambda F + T)(x) \\ &\Leftrightarrow x \in (\lambda.I + T)^{-1}.(\lambda.F + T)(x) \end{aligned}$$

Bổ đề 2.6.4

Cho X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K và toán tử tuyến tính $T : X \rightarrow X$.

Xét $\lambda \in \mathbb{R}$. Nếu $(-\lambda) \notin \sigma(T)$ và $A, B \subset M$ sao cho $A < B$ thì ta có:

$$(\lambda.I + T)^{-1}.(A) < (\lambda.I + T)^{-1}.(B)$$

Chứng minh

Lấy bất kỳ $x \in (\lambda.I + T)^{-1}.(A)$, suy ra $(\lambda.I + T)(x) \in A$

Vì $A < B$ nên tồn tại $y \in B$ sao cho $(\lambda.I + T)(x) \leq y$

Vì $(-\lambda) \notin \sigma(T)$ nên $(\lambda.I + T)$ là một song ánh, nên suy ra:

$$x \leq (\lambda.I + T)^{-1}(y)$$

Mà $(\lambda.I + T)^{-1}(y) \in (\lambda.I + T)^{-1}(B)$ nên suy ra:

$$(\lambda.I + T)^{-1}.(A) < (\lambda.I + T)^{-1}.(B)$$

Bổ đề 2.6.5

Cho X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K và toán tử tuyến tính $T : X \rightarrow X$. Giả sử toán tử đa trị $F : M = \langle u, v \rangle \rightarrow 2^M$ là chặt và T -đơn điệu thoả mãn:

- T là toán tử tuyến tính dương.
- Tồn tại $\lambda \in (0, 1)$ sao cho $(-\lambda) \notin \sigma(T)$ và $T(x) \geq -\lambda x$ thì $x \in K$.

Khi đó $S = (\lambda.I + T)^{-1}.(\lambda.F + T)$ là toán tử đa trị đơn điệu trên M .

Chứng minh

Xét $\lambda \in (0,1)$ sao cho $(-\lambda) \notin \sigma(T)$ và $T(x) \geq -\lambda x$ thì $x \in K$. (*)

Ta chứng minh $(\lambda.I + T)^{-1}$ là một song ánh dương.

Thật vậy, vì $(-\lambda) \notin \sigma(T)$ nên $(\lambda.I + T)^{-1}$ là một song ánh.

Do đó, $(\lambda.I + T)^{-1}$ cũng là một song ánh.

Lấy bất kỳ $x \in (\lambda.I + T)^{-1}(K)$

Thì tồn tại $y \in K$ sao cho $y = (\lambda.I + T)(x)$

Suy ra: $\lambda x + T(x) \in K$

$$\Rightarrow \lambda x + T(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow T(x) \geq -\lambda x$$

Theo (*), ta suy ra: $x \in K$

Suy ra $(\lambda.I + T)^{-1}(K) \subset K$

Vậy $(\lambda.I + T)^{-1}$ là một song ánh dương.

Ta chứng minh S là toán tử đa trị đơn điệu trên M .

Với mỗi $x, y \in M, x \leq y$ ta có: $T(y - x) + F(x)$

Suy ra: $\lambda T(y - x) + \lambda F(x) < \lambda F(y)$ (vì $\lambda \in (0,1)$)

$$\Rightarrow \lambda F(x) + T(x) < \lambda F(y) + T(y)$$

$$\Rightarrow (\lambda F + T)(x) < (\lambda F + T)(y)$$

Vì $(\lambda.I + T)^{-1}$ là toán tử tuyến tính dương nên suy ra:

$$(\lambda.I + T)^{-1}.(\lambda F + T)(x) < (\lambda.I + T)^{-1}.(\lambda F + T)(y)$$

$$\Rightarrow S(x) < S(y)$$

Vậy S là toán tử đa trị đơn điệu trên M .

Định lý 2.6.6

Cho X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K và toán tử tuyến tính $T : X \rightarrow X$. Giả sử toán tử đa trị $F : M = \langle u, v \rangle \rightarrow 2^M$ thoả mãn:

a) K là nón đều.

b) F là toán tử đa trị T -đơn điệu.

c) T là toán tử tuyến tính dương.

d) Tồn tại $\lambda \in (0,1)$ sao cho $(-\lambda) \notin \sigma(T)$ và $T(x) \geq -\lambda x$ thì $x \in K$.

Khi đó F có điểm bất động trong M .

Chứng minh

Ta xét toán tử đa trị: $S = (\lambda.I + T)^{-1}.(\lambda.F + T)$

Từ điều kiện c), d) và theo bổ đề 2.6.5, ta có S là toán tử đa trị đơn điệu trong M .

Theo hệ quả 2.5.2

$\exists x^* \in M$ sao cho $x^* \in S(x^*)$

Theo bổ đề 1 ta có:

$$x^* \in S(x^*) = (\lambda I + T)^{-1} \cdot (\lambda F + T)(x^*) \Leftrightarrow x^* \in F(x^*)$$

Vậy F có điểm bất động trong M .

Hệ quả 2.6.7

Cho X là không gian Banach được sắp thứ tự bởi nón K và toán tử tuyến tính $T: X \rightarrow X$. Giả sử toán tử đa trị $F: M = \langle u, v \rangle \rightarrow 2^M$ thỏa mãn:

- a) X là không gian phản xạ.
- a) K là nón chuẩn.
- b) F là toán tử đa trị T -đơn điệu.
- e) T là toán tử tuyến tính dương.
- f) Tồn tại $\lambda \in (0,1)$ sao cho $(-\lambda) \notin \sigma(T)$ và $T(x) \geq -\lambda x$ thì $x \in K$.

Khi đó F có điểm bất động trong M .

Chứng minh

Ta đã có kết quả: nếu K là nón chuẩn và X là không gian phản xạ thì K là nón đều.

Áp dụng định lý 2.6.6, suy ra F có điểm bất động trong M .

KẾT LUẬN

Qua quá trình nghiên cứu tài liệu, được sự chỉ dẫn, lý giải thêm của thầy hướng dẫn chúng tôi đã nắm được nội dung một số kết quả cổ điển về điểm bất động của một số lớp ánh xạ đa trị và một số mở rộng ban đầu về điểm bất động của ánh xạ đa trị tăng, ánh xạ đa trị tăng có tính chất co, compact và T – đơn điệu. Tuy nhiên, chúng tôi chưa có điều kiện trình bày các ứng dụng của các kết quả trên vào việc chứng minh sự tồn tại nghiệm của các lớp phương trình cụ thể. Một số hướng có thể phát triển luận văn là:

1. Làm giảm nhẹ các điều kiện của các kết quả trình bày trong luận văn.
2. Tìm các ứng dụng của kết quả lý thuyết vào việc chứng minh sự tồn tại nghiệm của các lớp phương trình cụ thể như phương trình vi phân, phương trình tích phân

Qua quá trình làm luận văn tôi đã thấy các kiến thức học được trong các phần giải tích: giải tích hàm nâng cao, giải tích phi tuyến, lý thuyết bậc tô pô... đã giúp tôi rất nhiều trong việc hoàn thành luận văn này. Quan trọng hơn là bước đầu tôi đã học được phương pháp tự học và nghiên cứu.

Tôi hy vọng sẽ được học tập và nghiên cứu thêm về ứng dụng của đề tài này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. K. Deimling (1984), *Nonlinear Functional Analysis*, Springer – Verlag.
2. Đào Bảo Dũng, *Toán tử đa trị đơn điệu tăng trong không gian Banach có thứ tự và ứng dụng*
Luận văn thạc sỹ, ĐHSP TP.HCM, 2000
3. L. Gasinski, N.S. Papageorgiou (2005), *Nonlinear Analysis*, Chamman and Hall / CRC.
4. Nguyen Bich Huy (2002), “Fixed points of increasing multivalued operators and an application to quasimonotone elliptic equations”, *Nonlinear Analysis*, 51, pp. 673-678.
5. Nguyễn Bích Huy, Nguyễn Hữu Khánh
Fixed point for multivalued increasing operators (gởi đăng).
6. Phan Quốc Khánh (1999), *Giải tích đa trị*,
Giáo trình cao học, ĐHQG TP.HCM
7. Nguyễn Đông Yên (2007), *Giáo trình giải tích đa trị*, nhà xuất bản khoa học tự nhiên và công nghệ.
8. E. Zeidler (1985), *Nonlinear Analysis and its Applications*, Springer – Verlag.