

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

MAI XUÂN KIÊN

ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI NGHIỆM
CỦA QUY HOẠCH LỖI
TỔNG QUÁT ĐA MỤC TIÊU

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. HOÀNG QUANG TUYẾN

Phản biện 1: PGS.TSKH Trần Quốc Chiến

Phản biện 2: PGS.TS Trần Đạo Đồng

Luận văn sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học
hợp tại Đà Nẵng vào ngày 17 tháng 08 năm 2011.

** Có thể tìm hiểu luận văn tại:*

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Từ nhu cầu thực tế của khoa học, vận tải, công nghệ, kinh tế, xã hội, quản lý..., bài toán tối ưu đa mục tiêu ngày càng được quan tâm không chỉ về mặt lý thuyết mà còn vì tính thực tế của nó.

Bài toán tối ưu đa mục tiêu với các hàm mục tiêu và hàm ràng buộc là lồi đã được nghiên cứu nhiều và tính lồi là giả thuyết được dùng thường xuyên nhất trong mô hình lý thuyết tối ưu và đã đem lại nhiều kết quả quan trọng và hết sức có ý nghĩa.

Tuy nhiên cũng từ nhu cầu kinh tế, kỹ thuật, vận tải, quản lý, và các vấn đề khác trong thực tế, các hàm mục tiêu và hàm ràng buộc là không lồi.

Để giải quyết được một phần nào vấn đề đó. Một lớp các bài toán không lồi được đề cập đến trong luận văn là sự mở rộng của bài toán Đa Mục Tiêu Lồi, gọi là "Đa mục tiêu lồi tổng quát".

Khi nghiên cứu các bài toán đa mục tiêu lồi tổng quát thì "điều kiện tối ưu" đóng một vai trò hết sức quan trọng trong lý thuyết cũng như tính thực tế.

Vì vậy đây là lý do tôi đã chọn. Đề tài "**Điều kiện tồn tại nghiệm của Quy Hoạch Lồi Tổng Quát Đa Mục Tiêu**".

Nội dung chính của đề tài là thiết lập các định lý về điều kiện cần và đủ để bài toán đa mục tiêu lồi tổng quát có nghiệm hữu hiệu.

2. MỤC TIÊU VÀ NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

Mục tiêu và nội dung nghiên cứu của luận văn về điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán phi tuyến với các hàm mục tiêu và hàm ràng buộc là giả-lồi (pseudoconvex), tựa-lồi (quasiconvex), invex (*lồi bất biến*), Univex (*đơn lồi bất biến*), V-invex (*V- lồi bất biến*),...

Luận văn là bản khảo cứu các kết quả đã công bố trong vòng 10 năm trở lại đây về các điều kiện cần và đủ để bài toán tối ưu đa mục tiêu lồi tổng quát có nghiệm.

3. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Hệ thống các kiến thức cơ bản về tính lồi, hàm lồi, hàm tuyến tính, tính khả vi ... để phục vụ cho nhu cầu nghiên cứu đề tài.

Tham khảo tài liệu, tìm hiểu chi tiết các định nghĩa, bộ đề, định lý, hệ quả... về điều kiện có nghiệm của các hàm tổng quát.

Bên cạnh đó tác giả cố gắng chứng minh một số bộ đề và ví dụ đã nêu trong nhiều bài báo mà không có phần chứng minh.

Nghiên cứu từ các tài liệu trong và ngoài nước, giáo trình, bài báo, tạp chí ...

4. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

Đề tài hệ thống cách khá chi tiết một số dạng bài toán tối ưu phi tuyến mở rộng.

Trình bày rõ ràng các định lý về điều kiện tồn tại nghiệm của các dạng bài toán tối ưu phi tuyến mở rộng.

Đề tài có ý nghĩa quan trọng trong lý thuyết cũng như trong ứng dụng thực tế (Khoa học, văn tải, Kinh tế, Quản lý...)

5. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Ngoài phần mục lục, mở đầu và kết luận, luận văn gồm 3 chương:

Chương 1. Hàm lồi tổng quát.

Chương 2. Hàm dạng I tổng quát và các hàm liên quan.

Chương 3. Các điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán tối ưu đa mục tiêu lồi tổng quát.

Chương 1

HÀM LỒI TỔNG QUÁT

Bài toán tối ưu tổng quát cho dưới dạng.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x) \\ \text{v.đ.k.} \quad & g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m. \\ & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, k, \\ & x \in X. \end{aligned}$$

Hàm $f : X \rightarrow R$, $g : X \rightarrow R^m$ và $h : X \rightarrow R^k$ là các hàm khả vi liên tục và $X \subseteq R^n$ là tập mở.

Kí hiệu $K = \{x : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$ là tập nghiệm chấp nhận được (hay tập nghiệm khả thi) của bài toán (P).

1.1 Tập lồi và hàm lồi tổng quát

Định nghĩa 1.1.1. Tập $X \subseteq R$ được gọi là lồi nếu mỗi $x_1, x_2 \in X$ và $0 < \lambda < 1$ Khi đó

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X.$$

Định nghĩa 1.1.2. Hàm $f : X \rightarrow R$ xác định trên tập lồi $X \subseteq R^n$ được gọi là hàm lồi nếu mỗi $x_1, x_2 \in X$ và $0 < \lambda < 1$ Khi đó

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Định nghĩa 1.1.3. Hàm $f : X \rightarrow R$ được gọi là tựa-lồi trên tập X nếu

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(y), \forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0; 1]$$

hoặc cho dưới dạng:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}, \forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0; 1].$$

Nếu f là hàm khả vi thì ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.1.4. Hàm $f : X \rightarrow R$ được gọi là tựa-lồi (*quasi convex*) trên tập X nếu

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow (x - y)\nabla f(y) \leq 0, \forall x, y \in X.$$

Định nghĩa 1.1.5. Cho $f : X \rightarrow R$ là khả vi trên tập mở $X \subset R^n$ thì f được gọi là giả-lồi (*psuedo convex*) trên tập X nếu:

$$f(x) < f(y) \Rightarrow (x - y)\nabla f(y) < 0, \forall x, y \in X,$$

hoặc nếu

$$(x - y)\nabla f(y) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y), \forall x, y \in X.$$

Định nghĩa 1.1.6. Một hàm $f : X \rightarrow R$ khả vi trên tập mở $X \subset R^n$ được gọi là giả lồi chặt trên X nếu

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow (x - y)\nabla f(y) < 0, \forall x, y \in X, x \neq y,$$

hoặc

$$(x - y)\nabla f(y) \geq 0 \Rightarrow f(x) > f(y), \forall x, y \in X, x \neq y.$$

1.2 Hàm Invex và Invex tổng quát

Định nghĩa 1.2.1. Tập $\emptyset \neq T \subseteq R^n$ được gọi là η -invex ứng với η nếu tồn tại $\eta : R^n \times R^n \rightarrow R^n$ sao cho bất kì $x, y \in T$ và $\lambda \in [0; 1]$ thì

$$y + \lambda\eta(x, y) \in T.$$

Định nghĩa 1.2.2. Một hàm khả vi $f : X \rightarrow R^n$, X là tập mở của R^n gọi là invex trên X ứng với η nếu tồn tại hàm giá trị vector $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$f(x) - f(y) \geq \eta^T(x, y)\nabla f(y), \forall x, y \in X.$$

Định nghĩa 1.2.3. Hàm f được gọi là giả-invex (*pseudo invex*) trên X ứng với η nếu tồn tại hàm giá trị vector $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$\eta^T(x, y)\nabla f(y) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y), \forall x, y \in X.$$

Định nghĩa 1.2.4. Hàm f được gọi là tựa-invex (*quasi invex*) trên X ứng với η nếu tồn tại hàm giá trị vector $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow \eta^T(x, y)\nabla f(y) \leq 0, \forall x, y \in X.$$

Định nghĩa 1.2.5. Một hàm $f : X \rightarrow R$ được gọi là *Pre-invex* trên X nếu tồn tại một hàm vector $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$(y + \lambda\eta(x, y)) \in X, \forall \lambda \in [0; 1], \forall x, y \in X,$$

và

$$f(y + \lambda\eta(x, y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall \lambda \in [0; 1], \forall x, y \in X.$$

1.3 Hàm dạng I và các hàm liên quan

Cho

$$P = \{x : x \in X, g(x) \leq 0\} \text{ và } D = \{x : (x, y) \in Y\},$$

với

$$Y = \{(x, y) : x \in X, y \in R^m, \nabla_x f(x) + y^T \nabla_x g(x) = 0; y \geq 0\}.$$

Định nghĩa 1.3.1. $f(x)$ và $g(x)$ thứ tự là hàm mục tiêu và hàm ràng buộc gọi là hàm dạng I (*type I*) ứng với $\eta(x)$ tại $\bar{x}$ nếu tồn tại hàm vector $\eta(x) : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq [\nabla_x f(\bar{x})]^T \eta(x, \bar{x}), \forall x \in P$$

và

$$-g(\bar{x}) \geq [\nabla_x g(\bar{x})]^T \eta(x, \bar{x}), \forall x \in P.$$

Định nghĩa 1.3.2. Hàm $f(x)$ và $g(x)$ thứ tự là hàm mục tiêu và hàm ràng buộc gọi là hàm giả dạng I (*pseudo type I*) tương ứng với $\eta(x)$ tại $\bar{x}$ nếu tồn tại hàm vector $\eta(x) : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$[\nabla_x f(x)]^T \eta(x, \bar{x}) \geq 0 \Rightarrow f(\bar{x}) - f(x) \geq 0, \forall x \in P$$

và

$$[\nabla_x g(x)]^T \eta(x, \bar{x}) \geq 0 \Rightarrow -g(x) \geq 0, \forall x \in P.$$

Định nghĩa 1.3.3. Hàm $f(x)$ và $g(x)$ thứ tự là hàm mục tiêu và hàm ràng buộc gọi là hàm tựa dạng I (*quasi type I*) tương ứng với $\eta(x)$ tại $\bar{x}$ nếu tồn tại hàm vector $\eta(x) : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow [\nabla_x f(\bar{x})]^T \eta(x, \bar{x}) \leq 0, \forall x \in P$$

và

$$-g(x) \leq 0 \Rightarrow [\nabla_x g(x)]^T \eta(x, \bar{x}) \leq 0, \forall x \in P.$$

Định nghĩa 1.3.4. Hàm $f(x)$ và $g(x)$ thứ tự là hàm mục tiêu và hàm ràng buộc gọi là các hàm *tựa-giả-dạng I* tương ứng với $\eta(x)$ tại $\bar{x}$ nếu tồn tại hàm vector $\eta(x) : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow [\nabla_x f(\bar{x})]^T \eta(x, \bar{x}) \leq 0, \forall x \in P$$

và

$$[\nabla_x g(x)]^T \eta(x, \bar{x}) \geq 0 \Rightarrow -g(x) \geq 0, \forall x \in P.$$

Định nghĩa 1.3.5. Hàm $f(x)$ và $g(x)$ thứ tự là hàm mục tiêu và hàm ràng buộc gọi là các hàm *giả-tựa-dạng I* tương ứng với $\eta(x)$ tại $\bar{x}$ nếu tồn tại hàm vector $\eta(x) : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$[\nabla_x f(\bar{x})]^T \eta(x, \bar{x}) \geq 0 \Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) \geq 0, \forall x \in P$$

và

$$-g(x) \leq 0 \Rightarrow [\nabla_x g(x)]^T \eta(x, \bar{x}) \leq 0, \forall x \in P.$$

1.4 Hàm Univex và các hàm liên quan

Cho f là hàm khả vi xác định trên tập $\emptyset \neq X \subseteq R^n$ và cho $\varnothing : R \rightarrow R$ và $k : X \times X \rightarrow R_+$, với $x, \bar{x} \in X$. Kí hiệu $k(x, \bar{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} b(x, \bar{x}, \lambda) \geq 0$.

Định nghĩa 1.4.2. Hàm f được gọi là *Univex* ứng với $\eta, \varnothing$ và k tại $\bar{x}$ nếu $\forall x \in X$, ta có

$$k(x, \bar{x})\varnothing[f(x) - f(\bar{x})] \geq [\nabla_x f(\bar{x})]^T \eta(x, \bar{x}).$$

Định nghĩa 1.4.3. Hàm f được gọi là *tựa-Univex* ứng với $\eta, \varnothing$ và k tại $\bar{x}$ nếu $\forall x \in X$, ta có

$$\varnothing[f(x) - f(\bar{x})] \leq 0 \Rightarrow k(x, \bar{x})\eta(x, \bar{x})^T \nabla_x f(\bar{x}) \leq 0.$$

Định nghĩa 1.4.4. Hàm f được gọi là *giả-Univex* ứng với $\eta, \varnothing$ và k tại $\bar{x}$ nếu $\forall x \in X$, ta có

$$\eta(x, \bar{x})^T \nabla_x f(\bar{x}) \geq 0 \Rightarrow k(x, \bar{x})\varnothing[f(x) - f(\bar{x})] \geq 0.$$

Định nghĩa 1.4.5. Các hàm khả vi $f(x)$ và $g(x)$ thứ tự là hàm mục tiêu và hàm ràng buộc được gọi là *dạng I-Univex* ứng với $\eta, \varnothing_0, \varnothing_1, b_0, b_1$ tại $\bar{x}$ nếu $\forall x \in X$ ta có

$$b_0(x, \bar{x})\varnothing_0[f(x) - f(\bar{x})] \geq \eta(x, \bar{x})^T \nabla_x f(\bar{x})$$

và

$$-b_1(x, \bar{x})\varnothing_1[g(x)] \geq \eta(x, \bar{x})^T \nabla_x g(x, \bar{x}).$$

1.5 Hàm V-invex và các hàm liên quan

Định nghĩa 1.5.1. Một hàm đa mục tiêu $f : X \rightarrow R^p$ được gọi là *V-Invex* nếu tồn tại hàm $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ và $\alpha_i : X \times X \rightarrow R^+ \setminus \{0\}$ sao cho mỗi $x, \bar{x} \in X$ và $i = 1, 2, \dots, p$, ta có

$$f_i(x) - f_i(\bar{x}) \geq \alpha_i(x, \bar{x})\nabla f_i(\bar{x})\eta(x, \bar{x}).$$

Định nghĩa 1.5.2. Một hàm đa mục tiêu $f : X \rightarrow R^p$ được gọi là *V-giả invex* nếu tồn tại hàm $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ và $\beta_i : X \times X \rightarrow R^+ \setminus \{0\}$ với $x, \bar{x} \in X$ và $i = 1, 2, \dots, p$, ta có

$$\sum_{i=1}^p \nabla f_i(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^p \beta_i(x, \bar{x})f_i(x) \geq \sum_{i=1}^p \beta_i(x, \bar{x})f_i(\bar{x}).$$

Định nghĩa 1.5.3. Một hàm đa mục tiêu $f : X \rightarrow R^p$ được gọi là *V-tựa invex* nếu tồn tại hàm $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ và $\delta_i : X \times X \rightarrow R^+ \setminus \{0\}$ sao cho mỗi $x, \bar{x} \in X$ và $i = 1, 2, \dots, p$, ta có

$$\sum_{i=1}^p \delta_i(x, \bar{x})f_i(x) \leq \sum_{i=1}^p \delta_i(x, \bar{x})f_i(\bar{x}) \Rightarrow \sum_{i=1}^p \nabla f_i(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \leq 0.$$

Định nghĩa 1.5.4. Bài toán tối ưu đa mục tiêu:

$$(VP) \quad V\text{-min } (f_1, f_2, \dots, f_p)$$

$$v.\bar{d}.k. \quad g(x) \leq 0.$$

Với $f_i : X \rightarrow R^p, i = 1, 2, \dots, p$ và $g : X \rightarrow R^m$ là hàm khả vi trên $X \subseteq R^n$ mở được gọi là bài toán tối ưu đa mục tiêu *V-inver* nếu mỗi $f_1, f_2, \dots, f_p$ và $g_1, g_2, \dots, g_m$ là hàm *V-inver*.

Định nghĩa 1.5.5. Bài toán (VP) được gọi là V-dạng-I (*V-Type I*) tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại các hàm giá trị thực dương α_i và β_i xác định trên tập $X \times X$ và hàm vector $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$f_i(x) - f_i(\bar{x}) \geq \alpha_i(x, \bar{x}) \nabla f_i(\bar{x}) \eta(x, \bar{x})$$

và

$$-g_i(\bar{x}) \geq \beta_j(x, \bar{x}) \nabla g_j(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}),$$

với mỗi $x \in X$.

Định nghĩa 1.5.6. Bài toán đa mục tiêu (VP) được gọi là tựa-V-dạng-I (*quasi V type I*) tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại các hàm giá trị thực dương α_i và β_i xác định trên tập $X \times X$ và hàm vector $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$\sum_{i=1}^p \tau_i \alpha_i(x, \bar{x}) [f_i(x) - f_i(\bar{x})] \leq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^p \tau_i \eta(x, \bar{x}) \nabla f_i(\bar{x}) \leq 0$$

và

$$-\sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_j(x, \bar{x}) g_j(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^m \alpha_j \eta(x, \bar{x}) \nabla g_j(\bar{x}) \leq 0,$$

với mỗi $x \in X$.

Định nghĩa 1.5.7. Bài toán đa mục tiêu (VP) được gọi là giả-V-dạng-I (*pseudo V-type I*) tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại các hàm giá trị thực dương α_i và β_i xác định trên tập $X \times X$ và hàm vector $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$\sum_{i=1}^p \tau_i \eta(x, \bar{x}) \nabla f_i(\bar{x}) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^p \tau_i \alpha_i(x, \bar{x}) [f_i(x) - f_i(\bar{x})] \geq 0$$

và

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \eta(x, \bar{x}) \nabla g_j(\bar{x}) \geq 0 \Rightarrow -\sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_j(x, \bar{x}) g_j(\bar{x}) \geq 0,$$

với mỗi $x \in X$.

Định nghĩa 1.5.8. Bài toán đa mục tiêu (VP) được gọi là tựa-giả-V-dạng-I (*quasi pseudo V-type I*) tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại các hàm giá trị thực dương α_i và β_i xác định trên tập $X \times X$ và hàm vector $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$\sum_{i=1}^p \tau_i \alpha_i(x, \bar{x}) [f_i(x) - f_i(\bar{x})] \leq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^p \tau_i \eta(x, \bar{x}) \nabla f_i(\bar{x}) \leq 0$$

và

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \eta(x, \bar{x}) \nabla g_j(\bar{x}) \geq 0 \Rightarrow - \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_j(x, \bar{x}) g_j(\bar{x}) \geq 0,$$

với mỗi $x \in X$.

Định nghĩa 1.5.9. Bài toán đa mục tiêu (VP) được gọi là giả -tựa-V-dạng-I (*pseudo quasi V-type I*) tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại các hàm giá trị thực dương α_i và β_i xác định trên tập $X \times X$ và hàm vector $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ sao cho

$$\sum_{i=1}^p \tau_i \eta(x, \bar{x}) \nabla f_i(\bar{x}) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^p \tau_i \alpha_i(x, \bar{x}) [f_i(x) - f_i(\bar{x})] \geq 0$$

và

$$- \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_j(x, \bar{x}) g_j(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^m \alpha_j \eta(x, \bar{x}) \nabla g_j(\bar{x}) \leq 0,$$

với mỗi $x \in X$.

1.6 Một số hàm lồi tổng quát mở rộng

Định nghĩa 1.6.1. f được gọi là giả-chặt-yếu-Invex (weak strictly pseudoinvex) ứng với η tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại một hàm vector $\eta(x, \bar{x})$ định nghĩa trên tập $X \times X$ sao cho, $\forall x \in X$,

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0.$$

Định nghĩa 1.6.2. f được gọi là giả mạnh invex ứng với η tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại một hàm vector $\eta(x, \bar{x})$ định nghĩa trên tập $X \times X$ sao cho, $\forall x \in X$,

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) \leq 0.$$

Định nghĩa 1.6.3. f được gọi là tựa-yếu-invex ứng với η tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại một hàm vector $\eta(x, \bar{x})$ định nghĩa trên tập $X \times X$ sao cho

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) \leq 0, \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.6.4. f được gọi là *giả-yếu-invex* ứng với η tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại một hàm vector $\eta(x, \bar{x})$ định nghĩa trên tập $X \times X$ sao cho

$$f(x) < f(\bar{x}) \Rightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \leq 0, \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.6.5. f được gọi là *tựa-mạnh-invex* ứng với η tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại một hàm vector $\eta(x, \bar{x})$ xác định trên tập $X \times X$ sao cho

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \Rightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \leq 0, \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.6.6. f được gọi là *giả-pre-invex-yếu* ứng với η tại $\bar{x} \in X$ nếu X là *invex* tại $\bar{x}$ ứng với η , và mỗi $x \in X$, ta có

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \Rightarrow f(\bar{x} + \lambda\eta(x, \bar{x})) \leq f(\bar{x}), 0 < \lambda \leq 1.$$

Chương 2

HÀM TYPE I TỔNG QUÁT VÀ CÁC HÀM LIÊN QUAN

Trong chương này chúng ta định nghĩa một số bài toán Univex dạng I tổng quát. Nêu một vài các dạng mới của hàm lồi tổng quát như là : Hàm dạng I Univex, hàm dạng I Univex tổng quát (*generalized type I Univex function*), hàm d-dạng I không khả vi (*nondifferentiable d-type I function*), Hàm giả-d-loại I không khả vi (*nondifferentiable giả-d-type I function*), Hàm Tựa- d-loại I không khả vi (*nondifferentiable quasi-d-type I function*).

2.1 Các hàm dạng I-Univex tổng quát

Trong các định nghĩa dưới đây, $b_0, b_1 : X \times X \times [0, 1] \rightarrow R^+, b(x, a) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} b(x, a, \lambda) \geq 0$, và b không phụ thuộc vào λ nếu các hàm b_0, b_1 khả vi, $\phi_0, \phi_1 : R \rightarrow R$ và $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ là một hàm vector. Xét bài toán đa mục tiêu sau

$$\begin{aligned} \text{(VP)} \quad & \text{Min } f(x) \\ & \text{v.đ.k. } g(x) \leq 0, \\ & x \in X, \end{aligned}$$

ở đây $f : X \rightarrow R^k, g : X \rightarrow R^m, X$ là tập mở khác rỗng của R^m .

Định nghĩa 2.1.1. Ta nói bài toán (VP) là *weak strictly pseudo type I Univex* tại $a \in X_0$ nếu tồn tại hàm giá trị thực b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η sao cho

$$\begin{aligned} b_0(x, a)\phi_0[f(x) - f(a)] &\leq 0 \Rightarrow (\nabla f(a))\eta(x, a) < 0, \\ -b_1(x, a)\phi_1[g(a)] &\leq 0 \Rightarrow (\nabla g(a))\eta(x, a) \leq 0, \end{aligned}$$

Với mọi $x \in X_0$ và với mọi $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, m$.

Định nghĩa 2.1.2. Ta nói bài toán (VP) là *strong pseudoquasi type I Univex* tại

$a \in X_0$ nếu tồn tại hàm giá trị thực b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η sao cho.

$$\begin{aligned} b_0(x, a)\phi_0[f(x) - f(a)] &\leq 0 \Rightarrow (\nabla f(a))\eta(x, a) \leq 0, \\ -b_1(x, a)\phi_1[g(a)] &\leq 0 \Rightarrow (\nabla g(a))\eta(x, a) \leq 0, \end{aligned}$$

với mọi $x \in X_0$ và với mọi $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, m$.

Định nghĩa 2.1.3. Ta nói bài toán (VP) là *tự chặt giả dạng I Univex yếu* ứng với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η tại $a \in X_0$ nếu tồn tại hàm giá trị thực b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η sao cho

$$\begin{aligned} b_0(x, a)\phi_0[f(x) - f(a)] &\leq 0 \Rightarrow (\nabla f(a))\eta(x, a) \leq 0, \\ -b_1(x, a)\phi_1[g(a)] &\leq 0 \Rightarrow (\nabla g(a))\eta(x, a) \leq 0, \end{aligned}$$

với mọi $x \in X_0$ và với mọi $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, m$.

Định nghĩa 2.1.4. Ta nói bài toán (VP) là *giả dạng I Univex chặt yếu* ứng với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η tại $a \in X_0$ nếu tồn tại hàm giá trị thực b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η sao cho

$$\begin{aligned} b_0(x, a)\phi_0[f(x) - f(a)] &\leq 0 \Rightarrow (\nabla f(a))\eta(x, a) < 0, \\ -b_1(x, a)\phi_1[g(a)] &\leq 0 \Rightarrow (\nabla g(a))\eta(x, a) < 0, \end{aligned}$$

với mọi $x \in X_0$ và với mọi $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, m$.

2.2 Hàm d-dạng I không khả vi và các hàm liên quan

Trong những định nghĩa dưới đây $f : X \rightarrow R^k, g : X \rightarrow R^m, X$ là tập mở khác rỗng của $R^n, \eta : X \times X \rightarrow R^n$ là hàm vector. Ta kí hiệu $f'(u, \eta(x, u)) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{f(u + \lambda\eta(x, u)) - f(u)}{\lambda}$

và định nghĩa tương tự cho $g'(u, \eta(x, u))$. Với $D = \{x \in X : g(x) \leq 0\}$ là tập tất cả các nghiệm chấp nhận được của bài toán (P) , $I = 1, \dots, k, M = 1, 2, \dots, m, J(x) = \{j \in M : g_j(x) = 0\}$ và $\tilde{J}(x) = \{j \in M : g_j(x) < 0\}$. Rõ ràng rằng $\tilde{J}(x) \cup J(x) = M$.

Định nghĩa 2.2.1. (f, g) gọi là *d-dạng I univex* ứng với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η sao cho $\forall x \in X$,

$$b_0(x, u)\phi_0[f(x) - f(u)] \geq f'(u, \eta(x, u))$$

và

$$-b_1(x, u)\phi_1[g(u)] \geq g'(u, \eta(x, u)).$$

Định nghĩa 2.2.2. (f, g) gọi là *giả tự d-dạng I univex chặt yếu* ứng với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η sao cho $\forall x \in X$,

$$b_0(x, u)\phi_0[f(x) - f(u)] \leq 0 \Rightarrow f'(u, \eta(x, u)) < 0$$

và

$$-b_1(x, u)\phi_1[g(u)] \leq 0 \Rightarrow g'(u, \eta(x, u)) \leq 0.$$

Định nghĩa 2.2.3. (f, g) gọi là *giả tựa d-dạng I univex mạnh* ứng với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η sao cho $\forall x \in X$,

$$b_0(x, u)\phi_0[f(x) - f(u)] \leq 0 \Rightarrow f'(u, \eta(x, u)) \leq 0$$

và

$$-b_1(x, u)\phi_1[g(u)] \leq 0 \Rightarrow g'(u, \eta(x, u)) \leq 0.$$

Định nghĩa 2.2.4. (f, g) gọi là *tựa chặt-giả d-dạng I univex yếu* ứng với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η sao cho $\forall x \in X$,

$$b_0(x, u)\phi_0[f(x) - f(u)] \leq 0 \Rightarrow f'(u, \eta(x, u)) \leq 0$$

và

$$-b_1(x, u)\phi_1[g(u)] \leq 0 \Rightarrow g'(u, \eta(x, u)) \leq 0.$$

Định nghĩa 2.2.5. (f, g) gọi là *giả d-dạng I univex chặt yếu* ứng với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η sao cho $\forall x \in X$,

$$b_0(x, u)\phi_0[f(x) - f(u)] \leq 0 \Rightarrow f'(u, \eta(x, u)) < 0$$

và

$$-b_1(x, u)\phi_1[g(u)] \leq 0 \Rightarrow g'(u, \eta(x, u)) < 0.$$

2.3 Hàm type I liên thông nửa địa phương

Định nghĩa 2.3.1. Tập $X_0 \subseteq R^m$ được gọi là một η -hình sao địa phương tại $\bar{x}, \bar{x} \in X_0$, nếu với mọi $x \in X_0$ tồn tại $0 < a_\eta(x, \bar{x}) \leq 1$ sao cho $\bar{x} + \lambda\eta(x, \bar{x}) \in X_0$ với bất kì $\lambda \in [0, a_\eta(x, \bar{x})]$.

Định nghĩa 2.3.2. (Preda 1996) Cho hàm $f : X_0 \rightarrow R^m$, với $X_0 \subseteq R^m$ là một tập η -hình sao địa phương tại $\bar{x} \in X_0$. Chúng ta nói rằng f là

(a) *Pre-invex nửa địa phương (slpi)* tại $\bar{x}$ nếu tương ứng với $\bar{x}$ và với mỗi $x \in X_0$, tồn tại một số dương $d_\eta(x, \bar{x}) \leq a_\eta(x, \bar{x})$ sao cho $f(\bar{x} + \lambda\eta(x, \bar{x})) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(\bar{x})$ với $0 < \lambda < d_\eta(x, \bar{x})$.

(b) *tựa-Pre-invex nửa địa phương (slqpi)* tại $\bar{x}$ nếu tương ứng với $\bar{x}$ và với mỗi $x \in X_0$, tồn tại một số dương $d_\eta(x, \bar{x}) \leq a_\eta(x, \bar{x})$ sao cho $f(x) \leq f(\bar{x})$ và $0 < \lambda < d_\eta(x, \bar{x})$ suy ra $f(\bar{x} + \lambda\eta(x, \bar{x})) \leq f(\bar{x})$.

Định nghĩa 2.3.3. Cho hàm $f : X_0 \rightarrow R^m$, với $X_0 \subseteq R^m$ là một tập η -hình sao địa phương tại $\bar{x} \in X_0$. Chúng ta nói rằng f là η -nửa khả vi tại $\bar{x}$ nếu $(df)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))$ tồn tại với mỗi $\bar{x} \in X_0$, với

$$(df)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda} [f(\bar{x} + \lambda\eta(x, \bar{x})) - f(\bar{x})]$$

(đạo hàm phải tại $\bar{x}$ theo hướng $\eta(x, \bar{x})$). Nếu f là η -nửa khả vi tại bất kì $\bar{x} \in X_0$, thì f gọi là η -nửa khả vi trên X_0 .

Định nghĩa 2.3.4. (*Preda 1996*) Hàm f gọi là *giả-preinvex nửa địa phương (slppi)* tại $\bar{x}$ nếu với mọi $\bar{x} \in X_0$, $(df)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x})$. Nếu f là *slppi* tại bất kì $\bar{x} \in X_0$, thì f là *slppi* trên X_0 .

Định nghĩa 2.3.5. Cho X và Y là hai tập của X_0 và $\bar{y} \in Y$. Chúng ta nói rằng Y là η -hình sao địa phương (*locally starshaped*) tại $\bar{y}$ ứng với X nếu bất kì $x \in X$, tồn tại $0 < a_\eta(x, \bar{y}) \leq 1$ sao cho $\bar{y} + \lambda\eta(x, \bar{y}) \in Y$ với mọi $0 \leq \lambda \leq a_\eta(x, \bar{y})$.

Định nghĩa 2.3.6. Cho Y là η -hình sao địa phương (*locally starshaped*) tại $\bar{y}$ ứng với X và f là hàm η -nửa khả vi tại $\bar{y}$. Chúng ta nói f là

(a) *Slppi* tại $\bar{y} \in Y$ ứng với X , nếu bất kì $x \in X$, $(df)^+(\bar{y}, \eta(x, \bar{y})) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(\bar{y})$.

(b) *giả-preinvex nửa địa phương chặt (sslppi)* tại $\bar{y} \in Y$ ứng với X nếu với bất kì $x \in X$, $x \neq \bar{y}$, $(df)^+(\bar{y}, \eta(x, \bar{y})) \geq 0 \Rightarrow f(x) > f(\bar{y})$.

Định nghĩa 2.3.7. (*Ester and Nehse 1980*). Một hàm giống hàm lồi (*convexlike*) $f : X_0 \rightarrow R^k$ nếu $x, y \in X_0$ và $0 \leq \lambda \leq 1$, có $z \in X_0$ sao cho

$$f(z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Xét bài toán phân thức sau:

$$\begin{aligned} & \text{(VFP)} \quad \text{Min} \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \dots, \frac{f_p(x)}{g_p(x)} \right) \\ & \text{v.đ.k.} \quad \begin{cases} h_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m, \\ x \in X_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Định nghĩa 2.3.8. Chúng ta gọi bài toán (VFP) là η -dạng *I-Preinvex nửa khả vi* tại $\bar{x}$ nếu bất kì $\bar{x} \in X_0$ ta có

$$\begin{aligned} f_i(x) - f_i(\bar{x}) &\geq (df_i)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})), \forall i \in P, \\ g_i(x) - g_i(\bar{x}) &\leq (dg_i)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})), \forall i \in P, \\ -h_j(\bar{x}) &\geq (dh_j)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})), \forall j \in M. \end{aligned}$$

Định nghĩa 2.3.9. Chúng ta gọi bài toán (VFP) là η -giả tựa dạng *I-Preinvex nửa khả vi* tại $\bar{x}$ nếu bất kì $\bar{x} \in X_0$ ta có

$$\begin{aligned} (df_i)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) &\geq 0 \Rightarrow f_i(x) \geq f_i(\bar{x}), \forall i \in P, \\ (dg_i)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) &\geq 0 \Rightarrow g_i(x) \leq g_i(\bar{x}), \forall i \in P, \\ -h_j(\bar{x}) &\leq 0 \Rightarrow (dh_j)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) \leq 0, \forall j \in M. \end{aligned}$$

Định nghĩa 2.3.10. Chúng ta gọi bài toán (VFP) là η -tựa giả dạng *I-Preinvex nửa khả vi* tại $\bar{x}$ nếu bất kì $\bar{x} \in X_0$ ta có

$$\begin{aligned} f_i(x) &\leq f_i(\bar{x}) \Rightarrow (df_i)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) \leq 0, \forall i \in P, \\ g_i(x) &\leq g_i(\bar{x}) \Rightarrow (dg_i)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) \leq 0, \forall i \in P, \\ (dh_j)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) &\geq 0 \Rightarrow -h_j(\bar{x}) \geq 0, \forall j \in M. \end{aligned}$$

2.4 Hàm Invex không trơn và các hàm liên quan

Trong phần này ta kí hiệu R^n là không gian Ôclit n chiều, X là tập con khác rỗng của R^n .

Định nghĩa 2.4.1. Một hàm $f : X \rightarrow R$ được gọi là *Lipschitz cận* $x \in X$ nếu cho mỗi $K > 0$,

$$|f(y) - f(z)| \leq K \|y - z\|, \forall y, z \text{ trong khoảng lân cận của } x \in X.$$

Chúng ta nói rằng $f : X \rightarrow R$ là *Lipschitz địa phương* trên X nếu nó *Lipschitz cận* bất kì điểm nào của X .

Định nghĩa 2.4.2. Nếu hàm $f : X \rightarrow R$ là *Lipschitz* tại $x \in X$, thì đạo hàm suy rộng của f tại $x \in X$ theo hướng $v \in R^n$, kí hiệu $f^0(x, v)$, cho bởi

$$f^0(x, v) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{[f(y + \lambda v) - f(y)]}{\lambda}.$$

Định nghĩa 2.4.3. *Gradient suy rộng Clarke* của f tại $x \in X$, kí hiệu $\partial f(x)$, được định nghĩa như sau

$$\partial f(x) = \{\xi \in R^n : f^0(x; v) \geq \xi^T v, \forall v \in R^n\}.$$

suy ra với mọi $v \in R^n$ bất kì thì

$$f^0(x; v) = \max\{\xi^T v : \xi \in \partial f(x)\}.$$

Định nghĩa 2.4.4. Hàm không khả vi $f : X \rightarrow R$ gọi là *invex* ứng với $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ nếu

$$f(x) - f(u) \geq \xi^T \eta(x, u), \forall \xi \in \partial f(u), \forall x, u \in X.$$

Định nghĩa 2.4.5. Hàm không khả vi $f : X \rightarrow R$ gọi là *invex chặt* ứng với $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ nếu

$$f(x) - f(u) > \xi^T \eta(x, u), \forall \xi \in \partial f(u), \forall x \neq u \in X.$$

Định nghĩa 2.4.6. Hàm không khả vi $f : X \rightarrow R$ gọi là *giả invex* ứng với $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ nếu

$$f(x) - f(u) < 0 \Rightarrow \xi^T \eta(x, u), \forall \xi \in \partial f(u), \forall x, u \in X.$$

Định nghĩa 2.4.7. Hàm không khả vi $f : X \rightarrow R$ gọi là *giả- invex chặt* ứng với $\eta : X \times X \rightarrow R^n$ nếu

$$\xi^T \eta(x, u) \geq 0 \Rightarrow f(x) > f(u), \forall \xi \in \partial f(u), \forall x, u \in X.$$

2.5 Hàm dạng I và các hàm liên quan trong không gian Banach

Cho E, F và G là các không gian *Banach*. Xét quy hoạch toán học sau

$$(P) \quad \text{Min} \{f(x) : x \in C, -g(x) \in K\}$$

ở đây $f : E \rightarrow F$ và $g : E \rightarrow G$, với $C \subseteq E, K \subseteq G$.

Đạo hàm suy rộng theo hướng của hàm *Lipschitz* địa phương từ E vào R , như định nghĩa (2.4.2) tại x theo hướng d , kí hiệu $f^0(x, d)$, cho bởi

$$f^0(x, d) = \limsup_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ t \downarrow 0}} \frac{[f(x + td) - f(x^0)]}{t}$$

Gradient Clarke tổng quát của ϕ tại x là tập

$$\partial\phi(\bar{x}) = \{x^* \in E^* : \phi^0(\bar{x}, d) \geq \langle x^*, d \rangle, \forall d \in X\}.$$

ở đây E^* là không gian Topo đối ngẫu của E và $\langle \bullet, \bullet \rangle$ là cặp đối ngẫu.

Cho C là tập khác rỗng của E , Hàm $\delta_C(\cdot) : E \rightarrow R$ là hàm khoảng cách từ x đến C định nghĩa như sau

$$\delta_C(x) = \inf\{\|x - c\| : c \in C\}$$

Hàm khoảng cách không phải khả vi hầu khắp nơi, nhưng là *Lipschitz địa phương*.

Cho $\bar{x} \in C$. Một vector $d \in E$ gọi là tiếp tuyến của C tại $\bar{x}$ nếu

$$\delta_{C^0}(\bar{x}, d) = 0.$$

Tập các vector tiếp tuyến của C tại $\bar{x}$ là nón lồi đóng trong E , gọi là nón tiếp xúc Clarke (*tangent cone*) của C tại $\bar{x}$ được kí hiệu là $T_C(\bar{x})$.

Định nghĩa 2.5.1. Một ánh xạ $h : E \rightarrow G$ được gọi là hàm *Lipschitzian compact* tại $\bar{x} \in E$ nếu tồn tại hàm đa trị (hàm tập) $R : E \rightarrow \text{comp}(G)$ với ($\text{comp}(G)$ là tập tất cả tập compact định chuẩn của G)

và hàm $r : E \times E \rightarrow R_+$ thỏa mãn các điều kiện sau

- i) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}, d \rightarrow 0} r(x, d) = 0$;
- ii) Tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $t^{-1}[h(x + td) - h(x)] \in R(d) + \|d\|r(x, t)B_G$,
 $\forall x \in \bar{x} + \alpha B_G$ và $t \in (0, \alpha)$ ở đây B_G là quả cầu đơn vị đóng tâm là gốc của G
- iii) $R(0) = \{0\}$ và R nửa liên tục trên.

Phuong et al (1995) đưa vào khái niệm *invex* cho hàm thực Lipschitz địa phương $\phi : E \rightarrow R$ ứng với tập $\emptyset \neq C \subset E$.

Định nghĩa 2.5.2. ϕ được gọi là *invex* tại $x \in C$, theo C , nếu mỗi $y \in C$ tồn tại $\eta(y, x) \in T_C(x)$ sao cho

$$\phi(y) - \phi(x) \geq \phi^0(x, \eta(y, x)).$$

ϕ là *invex* trên C nếu bất đẳng thức trên đúng với mọi $x, y \in C$.

Định nghĩa dưới đây là mở rộng khái niệm Invex cho các hàm giữa các không gian Banach.

Định nghĩa 2.5.3. $f : E \rightarrow F$ và $g : E \rightarrow G$ là *Invex* nếu u^*of và v^*og là *invex* theo định nghĩa (2.5.2) $\forall u^* \in Q^*$ và $v^* \in K^*$.

Các định nghĩa dưới đây là mở rộng khái niệm của hàm *dạng I* hàm *giả dạng I*, *tựa dạng I* và hàm *giả tựa dạng I*, *tựa giả dạng I* trong không gian Banach.

Định nghĩa 2.5.4. Hàm giá trị thực Lipschitz địa phương (*Locally Lipschitz real-valued functions*) $f : E \rightarrow R$ và $g : E \rightarrow R$ gọi là Type I tại $x \in C$, theo C , nếu với mỗi $y \in C$, tồn tại $\eta(y, x) \in T_C(x)$ sao cho

$$f(y) - f(x) \geq f^0(x; \eta(y, x))$$

$$-g(x) \geq g^0(x, \eta(y, x)).$$

Định nghĩa 2.5.5. (f, g) gọi là *tựa dạng I* tại $x \in C$, theo C , nếu mỗi $y \in C$, có $\eta(y, x) \in T_C(x)$ sao cho

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow f^0(x; \eta(y, x)) \leq 0,$$

$$-g(x) \leq 0 \Rightarrow g^0(x, \eta(y, x)) \leq 0.$$

Định nghĩa 2.5.6. (f, g) gọi là *giả dạng I* tại $x \in C$, theo C , nếu mỗi $y \in C$, có $\eta(y, x) \in T_C(x)$ sao cho

$$f^0(x; \eta(y, x)) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x),$$

$$g^0(x, \eta(y, x)) \leq 0 \Rightarrow -g(x) \leq 0.$$

Định nghĩa 2.5.7. (f, g) gọi là *tựa giả dạng I* tại $x \in C$, theo C , nếu mỗi $y \in C$, có $\eta(y, x) \in T_C(x)$ sao cho

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow f^0(x; \eta(y, x)) \leq 0,$$

$$g^0(x, \eta(y, x)) \leq 0 \Rightarrow -g(x) \geq 0.$$

Định nghĩa 2.5.8. (f, g) gọi là *giả tựa dạng I* tại $x \in C$, theo C , nếu mỗi $y \in C$, có $\eta(y, x) \in T_C(x)$ sao cho

$$f^0(x; \eta(y, x)) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x),$$

$$-g(x) \leq 0 \Rightarrow g^0(x, \eta(y, x)) \leq 0.$$

Định nghĩa 2.5.9. (f, g) gọi là *tụm chặt giả dạng I* tại $x \in C$, theo C , nếu mỗi $y \in C$, có $\eta(y, x) \in T_C(x)$ sao cho

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow f^0(x; \eta(y, x)) \leq 0,$$

$$g^0(x, \eta(y, x)) \leq 0 \Rightarrow -g(x) > 0.$$

Chương 3

ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU LỒI TỔNG QUÁT

3.1 Điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu

Trong phần này, chúng ta thiết lập một số điều kiện tối ưu đủ để cho $a \in X_0$ là nghiệm hữu hiệu của một bài toán tối ưu đa mục tiêu (Tối ưu Vector). Xét bài toán tối ưu đa mục tiêu

$$\begin{aligned} \text{(VP)} \quad & \text{Min } f(x) = (f_1(x), \dots, f_P(x)) \\ & \text{v.đ.k.} \quad g(x) \leq 0, \\ & x \in X \subseteq R^n, \end{aligned}$$

Trong đó $f : X \rightarrow R^p$ và $g : X \rightarrow R^m$ là các hàm khả vi và $X \subseteq R^n$ là tập mở. ở đây việc tìm nghiệm cực tiểu có nghĩa là tìm tập hợp các điểm hữu hiệu. Kí hiệu X_0 là tập tất cả các nghiệm chấp nhận được (*nghiệm khả thi*) của bài toán (VP).

Định lý 3.1.1. (Điều kiện đủ) giả sử rằng

- (i) $a \in X_0$;
- (ii) Tồn tại $\tau^0 \in R^p, \tau^0 > 0$ và $\lambda^0 \in R^m, \lambda^0 \geq 0$ sao cho:

$$(a) \tau^0 \nabla f(a) + \lambda^0 \nabla g(a) = 0,$$

$$(b) \lambda^0 \nabla g(a) = 0,$$

$$(c) \tau^0 e = 1, \text{ ở đây } e = (1, \dots, 1)^T \in R^p;$$

(iii) Bài toán (VP) là *giả tựa dạng I univex mạnh* tại $a \in X_0$ ứng với mỗi b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η ;

(iv) $u \leq 0 \Rightarrow \phi_0(u) \leq 0$ và $u \leq 0 \Rightarrow \phi_1(u) \leq 0$;

(v) $b_0(x, a) > 0$ và $b_1(x, a) \geq 0$

với mọi nghiệm khả thi x . Khi đó a là một nghiệm hữu hiệu của bài toán (VP).

Định lý 3.1.2. (Điều kiện đủ) giả sử rằng

- (i) $a \in X_0$;
- (ii) Tồn tại $\tau^0 \in R^p, \tau^0 \geq 0$, và $\lambda \in R^m, \lambda^0 \geq 0$ sao cho

$$(a) \tau^0 \nabla f(a) + \lambda^0 \nabla g(a) = 0,$$

$$(b) \lambda^0 \nabla g(a) = 0$$

$$(c) \tau^0 e = 1, \text{ ở đây } e = (1, \dots, 1)^T \in R^p;$$

(iii) Bài toán (VP) là *giả tựa dạng I univex chặt yếu* tại $a \in X_0$ ứng với mỗi b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η ;

$$(iv) u \leq 0 \Rightarrow \phi_0(u) \leq 0 \text{ và } u \leq 0 \Rightarrow \phi_1(u) \leq 0;$$

$$(v) b_0(x, a) > 0 \text{ và } b_1(x, a) \geq 0$$

với mọi nghiệm x khả thi. Khi đó a là một nghiệm hữu hiệu của bài toán (VP).

Định lý 3.1.3 (Điều kiện đủ) giả sử rằng

- (i) $a \in X_0$;
- (ii) Tồn tại $\tau^0 \in R^p, \tau^0 \geq 0$, và $\lambda \in R^m, \lambda^0 \geq 0$ sao cho

$$(a) \tau^0 \nabla f(a) + \lambda^0 \nabla g(a) = 0,$$

$$(b) \lambda^0 \nabla g(a) = 0,$$

$$(c) \tau^0 e = 1, \text{ ở đây } e = (1, \dots, 1)^T \in R^p;$$

(iii) Bài toán (VP) là *giả dạng I univex chặt yếu* tại $a \in X_0$ ứng với mỗi b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η ;

$$(iv) u \leq 0 \Rightarrow \phi_0(u) \leq 0 \text{ và } u \leq 0 \Rightarrow \phi_1(u) \leq 0;$$

$$(v) b_0(x, a) > 0 \text{ và } b_1(x, a) \geq 0;$$

với mọi nghiệm x khả thi. Khi đó a là một nghiệm hữu hiệu của bài toán (VP).

3.2 Điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu không khả vi

Xét bài toán tối ưu đa mục tiêu

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{v.đ.k.} & g(x) \leq 0, \\ & x \in X. \end{array}$$

Với $f : X \rightarrow R^k, g : X \rightarrow R^m$ và $\emptyset \neq X \subseteq R^n$. Cho hàm vector $\eta : X \times X \rightarrow R^m$.

Ta kí hiệu $f'(u, \eta(x, u)) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(u + \lambda \eta(x, u)) - f(u)}{\lambda}$. Cho $D = \{x \in X : g(x) \leq 0\}$

là tập tất cả các nghiệm khả thi (nghiệm chấp nhận được) của bài toán (P). Với $J(x) = \{j \in M : g_j(x) = 0\}$ và $\tilde{J}(x) = \{j \in M : g_j(x) < 0\}$ rõ ràng $J(x) \cup \tilde{J}(x) = M$.

Bổ đề 3.2.1. (Điều kiện tối ưu cần Karush-Kuhn-Tucker) Cho $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu của (P). Giả sử g_j là liên tục với $j \in \tilde{J}(\bar{x})$, f và g là khả vi theo hướng tại $\bar{x}$ với $f'(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))$ và $g'_j(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))$ là các hàm preinvex của $x \in X$. Hơn nữa g thỏa mãn điều kiện *Slate tổng quát* tại $\bar{x}$. Khi đó tồn tại $\bar{\mu} \in R_+^m$, sao cho $(\bar{x}, \bar{\mu})$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$f'(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) + \bar{\mu}^T g'(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) \geq 0, \forall x \in X, \quad (3.10)$$

$$\bar{\mu}^T g(\bar{x}) = 0, \quad (3.11)$$

$$g(\bar{x}) \leq 0. \quad (3.12)$$

Định lý 3.2.1. Cho $\bar{x}$ là một nghiệm chấp nhận được của (P) và thỏa mãn điều kiện (3.10), (3.11), (3.12). Hơn thế nữa nếu bất kì điều kiện nào sau đây được thỏa mãn:

a) $(f, \mu^T g)$ là *giả tựa d-dạng-I univex mạnh* tại $\bar{x}$ ứng với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η với $b_0 > 0, a < 0 \Rightarrow \phi_0(a) < 0$ và $b_1 \geq 0, a = 0 \Rightarrow \phi_1(a) \geq 0$;

b) $(f, \mu^T g)$ là *giả tựa d-dạng-I univex mạnh chặt yếu* tại $\bar{x}$ ứng với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η với $b_0 \geq 0, a < 0 \Rightarrow \phi_0(a) \leq 0$ và $b_1 \geq 0, a = 0 \Rightarrow \phi_1(a) \geq 0$;

c) $(f, \mu^T g)$ là *giả d-dạng-I univex mạnh* tại $\bar{x}$ ứng với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η với $b_0 \geq 0, a < 0 \Rightarrow \phi_0(a) \leq 0$ và $b_1 \geq 0, a = 0 \Rightarrow \phi_1(a) \geq 0$;

Thì $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (P).

3.3 Điều kiện tối ưu cho bài toán phân thức Minimax

Xét bài toán phân thức minimax

$$(P) \quad \text{Min} \quad F(x) = \sup_{y \in Y} \frac{f(x, y)}{h(x, y)} \quad (3.19)$$

$$\text{v.đ.k.} \quad g(x) \leq 0,$$

với Y là tập Compac của R^m , $f(.,.)$ và $h(.,.) : R^n \times R^m \mapsto R$ là hàm khả vi với $f(x, y) \geq 0$ và $h(x, y) > 0$ và $g(.,.) : R^n \mapsto R^p$ là hàm khả vi.

Kí hiệu

$$Y(x) = \left\{ y \in Y : \frac{f(x, y)}{h(x, y)} = \sup_{z \in Y} \frac{f(x, z)}{h(x, z)} \right\}, J = \{1, 2, \dots, p\}$$

,

$$J(x) = \{j \in J : g_j(x) = 0\}$$

và $K = \{(s, t, \bar{y}) \in N \times R_+^s \times R^m : 1 \leq s \leq n+1, t = (t_1, \dots, t_s) \in R_+^s \text{ với } \sum_{i=1}^s t_i = 1 \text{ và } \bar{y} = (y_1, \dots, y_s) \text{ và } y_i \in Y(x), i = 1, \dots, s\}$.

Bổ đề 3.3.1. (*Chandra anh kumar, 1995*). Cho x^* là nghiệm tối ưu của bài toán (P) và cho $\nabla g_j(x^*), j \in J(x^*)$ là độc lập tuyến tính. Khi đó tồn tại $(s^*, t^*, \bar{y}) \in K, v^* \in R$ và $\eta^* \in R_+^p$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* \{\nabla f(x^*, y_i) - v^* \nabla h(x^*, y_i)\} + \nabla \sum_{j=1}^p \mu_j^* g_j(x^*) = 0, \quad (3.20)$$

$$f(x^*, y_i) - v^* h(x^*, y_i) = 0, i = 1, 2, \dots, s^*, \quad (3.21)$$

$$\sum_{j=1}^p \mu_j^* g_j(x^*) = 0, \quad (3.22)$$

$$\mu^* \in R_+^p, t_i^* \geq 0, \sum_{i=1}^{s^*} t_i^* = 1, y_i \in Y(x^*), i = 1, \dots, s^*. \quad (3.23)$$

Định lý 3.3.1. Giả sử rằng $(x^*, \mu^*, s^*, v^*, t^*, \bar{y})$ thỏa mãn các điều kiện (3.20) – (3.23). Nếu $(\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* (f(\cdot, y_i) - v^* h(\cdot, y_i)), \sum_{j=1}^p \mu_j^* g_j(\cdot))$ là *giả tựa V-dạng I* tại x^* ứng với $\eta, \alpha_i, \beta_j, t$ và μ thì x^* là nghiệm tối ưu của (P).

Định lý 3.3.2. Giả sử rằng $(x^*, \mu^*, s^*, v^*, t^*, \bar{y})$ thỏa mãn các điều kiện (3.20) – (3.23). Nếu $(\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* (f(\cdot, y_i) - v^* h(\cdot, y_i)), \sum_{j=1}^p \mu_j^* g_j(\cdot))$ là *tựa chặt giả V-dạng I* tại x^* ứng với $\eta, \alpha_i, \beta_j, t$ và μ thì x^* là nghiệm tối ưu của (P).

Định lý 3.3.3. Giả sử rằng $(x^*, \mu^*, s^*, v^*, t^*, \bar{y})$ thỏa mãn các điều kiện (3.20) – (3.23). Nếu $(\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* (f(\cdot, y_i) - v^* h(\cdot, y_i)), \sum_{j=1}^p \mu_j^* g_j(\cdot))$ là *tựa V-dạng I nửa chặt* tại x^* ứng với $\eta, \alpha_i, \beta_j, t$ và μ thì x^* là nghiệm tối ưu của (P).

Định lý 3.3.4. Giả sử rằng $(x^*, \mu^*, s^*, v^*, t^*, \bar{y})$ thỏa mãn các điều kiện (3.20) – (3.23). Nếu $(\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* (f(\cdot, y_i) - v^* h(\cdot, y_i)), \sum_{j=1}^p \mu_j^* g_j(\cdot))$ là *giả V-dạng I chặt* tại x^* ứng với $\eta, \alpha_i, \beta_j, t$ và μ , thì x^* là nghiệm tối ưu của (P).

3.4 Điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu trong không gian Banach

Xét bài toán *Tối ưu Vector tổng quát*.

$$(P) \quad \text{Min} \quad \{f(x) : x \in C, -g(x) \in K\}$$

Trong đó $f : E \rightarrow F, g : E \rightarrow G$ là *Lipschitzian compact mạnh* tại $x_0 \in E, K \subset G$ là nón lồi, đóng, có đỉnh với phần trong khác rỗng, và C là tập khác rỗng của E .

Kí hiệu $\mathfrak{S}$ là tập tất cả các nghiệm chấp nhận được (nghiệm khả thi) của bài toán (P) , giả sử là khác rỗng, nghĩa là

$$\mathfrak{S} = \{x \in C : g(x) \leq 0\} \neq \emptyset$$

Định lý 3.4.1.(điều kiện tối ưu đủ): Giả sử rằng tồn tại $x_0 \in \mathfrak{S}$ và $u^* \in Q^*, u^* \neq 0, v^* \in K^*$ sao cho $\exists k > 0$ để

$$0 \in \partial(u^*of + v^*og + k\delta_C)(x_0), \quad (3.31)$$

$$\langle v^*, g(x_0) \rangle = 0 \quad (3.32)$$

Nếu (u^*of, v^*og) là type-I tại $x_0 \in \mathfrak{S}$ ứng với C thì x_0 là nghiệm hữu hiệu yếu (*weak efficient solution*) của (P) .

Định lý 3.4.2. Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathfrak{S}$ và $u^* \in Q^*, u^* \neq 0, v^* \in K^*$, giả sử $k > 0$ và (3.31), (3.32) của định lý (3.4.1) thỏa mãn. Nếu (f, g) là *giả tựa dạng I* tại x_0 ứng với C , và cùng hàm η , thì x_0 là nghiệm hữu hiệu yếu của (P) .

Định lý 3.4.3. Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathfrak{S}$ và $u^* \in Q^*, u^* \neq 0, v^* \in K^*$, giả sử $k > 0$ và (3.31), (3.32) của định lý (3.4.1) thỏa mãn. Nếu (f, g) là *tựa chặt giả dạng I* tại x_0 ứng với C , và cùng $\eta \in T_C(x_0)$, thì x_0 là nghiệm hữu hiệu yếu của (P) .

3.5 Điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu phân thức với hàm dạng I-Pre-invex nửa địa phương (*Semilocally Type I pre-invex functions*)

$$\begin{aligned} & \text{(VFP)} \quad \text{Min} \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \dots, \frac{f_p(x)}{g_p(x)} \right) \\ & \text{v.đ.k.} \quad \begin{cases} h_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m, \\ x \in X_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Định lý 3.5.1. Cho $\bar{x} \in X$ và bài toán (VFP) là η -*Semilocally type I-Preinvex* tại $\bar{x}$, hơn thế nữa giả sử rằng tồn tại $\lambda^0 \in R^p, u^0 \in R^p, v^0 \in R^m$ sao cho

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i^0 (df_i)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) + v^{0T} (dh)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) \geq 0, \forall i \in X \quad (3.37)$$

$$(df_i)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) \leq 0, \forall x \in X, \forall i \in P, \quad (3.38)$$

$$v^{0T} h(\bar{x}) = 0, \quad (3.39)$$

$$h(\bar{x}) \leq 0, \quad (3.40)$$

$$\lambda^{0T} e = 1, \quad (3.41)$$

$$\lambda^0 \geq 0, u^0 \geq 0, v^0 \geq 0, \quad (3.42)$$

với $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in R^p$ thì $\bar{x}$ là một giá trị cực tiểu yếu địa phương của bài toán(VFP).

Định lý 3.5.2. Cho $\bar{x} \in X$ và bài toán (VFP) là η -Semilocally type I-Preinvex tại $\bar{x}$, Hơn thế nữa giả sử tồn tại $\lambda^0 \in R^p, u_i^0 = f_i(\bar{x})/g_i(\bar{x}), i \in P, v^0 \in R^m$ sao cho

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i^0 ((df_i)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) - u_{i^0} (dg_i)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))) + v^{0T} (dh)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) \geq 0,$$

$$\forall x \in X, \quad (3.51)$$

$$v^{0T} h(\bar{x}) = 0, \quad (3.52)$$

$$h(\bar{x}) \leq 0, \quad (3.52)$$

$$\lambda^{0T} e = 1, \quad (3.54)$$

$$\lambda^0 \geq 0, u^0 \geq 0, v^0 \geq 0, \quad (3.55)$$

với $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in R^p$ thì $\bar{x}$ là một giá trị cực tiểu yếu địa phương của bài toán(VFP).

Định lý 3.5.3. Cho $\bar{x} \in X, \lambda^0 \in R^p, u_i^0 = f_i(\bar{x})/g_i^0(\bar{x}), i \in P$ và $v^0 \in R^m$ sao cho các điều kiện (3.51), (3.55) của định lý (3.5.2) được thoả mãn. Hơn thế nữa, giả sử rằng bài toán (VFP_u) là η - giả-tựa-dạng I-Preinvex nữa địa phương tại $\bar{x}$. Khi đó $\bar{x}$ là nghiệm cực tiểu của bài toán (VFP_u) .

KẾT LUẬN

Nội dung chính của luận văn trình bày có hướng hệ thống các lớp hàm tổng quát của hàm lồi, cụ thể là : Hàm Invex ,hàm Preinvex, hàm Univex, hàm V-Invex, và một số hàm lồi tổng quát mở rộng khác.

Ngoài ra luận văn hệ thống các lớp hàm Type I, hàm Type I không khả vi, hàm Invex không trơn, và các hàm Type I trong không gian Banach.

Luận văn đã chỉ ra được một số điều kiện về việc tồn tại nghiệm của các bài toán tối ưu đa mục tiêu lồi tổng quát, tối ưu đa mục tiêu không khả vi, bài toán phân thức minimax, bài toán tối ưu đa mục tiêu trong không gian Banach, và bài toán tối ưu phân thức với các hàm dạng I pre-invex nửa địa phương.