

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HCM**

NGUYỄN ĐỨC ÁI

**ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG LOẠI
KRASNOSEL'SKII VÀ ỨNG DỤNG
VÀO PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN**

Chuyên ngành: Giải Tích

Mã số : 604601

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. LÊ HOÀN HOÁ

Khoa Toán – Tin ĐHSP TP.HCM

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH – 2009

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên tôi xin bày tỏ lòng tri ân sâu sắc đến Thầy **PGS.TS Lê Hoàn Hoá** khoa Toán –Tin Trường Đại Học Sư Phạm TPHCM đã hướng dẫn ,động viên giúp đỡ tôi tận tình trong suốt quá trình học và thực hiện luận văn.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến quý Thầy Cô trong hội đồng chấm luận văn đã dành thời gian đọc, chỉnh sửa và góp ý quý báu giúp tôi hoàn thành luận văn hoàn chỉnh.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến toàn thể quý thầy cô đã tận tình tham gia giảng dạy tôi trong lớp cao học giải tích khoá 17.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến BGH Trường THPT Nguyễn An Ninh đã tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình tham gia học và thực hiện luận văn.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn đến phòng KHCN-SĐH, Ban chủ nhiệm khoa Toán –Tin Trường Đại Học Sư Phạm TPHCM.

TpHCM tháng 9 năm 2009

MỞ ĐẦU

1.Lý do chọn đề tài:

Hiện nay định lý điểm bất động là một vấn đề nghiên cứu rất lớn của toán học hiện đại, rất nhiều nhà toán học trên thế giới đã và đang nghiên cứu phát triển. Trong đó định lý điểm bất động loại Krasnosel'skii và ứng dụng vào phương trình tích phân là vấn đề được quan tâm rất nhiều. Vì vậy chúng tôi chọn đề tài này làm nội dung nghiên cứu của luận văn.

2.Mục đích:

Luận văn này nghiên cứu sự ứng dụng của định lý điểm bất động loại Krasnosel'skii vào phương trình tích phân.

3.Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

Nội dung luận văn dựa vào ba bài báo [1], [2], [3], trong đó chúng tôi nghiên cứu định lý điểm bất động loại Krasnosel'skii và ứng dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân.

4.ý nghĩa khoa học thực tiễn

Kết quả của luận văn này là cơ sở để tiếp tục nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân.

5.Cấu trúc luận văn

Luận văn gồm 3 chương

Chương 1: Chúng tôi trình bày, chứng minh một định lý điểm bất động loại Krasnosel'skii-Sheafer và chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân.

Chương 2: Chúng tôi trình bày ,chứng minh một định lý điểm bất động loại Krasnosel'skii trong không gian Frechet và chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân.

Chương 3: Chúng tôi trình bày ,chứng minh định lý điểm bất động cho một dạng ánh xạ co trong không gian hàm liên tục và ứng dụng vào phương trình tích phân.

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1: MỘT ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG LOẠI KRASNOSELSKII-SCHAEFER

Trong chương này trình bày và chứng minh một định lý điểm bất động loại Krasnoselskii-Schaefer và ứng dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân :

$$x(t) = q(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t,s)x(\theta(s))ds + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s,x(\eta(s)))ds, \quad t \in J \quad \text{FIE(1)}$$

Với $J = [0,1]$.

1.1) Định nghĩa

Định nghĩa 1.1.1

Cho X là không gian Banach, ánh xạ $A: X \rightarrow X$ được gọi là ánh xạ co phi tuyến nếu tồn tại hàm liên tục không giảm $\Phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sao cho :

$$\|Ax - Ay\| \leq \Phi(\|x - y\|) \text{ với mọi } x, y \in X, \Phi(r) < r, r > 0 \text{ .đặc biệt}$$

$\Phi(r) = \alpha r, 0 < \alpha < 1$ thì A được gọi là ánh xạ co trên X với hằng số co là α

Định nghĩa 1.1.2

Ánh xạ $\beta: J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là L^1 -Caratheodory nếu thỏa:

- i) Ánh xạ $t \mapsto \beta(t, x)$ đo được $\forall x \in \mathbb{R}$.
- ii) Ánh xạ $x \mapsto \beta(t, x)$ liên tục hầu khắp nơi với $t \in J$.
- iii) $\forall r \in \mathbb{R}, (r > 0)$ tồn tại hàm $h_r \in L^1(J, \mathbb{R})$ thỏa:

$$|\beta(t, x)| \leq h_r(t), t \in J, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq r$$

Các ký hiệu

* BM(J,R) là không gian các hàm bị chặn và đo được trên J, với chuẩn

$$\|x\|_{BM} = \max_{t \in J} |x(t)|$$

* $L^1(J, R)$ là không gian các hàm đo được Lebesgue trên J, với chuẩn

$$\|x\|_{L^1} = \int_0^1 |x(t)| ds$$

1.2) Các định lý cơ bản

Trước hết ta xét định lý điểm bất động của Boy và Wong [4], định lý dùng để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình tích phân phi tuyến.

Định lý 1.2.1

Cho S là tập lồi đóng bị chặn trong không gian Banach X và $A: S \rightarrow S$ là ánh xạ co phi tuyến thì A có duy nhất một điểm bất động x^* và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = x^*, \forall x \in S$$

Tiếp theo ta xét một định lý điểm bất động của Schaefer [8] liên quan đến toán tử hoàn toàn liên tục.

Định lý 1.2.2

Cho $T : X \rightarrow X$ là toán tử hoàn toàn liên tục khi đó ta có:

- i) Phương trình $x = \lambda Tx$ có một nghiệm với $\lambda = 1$ hoặc:
- ii) Tập hợp $\mathcal{E} = \{u \in X, u = \lambda Tu, \lambda \in (0, 1)\}$ là không bị chặn.

Burton và Kirk [6] đã kết hợp định lý 1.2.1 và 1.2.2 để chứng minh định lý sau:

Định lý 1.2.3

Cho A và $B : X \rightarrow X$ là 2 toán tử thoả:

a) A là ánh xạ co.

b) B là toán tử hoàn toàn liên tục.

Khi đó ta có:

i) Phương trình $Ax + Bx = x$ có một nghiệm hoặc:

ii) Tập hợp $\mathcal{E} = \left\{ u \in X : \lambda A\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \lambda Bu = u, \lambda \in (0,1) \right\}$ là tập không bị chặn.

Nhận xét:

Định lý 1.2.3 dùng chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân dạng hỗn hợp [6]. Nhưng trong trường hợp A không phải là ánh xạ co thì định lý 1.2.3 không dùng được, vì vậy ta xét định lý điểm bất động dạng Nashed-Wong-Shaefer.

1.3) Một định lý điểm bất động loại Krasnoselskii-Schaefer

Định lý 1.3.1

Cho $A, B : X \rightarrow X$ là 2 toán tử thoả 2 điều kiện :

a) A là tuyến tính bị chặn và tồn tại $p \in \mathbb{N}$ mà A^p là ánh xạ co phi tuyến.

b) B là hoàn toàn liên tục.

khi đó:

i) Phương trình $Ax + \lambda Bx = x$ có một nghiệm với $\lambda = 1$ hoặc:

ii) Tập hợp $\mathcal{E} = \{ u \in X : Au + \lambda Bu = u, \lambda \in (0,1) \}$ là tập không bị chặn.

Chứng minh:

Định nghĩa ánh xạ $T : X \rightarrow X$ bởi:

$$Tx = (I - A)^{-1}Bx$$

Ta có phương trình $\lambda(I-A)^{-1}Bx = x \Leftrightarrow Ax + \lambda Bx = x, \lambda \in [0,1]$

Trước hết cần chứng minh T được định nghĩa đúng và T hoàn toàn liên tục trên X

Ta có:

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{p-1} + \dots = (I-A^p)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{p-1} A^j \right)$$

Do A^p là ánh xạ co phi tuyến nên toán tử $(I-A^p)^{-1}$ là tồn tại trên X , mặt

khác A là tuyến tính bị chặn, $\sum_{j=0}^{p-1} A^j$ là toán tử tuyến tính bị chặn từ $X \rightarrow X$

do đó $(I-A^p)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{p-1} A^j \right)$ tồn tại nên T được định nghĩa đúng và là ánh xạ từ

$X \rightarrow X$, ta cần chứng minh $(I-A)^{-1}$ liên tục. Thật vậy, do A là tuyến tính

và bị chặn nên A liên tục suy ra A^j liên tục ($j = 1, 2, 3, \dots$) nên $(I-A)^{-1}$ là

liên tục trên X , vì B là compact do đó $T = (I-A)^{-1}B$ là hoàn toàn liên tục từ $X \rightarrow X$ theo định lý 1.2.2 ta có điều phải chứng minh.

1.4) Sự tồn tại nghiệm

Ứng dụng định lý 1.3.1 ta chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân phi tuyến sau:

$$x(t) = q(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t,s)x(\theta(s))ds + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s,x(\eta(s)))ds, \quad t \in J \quad \text{FIE (1)}$$

Trong đó:

$q: J \rightarrow \mathbb{R}$, $v, k: J \times J \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $\mu, \phi, \sigma, \eta: J \rightarrow J$, với

$$J = [0,1] \subset \mathbb{R}$$

Ta xét các giả thiết:

(H₀): các hàm $\mu, \theta, \sigma, \eta : J \rightarrow J$ là liên tục.

(H₁): hàm $q : J \rightarrow \mathbb{R}$ là liên tục.

(H₂): hàm $v, k : J \times J \rightarrow \mathbb{R}$ là liên tục.

(H₃): hàm g là L^1 -Caratheodory.

(H₄): Tồn tại hàm $\phi \in L^1(J, \mathbb{R})$ và hàm $\psi : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ liên tục

không giảm sao cho $|g(t, x)| < \phi(t)\psi(|x|), t \in J, \forall x \in \mathbb{R}$.

Định lý 1.4.1

Giả sử giả thiết từ (H₀) đến (H₄) được thoả mãn và

$$\mu(t) \leq t, \theta(t) \leq t, \eta(t) \leq t, \sigma(t) \leq t, \forall t \in J, \int_{\|q\|_{BM}}^{\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)} > C \quad \text{với}$$

$$C = \max \left\{ V, K \|\phi\|_{L^1} \right\}, V = \max_{t,s \in J} |v(t,s)|, K = \max_{t,s \in J} |k(t,s)|$$

khí đó phương trình FIE(1) có một nghiệm trên J .

Chứng minh

Định nghĩa toán tử $A, B : BM(J, \mathbb{R}) \rightarrow BM(J, \mathbb{R})$ định bởi:

$$Ax(t) = \int_0^{\mu(t)} v(t,s)x(\theta(s))ds, t \in J$$

$$Bx(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s, x(\eta(s)))ds, t \in J$$

Vậy thì bài toán tìm nghiệm của FIE (1) là bài toán tìm nghiệm của

phương trình $Ax(t) + Bx(t) = x(t)$, $t \in J$ hay $Ax(t) + \lambda Bx(t) = x(t)$, với $\lambda = 1$, cần chứng minh 2 toán tử A, B thỏa điều kiện định lý 1.3.1

A là toán tử tuyến tính bị chặn với chuẩn $\|A\| \leq V$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{BM} &= \max_{t \in J} |Ax(t)| = \max_{t \in J} \left| \int_0^{\mu(t)} v(t, s)x(\theta(s))ds \right| \\ &\leq V \int_0^1 \|x\|_{BM} ds \\ &= V \|x\|_{BM} \\ \Rightarrow \|A\| &\leq V \end{aligned}$$

Tiếp theo ta chứng minh tồn tại $p \in \mathbb{N}$ sao cho A^p là ánh xạ co.

$\forall x, y \in BM(J, \mathbb{R})$

Ta có:

$$\begin{aligned} |Ax(t) - Ay(t)| &= \left| \int_0^{\mu(t)} v(t, s)x(\theta(s))ds - \int_0^{\mu(t)} v(t, s)y(\theta(s))ds \right| \\ &= \left| \int_0^{\mu(t)} v(t, s)[x(\theta(s)) - y(\theta(s))]ds \right| \\ &\leq \int_0^{\mu(t)} |v(t, s)| |x(\theta(s)) - y(\theta(s))| ds \\ &\leq \int_0^t V \|x - y\|_{BM} ds \leq V \|x - y\|_{BM} \end{aligned}$$

suy ra $\|Ax - Ay\|_{BM} \leq V \|x - y\|_{BM}$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}
|A^2x(t) - A^2y(t)| &\leq \int_0^{\mu(t)} V \left(\int_0^{\mu(s)} |v(s, \tau)| \|x - y\|_{BM} d\tau \right) ds \\
&\leq \int_0^t V \left(\int_0^s |v(s, \tau)| \|x - y\|_{BM} d\tau \right) ds \\
&\leq \frac{V^2}{2!} \|x - y\|_{BM}
\end{aligned}$$

Tổng quát ta có:

$$|A^n x(t) - A^n y(t)| \leq \frac{V^n}{n!} \|x - y\|_{BM}$$

$$\text{Hay } \|A^n x - A^n y\|_{BM} \leq \frac{V^n}{n!} \|x - y\|_{BM}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V^n}{n!} = 0$ nên tồn tại $p \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{V^p}{p!} < 1$ do đó A^p là ánh

xạ co trên $BM(J, \mathbb{R})$.

Chứng minh B là hoàn toàn liên tục.

Trước hết ta chứng minh B liên tục:

Lấy $x_m, x \in BM(J, \mathbb{R})$ sao cho $x_m \rightarrow x$ ta cần chứng minh $\exists m_0$:

$$\|Bx_m - Bx\|_{BM} \leq \varepsilon, \quad \forall m \geq m_0.$$

Thật vậy do

$$x_m \rightarrow x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_0, \forall m \geq m_0 \text{ ta có } \|x_m - x\|_{BM} < \varepsilon$$

$$\text{ta có: } |Bx_m(t) - Bx(t)| \leq \int_0^{\sigma(t)} |k(t, s)| |g(s, x_m(\eta(s))) - g(s, x(\eta(s)))| ds$$

đối với $t \in J$ ta có:

$$|B_{x_m}(t) - Bx(t)| \leq K \int_0^t |g(s, x_m(\eta(s))) - g(s, x(\eta(s)))| ds$$

Hơn nữa tồn tại một số $L > 0$ sao cho:

$$|x_m(t)| \leq L, \quad |x(t)| \leq L, \quad \forall t \in J$$

Vì hàm g liên tục đều trên tập compact $\{(t, x) \in J \times \mathbb{R}, |x| \leq L\}$ và

$$|x_m(\eta(\cdot)) - x(\eta(\cdot))| \leq 2L \text{ cho nên :}$$

$$|g(s, x_m(\eta(s))) - g(s, x(\eta(s)))| \leq \frac{\varepsilon}{K}$$

$$|B_{x_m}(t) - Bx(t)| \leq K \frac{\varepsilon}{K} \leq \varepsilon$$

nên $\|Bx_m - Bx\|_{BM} \leq \varepsilon, \forall m \geq m_0$ do đó B liên tục.

Lấy $\{x_n\}$ bị chặn trong $BM(J, \mathbb{R})$ sao cho $\|x_n\|_{BM} \leq r, r > 0, n \in \mathbb{N}$

ta cần chứng minh $\{Bx_n, n \in \mathbb{N}\}$ là tập compact tương đối, thật vậy:

Theo giả thiết (H3) ta có:

$$\begin{aligned} \|Bx_n\|_{BM} &\leq \max_{t \in J} |q(t)| + \max_{t \in J} \int_0^t |k(t, s)| |g(s, x_n(\eta(s)))| ds \\ &\leq \|q\|_{BM} + K \int_0^1 h_I(s) ds = \|q\|_{BM} + K \|h_I\|_{L^1} \end{aligned}$$

Do đó:

$\{Bx_n, n \in \mathbb{N}\}$ bị chặn đều trong $BM(J, \mathbb{R})$.

Tiếp theo ta chứng minh $\{Bx_n, n \in \mathbb{N}\}$ là tập đồng liên tục.

$$\begin{aligned}
& \forall t, \tau \in J \text{ ta có: } |B_{X_n}(t) - B_{X_n}(\tau)| \\
& \leq \left| \int_0^{\sigma(t)} k(t, s)g(s, x_n(\eta(s)))ds - \int_0^{\sigma(\tau)} k(\tau, s)g(s, x_n(\eta(s)))ds \right| \\
& \quad + |q(t) - q(\tau)| \\
& \leq \left| \int_0^{\sigma(t)} k(t, s)g(s, x_n(\eta(s)))ds - \int_0^{\sigma(t)} k(\tau, s)g(s, x_n(\eta(s)))ds \right| \\
& \quad + \left| \int_0^{\sigma(t)} k(\tau, s)g(s, x_n(\eta(s)))ds - \int_0^{\sigma(\tau)} k(\tau, s)g(s, x_n(\eta(s)))ds \right| + |q(t) - q(\tau)| \\
& \leq \left| \int_0^{\sigma(t)} [k(t, s) - k(\tau, s)]g(s, x_n(\eta(s)))ds \right| + \left| \int_{\sigma(\tau)}^{\sigma(t)} k(\tau, s)g(s, x_n(\eta(s)))ds \right| + |q(t) - q(\tau)| \\
& \leq \int_0^1 |k(t, s) - k(\tau, s)| h_r(s) ds + K |p(t) - p(\tau)| + |q(t) - q(\tau)| \\
& = \|h_r\|_{L^1} \int_0^1 |k(t, s) - k(\tau, s)| ds + K |p(t) - p(\tau)| + |q(t) - q(\tau)| \\
& \quad p(t) = \int_0^{\sigma(t)} h_r(s) ds
\end{aligned}$$

Vì p, q, k là các hàm liên tục đều do đó ta có:

$$|B_{X_n}(t) - B_{X_n}(\tau)| \rightarrow 0 \text{ khi } t \rightarrow \tau$$

suy ra $\{B_{X_n} : n \in \mathbb{N}\}$ là tập đồng liên tục.

Vậy theo định lý Azela-Ascoli tập $\{Bx_n : n \in \mathbb{N}\}$ là tập compact tương đối nên B là hoàn toàn liên tục trên $BM(J, \mathbb{R})$ do đó A, B thỏa điều kiện của định lý 1.3.1.

Bây giờ ta chứng minh điều kiện ii) trong định lý 1.3.1 không xảy ra, ta xét phương trình sau:

$$x(t) = \lambda q(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t, s)x(\theta(s))ds + \lambda \int_0^{\sigma(t)} k(t, s)g(s, x(\eta(s)))ds, t \in J \quad (*)$$

Nếu x là nghiệm của $(*)$ thì:

$$x(t) = \lambda q(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t, s)x(\theta(s))ds + \lambda \int_0^{\sigma(t)} k(t, s)g(s, x(\eta(s)))ds, t \in J, \lambda \in (0, 1)$$

Do đó:

$$|x(t)| \leq |q(t)| + \int_0^{\mu(t)} |v(t, s)| |x(\theta(s))| ds + \int_0^{\sigma(t)} |k(t, s)| |g(s, x(\eta(s)))| ds, t \in J$$

$$\leq \|q\|_{BM} + \int_0^{\mu(t)} V |x(\theta(s))| ds + \int_0^{\sigma(t)} K\phi(s)\psi(|x(\eta(s))|)ds$$

$$\text{Đặt : } w(t) = \max_{s \in [0, t]} |x(s)| = |x(t^*)|, \quad t^* \in [0, t]$$

suy ra

$$|x(t)| \leq w(t), \quad t \in J$$

Từ bất đẳng thức trên ta có:

$$\begin{aligned} w(t) = |x(t^*)| &\leq \|q\|_{BM} + \int_0^{\mu(t^*)} V |x(\theta(s))| ds + \\ &+ \int_0^{\sigma(t^*)} K\phi(s)\psi(|x(\eta(s))|)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|q\|_{BM} + \int_0^{t^*} Vw(s)ds + \int_0^{t^*} K\phi(s)\psi(w(s))ds \\
&\leq \|q\|_{BM} + V \int_0^t w(s)ds + K\|\phi\|_{L^1} \int_0^t \psi(w(s))ds \\
&\leq \|q\|_{BM} + C \int_0^t [w(s) + \psi(w(s))] ds \quad ; C = \max \left\{ V, K\|\phi\|_{L^1} \right\}
\end{aligned}$$

Đặt :

$$u(t) = \|q\|_{BM} + C \int_0^t [w(s) + \psi(w(s))] ds .$$

Thì $U(0) = \|q\|_{BM}$ và $w(t) \leq u(t)$, $t \in J$

Ta có:

$$u'(t) = C[w(t) + \psi(w(t))] \leq C[u(t) + \psi(u(t))]$$

suy ra $\frac{u'(t)}{u(t) + \psi(u(t))} \leq C$

Lấy tích phân ta được :

$$\int_0^t \frac{u'(s)ds}{u(s) + \psi(u(s))} \leq \int_0^t Cds \leq C$$

Đổi biến tích phân ta có :

$$\int_{\|q\|_{BM}}^{u(t)} \frac{ds}{s + \psi(s)} \leq C < \int_{\|q\|_{BM}}^{+\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)}$$

Nên tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho:

$$U(t) \leq M, \text{ với } t \in J$$

$$\Rightarrow x(t) \leq w(t) \leq u(t) \leq M, t \in J$$

$$\Rightarrow \|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \leq M$$

Nên tập $\varepsilon = \{u \in X : Au + \lambda Bu = u, \lambda \in (0,1)\}$ là tập bị chặn suy ra kết luận ii) của định lý 1.3.1 không thoả do đó kết luận i) của định lý 1.3.1 thoả hay phương trình FIE(1) có nghiệm trên J .

CHƯƠNG 2: MỘT ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG LOẠI KRASNOSELSKII TRONG KHÔNG GIAN FRECHET

Trong chương này ta sử dụng định lý Schaefer trong một không gian lồi địa phương đặc biệt để chứng minh định lý tổng quát của Krasnoselskii và ứng dụng vào chứng minh phương trình:

$$x(t) = q(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t,s)x(\theta(s))ds + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s,x(\eta(s)))ds \quad \text{có nghiệm trên } R_+ = [0, +\infty).$$

2.1) Định nghĩa:

Họ đếm được nửa chuẩn $|\cdot|_n$ trên X gọi là họ đủ nếu:

$$\forall x \in X, x \neq 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, |x|_n \neq 0$$

Mỗi không gian $(X, |\cdot|_n)$ với họ đếm được nửa chuẩn đủ và metric d được

cho bởi $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x-y|_n}{1+|x-y|_n}$. Nếu $(X, |\cdot|_n)$ là không gian đầy đủ với

metric trên thì được gọi là không gian Frechet.

2.2) Các định lý cơ bản

Hai kết quả chính của định lý điểm bất động của Schauder và Banach đã được Krasnoselskii ([7] [8] [9] [10]) kết hợp tạo thành các kết quả sau:

Định lý 2.2.1:

Cho M là không gian lồi đóng khác rỗng của không gian Banach $(X, \|\cdot\|)$. Giả sử A, B là 2 ánh xạ từ $M \rightarrow X$ thỏa :

- i) $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$
- ii) A là liên tục và AM chứa trong 1 tập compact.
- iii) B là ánh xạ co với hằng số co $a < 1$

Khi đó tồn tại $x \in M$ sao cho $Ax + Bx = x$

Chứng minh :

Theo giả thiết iii) của định lý, B là ánh xạ co với hằng số $a < 1$ nên ta có ánh xạ $I - B: M \rightarrow (I - B)M$ là đồng phôi, do đó $A + B$ có điểm bất động khi toán tử $U = (I - B)^{-1}A$ có điểm bất động. Ta thấy U thỏa giả thiết của định lý Schauder. Vì vậy U có điểm bất động hay PT $Ax + Bx = x$ có nghiệm trên M .

Kết quả của định lý trên có rất một số ứng dụng thú vị, tuy nhiên theo T.A.Burton [5] việc kiểm tra điều kiện i) của định lý là khó khăn. Chính vì vậy T.A.Burton đã thay điều kiện i) bởi điều kiện i') : $(x = Bx + Ay, y \in M) \Rightarrow x \in M$.

Đặc biệt nếu $M = \{x \in X, \|x\| \leq r\}$ thì giả thiết i') được thỏa nếu điều kiện sau : $AM \subset M, \|x\| \leq \|(I - B)x\| \forall x \in M$ được thỏa

Để hoàn thiện giả thiết i) Burton và Kirk [6] đã chứng minh một dạng biến đổi của định lý 2.2.1.

Định lý 2.2.2:

Cho X là không gian Banach $A, B: X \rightarrow X$. Trong đó A là toán tử compact, B là ánh xạ co với hằng số $a < 1$ khi đó ta có :

i) $x = l B \left(\frac{x}{\lambda} \right) + l Ax$ có một nghiệm với $l = 1$ hoặc:

ii) Tập hợp $e = \{x \in X, x = l B \left(\frac{x}{\lambda} \right) + l Ax, l \in (0,1)\}$ là tập không bị chặn.

Chứng minh :

Ta sử dụng kết quả cơ bản của Shaefer [7].

Định lý S

Cho E là một không gian lồi địa phương tuyến tính và $H : B \rightarrow B$ là ánh xạ compact khi đó ta có :

a) Phương trình $x = lHx$ có một nghiệm với $l = 1$ hoặc:

b) Tập hợp $\{x \in X, x = lHx, l \in (0,1)\}$ không bị chặn.

Vì B là nh xạ co với hằng số co $a < 1$ suy ra $l B$ ($l \in (0,1)$) cũng là ánh xạ co với hằng số co $a < 1$.

Ta có phương trình : $x = l B \left(\frac{x}{\lambda} \right) + l Ax \Leftrightarrow x = l (I - B)^{-1} Ax$

Đặt $H = (I - B)^{-1} A$, ta có H là compact nên H thỏa giả thiết định lý S do đó phương trình $x = lHx$ có nghiệm với $l = 1$ hoặc tập hợp $e = \{ x \in X / x = l Hx, l \in (0,1) \}$ là tập không bị chặn .Vậy định lý 2.2.2 đã được chứng minh.

B.C. Dhage đ chứng minh kết quả sau :

Định lý 2.2.3

Cho $(X, \|\cdot\|)$ là không gian Banach, A, B là 2 toán tử sao cho :

a) A là toán tử compact.

b) B là tuyến tính bị chặn và tồn tại $P \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\|B^P x - B^P y\| \leq \phi(\|x - y\|)$
 $\forall x, y \in X$ với $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ là hàm không giảm thỏa $\phi(r) < r, \forall r > 0$.

Khi đó ta có :

i) Phương trình : $lAx + Bx = x$ có một nghiệm với $l = 1$ hoặc:

ii) Tập hợp $\{x \in X, lAx + Bx = x\}, \forall l \in (0, 1)$ không bị chặn.

Chứng minh :

Từ giả thiết b) ta có $(I - B)^{-1}$ tồn tại và liên tục. do B tuyến tính nên

$$lB\left(\frac{x}{\lambda}\right) = Bx \text{ do đó:}$$

$$lAx + Bx = x \Leftrightarrow x = l(I - B)^{-1} Ax.$$

Đặt $U = (I - B)^{-1}A$, dễ thấy U thỏa giả thiết định lý S nên phương trình :

$x = lUx$ có nghiệm với $l = 1$ hoặc tập hợp

$e = \{x \in X / x = lUx, l \in (0, 1)\}$ là tập không bị chặn suy ra điều cần chứng minh.

2.3. Ví dụ về kết quả của Dhage

Ta thấy định lý 2.2.3 tổng quát hơn so với định lý 2.2.2. Để minh họa điều này BC.Dhage xét phương trình:

$$x(t) = q(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t, s)x(\theta(s))ds + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s)g(s, x(\eta(s)))ds, t \in [0, 1] \quad \text{FIE(1)}$$

Gọi $X = \{x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ là hàm bị chặn và đo được}\}$

$$\text{Với chuẩn } \|x\| = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)| \quad (2.3.1)$$

Toán tử A, B xác định bởi :

$$(Ax)(t) = \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s, x(\eta(s)))ds$$

$$(Bx)(t) = \int_0^{\mu(t)} v(t,s)x(\theta(s))ds \quad (2.3.2)$$

Giả sử v liên tục trên tập $\{(s,t) \mid 0 \leq s \leq t \leq 1\}$ và $m, \theta : [0,1] \rightarrow [0,1]$ liên tục với $m(t) \leq t, \theta(t) \leq t$ (2.3.3)

Theo chứng minh ở phần trước ta có

$$\|B^n x - B^n y\| \leq \frac{v^n}{n!} \|x - y\| \quad (2.3.4)$$

Với $v = \sup \{|v(t,s)|, 0 \leq s \leq t \leq 1\}$ suy ra B^n là ánh xạ co với n đủ lớn

Ta cũng có B là co nhưng nó không co với chuẩn 2.3.1 mà chỉ co với chuẩn tương đương tức là chuẩn :

$$\|x\|_1 = \sup_{t \in [0,1]} \{ |x(t)| e^{-\lambda t} \} \quad \lambda > 0 \quad (2.3.5)$$

Thật vậy vì $\theta(t) \leq t$ nên :

$$|x(\theta(t)) - y(\theta(t))| e^{-\lambda t} \leq |x(\theta(t)) - y(\theta(t))| e^{-\lambda \theta(t)}$$

$$\leq \|x - y\|_1$$

$$|(Bx)(t) - (By)(t)| \leq \int_0^{\mu(t)} |v(t,s)| |x(\theta(s)) - y(\theta(s))| ds$$

$$\leq V \int_0^t |x(\theta(s)) - y(\theta(s))| e^{-\lambda s} \cdot e^{\lambda s} ds$$

$$\leq V \|x - y\|_1 \int_0^t e^{\lambda s} ds = \frac{V}{\lambda} \|x - y\|_1 (e^{\lambda t} - 1)$$

$$\leq \frac{V}{\lambda} \|x - y\|_1 e^{\lambda t}$$

$$\text{Nên } \|Bx(t) - By(t)\|e^{-lt} \leq \frac{V}{\lambda} \|x - y\|_1, \quad (t \in [0, 1])$$

$$\Rightarrow \|Bx - By\|_1 \leq \frac{V}{\lambda} \|x - y\|_1 \quad (2.3.6)$$

Chọn $l > V$ suy ra B là co.

Kế tiếp ta sẽ chứng minh B là toán tử compact.

Do B là co đối với chuẩn (2.3.5) nên B là liên tục đối với chuẩn (2.3.5) do đó B liên tục đối với chuẩn (2.3.1).

Ta chứng minh $\{Bx_n : n \in \mathbb{N}\}$ là tập compact tương đối với $\{x_n\}$ bị chặn, $\|x_n\| \leq r$

$$\text{Ta có: } \|Bx_n\| = \sup \{|Bx_n(t)|\} \leq \sup \int_0^t |v(t,s)| \|x_n\| \theta(s) ds$$

$$\leq V \int_0^1 \|x_n\| ds$$

$$\leq Vr$$

Suy ra $\{Bx_n : n \in \mathbb{N}\}$ bị chặn đều.

$$\forall t, t' \in [0, 1] \text{ ta có: } \|Bx_n(t) - Bx_n(t')\|$$

$$\leq \left| \int_0^{\mu(t)} v(t,s) |x_n(\theta(s))| ds - \int_0^{\mu(t')} v(t',s) |x_n(\theta(s))| ds \right|$$

$$\leq \int_0^{\mu(t)} |v(t,s) - v(t',s)| |x_n(\theta(s))| ds + \left| \int_{\mu(t')}^{\mu(t)} v(t',s) |x_n(\theta(s))| ds \right| \quad (2.3.7)$$

$$\leq r \int_0^1 |v(t,s) - v(t',s)| ds + vr |\mu(t) - \mu(t')|$$

Do hàm v và m là liên tục đều nên :

$$\forall \epsilon > 0, \exists d = d(\epsilon), \forall x_n, y_n, \|x_n\| \leq r, \|y_n\| \leq r, \forall t, t' \in [0,1] \quad (2.3.8)$$

$$|t-t'| < d \Rightarrow |(Bx_n)(t) - (Bx_n)(t')| < \epsilon$$

Suy ra $\{Bx_n : n \in \mathbb{N}\}$ đồng liên tục.

Nên $\{Bx_n : n \in \mathbb{N}\}$ là tập compact tương đối.

Vậy theo định lý Ascoli – Arzela B là compact trên tập $\{x \in l, \|x\| \leq r\}$.

Vì A, B là toán tử compact bằng cách sử dụng bậc tôpô ta có kết quả định lý 2.2.3

Giả sử hàm g, k, σ, η và A là compact, Dhage đã chứng minh được tồn tại số r sao cho nếu x thoả phương trình :

$$x = Bx + \lambda Ax \text{ với } \lambda \in (0,1) \text{ thì } \|x\| \leq r. \quad (2.3.9)$$

Xét trong X tập mở và bị chặn $\Omega = \{x \in X, \|x\| \leq 2r\}$, định nghĩa trên $\bar{\Omega} \times [0,1]$ toán tử :

$H(x, \lambda) = Bx + \lambda Ax$ thì $H(x, \lambda)$ là đồng luân, ta có:

$$x \neq H(x, \lambda), x \in \partial\Omega, \lambda \in (0,1) \text{ với } \partial\Omega \text{ biên của } \Omega. \quad (2.3.10)$$

Nếu $x = H(x, 1)$ thì x là nghiệm của phương trình FIE(1), do đó ta chỉ nghiên cứu trong trường hợp $x \neq H(x, 1), x \in \partial\Omega$.

Ta lại có $x = H(x, 0)$ khi $x = 0$ vậy ta luôn có:

$$x \neq H(x, \lambda), x \in \partial\Omega, \lambda \in [0,1] \quad (2.3.11)$$

sử dụng tính chất bất biến của bậc tôpô đối với phép đồng luân ta có:

$$\deg(I - H(., 1), \Omega, 0) = \deg(I - H(., 0), \Omega, 0) \quad (2.3.12)$$

$$\text{nhưng } \deg(I - H(., 1), \Omega, 0) = \deg(I - B, \Omega, 0) = +_1$$

Vì B tuyến tính, compact, đơn ánh và $0 \in \Omega$, từ tính chất của bậc tô pô và (3.12) ta có:

$\deg(I-H(.,1), \Omega, 0) \neq 0$ từ đó suy ra $H(.,1)$ có ít nhất một điểm bất động và $x = H(x,1)$ là nghiệm của phương trình FIE(1)

2.4. Một định lý bất động loại Krasnoselskii

Nếu chúng ta quan tâm về sự tồn tại nghiệm trên 1 khoảng không compact thì chúng ta sẽ không dùng định lý 2.2.1, 2.2.2 và 2.2.3 vì không gian các hàm liên tục trên khoảng không compact không có cấu trúc như không gian Banach bắt buộc chúng ta phải dùng không gian tổng quát hơn không gian Banach ví dụ không gian Frechet.

Định lý 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 có thể mở rộng khi X là không gian Frechet. Bây giờ ta mở rộng định lý 2.2.2 trong trường hợp X là không gian Frechet.

Định lý 2.4.1:

Cho X là không gian Frechet và $A, B : X \rightarrow X$ là 2 toán tử,

đặt $U_l x = l B(x/l) + lAx$

Giả sử:

- i) A là toán tử compact.
- ii) B là toán tử co đối với họ nửa chuẩn $\|\cdot\|_n$ (họ $\|\cdot\|_n$ tương đương với họ $|\cdot|_n$)
- iii) Tập hợp $\{x \in X, x = U_l x, l \in (0,1)\}$ là bị chặn.

Khi đó tồn tại $x \in X$ sao cho $x = Ax + Bx$.

Chứng minh:

Theo giả thiết B là co nên $(I - B)^{-1}$ tồn tại và liên tục. đặt $H : X \rightarrow X$ với $Hx = (I - B)^{-1}Ax$ vì A compact, $(I-B)^{-1}$ liên tục suy ra H compact.

Áp dụng định lý S ta có :

a) Phương trình $x = Hx$ có nghiệm hoặc:

b) Tập hợp $\{x \in X, x = lHx, l \in (0,1)\}$ không bị chặn.

Theo giả thiết iii) tập $\{x \in X, x = U_l x, l \in (0,1)\}$ là bị chặn do đó kết luận

b) không xảy ra. Vậy $x = Hx$ có nghiệm hay $Ax + Bx = x$ có nghiệm.

2.5 Sự tồn tại nghiệm

Với hàm $v(t, s)$, $k(t, s)$ liên tục trên $\{(s,t) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$ và ma trận vuông $d \times d$, hàm $g : R_+ \times R^d \rightarrow R^d$, $q : R_+ \rightarrow R^d$ liên tục và các hàm $m, \theta, \sigma, h : R_+ \rightarrow R_+$ liên tục thỏa $m(t) \leq t, \sigma(t) \leq t, h(t) \leq t, \forall t \geq 0, R_+ = [0, +\infty)$.

Ứng dụng định lý 2.4.1 ta chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình:

$$x(t) = q(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t,s)x(\theta(s))ds + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s,x(\eta(s)))ds, \quad t \in R_+ \quad (2.5.1)$$

Định lý 2.5.1

Giả sử giả thiết sau được thỏa:

i) $|g(t,x)| \leq j(t) \psi(|x|)$, $t \in R_+, x \in R^d$ với $j : R_+ \rightarrow R_+$ là liên tục.

và $Y : R_+ \rightarrow (0, +\infty)$ là liên tục và không giảm.

$$ii) \int_{(.)}^{+\infty} \frac{ds}{S + \Psi(s)} = +\infty$$

khi đó phương trình (2.5.1) Có nghiệm.

Chứng minh

Đặt $X = C_c = \{x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d, x \text{ liên tục}\}$

X là không gian có họ đếm được nửa chuẩn đủ

$$|x|_n = \sup_{t \in [0, n]} \{|x(t)|\} \quad (2.5.2)$$

Với $x = (x_i)_i \in \mathbb{R}^d$, $i \in \overline{1, d}$, $|x| = \max \{|x_i|, i \in \overline{1, d}\}$

Ta có $(C_c, |\cdot|_n)$ là không gian Frechet, ma trận vuông $d \times d$

$C = (C_{ij})$ $i, j \in \overline{1, d}$ ta đặt : $|C| = \max_{i \in \overline{1, d}} \sum_{j=1}^d |c_{ij}|$, A, B là 2 toán tử : $C_c \rightarrow C_c$ định

nghĩa bởi :

$$Ax(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s)g(s, x(\eta(s)))ds$$

$$Bx(t) = \int_0^{\mu(t)} v(t, s)x(\theta(s))ds$$

Đặt $K_n = \sup \{|k(t, s)|, 0 \leq s \leq t \leq n\}$

$$V_n = \sup \{|v(t, s)|, 0 \leq s \leq t \leq n\}$$

Đầu tiên ta chứng minh B là ánh xạ co, xét trong C_c họ nửa chuẩn :

$$\|x\|_n = \sup \{|x(t)|e^{-h_n t}, t \in [0, n], h_n > 0\} \quad (2.5.3)$$

Ta có họ nửa chuẩn $\|\cdot\|_n$ tương đương với họ $|\cdot|_n$

Vì $e^{-n h_n} |x|_n \leq \|x\|_n \leq |x|_n \quad \forall x \in C_c, n \geq 1$

Tương tự như chứng minh ở trên ta có :

$$\|Bx - By\|_n \leq \frac{V_n}{h_n} \|x - y\|_n \quad (2.5.4)$$

Chọn $h_n > V_n$ suy ra B là ánh xạ co đối với họ nửa chuẩn $\|\cdot\|_n$ và $(I - B)^{-1}$ tồn tại và liên tục.

Tiếp theo ta phải chứng minh toán tử $A : C_c \rightarrow C_c$ là toán tử compact.

Chứng minh A liên tục :

Lấy $x_m, x \in C_c$, sao cho $x_m \rightarrow x$ ta phải chứng minh $|Ax_m - Ax|_n \leq e$,

$\forall m \geq m_0$

Thật vậy :

$x_m \rightarrow x$ nên : $\forall n \geq 1, \forall e \geq 0, \exists m_0(e, n), \forall m \geq m_0, |x_m - x|_n < e$
(2.5.5)

Ta có :

$$|Ax_m(t) - Ax(t)| \leq \int_0^{\sigma(t)} |k(t,s)| |g(s, x_m(\eta(s))) - g(s, x(\eta(s)))| ds$$

Đối với $t \in [0, n]$ ta có :

$$|Ax_m(t) - Ax(t)| \leq K_n \int_0^n |g(s, x_m(\eta(s))) - g(s, x(\eta(s)))| ds \quad (2.5.6)$$

$\{x_m\}$ l dy hội tụ nên $\{x_m\}$ bị chặn do đó $\exists L_n > 0$ sao cho :

$$|x_m(t)| \leq L_n, |x(t)| \leq L_n \quad \forall t \in [0, n], n \geq 1$$

Mặt khác hàm g liên tục đều trên tập compact

$$\{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, t \in [0, n], |x| \leq L_n\}$$

Mà $|x_m(h(\cdot)) - x(h(\cdot))| \leq |x_m(\cdot) - x(\cdot)|$

Do đó : $|g(t, x_m(h(t))) - g(t, x(h(t)))| \leq \frac{\varepsilon}{nK_n} \quad \forall m \geq m_0$

$$\Rightarrow |Ax_m - Ax|_n \leq K_n \frac{\varepsilon \cdot n}{nK_n} = \varepsilon \quad \forall m \geq m_0 \Rightarrow A \text{ liên tục}$$

Chứng minh A compact

Lấy $M \subset C_c$ bị chặn, ta cần chứng minh: $A(M)$ là tập compact tương đối

M bị chặn nên : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists r_n > 0, \forall x \in M, |x|_n \leq r_n$

$$\Rightarrow |Ax(t)| \leq \sup_{t \in [0, n]} |q(t)| + n K_n G_n, t \in [0, n]$$

Với $G_n = \sup \{ |g(t, x)|, t \in [0, n], |x| \leq r_n \}$

$$\Rightarrow |Ax|_n \leq n K_n G_n + \sup \{ |q(t)|, t \in [0, n] \}$$

$\Rightarrow \{Ax, x \in M\}$ bị chặn đều

$\forall t, t' \in [0, n]$ ta có :

$$\begin{aligned} |Ax(t) - Ax(t')| &\leq \left| \int_0^{\sigma(t)} k(t, s) g(s, x(\eta(s))) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\sigma(t')} k(t', s) g(s, x(\eta(s))) ds \right| + |q(t) - q(t')| \\ &\leq \left| \int_0^{\sigma(t)} [k(t, s) - k(t', s)] g(s, x(\eta(s))) ds \right| + \\ &\quad + \left| \int_{\sigma(t')}^{\sigma(t)} k(t', s) g(s, x(\eta(s))) ds \right| + |q(t) - q(t')| \\ &\leq G_n \int_0^{\sigma(t)} |k(t, s) - k(t', s)| ds + G_n K_n (\sigma(t') - \sigma(t)) + |q(t') - q(t)| \end{aligned}$$

Vì σ, k, q liên tục đều nên $|Ax(t) - Ax(t')| < \varepsilon$ khi $t \rightarrow t'$

Suy ra $\{Ax, x \in M\}$ đồng liên tục do đó $\{Ax, x \in M\}$ là tập compact tương đối theo định lý Ascoli nên A là compact.

Để áp dụng định lý 2.4.1 ta cần phải kiểm tra điều kiện (iii) của định lý 2.4.1 được thỏa thật vậy :

Xét $x \in C_C$ sao cho :

$$x(t) = lq(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t,s)x(\theta(s))ds + \lambda \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s, x(\eta(s))) ds, l \in (0,1) \quad (25.7)$$

$$|x(t)| \leq Q_n + V_n \int_0^{\mu(t)} |x(\theta(s))| ds + K_n \phi_n \int_0^{\sigma(t)} \Psi(|x(\eta(s))|) ds \quad (2.5.8)$$

$t \in [0, n]$ với $Q_n = \sup \{|q(t)|, t \in [0, n]\}$, $\phi_n = \sup \{j(t), t \in [0, n]\}$

Ta đặt $W_n(t) = \sup \{|x(s)|, 0 \leq s \leq t \leq n\}$

$$\Rightarrow |x(t)| \leq w_n(t) \quad \forall t \in [0, n] \quad (2.5.9)$$

Mặt khác tồn tại $t^* \in [0, t]$ sao cho :

$w_n(t) = |x(t^*)|$ và $w_n(t)$ là hàm tăng trên $[0, n]$

Ta có: $|x(\theta(s))| \leq w_n(s)$, $|x(\eta(s))| \leq w_n(s)$

$$\text{Do đó: } w_n(t) = |x(t^*)| \leq Q_n + v_n \int_0^{\mu(t^*)} w_n(s) ds + k_n \phi_n \int_0^{\sigma(t^*)} \Psi(w_n(s)) ds$$

$$\leq Q_n + C_n \int_0^t [w_n(s) + \Psi(w_n(s))] ds \quad \text{Với } C_n = \max \{v_n, K_n \phi_n\}$$

$$\text{Đặt } u_n(t) = Q_n + C_n \int_0^t [w_n(s) + \Psi(w_n(s))] ds \quad t \in [0, n] \quad (2.5.10)$$

Ta có : $w_n(t) \leq u_n(t) \quad \forall t \in [0, n]$

Và $u'_n(t) = C_n[w_n(s) + Y(w_n(s))] \leq C_n[u_n(t) + Y(u_n(t))]$

Cho nên : $\int_0^t \frac{u'_n(s)}{u_n(s) + \Psi(u_n(s))} ds = \int_{u(0)}^{u_n(t)} \frac{ds}{s + \Psi(s)} \leq C_n, t \in [0, n] \quad (2.5.11)$

Vì $u_n(0) = Q_n$ nên ta có :

$$\int_{Q_n}^{u_n(t)} \frac{ds}{s + \Psi(s)} \leq C_n \quad t \in [0, n] \quad (2.5.12)$$

Xét hàm : $F_n(t) = \int_{Q_n}^t \frac{ds}{s + \Psi(s)}$, $t \geq Q_n$ ta có $F_n(t)$ là hàm tăng

vì $F_n([Q_n, +\infty)) = [0, +\infty)$ nên $\exists! r_n > 0$

Sao cho $F_n(r_n) = C_n$ do F_n là hàm tăng nên :

$$\int_{Q_n}^{u_n(t)} \frac{ds}{s + \Psi(s)} \leq C_n \Leftrightarrow \int_{Q_n}^{u_n(t)} \frac{ds}{s + \Psi(s)} \leq \int_{Q_n}^{r_n} \frac{ds}{s + \Psi(s)} \Leftrightarrow U_n(t) \leq r_n$$

Mà $|x(t)| \leq w_n(t) \leq u_n(t)$

$$\Rightarrow |x(t)| \leq r_n, t \in [0, n]$$

$\Rightarrow |x|_n \leq r_n, n \geq 1$. Do đó điều kiện iii) của định lý 2.4.1 được thỏa mãn. Áp dụng định lý 2.4.1 phương trình $x = Ax + Bx$ có nghiệm hay phương trình

$x(t) = q(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t,s)x(\theta(s))ds + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s,x(\eta(s)))ds, \quad t \in \mathbb{R}_+$ có nghiệm.

CHƯƠNG 3: ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO MỘT DẠNG ÁNH XẠ CO TRONG KHÔNG GIAN HÀM LIÊN TỤC

Trong chương này cho X là không gian Banach với chuẩn $|\cdot|$, xét không gian các hàm liên tục $C([0, T], X)$ ($T > 0$) với tôpô thông thường và $M \subset C([0, T], X)$ là tập đóng, toán tử $A : M \rightarrow M$ thỏa điều kiện:

$$|(Ax)(t) - (Ay)(t)| \leq \beta |x(v(t)) - y(v(t))| + \frac{k}{t^\alpha} \int_0^t |x(\sigma(s)) - y(\sigma(s))| ds$$

$$\forall x, y \in M, \forall t \in [0, T].$$

Trong đó $a, b \in [0, 1)$ $k \geq 0$ và $v, \sigma : [0, T] \rightarrow [0, T]$ là hàm liên tục sao cho $v(t) \leq t, \sigma(t) \leq t, \forall t \in [0, T]$. Ta sẽ chứng minh A có duy nhất điểm bất động trong M và kết quả được mở rộng trong $C(R_+, X)$ với $R_+ = [0, +\infty)$.

3.1 Các kết quả

3.1.1. Kết quả thứ 1

Xét không gian $C([0, T], X)$ với $(X, |\cdot|_n)$ là không gian Banach, $T > 0$,

Lấy $\gamma \in [0, T]$, $l > 0$.

$x \in C([0, T], X)$ định nghĩa : $\|x\| = \|x\|_l + \|x\|_g$

Với $\|x\|_g = \sup_{t \in [0, \gamma]} \{|x(t)|\}$, $\|x\|_l = \sup_{t \in [\gamma, T]} \{e^{-\lambda(t-\gamma)} |x(t)|\}$

Ta có $\|\cdot\|$ là 1 chuẩn trên $C([0, T], X)$.

Định lý 3.1.1

Cho M là tập đóng của $C([0, T], X)$ và $A : M \rightarrow M$ là 1 toán tử. Nếu tồn tại $a, b \in [0, 1)$, $k \geq 0$ sao cho $\forall x, y \in M$ và $\forall t \in [0, T]$:

$$|(Ax)(t) - (Ay)(t)| \leq b |x(v(t)) - y(v(t))| + \frac{k}{t^a} \int_0^t |x(\sigma(s)) - y(\sigma(s))| ds \quad (3.1.1)$$

Với $v, \sigma : [0, T] \rightarrow [0, T]$ liên tục và $v(t) \leq t, \sigma(t) \leq t$

$\forall t \in [0, T]$ khi đó :

A có điểm bất động duy nhất trong M .

Chứng minh :

Ta áp dụng nguyên lý nh xạ co Banach. Cần chứng minh A là ánh xạ co nghĩa là chứng minh:

$$\exists d \in [0, 1), \text{ sao cho } \forall x, y \in M \text{ ta có } \|Ax - Ay\| \leq d \|x - y\|$$

Lấy $t \in [0, g]$ ta có :

$$\begin{aligned} |(Ax)(t) - (Ay)(t)| &\leq b |x(v(t)) - y(v(t))| + \frac{k}{t^a} \int_0^t |x(\sigma(s)) - y(\sigma(s))| ds \\ &\leq b \|x - y\|_g + t^{1-a} k \|x - y\|_g \\ &\leq (b + kg^{1-a}) \|x - y\|_g \end{aligned}$$

Do đó :

$$\|Ax - Ay\|_g \leq (b + kg^{1-a}) \|x - y\|_g \quad (3.1.2)$$

Lấy $t \in [g, T]$ ta có :

$$\begin{aligned} |(Ax)(t) - (Ay)(t)| &\leq b |x(v(t)) - y(v(t))| + \\ &+ \frac{k}{t^a} \left[\int_0^g |x(\sigma(s)) - y(\sigma(s))| ds + \int_g^t |x(\sigma(s)) - y(\sigma(s))| e^{-\lambda(\sigma(s)-\gamma)} \cdot e^{\lambda(\sigma(s)-\gamma)} ds \right] \end{aligned}$$

$$\leq b |x(v(t)) - y(v(t))| + \frac{k}{\gamma^\alpha} \left[\gamma \|x - y\|_\gamma + \|x - y\|_\lambda \int_\gamma^t e^{\lambda(\sigma(s)-\gamma)} ds \right]$$

$$\leq b |x(v(t)) - y(v(t))| + \frac{k}{\gamma^\alpha} \left[\gamma \|x - y\|_\gamma + \|x - y\|_\lambda \int_\gamma^t e^{\lambda(s-\gamma)} ds \right]$$

$$< b |x(v(t)) - y(v(t))| + \frac{k}{\gamma^\alpha} \left[\gamma \|x - y\|_\gamma + \|x - y\|_\lambda \frac{e^{\lambda(t-\gamma)}}{\lambda} \right]$$

$$\text{Do đó } |(Ax)(t) - (Ay)(t)| e^{-\lambda(t-\gamma)} < b |x(v(t)) - y(v(t))| e^{-\lambda(t-\gamma)}$$

$$+ kg^{1-a} \|x - y\|_g + \frac{k}{\lambda} \gamma^{-\alpha} \|x - y\|_1$$

Cho nên:

$$\begin{aligned} \|Ax - Ay\|_1 &\leq b \sup_{t \in (\gamma, T)} \{ |x(v(t)) - y(v(t))| e^{-\lambda(t-\gamma)} \} \\ &+ kg^{1-a} \|x - y\|_g + \frac{k}{\lambda} \gamma^{-\alpha} \|x - y\|_1 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} &\leq b \sup_{t \in (\gamma, T)} \{ |x(v(t)) - y(v(t))| e^{-\lambda(v(t)-\gamma)} \} + kg^{1-a} \|x - y\|_g + \frac{k}{\lambda} \gamma^{-\alpha} \|x - y\|_1 \\ &\leq (b + \frac{k}{\lambda} \gamma^{-\alpha}) \|x - y\|_1 + kg^{1-a} \|x - y\|_g \end{aligned}$$

Từ (1.2) và (1.3) ta được :

$$\begin{aligned} \|Ax - Ay\| &\leq (b + kg^{1-a}) \|x - y\|_g + (b + \frac{k}{\lambda} \gamma^{-\alpha}) \|x - y\|_1 + kg^{1-a} \|x - y\|_g \\ &\leq (b + 2kg^{1-a}) \|x - y\|_g + (b + \frac{k}{\lambda} \gamma^{-\alpha}) \|x - y\|_1 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$\text{Vì } b \in [0, 1), g \in (0, \left(\frac{1-\beta}{2k} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}) \text{ suy ra : } b + 2k\gamma^{1-\alpha} < 1$$

Và đối với $l > \frac{k}{1-\beta} \gamma^{-\alpha}$ ta suy ra $b + \frac{k}{\lambda} \gamma^{-\alpha} < 1$

Đặt $d = \max \{b + 2k\gamma^{1-\alpha}, b + \frac{k}{\lambda} \gamma^{-\alpha}\}$ thì $d < 1$

Từ (3.1.4) $\Rightarrow \|Ax - Ay\| \leq d (\|x - y\|_g + \|x - y\|_l) = d \|x - y\|$

Suy ra A là co

Theo nguyên lý ánh xạ co Banach ta có A có duy nhất 1 điểm bất động trên M .

3.1.2 Kết quả thứ 2

Xét không gian $C(R_+, X)$ và với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ lấy $g_n \in (0, n)$, $l_n > 0$, định nghĩa họ đếm được nửa chuẩn $\{\|\cdot\|_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ với $\|x\|_n = \|x\|_{g_n} + \|x\|_{l_n}, \forall x \in C(R_+, X)$.

$$\|x\|_{g_n} = \sup_{t \in [0, g_n]} |x(t)|, \quad \|x\|_{l_n} = \sup_{t \in [\gamma_n, T]} \{e^{-l(t-\gamma_n)} |x(t)|\}$$

Ta có $C(R_+, X)$ với họ đếm được nửa chuẩn như trên là 1 không gian Frechet và mê tric có thể được định nghĩa như sau:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x - y\|_n}{1 + \|x - y\|_n} \quad \forall x, y \in C(R_+, X).$$

Định lý 3.1.2

Cho M tập đóng $M \subset C(R_+, X)$ và $A: M \rightarrow M$ là 1 toán tử. Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $a_n, b_n \in [0, 1)$, $k_n \geq 0$ sao cho $\forall x, y \in M, \forall t \in [0, n]$:

$$|(Ax)(t) - (Ay)(t)| \leq b_n |x(v(t)) - y(v(t))| + \frac{k_n}{t^{\alpha_n}} \int_0^t |x(\sigma(s)) - y(\sigma(s))| ds. \quad (3.1.2.1)$$

Với $v, \sigma: R_+ \rightarrow R_+$ liên tục và $v(t) \leq t, \sigma(t) \leq t, \forall t \in R_+$ khi đó:

A có điểm bất động duy nhất trên M .

Chứng minh :

Theo chứng minh định lý 3.1.1 chọn tùy ý $r_n \in (0, n)$ và $l_n > 0$, tồn tại $d_n \in [0, 1)$ sao cho:

$$\|Ax - Ay\|_n \leq d_n \|x - y\|_n, \forall x, y \in M, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (3.1.2.2)$$

Chứng minh tương tự như nguyên lý nh xạ Co của Banach.

Xy dựng dy một dy lặp $x_{m+1} = Ax_m \forall m \in \mathbb{N}$, với $x_0 \in M$ tùy ý.

Lấy $n \in \mathbb{N}^*$ tùy ý ta có:

$$\|x_{m+1} - x_m\|_n = \|Ax_m - Ax_{m-1}\|_n \leq d_n \|x_m - x_{m-1}\|_n, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Do đó :

$$\|x_{m+1} - x_m\|_n \leq \delta_n^m \|x_1 - x_0\|_n \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Tương tự ta có :

$$\begin{aligned} \|x_{m+p} - x_m\|_n &\leq (\delta_n^{m+p} + \dots + \delta_n^m) \|x_1 - x_0\|_n \\ &\leq \frac{\delta_n^m}{1 - \delta_n} \|x_1 - x_0\|_n \quad \forall m \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Nn dy $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ l dy cơ bản do đó $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ hội tụ.

Đặt $x_* = \lim_{x \rightarrow \infty} x_m \in M$

Theo (3.1.2.2) ta có $Ax_m \rightarrow Ax_*$ hay $x_m \rightarrow Ax_*$

Do đó $Ax_* = x_*$ nên A có điểm bất động trên M .

Giả sử A có 1 điểm bất động khác trên M ta gọi là x_{**}

Khi đó :

$$\|x_n - x_{n+1}\|_n = \|Ax_n - Ax_{n+1}\|_n \leq d_n \|x_n - x_{n+1}\|_n$$

$$\Rightarrow \|x_n - x_{n+1}\|_n (1 - d_n) \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Do } d_n \in [0,1) \Rightarrow x_n = x_{n+1}$$

Vậy A có điểm bất động duy nhất trên M .

nhận xét :

Trong chứng minh của định lý 3.1.2 ta có điểm bất động của A là giới hạn của dãy lặp. Chú ý rằng điểm bất động của A có thể là giới hạn của 1 dãy khác.

Ví dụ :

Xét không gian $C([0,n],X)$ và đặt $M_n = \{x/[0,n], x \in M\}$ là tập hợp các hàm thu hẹp của x trên $[0,n], \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lấy $n \in \mathbb{N}^*$ tùy ý, ta có $AM_n \subset M_n$, ứng dụng định lý 3.1.1 A có điểm bất động duy nhất $x_n \in M_n$, ta có thể mở rộng:

$x_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ bởi sự liên tục, chẳng hạn ta đặt :

$$\bar{x}_n(t) = \begin{cases} x_n(t) & \text{nếu } t \in [0,n] \\ x_n(n) & \text{nếu } t \geq n \end{cases}$$

Thì $\bar{x}_n \in C(\mathbb{R}_+, X)$. Do tính chất duy nhất của điểm bất động nên ta có :

$$\bar{x}_n(t) = \bar{x}_m(t), \forall m \leq n, \forall t \in [0,m] \quad (3.1.2.3)$$

Điều đó cho ta kết luận $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ hội tụ trong không gian $C(\mathbb{R}_+, X)$ đến hàm $x^* : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ được cho bởi : $x^*(t) = \bar{x}_n(t), \forall t \in [0, n]$ (3.1.2.4)

(x^* được định nghĩa đúng do (3.1.2.3))

Lấy $t \in \mathbb{R}_+$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $t \in [0, n_0]$.

Nhưng :

$$x^*(t) = \bar{x}_{n_0}(t) = (A\bar{x}_{n_0})(t) = (Ax^*)(t) \Rightarrow x^*(t) = (Ax^*)(t)$$

vì $t \in \mathbb{R}_+$ nên $x^* = Ax^*$ do đó x^* là điểm bất động và x^* là giới hạn của dãy $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$

3.2 Sự tồn tại nghiệm

Xét phương trình tích phân dạng :

$$x(t) = F(t, x(v(t))) + \frac{1}{t^{\alpha(t)}} \int_0^t K(t, s, x(\sigma(s))) ds \quad (3.2.1)$$

với $\alpha \in [0, 1]$ và $F : J \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $K : D \rightarrow \mathbb{R}^N$

$\alpha : J \rightarrow [0, 1]$ liên tục, Trong đó:

$J = [0, T]$ hoặc $J = \mathbb{R}_+$, $D = \{(t, s, x) / t, s \in J, 0 \leq s \leq t, x \in \mathbb{R}^N\}$

Và $v, \sigma : J \rightarrow J$ liên tục thỏa $v(t) \leq t$, $\sigma(t) \leq t$, $\forall t \in J$

Xét hàm liên tục $b : J \rightarrow [0, 1]$, $k : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ nếu:

$$|F(t, x) - F(t, y)| \leq b(t) |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^N, t \in J.$$

$$|K(t, s, x) - K(t, s, y)| \leq k(t) |x - y|, \forall (t, s, x), (t, s, y) \in D.$$

Thì phương trình (3.2.1) có duy nhất 1 nghiệm.

Chứng minh :

*Trường hợp $J = [0, T]$

$$\text{Đặt } Ax(t) = F(t, x(v(t))) + \frac{1}{t^{\alpha(t)}} \int_0^t K(t, s, x(\sigma(s))) ds \quad \forall t \in J.$$

Ta cần chứng minh phương trình: $Ax(t) = x(t)$ có nghiệm duy nhất hay A có điểm bất động duy nhất trên M với $M \subset C([0, T], \mathbb{R}^N)$

Ta có:

$$\begin{aligned} |(Ax)(t) - (Ay)(t)| &< |F(t, x(v(t))) - F(t, y(v(t)))| \\ &+ \frac{1}{t^{\alpha(t)}} \int_0^t |K(t, s, x(\sigma(s))) - K(t, s, y(\sigma(s)))| ds \\ &< b(t) |x(v(t)) - y(v(t))| + \frac{k(t)}{t^{\alpha(t)}} \int_0^t |x(\sigma(s)) - y(\sigma(s))| ds \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } b = \sup_{t \in [0, T]} \{b(t)\}, \quad k = \sup_{t \in [0, T]} \{k(t)\}, \quad a = \inf_{t \in [0, T]} \{\alpha(t)\}$$

Thì $\beta \in [0, 1)$, $k \geq 0$,

$$|(Ax)(t) - (Ay)(t)| < \beta |x(v(t)) - y(v(t))| + \frac{k}{t^a} \int_0^t |x(\sigma(s)) - y(\sigma(s))| ds$$

Khi đó A thỏa giả thiết của định lý 3.1.1. vậy A có điểm bất động duy nhất trên M hay phương trình $Ax(t) = x(t)$ có nghiệm duy nhất $\forall t \in [0, T]$

*Xét trường hợp $J = \mathbb{R}_+$

Lấy $n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$\begin{aligned} |(Ax)(t) - (Ay)(t)| &< |(t, x(v(t))) - F(t, y(v(t)))| \\ &+ \frac{1}{t^{\alpha(t)}} \int_0^t |K(t, s, x(\sigma(s))) - K(t, s, y(\sigma(s)))| ds, \quad t \in [0, n] \\ &< b(t) |x(v(t)) - y(v(t))| + \frac{k(t)}{t^{\alpha(t)}} \int_0^t |x(\sigma(s)) - y(\sigma(s))| ds \end{aligned}$$

Đặt $b_n = \sup_{t \in [0, n]} \{\beta(t)\}$, $k_n = \sup_{t \in [0, n]} \{k(t)\}$, $a_n = \inf_{t \in [0, n]} \{\alpha(t)\}$, thì $a_n, b_n \in [0, 1]$ và

$k_n \geq 0$ nên:

$$|(Ax)(t) - (Ay)(t)| \leq b_n |x(v(t)) - y(v(t))| + \frac{k_n}{t^{\alpha_n}} \int_0^t |x(\sigma(s)) - y(\sigma(s))| ds, t \in [0, n]$$

A thỏa giả thiết định lý 3.1.2 nên A có duy nhất điểm bất động trên M hay phương trình $Ax(t) = x(t)$ có nghiệm duy nhất $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Vậy phương trình 3.2.1 có nghiệm duy nhất.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Luận văn đã trình bày một số kết quả sau:

Trong chương I chúng tôi đã trình bày một số định lý để từ đó phát biểu và chứng minh chi tiết một định lý bất động loại Krasnosel'skii ,sau đó chúng tôi chứng minh chi tiết sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân.

Trong chương II chúng tôi cũng trình bày một số định lý sau đó trình bày và chứng minh chi tiết một định lý bất động tổng quát loại Krasnosel'skii trong không gian Frechet, chúng tôi mở rộng sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân đối với chương I.

Trong chương III chúng tôi trình bày và chứng minh 2 định lý bất động của một dạng ánh xạ co trong không gian hàm liên tục và ứng dụng vào phương trình tích phân dạng tổng quát.

Quá trình thực hiện luận văn giúp tôi bước đầu làm quen nghiên cứu khoa học cơ bản và tiếp cận với những hướng phát triển của toán học hiện đại,đồng thời giúp tôi biết vận dụng những kiến thức đã học được vào việc nghiên cứu một vấn đề cụ thể.Tôi cũng hy vọng sẽ tiếp tục nghiên cứu và phát triển đề tài này trong tương lai.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] BC.Dhage, On a fixed point theorem of Krasnosel'skii-Sheafer EJQTDE (2002 No.6).
- [2] Cezar Avramescu ,Some remark on a fixed point theorem of Krasnoselskii(2003 No.5)
- [3] Cezar Avramescu and Cristian Vladimirescu, Fixed point for some non-obviously contractive operator defined in space of continuous functions. (2004 No .3).
- [4] Boyd and J.S.W.Wong, On non linear contractions, Proc.Amer.Soc 20(1969),458-469.
- [5] T.A Burton and C.Kird, A fixed point theorem of Krasnoselskii, Appl.Math.lett 11(1998),pp.85-88.
- [6] T.A .Burton and C.Kird, A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, Math.Nachr.189(1998),23-31.
- [7] H.Scheffer Uber die Methode der a priori- Schranken, Math.Ann.129(1955),pp.415-416.
- [8] D.R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, New York, 1980.
- [9] M.A, Krasnoselskii, Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equation, Cambridge University Press, New York, 1964.
- [10] E.Zeidler , Nonlinear functional analysis and its applications, I.f Fixed Point Theorems Springer-Verlag, Berlin, 1993.