

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HỒ CHÍ MINH

Bùi Nguyễn Khánh Bình

**ĐỊNH LÝ KRASNOSEL'SKII VỀ
ÁNH XẠ NÉN VÀ GIẢN MẶT NÓN
VÀ ỨNG DỤNG**

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS.TS. NGUYỄN BÍCH HUY

Thành phố Hồ Chí Minh- 2010

LỜI CẢM ƠN

Tôi vô cùng biết ơn PGS.TS. Nguyễn Bích Huy, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Thầy đã giảng dạy, hướng dẫn và tận tình giúp đỡ tôi về mọi mặt trong học tập, nghiên cứu khoa học và trong quá trình thực hiện luận văn này.

Tôi xin phép bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các thành viên trong Hội đồng chấm luận văn Thạc sĩ cấp Bộ môn và cấp Trường đã cho tôi những nhận xét, đánh giá và bình luận quý báu cùng với những lời chỉ bảo, đề nghị quan trọng tạo điều kiện để tôi hoàn thiện luận văn một cách tốt nhất.

Tôi kính gửi đến Ban Giám hiệu, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán, bộ môn Toán giải tích và Phòng Khoa học Công nghệ- Sau Đại học của trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, đã giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình học tập và bảo vệ luận văn, những lời cảm ơn chân thành và trân trọng.

Tôi kính gửi đến Ban Giám hiệu, Ban Chấp hành Công Đoàn Trường và tổ Toán của Trường Trung học Phổ thông Nguyễn Hữu Thọ huyện Bến Lức, tỉnh Long An nơi tôi giảng dạy đã tạo nhiều điều kiện thuận lợi về vật chất cũng như tinh thần để tôi hoàn thành tốt khóa học, những lời cảm ơn sâu sắc.

Tôi thành thật cảm ơn các Anh, Chị đồng nghiệp của lớp Cao học khóa 18 Chuyên ngành Toán giải tích (niên khóa 2007-2010) đã giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và các Người thân trong gia đình tôi đã cho tôi nguồn động viên to lớn.

Tôi rất kính trọng và xin được ghi ơn tất cả mọi người.

Người thực hiện luận văn

Bùi Nguyễn Khánh Bình

MỞ ĐẦU

Lý thuyết phương trình trong không gian có thứ tự được ứng dụng để nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất của nghiệm, sự xấp xỉ nghiệm và tính ổn định của nghiệm cho nhiều lớp phương trình vi phân và tích phân xuất phát từ Toán học, Khoa học tự nhiên, Kinh tế học,...

Trong lý thuyết phương trình trong không gian có thứ tự thì định lý Krasnosel'skii về điểm bất động của ánh xạ nén hoặc giãn mặt nón đóng vai trò rất quan trọng. Vai trò của định lý này có thể so sánh với định lý Banach về điểm bất động của ánh xạ co và định lý Schauder về điểm bất động của ánh xạ compact. Vì tầm quan trọng như thế nên định lý Krasnosel'skii được các nhà Toán học quan tâm nghiên cứu cho đến ngày nay theo hướng mở rộng nó và tìm các ứng dụng ngày càng đa dạng của định lý này cho các lớp phương trình cụ thể.

Từ các kết quả khá phong phú về định lý Krasnosel'skii, các mở rộng và ứng dụng của nó được trình bày trong các bài báo trên các tạp chí Khoa học và trong các tài liệu về Giải tích phi tuyến, luận văn đã cố gắng trình bày một cách hệ thống với các chứng minh chi tiết cho các kết quả để có một cách nhìn khá hoàn chỉnh về định lý Krasnosel'skii và các vấn đề liên quan.

Luận văn gồm có hai chương:

Chương 1 là các kiến thức chuẩn bị, bao gồm các khái niệm về nón trong không gian Banach có thứ tự, chỉ số điểm bất động của ánh xạ dương, định lý điểm bất động của ánh xạ nén và giãn mặt nón của Krasnosel'skii và những định lý về nhiều điểm bất động.

Ở chương 2 trình bày các ứng dụng của định lý điểm bất động của ánh xạ nén và giãn mặt nón của Krasnosel'skii vào việc giải các bài toán phương trình tích phân và các bài toán phương trình vi phân.

Chương 1:

ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ NÉN VÀ GIẢN MẶT NÓN

1.1. Không gian Banach có thứ tự.

1.1.1 Nón và thứ tự sinh bởi nón.

Định nghĩa 1.1.1.

a) Tập K trong không gian Banach thực E gọi là nón nếu:

i) K là tập đóng

ii) $K + K \subset K, \lambda K \subset K, \forall \lambda \geq 0$

iii) $K \cap (-K) = \{\theta\}$

b) Nếu K là nón thì thứ tự trong E sinh bởi K được định bởi:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K$$

mỗi $x \in K \setminus \{\theta\}$ gọi là dương.

Mệnh đề 1.1.1. Giả sử " $\leq$ " là thứ tự sinh bởi nón. Khi đó:

a) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \lambda x \leq \lambda y, \forall z \in E, \forall \lambda \geq 0$

b) $(x_n \leq y_n (n \in \mathbb{N}^*), \lim x_n = x, \lim y_n = y) \Rightarrow x \leq y$

c) Nếu $\{x_n\}$ là dãy tăng, hội tụ về x thì $x_n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh mệnh đề 1.1.1 b) Suy từ tính chất đóng của K .

c) Cho $m \rightarrow \infty$ trong bất đẳng thức $x_n \leq x_{n+m}$ ta được điều phải chứng minh.

1.1.2. Nón chuẩn.

Định nghĩa 1.1.2. Nón K gọi là nón chuẩn nếu:

$$\exists N > 0 : \theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N \|y\|$$

Mệnh đề 1.1.2. Giả sử " $\leq$ " là thứ tự sinh bởi nón chuẩn. Khi đó:

a) Nếu $u \leq v$ thì đoạn $\langle u, v \rangle = \{x \in E : u \leq x \leq v\}$ bị chặn theo chuẩn.

b) Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n (n \in \mathbb{N}^*)$ và $\lim x_n = a, \lim z_n = a$ thì $\lim y_n = a$.

c) Nếu $\{x_n\}$ đơn điệu và có dãy con hội tụ về a thì $\lim x_n = a$.

Chứng minh mệnh đề 1.1.2. a) $\forall x \in \langle u, v \rangle \Rightarrow \theta \leq x - u \leq v - u$

$$\Rightarrow \|x - u\| \leq N \|u - v\| \Rightarrow \|x\| \leq \|u\| + N \|u - v\|$$

$$\text{b) } \theta \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n \Rightarrow \|y_n - x_n\| \leq N \|z_n - x_n\|$$

c) Coi $\{x_n\}$ tăng và $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$

vì $x_n \leq x_{n_k}$ (n cố định, k đủ lớn) nên $x_n \leq a, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Cho $\varepsilon > 0$, chọn k_0 để $\|x_{n_{k_0}} - a\| < \frac{\varepsilon}{N}$ thì ta có

$$\forall n \geq n_{k_0} \Rightarrow a - x_n \leq a - x_{n_{k_0}} \Rightarrow \|a - x_n\| \leq N \|a - x_{n_{k_0}}\| < \varepsilon. \quad \square$$

1.1.3. Nón chính qui.

Định nghĩa 1.1.3. *Nón K gọi là nón chính qui nếu mọi dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.*

Mệnh đề 1.1.3. *Nón chính qui là nón chuẩn.*

Chứng minh mệnh đề 1.1.3. Giả sử K là nón chính qui nhưng không là nón chuẩn. Khi đó,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \exists x_n, y_n : \theta \leq x_n \leq y_n, \quad \|x_n\| > n^2 \|y_n\|$$

$$\text{Đặt } u_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, \quad v_n = \frac{y_n}{\|x_n\|} \quad \text{thì} \quad \theta \leq u_n \leq v_n, \quad \|u_n\| = 1, \quad \|v_n\| < \frac{1}{n^2}$$

$$\text{Vì } \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < \infty \text{ nên tồn tại } v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Dãy $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ tăng và bị chặn trên (bởi v) nên hội tụ.

Suy ra $\lim u_n = \theta$. Ta gặp mâu thuẫn. $\square$

Ví dụ 1.1.1 Nón các hàm không âm trong $L^p (1 \leq p < \infty)$ là nón chính qui.

1.1.4. Nón sinh.

Định nghĩa 1.1.4. *K gọi là nón sinh nếu $E = K - K$ hay*

$$\forall x \in E \quad \exists u, v \in K : x = u - v$$

Ví dụ 1.1.2.

1) Nón các hàm không âm trong $C(K)$, L^p là nón sinh.

2) Nếu nón K có điểm trong u_0 thì ta có

$\exists r > 0 : -r\|x\|u_0 \leq x \leq r\|x\|u_0, \forall x \in E$ và K là nón sinh

Chứng minh. 2) $\exists \rho > 0 : u_0 + \overline{B}(\theta, \rho) \subset K$. Số $r = \frac{1}{\rho}$ cần tìm.

Ta có $x = (x + r\|x\|u_0) - r\|x\|u_0$.

Mệnh đề 1.1.4. Nếu K là nón sinh thì tồn tại số $M > 0$ sao cho

$$\forall x \in E, \exists u, v \in K : x = u - v, \|u\| \leq M\|x\|, \|v\| \leq M\|x\|$$

Chứng minh mệnh đề 1.1.4. Ta cần chứng minh ba điều sau:

Thứ nhất, Đặt $C = K \cap \overline{B}(\theta, 1) - K \cap \overline{B}(\theta, 1)$, ta chứng minh

$$\exists r > 0 : \overline{C} \supset B(\theta, r)$$

Thật vậy, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nC$ (do K là nón sinh)

$$\Rightarrow \exists n_0, \exists G \text{ mở} : n_0 \overline{C} \supset G \text{ (do định lý Baire)}$$

Vì $\overline{C}$ lồi, đối xứng nên $\overline{C} \supset \frac{1}{2}\overline{C} - \frac{1}{2}\overline{C} \Rightarrow \overline{C} \supset \frac{1}{2n_0}G - \frac{1}{2n_0}G$ (mở chứa θ)

Thứ hai, ta chứng minh $\frac{r}{2}B \subset C$ ($B = \overline{B}(\theta, 1)$).

Lấy $a \in \frac{r}{2}B$

- Ta sẽ xây dựng dãy $\{x_n\}$ thỏa: $x_n \in \frac{1}{2^n}C, \left\|a - \sum_{k=1}^n x_k\right\| < \frac{r}{2^{n+1}}$

Thật vậy, vì $\frac{r}{2^n}B \subset \overline{\frac{1}{2^n}C}$ nên

$$\forall y \in \frac{r}{2^n}B, \forall \varepsilon > 0 \exists x \in \frac{1}{2^n}C : \|y - x\| < \varepsilon$$

Ta có: $a \in \frac{r}{2}B \Rightarrow \exists x_1 \in \frac{1}{2}C : \|a - x_1\| < \frac{r}{2^2}$

$$a - x_1 \in \frac{r}{2^2}B \Rightarrow \exists x_2 \in \frac{1}{2^2}C : \|a - x_1 - x_2\| < \frac{r}{2^3}, \dots$$

- Vì $x_n \in \frac{1}{2^n}C$ nên $\exists u_n, v_n \in K : x_n = u_n - v_n, \|u_n\|, \|v_n\| \leq \frac{1}{2^n}$

Đặt $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ta có

$$a = u - v, \|u\|, \|v\| \leq 1. \text{ Vậy } a \in C.$$

Thứ ba, $\forall x \neq \theta$ ta có:

$$\frac{rx}{2\|x\|} = u' - v' \text{ với } u', v' \in K, \|u'\|, \|v'\| \leq 1$$

$$\Rightarrow x = u - v, u, v \in K, \|u\|, \|v\| \leq M\|x\| \quad (M = \frac{2}{r}). \square$$

1.1.5. Nón liên hợp.

Nếu K là nón thì ta định nghĩa nón liên hợp của K là:

$$K^* = \{f \in E^* : f(x) \geq 0 \forall x \in K\}$$

K^* có các tính chất i), ii) trong định nghĩa nón

Có thể chứng minh $K^* \cap (-K^*) = \{\theta_{E^*}\} \Leftrightarrow \overline{K - K} = E$.

Mệnh đề 1.1.5. $x_0 \in K \Leftrightarrow f(x_0) \geq 0, \forall f \in K^*$

Chứng minh mệnh đề 1.1.5.

Giả sử trái lại nếu $f(x_0) \geq 0, \forall f \in K^*$ sao cho $x_0 \notin K$

Do định lý tách tập lồi $\exists g \in E^* : g(x_0) < g(y), \forall y \in K$

Có định $x \in K$, ta có

$$g(x_0) < g(tx), \forall t > 0.$$

Cho $t \rightarrow \infty$ ta có $g(x) \geq 0$

Vậy $g \in K^*$, nhưng $g(x_0) < 0$. Ta gặp mâu thuẫn.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

1.2. Chỉ số điểm bất động của ánh xạ dương.

Cho E là không gian Banach thực. Một tập con $X \subset E$ được gọi là một co rút của E nếu tồn tại một ánh xạ liên tục $r : E \rightarrow X$ sao cho $r(x) = x, x \in X$. Theo định lý của Dugundji, mỗi tập hợp con khác rỗng, lồi, đóng của E là một co rút của E . Đặc biệt, mỗi nón của E là một co rút của E .

Định lý 1.2.1. Cho X là một co rút của không gian Banach thực E . Khi đó với mỗi tập con mở, bị chặn tương đối U của X và mỗi toán tử hoàn toàn liên tục $A : \overline{U} \rightarrow X$ mà nó không có điểm bất động trên ∂U , tồn tại một số nguyên $i(A, U, X)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Tính chuẩn tắc: $i(A, U, X) = 1$ nếu $Ax \equiv y_0 \in U$ với mọi $x \in \overline{U}$.

(ii) Tính cộng tính: $i(A, U, X) = i(A, U_1, X) + i(A, U_2, X)$ với bất kỳ U_1 và U_2 là hai tập con mở, rời nhau của U sao cho A không có điểm bất động trên $\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$.

(iii) Tính bất biến đồng luân: $i(H(t, \bullet), U, X)$ độc lập với t ($0 \leq t \leq 1$) với bất kỳ $H : [0, 1] \times \overline{U} \rightarrow X$ hoàn toàn liên tục và $H(t, x) \neq x$ với bất kỳ $(t, x) \in [0, 1] \times \partial U$.

(iv) Tính không đổi: $i(A, U, X) = i(A, U \cap Y, Y)$ nếu Y là một co rút của X và $A(\overline{U}) \subset Y$.

Hơn nữa, đặt

$$M = \{(A, U, X) \mid X \text{ co rút của } E, U \text{ mở, bị chặn trong } X,$$

$$A : \overline{U} \rightarrow X \text{ hoàn toàn liên tục và } Ax \neq x \text{ trên } \partial U\}$$

và đặt $\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên. Khi đó tồn tại đúng một hàm $d : M \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện từ (i) đến (iv). Nói cách khác, $i(A, U, X)$ được xác định duy

nhất, $i(A, U, X)$ được gọi là chỉ số điểm bất động của A trên U đối với X .

Chứng minh định lý 1.2.1. Trước hết ta chứng minh tính duy nhất của chỉ số điểm bất động.

Cho $\{i(A, U, X)\}$ là một tập hợp bất kỳ thỏa mãn các điều kiện từ (i) đến (iv).

Ta định nghĩa

$$d(f, U, p) = i(A + p, U, E) \quad (1.2.1)$$

trong đó $f = I - A$, U là tập mở, bị chặn của E , $f(x) \neq p$ trên ∂U , nghĩa là $A + p$ không có điểm bất động trên ∂U . Từ điều kiện (i)-(iv) và (1.2.1) dễ dàng thấy rằng hàm $d(f, U, p)$ có bốn

tính chất tiêu biểu của bậc Leray-Schauder. Do đó, theo tính duy nhất của bậc Leray-Schauder, ta có

$$d(f, U, p) = \deg(I - A, U, p) \quad (1.2.2)$$

Lấy $p = \theta$ trong (1.2.1) và (1.2.2), ta được

$$i(A, U, E) = \deg(I - A, U, \theta) \quad (1.2.3)$$

Bây giờ, ta giả sử rằng X là một co rút tùy ý của E và được biểu thị bởi $r : E \rightarrow X$ là một sự co rút tùy ý. Với tập con mở U của X , ta chọn một quả cầu $B_R = \{x \in E \mid \|x\| < R\}$ sao cho $B_R \supset U$. Thế thì, theo tính không đổi (iv) và (1.2.3), ta có

$$i(A, U, X) = i(A \cdot r, B_R \cap r^{-1}(U), E) = \deg(I - A \cdot r, B_R \cap r^{-1}(U), \theta). \quad (1.2.4)$$

Do đó, từ (1.2.4) và tính duy nhất của bậc Leray-Schauder suy ra tính duy nhất của chỉ số điểm bất động.

Theo chứng minh tính duy nhất ở trên chúng ta đưa đến định nghĩa

$$i(A, U, X) = \deg(I - A \cdot r, B_R \cap r^{-1}(U), \theta) \quad (1.2.5)$$

trong đó $r : E \rightarrow X$ là sự co rút tùy ý và $B_R = \{x \in E \mid \|x\| < R\} \supset U$

Hiển nhiên, $B_R \cap r^{-1}(U)$ là một tập mở bị chặn của E và

$$\overline{B_R \cap r^{-1}(U)} \subset \overline{r^{-1}(U)} \subset r^{-1}(\overline{U}) \quad (1.2.6)$$

Dễ dàng thấy rằng

$$x_0 \in r^{-1}(\overline{U}), A \cdot r(x_0) = x_0 \Rightarrow x_0 \in U, Ax_0 = x_0 \quad (1.2.7)$$

Bây giờ, ta chứng minh rằng $i(A, U, X)$ định nghĩa theo (1.2.5) không phụ thuộc vào việc chọn R và r . Đặt $R_1 > R$. Vì

$$U \subset B_R \cap r^{-1}(U) \subset B_{R_1} \cap r^{-1}(U)$$

Theo (1.2.7) ta biết rằng $A \cdot r$ không có điểm bất động trong

$$\overline{B_{R_1} \cap r^{-1}(U)} \setminus (B_R \cap r^{-1}(U)) \text{ và vì vậy, theo tính chất cắt của bậc Leray-Schauder}$$

$$\deg(I - A \cdot r, B_R \cap r^{-1}(U), \theta) = \deg(I - A \cdot r, B_{R_1} \cap r^{-1}(U), \theta)$$

nghĩa là, $i(A, U, X)$ không phụ thuộc vào việc chọn R .

Kế đến, đặt $r_1 : E \rightarrow X$ là một sự co rút khác của E

và đặt $V = B_R \cap r^{-1}(U) \cap r_1^{-1}(U)$. Khi đó V là một tập mở bị chặn của E và $V \supset U$. Theo (1.2.7) ta biết rằng $A \cdot r$ không có điểm bất động trong $\overline{B_R \cap r^{-1}(U)} \setminus V$ và $A \cdot r_1$ không có điểm bất động trong $\overline{B_R \cap r_1^{-1}(U)} \setminus V$.

Do đó

$$\deg(I - A \cdot r, B_R \cap r^{-1}(U), \theta) = \deg(I - A \cdot r, V, \theta) \quad (1.2.8)$$

Và

$$\deg(I - A \cdot r_1, B_R \cap r_1^{-1}(U), \theta) = \deg(I - A \cdot r_1, V, \theta) \quad (1.2.9)$$

Đặt $h(t, x) = x - H(t, x)$, trong đó $H(t, x) = r[tA \cdot r(x) + (1 - t)A \cdot r_1(x)]$.

Rõ ràng, $H : [0, 1] \times \overline{V} \rightarrow E$ hoàn toàn liên tục.

Bây giờ ta chứng minh $\theta \notin h(t, \partial V)$ với bất kì $t \in [0, 1]$.

Thật vậy, nếu tồn tại $t_0 \in [0, 1]$ và $x_0 \in \partial V$ sao cho $h(t_0, x_0) = \theta$, thì

$$x_0 = r[t_0 A \cdot r(x_0) + (1 - t_0)A \cdot r_1(x_0)] \in X$$

Kết quả là, $r(x_0) = x_0$, $r_1(x_0) = x_0$ và $x_0 = Ax_0$. Và vì vậy theo (1.2.7), $x_0 \in U \subset V$. Mâu thuẫn với $x_0 \in \partial V$.

Như vậy, sử dụng tính bất biến đồng luân của bậc Leray-Schauder và để ý rằng

$$H(0, x) = r[A \cdot r_1(x)] = A \cdot r_1(x) \text{ và } H(1, x) = r[A \cdot r(x)] = A \cdot r(x),$$

Ta có

$$\deg(I - A \cdot r_1, V, \theta) = \deg(I - A \cdot r, V, \theta) \quad (1.2.10)$$

Từ (1.2.8), (1.2.9) và (1.2.10) suy ra

$$\deg(I - A \cdot r, B_R \cap r^{-1}(U), \theta) = \deg(I - A \cdot r_1, B_R \cap r_1^{-1}(U), \theta) \quad (1.2.11)$$

điều đó chỉ ra rằng $i(A, U, X)$ không phụ thuộc việc chọn r .

Cuối cùng, theo các tính chất cơ bản của bậc Leray-Schauder ta kiểm tra được rằng chỉ số điểm bất động định nghĩa bởi (1.2.5) có các tính chất từ (i) đến (iv).

Định lí 1.2.2. Bên cạnh các tính chất từ (i) đến (iv), chỉ số điểm bất động còn có những tính chất sau:

v) Tính chất cắt: $i(A, U, X) = i(A, U_0, X)$ với bất kì U_0 là một tập con mở của U sao cho A không có điểm bất động trong $\overline{U} \setminus U_0$.

vi) Tính chất nghiệm: nếu $i(A, U, X) \neq 0$ thì A có ít nhất một điểm bất động trong U .

Chứng minh định lí 1.2.2. Đặt $U_1 = U$ và $U_2 = \phi$ trong tính chất cộng tính (ii) ta được $i(A, \phi, X) = 0$. Từ điều này và đặt $U_1 = U_0$, $U_2 = \phi$ trong (ii), ta được $i(A, U, X) = i(A, U_0, X)$. Như vậy (v) được chứng minh.

Nếu A không có điểm bất động trong U , đặt $U_0 = \phi$ trong (v), ta được

$$i(A, U, X) = i(A, \phi, X) = 0$$

do đó (vi) được chứng minh. $\square$

Chú ý rằng khái niệm này của chỉ số điểm bất động có thể được mở rộng tới những tập co nghiêm ngặt và những ánh xạ cô đặc như sau:

Cho X là một tập lồi, đóng, khác rỗng của không gian Banach thực E và U là một tập con mở của X . Cho toán tử $A : \overline{U} \rightarrow X$ là một tập k-co ($0 \leq k < 1$), mà nó không có điểm bất động trên ∂U .

$$\text{Đặt } D_1 = \overline{coA(\overline{U})}, \quad D_n = \overline{coA(D_{n-1} \cap \overline{U})} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad (1.2.12)$$

Nếu $D_n \cap \overline{U} = \phi$ với một vài n thì ta định nghĩa chỉ số điểm bất động

$$i(A, U, X) = 0 \quad (1.2.13)$$

Bây giờ, giả sử $D_n \cap \overline{U} \neq \phi$ với n bất kì. Hiển nhiên, $D_n \subset X$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

Ta có thể chứng minh rằng tập hợp $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \subset X$ là khác rỗng, lồi, compact

và $D \cap \overline{U}$ khác rỗng và compact và hơn nữa $A(D \cap \overline{U}) \subset D$.

Do đó, theo định lí mở rộng ánh xạ, tồn tại một toán tử hoàn toàn liên tục $A_1 : \overline{U} \rightarrow D$ ($D \subset X$) sao cho $A_1 x = Ax$ với mọi $x \in D \cap \overline{U}$. Dễ dàng thấy rằng A_1 không có

điểm bất động trên ∂U và do đó theo định lí 1.2.1, chỉ số điểm bất động $i(A_1, U, X)$ hoàn toàn xác định.

Bây giờ, ta định nghĩa

$$i(A_1, U, X) = i(A, U, X) \quad (1.2.14)$$

Không khó để chứng minh rằng chỉ số điểm bất động $i(A, U, X)$ với tập k -co ($0 \leq k < 1$) định nghĩa bởi (1.2.13) và (1.2.14) không phụ thuộc vào việc chọn A_1 , và định lí 1.2.1 và 1.2.2 vẫn đúng.

Bây giờ, cho tập X lồi, đóng, khác rỗng được đánh dấu sao, nghĩa là nếu $x \in X$ thì $tx \in X$ với mọi $t \in [0, 1]$. Cho U là một tập con mở của X và $A : \overline{U} \rightarrow X$ là cô đặc mà không có điểm bất động trên ∂U . Chọn một tập co

nghiêm ngặt $B : \overline{U} \rightarrow X$ sao cho

$$\|Ax - Bx\| < \tau, \quad \forall x \in \overline{U}$$

trong đó $\tau = \inf_{x \in \partial U} \|x - Ax\| > 0$.

Như thế B tồn tại, chẳng hạn chọn $B = kA$, trong đó $0 \leq k < 1$ và $1 - k$ đủ nhỏ. Vì X được đánh dấu, B là ánh xạ từ $\overline{U}$ vào X . Điều đó dễ dàng thấy rằng B không có điểm bất động trên ∂U và do đó $i(B, U, X)$ hoàn toàn xác định.

Bây giờ ta định nghĩa

$$i(A, U, X) = i(B, U, X). \quad (1.2.15)$$

Dễ dàng thấy rằng chỉ số điểm bất động của ánh xạ cô đặc được định nghĩa theo (1.2.15) không phụ thuộc với việc chọn B và với điều đó định lí (1.2.1), (1.2.2) đúng.

Trong phần sau, cho K là một nón của không gian Banach thực E . Do đó K là một co rút của E , và cũng vì thế K là một tập được đánh dấu sao, lồi, đóng. Cho Ω là một tập mở bị chặn của E , thì $K \cap \Omega$ là một tập mở bị chặn của K và

$$\partial(K \cap \Omega) = K \cap \partial\Omega, \quad \overline{K \cap \Omega} = K \cap \overline{\Omega}.$$

Bổ đề 1.2.1. Cho $\theta \in \Omega$ và $A : K \cap \overline{\Omega} \rightarrow K$ là cô đặc. Giả sử rằng

$$Ax \neq \mu x, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega, \quad \mu \geq 1 \quad (1.2.16)$$

Khi đó $i(A, K \cap \Omega, K) = 1$.

Chứng minh bổ đề 1.2.1. Đặt $H(t, x) = tAx$. Khi đó, $H : [0, 1] \times (K \cap \bar{\Omega}) \rightarrow K$ liên tục và tính liên tục của $H(t, x)$ trong t thì đều đối với $x \in K \cap \bar{\Omega}$.

Hiển nhiên, $H(t, \cdot) : K \cap \bar{\Omega} \rightarrow K$ là cô đặc với mỗi $t \in [0, 1]$ và $H(t, x) \neq x$ với $x \in K \cap \partial\Omega$ và $0 \leq t \leq 1$.

Do đó, theo tính bất biến đồng luân và tính chuẩn tắc của chỉ số điểm bất động, ta có

$$i(A, K \cap \Omega, K) = i(\theta, K \cap \Omega, K) = 1. \quad \square$$

Bổ đề 1.2.2. Cho $A : K \cap \bar{\Omega} \rightarrow K$ và $B : K \cap \partial\Omega \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục.

Giả sử rằng

$$(a) \quad \inf_{x \in K \cap \partial\Omega} \|Bx\| > 0;$$

và

$$(b) \quad x - Ax \neq tBx, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega, \quad t \geq 0.$$

Khi đó, ta có

$$i(A, K \cap \Omega, K) = 0 \quad (1.2.17)$$

Chứng minh bổ đề 1.2.2. Theo định lí mở rộng ánh xạ của Dugundji[1], ta có thể mở rộng B tới một toán tử hoàn toàn liên tục từ $K \cap \bar{\Omega}$ vào K sao cho

$$B(K \cap \bar{\Omega}) \subset \overline{coB(K \cap \partial\Omega)} \quad (1.2.18)$$

Đặt $F = B(K \cap \partial\Omega)$, khi đó $\overline{coB(K \cap \partial\Omega)} = \overline{coF} = \bar{M}$, trong đó

$$M = \{y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \mid y_i \in F, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1; n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Trước hết ta chứng minh

$$\inf_{y \in \bar{M}} \|y\| > 0 \quad (1.2.19)$$

Biểu thị theo E_0 là không gian con của E có bề rộng bằng F . Vì B là hoàn toàn liên tục, F thì compact tương đối, do đó E_0 tách được.

Hiển nhiên, $K_0 = K \cap E_0$ là một nón của E_0 và $F \subset K_0$, $\overline{coF} \subset K_0$, tồn tại $f_0 \in E_0^*$ sao cho $f_0(y) > 0$ với bất kì $y \in K_0$ với $y \neq \theta$. Ta khẳng định rằng

$$\inf_{y \in F} f_0(y) = \sigma > 0 \quad (1.2.20)$$

Thật vậy, nếu $\sigma = 0$ thì tồn tại $\{y_k\} \subset F$ sao cho $f_0(y_k) \rightarrow 0$. Theo tính compact tương đối của F , có một dãy con $\{y_{k_i}\}$ của $\{y_k\}$ sao cho $y_{k_i} \rightarrow y_0 \in K_0$. Vì vậy $f_0(y_{k_i}) \rightarrow f_0(y_0)$ và $f_0(y_0) = 0$.

Do đó, $y_0 = \theta$ và $\|y_{k_i}\| \rightarrow 0$, điều này mâu thuẫn với giả thiết (a).

Vậy (1.2.20) đúng.

Với bất kì $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \in M$ trong đó $y_i \in F$, $\lambda_i \geq 0$ và $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Ta có theo (1.2.20)

$$f_0(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_0(y_i) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma = \sigma,$$

Do đó

$$f_0(y) \geq \sigma, \forall y \in \overline{M}. \quad (1.2.21)$$

Vì $\overline{M} = \overline{coF}$ là compact nên tồn tại một $z_0 \in \overline{M}$ sao cho

$$\inf_{y \in \overline{M}} \|y\| = \|z_0\| \quad (1.2.22)$$

Theo (1.2.21), $f_0(z_0) \geq \sigma$, và điều này suy ra rằng $z_0 \neq \theta$. Do đó từ (1.2.22) suy ra (1.2.19) đúng.

Theo (1.2.18) và (1.2.19) ta được

$$\inf_{x \in K \cap \Omega} \|Bx\| = a > 0 \quad (1.2.23)$$

Bây giờ, dễ dàng chỉ ra rằng (1.2.17) đúng. Thật vậy, nếu $i(A, K \cap \Omega, K) \neq 0$ thì theo giả thiết

(b) và tính bất biến đồng luân của chỉ số điểm bất động, ta có

$$i(A + tB, K \cap \Omega, K) = i(A, K \cap \Omega, K) \neq 0, \forall t > 0.$$

Đặc biệt, chọn $t_0 > \frac{b+c}{a}$ trong đó $b = \sup_{x \in K \cap \bar{\Omega}} \|x\|$ và $c = \sup_{x \in K \cap \bar{\Omega}} \|Ax\|$, ta có

$$i(A + t_0 B, K \cap \Omega, K) \neq 0,$$

nên theo tính chất nghiệm của chỉ số điểm bất động ở đây sẽ tồn tại một

$x_0 \cap P \in \Omega$ sao cho $A_{x_0} + t_0 Bx_0 = x_0$. Do đó

$$t_0 = \frac{\|x_0 - Ax_0\|}{\|Bx_0\|} \leq \frac{b+c}{a}$$

Ta gặp mâu thuẫn. $\square$

Hệ quả. Cho $A : K \cap \bar{\Omega} \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Nếu tồn tại một $u_0 > \theta$

sao cho

$$x - Ax \neq tu_0, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega, \quad t \geq 0 \quad (1.2.24)$$

thì (1.2.17) đúng.

Chứng minh. Hệ quả trên được suy trực tiếp từ bổ đề 1.2.2 bằng cách đặt $Bx = u_0$ với mọi $x \in K \cap \partial\Omega$. $\square$

Bổ đề 1.2.3. Cho $A : K \cap \bar{\Omega} \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Giả sử rằng

$$(i) \quad \inf_{x \in K \cap \partial\Omega} \|Ax\| > 0;$$

và

$$(ii) \quad Ax \neq \mu x, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega, \quad 0 \leq \mu \leq 1.$$

Khi đó (1.2.17) đúng.

Chứng minh bổ đề 1.2.3. Lấy $B = A$ trong bổ đề 1.2.2, ta thấy rằng điều kiện (a) của bổ đề 1.2.2 tương tự như điều kiện (i) của bổ đề 1.2.3. Vì thế, điều kiện (b) của bổ đề 1.2.2 đúng.

Thật vậy, nếu tồn tại $x_0 \in K \cap \partial\Omega$ và $t_0 \geq 0$ sao cho $x_0 - Ax_0 = t_0 Ax_0$, thì $Ax_0 = \mu x_0$, trong đó $\mu_0 = (1 + t_0)^{-1}$.

Hiển nhiên $0 < \mu_0 \leq 1$. Điều này mâu thuẫn với điều kiện (ii).

Vì vậy, (1.2.17) suy ra từ bổ đề 1.2.2. $\square$

Chú ý, bổ đề 1.2.3 không đúng cho tập A -co nghiêm ngặt. Chẳng hạn,

đặt $E = l^2 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mid \|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2)^{\frac{1}{2}} < +\infty\}$

$K = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^2 \mid x_n \geq 0, n = 1, 2, 3, \dots\}$ khi đó K là một nón của E .

Ta định nghĩa toán tử A bởi

$$Ax = (0, \frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{2}x_{n-1}, \dots), \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^2 \quad (1.2.25)$$

Đặt $\Omega = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^2 \mid \|x\| < 1\}$. Điều đó rõ ràng rằng

$A : K \cap \overline{\Omega} \rightarrow K$ là một tập $\frac{1}{2}$ co vì $\|Ax\| = \frac{1}{2}\|x\|$ và $\|Ax - Ay\| = \frac{1}{2}\|x - y\|$ với

mọi $x, y \in l^2$. Dễ dàng kiểm tra

$$Ax \neq \mu x, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega, \quad \mu > 0 \quad (1.2.26)$$

Thật vậy, nếu tồn tại $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots) \in K \cap \partial\Omega$ và $\mu^* > 0$ sao cho $Ax^* = \mu^* x^*$ thì

$$0 = \mu^* x_1^*, \frac{1}{2}x_2^* = \mu^* x_2^*, \dots, \frac{1}{2}x_{n-1}^* = \mu^* x_n^*, \dots,$$

Và do đó $x_1^* = x_2^* = \dots = x_n^* = \dots = 0$, nghĩa là $x^* = \theta$, mâu thuẫn với $\|x^*\| = 1$. Từ

$\|Ax\| = \frac{1}{2}\|x\|$ và (1.2.26) ta thấy rằng điều kiện (i) và (ii) của bổ đề 1.2.3

được thỏa mãn. Nhưng theo (1.2.26) và bổ đề 1.2.1, ta có $i(A, K \cap \partial\Omega, K) = 1$.

Bổ đề 1.2.4. Cho $A : K \cap \overline{\Omega} \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Giả sử

$$(i') \quad Ax \neq \mu x, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega, \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

và

$$(i'') \quad \text{Tập hợp } \{\|Ax\|^{-1} Ax \mid x \in K \cap \partial\Omega\} \text{ là compact tương đối}$$

Khi đó (1.3.17) đúng.

Chứng minh bổ đề 1.2.4. Đặt $A_1 x = \alpha(\|Ax\|)^{-1} Ax$, trong đó

$$\alpha = \sup_{x \in K \cap \partial\Omega} \|Ax\| > 0.$$

Khi đó, theo giả thiết, $A_1 : K \cap \partial\Omega \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Theo định lí mở rộng ánh xạ, A_1 có thể mở rộng tới một toán tử hoàn toàn liên tục từ $K \cap \bar{\Omega}$ vào trong K . Bây giờ, ta chứng minh rằng A_1 thỏa mãn điều kiện (i) và (ii) của bổ đề 1.2.3. Thật vậy, đầu tiên ta có

$$\inf_{x \in K \cap \partial\Omega} \|A_1 x\| = \alpha > 0$$

Thứ hai, nếu tồn tại $x_0 \in K \cap \partial\Omega$ và $0 < \mu_0 \leq 1$ sao cho $A_1 x_0 = \mu_0 x_0$ thì $Ax_0 = \lambda_0 x_0$, trong đó $\lambda_0 = \mu_0 \alpha^{-1} \|Ax_0\|$.

Hiển nhiên, $0 < \lambda_0 \leq \mu_0 \leq 1$. Mâu thuẫn với giả thiết (i'). Do đó, theo bổ đề 1.2.3, ta có

$$i(A_1, K \cap \Omega, K) = 0 \quad (1.2.27)$$

Bây giờ, ta chứng minh

$$(1-t)Ax + tA_1x \neq x, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.2.28)$$

Nếu có $x_1 \in K \cap \partial\Omega$ và $0 \leq t_1 \leq 1$ sao cho $(1-t_1)Ax_1 + t_1A_1x_1 = x_1$ thì

$$Ax_1 = \mu_1 x_1, \text{ trong đó } \mu_1 = [1 + t_1(\frac{\alpha}{Ax_1} - 1)]^{-1}, \quad 0 \leq \mu_1 \leq 1$$

Mâu thuẫn với giả thiết (i'). Do đó, theo (1.2.27), (1.2.28) và tính bất biến đồng luân của chỉ số điểm bất động, ta có

$$i(A, K \cap \Omega, K) = i(A_1, K \cap \Omega, K) = 0. \quad \square$$

1.3. Điểm bất động của ánh xạ giãn và nén mặt nón.

Định lí 1.3.1. Cho Ω_1 và Ω_2 là hai tập mở, bị chặn trong E sao cho $\theta \in \Omega_1$ và $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Cho toán tử $A : K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Giả sử rằng một trong hai điều kiện:

$$(H_1) \quad Ax \not\leq x, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega_1 \quad \text{và} \quad Ax \not\geq x, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega_2$$

$$(H_2) \quad Ax \not\leq x, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega_1 \quad \text{và} \quad Ax \not\geq x, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega_2$$

được thỏa mãn. Khi đó A có ít nhất một điểm bất động trong $K \cap (\Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1)$.

Chứng minh định lý 1.3.1. Theo định lý mở rộng ánh xạ, A có một sự mở rộng hoàn toàn liên tục (cũng được biểu thị theo A) từ $K \cap \overline{\Omega_2}$ vào trong K .

Trước hết, ta giả sử rằng (H_1) được thỏa mãn, nghĩa là nó là trường hợp của nón giãn. Dễ dàng thấy rằng

$$Ax \neq \mu x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1, \mu \geq 1 \quad (1.3.1)$$

Vì ngược lại nếu như tồn tại $x_0 \in K \cap \partial\Omega_1$ và $\mu_0 \geq 1$ sao cho $Ax_0 = \mu_0 x_0 \geq x_0$

Mâu thuẫn với (H_1) . Bây giờ từ 1.3.1 và bổ đề 1.2.1 ta thu được

$$i(A, K \cap \Omega_1, K) = 1. \quad (1.3.2)$$

Ngoài ra, chọn một $u_0 > \theta$ tùy ý, ta có

$$x - Ax \neq tu_0, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2, t \geq 0 \quad (1.3.3)$$

Thật vậy, nếu tồn tại $x_1 \in K \cap \partial\Omega_2$ và $t_1 \geq 0$ sao cho $x_1 - Ax_1 = t_1 u_0 \geq \theta$ thì

$x_1 \geq Ax_1$, mâu thuẫn với (H_1) . Do đó, theo (1.3.3) và hệ quả 1.2.1, ta có

$$i(A, K \cap \Omega_2, K) = 0 \quad (1.3.4)$$

Vì vậy từ (1.3.2), (1.3.4) và tính chất cộng tính của chỉ số điểm bất động ta suy ra rằng

$$i(A, K \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}), K) = i(A, K \cap \Omega_2, K) - i(A, K \cap \Omega_1, K) = -1 \neq 0. \quad (1.3.5)$$

Do đó, theo tính chất nghiệm của chỉ số điểm bất động, A có ít nhất một điểm bất động trong $\Omega_2 \setminus (\overline{\Omega_1})$.

Tương tự, khi (H_2) được thỏa mãn, thay cho (1.3.2), (1.3.4) và (1.3.5), ta có $i(A, K \cap \Omega_1, K) = 0$, $i(A, K \cap \Omega_2, K) = 1$ và $i(A, K \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}), K) = 1$.

Kết quả là ta cũng có thể khẳng định rằng A có ít nhất một điểm bất động trong $\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}$. $\square$

Định lý 1.3.2. (định lý điểm bất động của sự nén và giãn mặt nón của kiểu chuẩn)

Cho Ω_1 và Ω_2 là hai tập mở, bị chặn trong E sao cho $\theta \in \Omega_1$ và $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Cho toán tử

$A : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Giả sử rằng một trong hai

điều kiện

$$(H_3) \quad \|Ax\| \leq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1 \text{ và } \|Ax\| \geq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2$$

và

$$(H_4) \quad \|Ax\| \geq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2 \text{ và } \|Ax\| \leq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1$$

được thỏa mãn. Khi đó A có ít nhất một điểm bất động trong $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

Chứng minh định lý 1.3.2. Ta chỉ cần chứng minh định lý dưới điều kiện (H_3) , vì việc chứng minh sẽ tương tự khi (H_4) được thỏa mãn.

Theo định lý mở rộng ánh xạ, A có thể mở rộng tới một toán tử hoàn toàn liên tục từ $K \cap \overline{\Omega_2}$ vào K . Chúng ta có thể giả sử rằng A không có điểm bất động trên $K \cap \partial\Omega_1$ và $K \cap \partial\Omega_2$. Dễ dàng thấy rằng (1.3.1) đúng, vì trái lại, nếu tồn tại $x_0 \in K \cap \partial\Omega_1$ và $\mu_0 > 1$ sao cho $Ax_0 = \mu_0 x_0$ thì $\|Ax_0\| = \mu_0 \|x_0\| > \|x_0\|$.

Mâu thuẫn với (H_3) . Vì vậy theo (1.3.1) và bổ đề 1.2.1, (1.3.2) đúng.

Ngoài ra, cũng dễ dàng để kiểm tra

$$Ax \neq \mu x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2, 0 < \mu \leq 1 \quad (1.3.6)$$

Thật vậy, nếu có $x_1 \in K \cap \partial\Omega_2$ và $0 < \mu_1 < 1$ sao cho $Ax_1 = \mu_1 x_1$ thì

$\|Ax_1\| = \mu_1 \|x_1\| < \|x_1\|$. Mâu thuẫn với (H_3) . Ngoài ra, theo (H_3) ta có

$$\inf_{x \in K \cap \partial\Omega_2} \|Ax\| \geq \inf_{x \in K \cap \partial\Omega_2} \|x\| > 0 \quad (1.3.7)$$

Từ (1.3.6), (1.3.7) và bổ đề 1.2.3 suy ra (1.3.4) đúng. Như đã biết, (1.3.2) và

(1.3.4) suy ra (1.3.5) và do đó A có ít nhất một điểm bất động trong $\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}$. $\square$

Định lý 1.3.3. Cho Ω_1 và Ω_2 là hai tập mở, bị chặn trong E sao cho $\theta \in \Omega_1$ và $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Cho

$u_0 > \theta$, $K_{u_0} = \{x \in K \mid \exists \lambda > 0, x \geq \lambda u_0\}$ và

$A : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Nếu một trong hai điều kiện

$$(H_5) \quad Ax \not\leq (1 + \varepsilon)x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1, \varepsilon > 0 \text{ và } Ax \not\leq x, \forall x \in K_{u_0} \cap \partial\Omega_2$$

và

$$(H_6) \quad Ax \not\leq x, \quad \forall x \in K_{u_0} \cap \partial\Omega_1 \text{ và } Ax \not\leq (1 + \varepsilon)x, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega_2, \quad \varepsilon > 0$$

được thỏa mãn, thì A có ít nhất một điểm bất động trong $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

Chứng minh định lí 1.3.3. Ta có thể giả sử rằng (H_5) được thỏa mãn, vì chứng minh sẽ tương tự khi (H_6) đúng. Theo định lí mở rộng ánh xạ, A có thể mở rộng tới một toán tử hoàn toàn liên tục từ $K \cap \overline{\Omega_2}$ vào trong K . Ta có thể giả sử rằng A không có điểm bất động trong $K \cap \partial\Omega_1$ và $K \cap \partial\Omega_2$. Dễ dàng chỉ ra rằng (1.3.1)

đúng, vì mặt khác, nếu có $x_0 \in K \cap \partial\Omega_1$ và $\mu_0 > 1$ sao cho

$$Ax_0 = \mu_0 x_0 = (1 + \varepsilon_0)x_0, \text{ trong đó } \varepsilon_0 = \mu_0 - 1 > 0. \text{ Mâu thuẫn với } (H_5).$$

Do đó (1.3.2) đúng.

Ngoài ra, (1.3.3) cũng đúng. Thật vậy, nếu tồn tại $x_1 \in K \cap \partial\Omega_2$ và $t_1 > 0$ sao cho $x_1 - Ax_1 = t_1 u_0$, thì $x_1 \geq t_1 u_0$ và $x_1 \geq Ax_1$ nên $x_1 \in K_{u_0}$.

Mâu thuẫn với (H_5) . Do đó (1.3.4) đúng.

Từ (1.3.2) và (1.3.4) suy ra rằng (1.3.5) cũng đúng và do đó A có ít nhất một điểm bất động trong $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \overline{\Omega_1})$. $\square$

Chú ý rằng vì $K_{u_0} \subset K$. Định lí 1.3.3 là một sự cải tiến của định lí 1.3.1.

Định lí 1.3.4. Cho K là một nón trong không gian Banach thực E , Ω là một tập con mở, bị chặn của E với $\theta \in \Omega$ và $A : K \cap \overline{\Omega} \rightarrow K$ là một toán tử hoàn toàn liên tục. Giả sử rằng tồn tại một nón K_1 khác trong không gian Banach thực E_1 khác và một toán tử thuần nhất $B : K \rightarrow K_1$ với $\{Bx \mid x \in K \cap \partial\Omega\} \subset K_1 \setminus \{\theta\}$

sao cho

$$BAx \leq Bx, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega \quad (1.3.8)$$

với thứ tự cảm sinh theo nón K_1 trong E_1 . Khi đó, chỉ số điểm bất động $i(A, K \cap \Omega, K) = 1$.

Chứng minh định lí 1.3.4. Nếu tồn tại $x_0 \in K \cap \partial\Omega$ và $\lambda_0 \geq 1$ sao cho

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0 \text{ thì } \lambda_0 > 1. \text{ Do đó}$$

$$B(Ax_0) = B(\lambda_0 x_0) = \lambda_0 Bx_0 > Bx_0$$

điều này mâu thuẫn với (1.3.8). Do đó theo bổ đề 1.2.1 định lí được chứng minh. $\square$

Định lí 1.3.5. Cho K là một nón trong không gian Banach thực E , Ω là một tập con mở, bị chặn của E và một toán tử $A : K \cap \overline{\Omega} \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Nếu

$$(i) \inf_{x \in K \cap \partial\Omega} \|Ax\| > 0 \text{ và}$$

(ii) Tồn tại nón K_1 khác trong không gian Banach thực E_1 khác và một

toán tử thuần nhất $B : K \rightarrow K_1$ với $\{Bx \mid x \in K \cap \partial\Omega\} \subset K_1 \setminus \{\theta\}$ sao cho

$$BAx \geq Bx, \forall x \in K \cap \partial\Omega \quad (1.3.9)$$

với thứ tự cảm sinh theo nón K_1 trong E_1 , Khi đó, chỉ số điểm bất động $i(A, K \cap \Omega, K) = 0$.

Chứng minh định lí 1.3.5. Nếu tồn tại $x_0 \in K \cap \partial\Omega$ và $0 < \lambda_0 \leq 1$ sao cho

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0, \text{ khi đó } 0 < \lambda_0 < 1. \text{ Do đó, } B(Ax_0) = B(\lambda_0 x_0) = \lambda_0 Bx_0 < Bx_0,$$

điều này mâu thuẫn với (1.3.9). Áp dụng bổ đề 1.2.3 ta có điều phải chứng minh. $\square$

Định lí 1.3.6. Cho Ω_1 và Ω_2 là hai tập mở, bị chặn trong E sao cho $\theta \in \Omega_1$ và $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Giả sử rằng $A : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Giả định rằng tồn tại hai nón K_1 và K_2 trong không gian Banach E_1 và E_2 tương ứng và toán tử thuần nhất $B_1 : K \rightarrow K_1$ với $\{B_1x \mid x \in K \cap \partial\Omega_1\} \subset K_1 \setminus \{\theta\}$ và $B_2 : K \rightarrow K_2$ với $\{B_2x \mid x \in K \cap \partial\Omega_2\} \subset K_2 \setminus \{\theta\}$. Nếu một trong hai điều kiện:

$$(H_1) \ B_1Ax \leq B_1x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1 \text{ và } \inf_{x \in K \cap \partial\Omega_2} \|Ax\| > 0,$$

$$B_2Ax \geq B_2x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2$$

$$(H_2) \ \inf_{x \in K \cap \partial\Omega_1} \|Ax\| > 0, \ B_1Ax \geq B_1x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1 \text{ và}$$

$$B_2Ax \leq B_2x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2$$

được thỏa mãn thì A có ít nhất một điểm bất động trong $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

Việc chứng minh dễ dàng bằng cách dựa vào định lí 1.3.4 và 1.3.5.

Do đó ta chấp nhận nó.

Nhận xét: ta khẳng định rằng định lí 1.3.6 là sự mở rộng của định lí điểm bất động của sự nén và giãn mặt nón của kiểu chuẩn. Thật vậy, nếu ta lấy $B_1x = B_2x = \|x\| \quad \forall x \in K$ thì $B_1B_2 : K \rightarrow \mathbb{R}^+$ là một toán tử thuần nhất và $\|x\| \neq 0, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1$ hoặc $x \in K \cap \partial\Omega_2$. Hơn nữa, $\inf_{x \in K \cap \partial\Omega_1} \|Ax\| > 0$ và

$$\inf_{x \in K \cap \partial\Omega_2} \|Ax\| > 0 \text{ được thỏa mãn một cách tự nhiên theo } \theta \in \Omega_1 \text{ và } \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2.$$

Định lí 1.3.7. Cho K là một nón trong không gian Banach thực E , Ω là một tập con mở, bị chặn của E với $\theta \in \Omega$ và toán tử $A : K \cap \overline{\Omega} \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Giả sử rằng tồn tại nón K_1 khác trong không gian Banach thực E_1 khác và một toán tử bảo toàn thứ tự $B : K \rightarrow K_1$ sao cho

$$BAx \not\leq Bx, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega \quad (1.3.10)$$

với thứ tự được cảm sinh bởi nón K_1 trong E_1 . Khi đó, chỉ số điểm bất động $i(A, K \cap \Omega, K) = 1$

Chứng minh định lí 1.3.7. Nếu tồn tại $x_0 \in K \cap \partial\Omega$ và $\lambda_0 \geq 1$ sao cho $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ thì $Ax_0 \geq x_0$. Do đó $BAx_0 \geq Bx_0$. Điều này mâu thuẫn với (1.3.10)

Áp dụng bổ đề 1.2.1, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Định lí 1.3.8. Cho K là một nón trong không gian Banach thực E , Ω là một tập con mở, bị chặn của E , và một toán tử $A : K \cap \overline{\Omega} \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Giả sử rằng tồn tại một nón K_1 khác trong một không gian Banach thực E_1 khác và một toán tử bảo toàn thứ tự $B : K \rightarrow K_1$ sao cho

$$BAx \not\leq Bx, \quad \forall x \in K \cap \partial\Omega \quad (1.3.11)$$

với thứ tự được cảm sinh bởi nón K_1 trong E_1 . Khi đó, chỉ số điểm bất động $i(A, K \cap \Omega, K) = 0$.

Chứng minh định lí 1.3.8. Nếu tồn tại $u_0 \in K$, $u_0 \neq \theta$, $x_0 \in K \cap \partial\Omega$ và $\lambda_0 \geq 0$ sao cho $x_0 - Ax_0 = \lambda_0 u_0$ thì $Ax_0 \leq x_0$. Do đó, $BAx_0 \leq Bx_0$. Điều này mâu thuẫn với (1.3.11). Áp dụng bổ đề 1.2.2 ta có điều phải chứng minh. $\square$

Định lí 1.3.9. Cho Ω_1 và Ω_2 là hai tập mở, bị chặn trong E sao cho $\theta \in \Omega_1$ và $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Giả sử rằng $A : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Giả sử rằng tồn tại hai nón K_1 và K_2 trong không gian Banach E_1 và E_2 tương ứng và những toán tử bảo toàn thứ tự $B_1 : K \rightarrow K_1$, $B_2 : K \rightarrow K_2$. Nếu một trong hai điều kiện:

$$(H_3) \ B_1 Ax \not\leq B_1 x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1 \text{ và } B_2 Ax \not\leq B_2 x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2$$

$$(H_4) \ B_1 Ax \not\leq B_1 x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1 \text{ và } B_2 Ax \not\leq B_2 x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2$$

được thỏa mãn thì A có ít nhất một điểm bất động trong $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

Việc chứng minh dễ dàng bằng định lí 1.3.7 và 1.3.8 do đó ta chấp nhận nó.

Định lí 1.3.10. Cho Ω là tập mở, bị chặn trong E và $\theta \in \Omega$. Giả sử rằng

$A : K \cap \overline{\Omega} \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục, $A\theta = \theta$ và

$$\inf_{x \in K \cap \partial\Omega} \|Ax\| > 0 \quad (1.3.12)$$

Khi đó, A có ít nhất một vectơ riêng trên $K \cap \partial\Omega$ tương ứng với giá trị riêng dương, nghĩa là, tồn tại $x_0 \in K \cap \partial\Omega$ và $\mu_0 > 0$ sao cho $Ax_0 = \mu_0 x_0$.

Chứng minh định lí 1.3.10. Đặt $m = \sup_{x \in K \cap \partial\Omega} \|x\|$, $\beta = \inf_{x \in K \cap \partial\Omega} \|Ax\|$

Theo (1.3.12), $m > 0$ và $\beta > 0$. Bây giờ ta chọn $a > \frac{m}{\beta}$ và dễ dàng kiểm chứng rằng toán tử

aA thỏa mãn tất cả các điều kiện của bổ đề 1.2.3.

Thật vậy, nếu tồn tại $x_1 \in K \cap \partial\Omega$ và $0 < \mu_1 \leq 1$ sao cho $aAx_1 = \mu_1 x_1$, thì

$$\mu_1 \|x_1\| = a \|Ax_1\| > \frac{m}{\beta} \cdot \beta = m \geq \|x_1\|$$

Và do đó $\mu_1 > 1$, một sự mâu thuẫn. Do đó theo bổ đề 1.2.3 ta có

$$i(aA, K \cap \Omega, K) = 0 \quad (1.3.13)$$

Đặt $H(t, x) = taAx$. Nếu $H(t, x) \neq x$ với bất kỳ $x \in K \cap \partial\Omega$ và $0 \leq t \leq 1$, thì theo tính bất biến đồng luân và tính chuẩn tắc của chỉ số điểm bất động

$$i(aA, K \cap \Omega, K) = i(\theta, K \cap \Omega, K) = 1$$

Mâu thuẫn với (1.3.13). Do đó, tồn tại $x_0 \in K \cap \partial\Omega$ và $0 \leq t_0 \leq 1$ sao cho $H(t_0, x_0) = x_0$ nghĩa là $t_0 aAx_0 = x_0$. Rõ ràng, $t_0 \neq 0$ nên $Ax_0 = \mu_0 x_0$, trong đó

$$\mu_0 = (at_0)^{-1} > 0. \quad \square$$

Định lí 1.3.11. Cho toán tử $A : K \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục và $A\theta = \theta$. Giả sử rằng một trong hai điều kiện:

$$(H_7) \quad \lim_{x \in K, \|x\| \rightarrow 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0, \quad \lim_{x \in K, \|x\| \rightarrow +\infty} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = +\infty$$

và

$$(H_8) \quad \lim_{x \in K, \|x\| \rightarrow 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = +\infty, \quad \lim_{x \in K, \|x\| \rightarrow +\infty} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$$

được thỏa mãn. Khi đó hai kết luận sau đúng:

(a) Mỗi $\mu > 0$ là một giá trị riêng của A tương ứng với vector riêng dương, nghĩa là tồn tại

$$x_\mu > \theta \text{ sao cho } Ax_\mu = \mu x_\mu.$$

(b) $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \|x_\mu\| = +\infty$ nếu có (H_7) và $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \|x_\mu\| = 0$ nếu có (H_8)

Chứng minh định lí 1.3.11. Ta chỉ cần chứng minh định lí này dưới điều kiện (H_7) vì chứng minh tương tự khi (H_8) được thỏa mãn. Với $\mu > 0$ cho trước, theo

(H_7) tồn tại $R > r > 0$ sao cho

$$\left\| \frac{1}{\mu} Ax \right\| < \|x\|, \quad \forall x \in K, \|x\| = r$$

Và

$$\left\| \frac{1}{\mu} Ax \right\| > \|x\|, \quad \forall x \in K, \|x\| = R$$

Do đó điều kiện (H_3) của định lí (1.3.2) được thỏa mãn cho toán tử $\frac{1}{\mu}A$ và

$\Omega_1 = \{x \in E \mid \|x\| < r\}$, $\Omega_2 = \{x \in E \mid \|x\| < R\}$. Do đó từ định lí 1.3.2 suy ra

rằng toán tử $\frac{1}{\mu}A$ có một điểm bất động x_μ trong $\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1$ và (a) được chứng minh xong.

Điều còn lại là chứng minh kết luận (b) tức là cần chứng minh $\|x_\mu\| \rightarrow +\infty$ khi $\mu \rightarrow +\infty$.

Giả sử rằng điều này không đúng. Khi đó tồn tại số $c > 0$ và một dãy $\mu_n \rightarrow +\infty$ sao cho

$$\|x_{\mu_n}\| \leq c \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Hơn nữa, dãy $\{\|x_{\mu_n}\|\}$ chứa một dãy con hội tụ tới một số τ ($0 \leq \tau \leq c$). Một cách đơn giản, giả sử rằng chính $\{\|x_{\mu_n}\|\}$ hội tụ tới τ .

Nếu $\tau > 0$, thì $\|x_{\mu_n}\| > \frac{\tau}{2}$ với n đủ lớn ($n > N$), và do đó

$$\mu_n = \frac{\|Ax_{\mu_n}\|}{\|x_{\mu_n}\|} \leq \frac{2M}{\tau} \quad (n > N),$$

trong đó $M = \sup_{\|x\| \leq c} \|Ax\|$, mâu thuẫn với $\mu_n \rightarrow +\infty$

Nếu $\tau = 0$ thì từ (H_7) ta có

$$\mu_n = \frac{\|Ax_{\mu_n}\|}{\|x_{\mu_n}\|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

mâu thuẫn với $\mu_n \rightarrow +\infty$. Do đó, $\|x_\mu\| \rightarrow +\infty$ khi $\mu \rightarrow +\infty$ và chứng minh của chúng ta hoàn thành.

Định nghĩa 1.3.1. Cho K là một nón trong không gian Banach thực E và toán tử

$$A : K \rightarrow K$$

(i) Cho $x_0 \in K$. Nếu tồn tại một toán tử tuyến tính, bị chặn $B : E \rightarrow E$

sao cho

$$\lim_{h \in K, \|h\| \rightarrow 0} \frac{\|A(x_0 + h) - Ax_0 - Bh\|}{\|h\|} = 0 \quad (1.3.14)$$

thì A được gọi là khả vi tại x theo nón K và B được gọi là đạo hàm Fréchet của A tại x_0 theo K và được kí hiệu là $A'_+(x_0)$, nghĩa là $A'_+(x_0) = B$.

(ii) Nếu tồn tại một toán tử tuyến tính, bị chặn $B_1 : E \rightarrow E$ sao cho

$$\lim_{x \in K, \|x\| \rightarrow +\infty} \frac{\|Ax - B_1x\|}{\|x\|} = 0 \quad (1.3.15)$$

thì A được gọi khả vi tại vô cực theo nón K và B_1 được gọi là đạo hàm Fréchet của A tại vô cực theo K và được kí hiệu là $A'_+(\infty)$, nghĩa là $A'_+(\infty) = B_1$.

Rõ ràng (1.3.14) tương đương với

$$A(x_0 + h) - A(x_0) = Bh + \omega(x_0, h) \quad (1.3.16)$$

trong đó $\|\omega(x_0, h)\| = o(\|h\|)$ khi $h \rightarrow \theta$ ($h \geq \theta$).

Ví dụ 1.3.1. Xét toán tử tích phân Uryson

$$Ax(t) = \int_G k(t, s, x(s))ds \quad (1.3.17)$$

trong đó G là một tập đóng, bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, $k(t, s, x(s))$ không âm và liên tục với $t \in G, s \in G$ và $x \geq 0$.

Đặt $E = C(G)$ và $K = \{x(t) \in C(G) \mid x(t) \geq 0, t \in G\}$ thì K là một nón của E . Rõ ràng $A : K \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục.

Ta có những khẳng định sau:

(a) Nếu $k'_x(t, s, x)$ tồn tại và liên tục trên $t \in G, s \in G$ và $x \geq 0$ thì A khả vi tại mọi $x_0(t) \in K$ theo K và

$$A'_+(x_0)h(t) = \int_G k'_x(t, s, x_0(s))h(s)ds, \quad \forall h(t) \in C(G) \quad (1.3.18)$$

(b) Nếu $\frac{k(t, s, x)}{x}$ hội tụ đều về $Q(t, s)$ (1.3.19)

đối với $t \in G$ và $s \in G$ khi $x \rightarrow +\infty$ thì A khả vi tại vô cực theo K và

$$A'_+(\infty)h(t) = \int_G Q(t,s)h(s)ds, \quad \forall h(t) \in C(G) \quad (1.3.20)$$

Để chứng minh kết luận (a) ta đặt

$$Bh(t) = \int_G k'_x(t, s, x_0(s))h(s)ds \quad (1.3.21)$$

Rõ ràng B là một toán tử tuyến tính hoàn toàn liên tục từ $C(G)$ vào $C(G)$

Với $h(t) \in K$, ta có:

$$\begin{aligned} & \left| A[x_0(t) + h(t)] - Ax_0(t) - Bh(t) \right| = \\ &= \left| \int_G \{k(t, s, x_0(s) + h(s)) - k(t, s, x_0(s)) - k'_x(t, s, x_0(s))h(s)\} ds \right| \\ &= \left| \int_G \{k'_x(t, s, x_0(s) + \theta(t, s)h(s)) - k'_x(t, s, x_0(s))\} h(s) ds \right| \\ &\leq \|h\| \cdot \int_G |k'_x(t, s, x_0(s) + \theta(t, s)h(s)) - k'_x(t, s, x_0(s))| ds \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

trong đó $0 < \theta(t, s) < 1$. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì, vì $k'_x(t, s, x)$ liên tục đều trên $G \times G \times [0; M + 1]$ với

$M = \max_{t \in G} x_0(t)$, tồn tại $0 < \delta < 1$ sao cho $t \in G, s \in G$

và $x_1, x_2 \in [0; M + 1], |x_1 - x_2| < \delta$ suy ra

$$\left| k'_x(t, s, x_1) - k'_x(t, s, x_2) \right| < \frac{\varepsilon}{mes G} \quad (1.3.23)$$

Từ (1.3.22) và (1.3.23) suy ra

$$\|A(x_0 + h) - Ax_0 - Bh\| \leq \varepsilon \|h\|, \quad \forall h \in K, \quad \|h\| < \delta.$$

Do đó (1.3.14) đúng nên $A'_+(x_0) = B$ tức là (1.3.18) đúng.

Để chứng minh b), cho $\varepsilon > 0$ bất kì, theo giả thiết $Q(t, s)$ liên tục trên $(t, s) \in G \times G$

và tồn tại $\beta > 0$ sao cho

$$\left| k(t, s, x) - Q(t, s)x \right| < \varepsilon x, \quad \forall t \in G, s \in G, x \geq \beta \quad (1.3.24)$$

Đặt $\gamma = \max_{t \in G, s \in G, 0 \leq x \leq \beta} |k(t, s, x) - Q(t, s)x|$. Khi đó, theo (1.3.24), ta có

$$|k(t, s, x) - Q(t, s)x| \leq \varepsilon x + \gamma, \quad \forall t \in G, \quad s \in G, \quad x \geq 0 \quad (1.3.25)$$

Bây giờ, định nghĩa

$$B_1 x(t) = \int_G Q(t, s)x(s)ds, \quad x(t) \in C(G)$$

Hiển nhiên, $B_1 : C(G) \rightarrow C(G)$ là toán tử tuyến tính hoàn toàn liên tục. Từ (1.3.25) chúng ta biết với bất kì $x(t) \in K$

$$\begin{aligned} |Ax(t) - B_1(x, t)| &= \left| \int_G \{k(t, s, x(s)) - Q(t, s)\}ds \right| \\ &\leq \int_G \{\varepsilon x(s) + \gamma\}ds \leq \varepsilon(mesG)\|x\| + \gamma mesG \end{aligned}$$

Và do đó

$$\lim_{x \in K, \|x\| \rightarrow +\infty} \frac{\|Ax - B_1 x\|}{\|x\|} \leq \varepsilon(mesG)$$

Vì ε tùy ý, ta thấy rằng (1.3.15) đúng nên $A'_+(\infty) = B_1$ nghĩa là (1.3.20) đúng.

Bổ đề 1.3.1. Cho $A : K \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục . Khi đó

i) Nếu A khả vi tại $x_0 \in K$ theo K , thì $A'_+(x_0)$ biến các tập bị chặn của K vào những tập compact tương đối.

ii) Nếu A khả vi tại vô cực theo K thì $A'_+(\infty)$ biến các tập bị chặn của K vào những tập compact tương đối.

Chứng minh bổ đề 1.3.1. i) Vì $A'_+(x_0)$ là tuyến tính nên ta chỉ cần chứng minh rằng

$A'_+(x_0)(S_1)$ là tập compact tương đối, trong đó $S_1 = \{x \in K \mid \|x\| \leq 1\}$. Giả sử trái lại, tồn tại

$h_i \in S_1 (i = 1, 2, 3, \dots)$ và $\varepsilon_0 > 0$ sao cho

$$\|A'_+(x_0)h_i - A'_+(x_0)h_j\| \geq \varepsilon_0 \quad (i \neq j) \quad (1.3.26)$$

Chọn $\tau > 0$ sao cho

$$\|A(x_0 + h) - A(x_0) - A'_+(x_0)h\| \leq \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\|h\|, \quad \forall h \in K, \quad \|h\| \leq \tau \quad (1.3.27)$$

Khi đó, từ (1.3.26) và (1.3.27) ta tìm được

$$\begin{aligned}
& \|A(x_0 + \tau h_i) - A(x_0 + \tau h_j)\| = \|A(x_0 + \tau h_i) - A(x_0) - A'_+(x_0)(\tau h_i) \\
& \quad - A(x_0 + \tau h_j) - A(x_0) - A'_+(x_0)(\tau h_j) + \tau[A'_+(x_0)h_i - A'_+(x_0)h_j]\| \\
& \geq \tau \|A'_+(x_0)h_i - A'_+(x_0)h_j\| - \|A(x_0 + \tau h_i) - A(x_0) - A'_+(x_0)(\tau h_i)\| \\
& \quad - \|A(x_0 + \tau h_j) - A(x_0) - A'_+(x_0)(\tau h_j)\| \\
& \geq \tau \varepsilon_0 - \frac{\tau \varepsilon_0}{3} - \frac{\tau \varepsilon_0}{3} = \frac{\tau \varepsilon_0}{3}, \quad \forall i \neq j
\end{aligned} \tag{1.3.28}$$

Mâu thuẫn với tính hoàn toàn liên tục của A .

(ii) Tương tự, nếu (ii) không đúng, thì tồn tại $h_i \in S_1$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) và $\varepsilon_0 > 0$ sao cho

$$\|A'_+(\infty)h_i - A'_+(\infty)h_j\| > \varepsilon_0 \quad (i \neq j) \tag{1.3.29}$$

Ta phải có $\sigma = \inf_i \|h_i\| > 0$ vì mặt khác, có một dãy con $\{h_{i_k}\} \subset \{h_i\}$ sao cho

$$h_{i_k} \rightarrow \theta \text{ và do đó } \|A'_+(\infty)h_{i_k} - A'_+(\infty)h_{i_s}\| \rightarrow 0 \text{ khi } k, s \rightarrow \infty,$$

mâu thuẫn với (1.3.29).

Bây giờ chọn $\rho > 0$ sao cho

$$\|Ax - A'_+(\infty)x\| < \frac{\varepsilon_0}{3}\|x\|, \quad \forall x \in K, \quad \|x\| \geq \rho\sigma \tag{1.3.30}$$

Tương tự như (i), từ (1.3.29) và (1.3.30) ta suy ra

$$\|A(\rho h_i) - A(\rho h_j)\| \geq \frac{\rho \varepsilon_0}{3}, \quad \forall i \neq j$$

Mâu thuẫn với tính hoàn toàn liên tục của A .

Hệ quả 1.3.1. Cho $A : K \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục và K là nón sinh. Khi đó

(i') Nếu A khả vi tại x_0 theo K , thì $A'_+(x_0) : E \rightarrow E$ hoàn toàn liên tục

(ii') Nếu A khả vi tại vô cực theo K thì $A'_+(\infty) : E \rightarrow E$ hoàn toàn liên tục

Chứng minh hệ quả 1.3.1. Hệ quả này suy trực tiếp từ bổ đề 1.3.1 và bổ đề 1.4.2

Bổ đề 1.3.2. Cho $A : K \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Khi đó

a) Nếu A khả vi tại θ theo K và $A\theta = \theta$ thì $A'_+(\theta) : K \rightarrow K$ hoàn toàn

liên tục.

b) Nếu A khả vi tại vô cực theo K thì $A'_+(\infty) : K \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục.

Chứng minh bổ đề 1.3.2. Theo bổ đề 1.3.1 ta chỉ cần chứng minh rằng $A'_+(\theta)$ và $A'_+(\infty)$ là ánh xạ từ K vào K .

Vì $A\theta = \theta$, ta có với $x > \theta$, $A'_+(\theta)x = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{A(tx)}{t}$ và do đó $A'_+(\theta)x \in K$. Tương tự với

$x > \theta$, $A'_+(\infty)x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A(tx)}{t}$ và do đó $A'_+(\infty)x \in K$.

Bổ đề 1.3.3. Cho $A : K \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục và $A\theta = \theta$. Giả sử rằng A

khả vi tại θ theo K và 1 không là giá trị riêng của $A'_+(\theta)$ tương ứng với vector riêng dương. Khi đó

(i) Nếu $A'_+(\theta)$ không có vector riêng dương tương ứng với một giá trị riêng lớn hơn 1 thì tồn tại $\tau > 0$ sao cho

$$i(A, K_r, K) = 1, \quad \forall 0 < r \leq \tau, \quad (1.3.31)$$

trong đó $K_r = K \cap B_r$ và $B_r = \{x \in E \mid \|x\| < r\}$

(ii) Nếu $A'_+(\theta)$ là một vector riêng dương tương ứng với một giá trị riêng lớn hơn 1, thì tồn tại $\tau > 0$ sao cho

$$i(A, K_r, K) = 0, \quad \forall 0 < r \leq \tau, \quad (1.3.32)$$

Chứng minh bổ đề 1.3.3. Dễ dàng chỉ ra rằng

$$\alpha = \inf_{x \in K, \|x\|=1} \|x - A'_+(\tau)x\| > 0 \quad (1.3.33)$$

Thật vậy, nếu có $x_n \in K$, $\|x_n\| = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) sao cho $\|x_n - A'_+(\theta)x_n\| \rightarrow 0$. Khi đó, theo bổ đề 1.3.2 tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ sao cho $A'_+(\theta)x_{n_k} \rightarrow x^*$,

do đó $x_{n_k} \rightarrow x^*$ và vì vậy $x^* \in K$, $\|x^*\| = 1$ và $x^* - A'_+(\theta)x^* = \theta$, mâu thuẫn với giả thiết.

Theo (1.3.33) ta đã biết

$$\|x - A'_+(\theta)x\| \geq \alpha \|x\|, \quad \forall x \in K \quad (1.3.34)$$

Bây giờ chọn $\tau > 0$ sao cho

$$\|Ax - A'_+(\theta)x\| \leq \frac{\alpha}{2}\|x\|, \quad \forall x \in K, \quad \|x\| \leq \tau \quad (1.3.15)$$

Từ (1.3.34) và (1.3.35) suy ra

$$\begin{aligned} \|x - [tAx + (1-t)A'_+(\theta)x]\| &\geq \|x - A'_+(\theta)x\| - t\|Ax - A'_+(\theta)x\| \\ &\geq \alpha\|x\| - \frac{\alpha}{2}\|x\| = \frac{\alpha r}{2} > 0, \\ \forall (t, x) &\in [0, 1] \times (\partial K_r), \quad 0 < r \leq \tau \end{aligned}$$

Và do đó theo tính bất biến đồng luân của chỉ số điểm bất động,

$$i(A, K_r, K) = i(A'_+(\theta), K_r, K), \quad \forall \quad 0 < r \leq \tau \quad (1.3.36)$$

Trong trường hợp (i), ta biết từ Bổ đề 1.2.1 là

$$i(A'_+(\theta), K_r, K) = 1, \quad \forall r > 0 \quad (1.3.37)$$

Điều đó ngụ ý rằng (1.3.31) được suy ra từ (1.3.36) và (1.3.37).

Trong trường hợp (ii), có $h > \theta$ sao cho $A'_+(\theta)h = \lambda h$, $\lambda > 1$. Bây giờ ta chứng minh

$$x - A'_+(\theta)x = th, \quad \forall x > 0, \quad t \geq 0 \quad (1.3.38)$$

Thật vậy, nếu tồn tại $x_0 > \theta$ và $t_0 \geq 0$ sao cho $x_0 - A'_+(\theta)x_0 = t_0 h$ thì theo giả

thiết $t_0 > 0$. Vì $A'_+(\theta)x_0 \geq \theta$ theo bổ đề 1.3.2 ta có $x_0 \geq t_0 h$.

Đặt $t^* = \sup\{t > 0 \mid x_0 \geq th\}$ thì $0 < t_0 \leq t^* < +\infty$, $x_0 \geq t^* h$ nên

$$x_0 = A'_+(\theta)x_0 + t_0 h \geq A'_+(\theta)(t^* h) + t_0 h = (\lambda t^* + t_0)h$$

Mâu thuẫn với tính xác định của t^* vì $\lambda t^* + t_0 > t^*$

Theo (1.3.38) và hệ quả 1.2.1, ta biết

$$i(A'_+(\theta), K_r, K) = 0, \quad \forall r > 0. \quad (1.3.39)$$

Do đó (1.3.32) suy ra từ (1.3.36) và (1.3.39).

Bằng cách tương tự, chúng ta có thể chứng minh điều sau.

Bổ đề 1.3.4. Cho $A : K \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Giả sử rằng A khả vi tại vô cực

theo K và 1 không là một giá trị riêng của $A'_+(\infty)$ tương ứng với vector riêng dương. Khi đó

(i') Nếu $A'_+(\infty)$ không có vector riêng dương tương ứng với giá trị riêng lớn hơn 1, thì tồn tại $\sigma > 0$ sao cho

$$i(A, K_R, K) = 1, \quad R \geq \sigma \quad (1.3.40)$$

trong đó $K_R = K \cap B_R$, $B_R = \{x \in E \mid \|x\| < R\}$

(ii') Nếu $A'_+(\infty)$ có một vector riêng dương ứng với một giá trị riêng lớn hơn 1, thì tồn tại $\sigma > 0$ sao cho

$$i(A, K_R, K) = 0, \quad R \geq \sigma \quad (1.3.41)$$

Định lý 1.3.12. Cho $A : K \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục và $A\theta = \theta$. Giả sử rằng A khả vi tại θ và tại vô cực theo K và 1 không là một giá trị riêng của $A'_+(\theta)$ hoặc $A'_+(\infty)$ tương ứng với vector riêng dương. Hơn nữa, giả sử rằng một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn:

(H₉) $A'_+(\theta)$ không có vector riêng dương ứng với giá trị riêng lớn hơn 1, trong khi $A'_+(\infty)$ có vector riêng dương với giá trị riêng lớn hơn 1.

(H₁₀) $A'_+(\theta)$ có một vector riêng dương ứng với một giá trị riêng lớn hơn 1, nhưng điều tương tự không đúng cho trường hợp $A'_+(\infty)$.

Khi đó A có ít nhất một điểm bất động dương.

Chứng minh định lý 1.3.14. Trong trường hợp của (H₉), ta biết rằng theo bổ đề 1.3.3 và 1.3.4 sẽ tồn tại $R > r > 0$ sao cho

$$i(A, K_r, K) = 1, \quad i(A, K_R, K) = 0$$

Suy ra rằng

$$i(A, K_R \setminus \overline{K_r}, K) = i(A, K_R, K) - i(A, K_r, K) = -1 \neq 0$$

Và do đó, A có ít nhất một điểm bất động trong $K_R \setminus \overline{K_r}$.

Tương tự, trong trường hợp của (H₁₀), ta có

$$i(A, K_r, K) = 0, \quad i(A, K_R, K) = 1, \quad i(A, K_R \setminus \overline{K_r}, K) = 1 \neq 0$$

Do đó, chúng ta có thể khẳng định rằng A cũng có ít nhất một điểm bất động trong $K_R \setminus \overline{K_r}$. $\square$

Ví dụ 1.3.2. Xét toán tử tích phân Uryson (1.3.56).

Cho $k(t, s, x)$ và $k'_x(t, s, x)$ liên tục và $k(t, s, x)$ không âm với $t \in G, s \in G, x \geq 0$ và $k(t, s, 0) \equiv 0$. Cho (1.3.58) đều được thỏa mãn với $t \in G$ và $s \in G$ khi $x \rightarrow +\infty$. Giả sử rằng 1 không là một giá trị riêng của B hoặc của B_1 tương ứng với một hàm riêng không âm, trong đó

$$Bx(t) = \int_G k'_x(t, s, 0)x(s)ds, \quad B_1x(t) = \int_G Q(t, s)x(s)ds \quad (1.3.70)$$

Hơn nữa, giả sử rằng một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn:

- a) B không có những hàm riêng không âm tương ứng với một giá trị riêng lớn hơn một, trong khi mà B_1 đóng vai trò như một hàm riêng không âm.
- b) B đóng vai trò của hàm riêng không âm tương ứng với một giá trị riêng lớn hơn một, nhưng nó không đúng cho trường hợp của B_1 .

Khi đó toán tử Uryson (1.3.56) có một điểm bất động $x(t)$, không âm, liên tục và không đồng nhất với 0 trên G.

Những khẳng định trên được suy trực tiếp từ định lí 1.3.8 vì theo ví dụ 1.3.3 , $A'_+(\infty) = B$ và $A'_+(\infty) = B_1$

1.4. Những định lí về nhiều điểm bất động.

Trước hết chúng ta sẽ trình bày hai định lí điểm bất động bội sau mà nó được suy ra trực tiếp từ định lí 1.3.1 và 1.3.2.

Định lí 1.4.1. Cho Ω_1, Ω_2 và Ω_3 là ba tập mở bị chặn trong E sao cho

$\theta \in \Omega_1, \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2, \overline{\Omega_2} \subset \Omega_3$. Cho toán tử $A: K \cap (\overline{\Omega_3} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Giả sử rằng

$Ax \not\leq x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1; Ax \not\leq x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2$ và $Ax \not\leq x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_3$. Khi đó, A có ít nhất hai điểm bất động x^* và x^{**} trong $K \cap (\overline{\Omega_3} \setminus \Omega_1)$; hơn nữa $x^* \in \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}$ và $x^{**} \in \overline{\Omega_3} \setminus \overline{\Omega_2}$.

Định lí 1.4.2. Cho Ω_1, Ω_2 và Ω_3 là ba tập mở bị chặn trong E sao cho $\theta \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$, $\overline{\Omega_2} \subset \Omega_3$. Cho toán tử $A : K \cap (\overline{\Omega_3} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Giả sử rằng

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\geq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1 & ; & \quad \|Ax\| \leq \|x\| \text{ và } Ax \neq x, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2; \\ \|Ax\| &\geq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_3. \end{aligned}$$

Khi đó A có ít nhất hai điểm bất động x^* và x^{**} trong $K \cap (\overline{\Omega_3} \setminus \Omega_1)$; hơn nữa $x^* \in \Omega_2 \setminus \Omega_1$ và $x^{**} \in \overline{\Omega_3} \setminus \overline{\Omega_2}$.

Bổ đề 1.4.1. Cho X là một tập co rút của không gian Banach thực E và X_1 là một tập co rút, lồi, bị chặn của X . Cho U là một tập mở khác rỗng của X và $U \subset X_1$. Giả sử rằng $A : X_1 \rightarrow X$ hoàn toàn liên tục, $A(X_1) \subset X_1$ và A không có điểm bất động trên $X_1 \setminus U$. Khi đó

$$i(A, U, X) = 1 \quad (1.4.1)$$

Chứng minh bổ đề 1.4.1. Vì tập co của không gian Hausdorff phải là tập đóng, X_1 đóng trong X và $\overline{U} \subset X_1$. Do đó, theo tính không đổi của chỉ số điểm bất động, ta có

$$i(A, U, X) = i(A, U, X_1) \quad (1.4.2)$$

Rõ ràng, U là một tập mở của X_1 và do đó theo tính chất cắt của chỉ số điểm bất động

$$i(A, X_1, X_1) = i(A, U, X_1) \quad (1.4.3)$$

Chọn $x_0 \in U \subset X_1$ và đặt $H(t, x) = tx_0 + (1-t)Ax$. Rõ ràng X_1 lồi, ta biết rằng $H : [0, 1] \times X_1 \rightarrow X_1$ hoàn toàn liên tục. Về phần X_1 như là một tập mở, bị chặn của chính nó, đường biên của X_1 trong X_1 , tức là ∂X_1 , là rỗng, nên theo tính bất biến đồng luân và tính chuẩn tắc của chỉ số điểm bất động, ta được

$$i(A, X_1, X_1) = i(x_0, X_1, X_1) = 1 \quad (1.4.4)$$

cuối cùng, (1.4.1) suy ra từ (1.4.2), (1.4.3) và (1.4.4).

Hệ quả 1.4.1. Cho X là một tập lồi, đóng, khác rỗng, bị chặn của không gian Banach thực E , giả sử $A : X \rightarrow X$ hoàn toàn liên tục. Khi đó $i(A, X, X) = 1$.

Chứng minh hệ quả 1.4.1. bằng cách đặt $U = X_1 = X$ trong bổ đề 1.4.1 ta có ngay hệ quả này.

Định lí 1.4.3. Cho K là một khối nón chuẩn trong không gian Banach thực E và $y_1, z_1, y_2, z_2 \in E$ với $y_1 < z_1 < y_2 < z_2$. Giả sử rằng $A : [y_1, z_2] \rightarrow E$ hoàn toàn liên tục, tăng mạnh và

$$y_1 \leq Ay_1, \quad Az_1 < z_1, \quad y_2 < Ay_2, \quad Az_2 \leq z_2 \quad (1.4.5)$$

Khi đó A có ít nhất ba điểm bất động x_1, x_2, x_3 trong $[y_1, z_2]$ sao cho

$$y_1 \leq x_1 \ll z_1, \quad y_2 \ll x_2 \leq z_2 \text{ và } y_2 \not\leq x_3 \not\leq z_1.$$

Chứng minh định lí 1.4.3. Cho $X = [y_1, z_2]$, $X_1 = [y_1, z_1]$ và $X_2 = [y_2, z_2]$.

Khi đó, $X_1 \subset X$ và $X_2 \subset X$. Vì X, X_1 và X_2 là tất cả những tập khác rỗng, lồi, đóng, bị chặn của của E , X là một co rút của E và X_1, X_2 là những co rút của X , suy ra A có một điểm bất động cực đại x_1 trong $[y_1, z_1]$. Từ (1.4.5) ta biết $y_1 \leq x_1 < z_1$ nên $y_1 \leq x_1 = Ax_1 \ll Az_1 < z_1$. Do đó x_1 là một điểm trong của X_1 trong X . Cho U_1 là phần trong của X_1 trong X , khi đó $U_1 \neq \emptyset$ và A không có

điểm bất động trong $X_1 \setminus U_1$. Do đó, theo bổ đề 1.4.1, ta có

$$i(A, U_1, X) = 1. \quad (1.4.6)$$

Bằng cách tương tự, ta có thể chứng minh rằng A có một điểm bất động cực tiểu x_2 trong $[y_2, z_2]$ với $y_2 \ll x_2 \leq z_2$ do đó x_2 là một điểm trong của X_2 trong X . Tương tự, cho U_2 miền trong của X_2 trong X . Khi đó $U_2 \neq \emptyset$, A không có điểm bất động trong $X_2 \setminus U_2$ và

$$i(A, U_2, X) = 1. \quad (1.4.7)$$

Theo tính cộng tính của chỉ số điểm bất động, ta có

$$i(A, X, X) = i(A, U_1, X) + i(A, U_2, X) + i(A, X \setminus \overline{(U_1 \cup U_2)}, X). \quad (1.4.8)$$

Và theo hệ quả 1.4.1 ta có

$$i(A, X, X) = 1 \quad (1.4.9)$$

Từ (1.4.6), (1.4.7), (1.4.8) và (1.4.9) suy ra

$$i(A, X \setminus \overline{(U_1 \cup U_2)}, X) = -1$$

Do đó, A có một điểm bất động x_3 trong $X \setminus \overline{(U_1 \cup U_2)}$. Rõ ràng rằng A không có điểm bất động trong $X_1 \setminus U_1$ và trong $X_2 \setminus U_2$, ta biết $x_3 \in X \setminus (X_1 \cup X_2)$. $\square$

Hệ quả 1.4.2. Với điều kiện của định lý 1.4.3, A có ít nhất ba điểm bất động

$$x_1^*, x_2^*, \text{ và } x_3^* \text{ trong } [y_1, z_2] \text{ sao cho } x_1^* \ll x_2^* \ll x_3^*.$$

Chứng minh hệ quả 1.4.2. A có trong $[y_1, z_2]$ một điểm bất động cực tiểu x_1^* và một điểm bất động cực đại x_3^* . Theo định lý 1.4.3, $x_1^* \neq x_3^*$ và tồn tại điểm bất động x_2^* khác của A sao cho $x_1^* < x_2^* < x_3^*$. Như vậy, rõ ràng rằng A là tăng mạnh, ta có $Ax_1^* \ll Ax_2^* \ll Ax_3^*$ nghĩa là $x_1^* \ll x_2^* \ll x_3^*$. $\square$

Trong trường hợp tổng quát, ta có thể chứng minh kết luận sau:

Cho K là một khối nón chuẩn trong không gian Banach thực E và $y_i, z_i \in E$

($i = 1, 2, \dots, m$) với

$$y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < \dots < y_m < z_m$$

Giả sử $A : [y_1, z_m] \rightarrow E$ hoàn toàn liên tục, tăng mạnh và

$$y_1 \leq Ay_1, Az_1 < z_1, y_2 < Ay_2, Az_2 < z_2, \dots, y_m < Ay_m, Az_m \leq z_m. \quad (1.4.10)$$

Khi đó, A có ít nhất $(2m - 1)$ điểm bất động $x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}$ trong $[y_1, z_m]$ sao cho

$$y_1 \leq x_1 \ll z_1, y_2 \ll x_2 \ll z_2, \dots, y_{m-1} \ll x_{m-1} \ll z_{m-1},$$

$$y_m \ll x_m \leq z_m, y_{i+1} \not\leq x_{m+i} \not\leq z_i \quad (i = 1, 2, \dots, m - 1)$$

Ta lưu ý rằng khi $m > 2$, điều kiện (1.4.10) quá nghiêm ngặt rất khó kiểm tra.

Tiếp theo, cho K là một nón trong không gian Banach thực E và

$$K_r = \{x \in K \mid \|x\| < r\} \quad (r > 0). \text{ Khi đó } \partial K_r = \{x \in K \mid \|x\| = r\} \text{ và}$$

$$\overline{K_r} = \{x \in K \mid \|x\| \leq r\}. \text{ Chúng ta sẽ xét hàm } \alpha \text{ không âm liên tục và lõm trên}$$

K , nghĩa là $\alpha : K \rightarrow [0; +\infty)$ liên tục và thỏa mãn

$$\alpha(tx + (1-t)y) \geq t\alpha(x) + (1-t)\alpha(y), \quad \forall x, y \in K, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1.4.11)$$

Chúng ta biểu thị tập hợp $\{x \in K \mid a \leq \alpha(x), \|x\| \leq b\}$ ($b > a > 0$) bằng $K(\alpha, a, b)$

Rõ ràng, $K(\alpha, a, b)$ là một tập lồi, đóng, bị chặn.

Định lí 1.4.4. Cho $A : \overline{K_c} \rightarrow \overline{K_c}$ hoàn toàn liên tục và α là một hàm lõm, không âm, liên tục trên K với $\alpha(x) \leq \|x\|$ với bất kì $x \in \overline{K_c}$. Giả sử tồn tại

$0 < d < a < b \leq c$ sao cho

(i) $\{x \in K(\alpha, a, b) \mid \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ và $\alpha(Ax) > a$ với $x \in K(\alpha, a, b)$;

(ii) $\|Ax\| < d$ với $x \in \overline{K_d}$;

(iii) $\alpha(Ax) > a$ với $x \in K(\alpha, a, c)$ với $\|Ax\| > b$.

Khi đó, A có ít nhất ba điểm bất động trong $\overline{K_c}$.

Chứng minh định lí 1.4.4 .

Đặt $U_1 = \{x \in \overline{K_c} \mid \|x\| < d\}$ (1.4.13)

Ngoài ra, theo hệ quả 1.4.1, ta có

$$i(A, \overline{K_c}, \overline{K_c}) = 1 \quad (1.4.14)$$

Từ (1.4.12), (1.4.13) và (1.4.14) suy ra

$$\begin{aligned} i(A, \overline{K_c} \setminus (U_1 \cup U_2), \overline{K_c}) &= i(A, \overline{K_c}, \overline{K_c}) - i(A, U_1, \overline{K_c}) - i(A, U_2, \overline{K_c}) \\ &= -1 \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Cuối cùng, theo (1.4.12), (1.4.13) và (1.4.15) ta biết rằng ở đây sẽ tồn tại

$x^{(1)} \in U_1, x^{(2)} \in U_2$ và $x^{(3)} \in \overline{K_c} \setminus (U_1 \cup U_2)$ sao cho $Ax^{(i)} = x^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$)

Định lí 1.4.5. Cho $A : \overline{K_c} \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục và α là một hàm lõm, không âm, liên tục trên K với $\alpha(x) \leq \|x\|$ với mọi $x \in \overline{K_c}$. Giả sử rằng tồn tại $0 < d < a < c$ sao cho

(a) $\{x \in K(\alpha, a, c) \mid \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ và $\alpha(Ax) > a$ với $x \in K(\alpha, a, c)$;

(b) $\|Ax\| < d$ với $x \in \overline{K_d}$;

$$(c) \quad \alpha(Ax) > \frac{a}{c} \|Ax\| \text{ với mọi } x \in \overline{K_c} \text{ với } \|Ax\| > c$$

Khi đó A có ít nhất hai điểm bất động trong $\overline{K_c}$.

Chứng minh định lí 1.4.5. Đặt $U_1 = \{x \in \overline{K_c} \mid \|x\| < d\}$ khi đó (1.4.12) đúng và

do đó A có một điểm bất động x_1 trong U_1 . Bây giờ, ta định nghĩa

$$Bx = \begin{cases} Ax, & \text{khi } x \in \overline{K_c} \text{ và } \|Ax\| \leq c; \\ \frac{cAx}{\|A\|}, & \text{khi } x \in \overline{K_c} \text{ và } \|Ax\| > c. \end{cases}$$

Rõ ràng $B : \overline{K_c} \rightarrow \overline{K_c}$ hoàn toàn liên tục và thỏa mãn tất cả các điều kiện của định lí 1.4.4 với

$b = c$. Do đó theo định lí 1.4.4, B có một điểm bất động x_3 trong $\overline{K_c} \setminus (\overline{U_1 \cup U_2})$, trong đó

$$U_2 = \{x \in K(\alpha, a, c) \mid \alpha(x) > a\}.$$

Rõ ràng, $\overline{U_1 \cup U_2} = \overline{U_1} \cup \overline{U_2} = \overline{K_d} \cup K(\alpha, a, c)$ và do đó $\alpha(x_3) < a$.

Nếu $\|Ax_3\| > c$ thì theo điều kiện (c)

$$\begin{aligned} a > \alpha(x_3) &= \alpha(Bx_3) = \alpha\left(\frac{cAx}{\|A\|}\right) = \alpha\left(\frac{c}{\|Ax_3\|} Ax_3 + \left(1 - \frac{c}{\|Ax_3\|}\right) \theta\right) \\ &\geq \frac{c}{\|Ax_3\|} \alpha(Ax_3) + \left(1 - \frac{c}{\|Ax_3\|}\right) \alpha(\theta) \geq \frac{c}{\|Ax_3\|} \alpha(Ax_3) > \frac{c}{\|Ax_3\|} \frac{a}{c} \|Ax_3\| = a \end{aligned}$$

Ta gặp mâu thuẫn. Do đó $\|Ax_3\| \leq c$ nên $Ax_3 = Bx_3 = x_3$. $\square$

Chương 2:

CÁC ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ KRASNOSEL'SKII VỀ ÁNH XẠ NÉN VÀ GIẢN MẶT NÓN

2.1. Ứng dụng vào phương trình tích phân.

Ví dụ 2.1.1. Một số bài toán về sự lan truyền bệnh dịch dẫn đến việc tìm nghiệm dương, có chu kì ω của phương trình

$$x(t) = \int_{t-\tau}^t f[s, x(s)] ds \quad (*)$$

với các giả thiết:

1) $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ liên tục, có chu kì ω theo biến thứ nhất, $f(t, 0) \equiv 0$;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(t, x)}{x} = 0 \text{ đều đối với } t \in [0, \omega]$$

2) Tồn tại hàm $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ có chu kì ω , số $\rho > 0$ sao cho

$$\frac{f(x, t)}{x} \geq \varphi(t), \quad \forall x \in (0, \rho]; \quad \int_0^\omega \varphi(t) dt > 0$$

Mệnh đề. Tồn tại số τ_0 sao cho $\forall \tau > \tau_0$ phương trình (*) có nghiệm dương, chu kì ω .

Chứng minh. Ta áp dụng định lý sau để chứng minh bài toán trên

* **Định lý.** Ta kí hiệu $B_r = \{x \in X : \|x\| < r\}$, $S_r = \{x \in X : \|x\| = r\}$, $r > 0$,

$$K_r = K \cap \overline{B_r}$$

Giả sử $A : K_r \rightarrow K$ compact và tồn tại $r_1, r_2 \in (0, r), r_1 \neq r_2$ sao cho

$$a) Ax \neq \lambda x \quad \forall x \in K \cap S_{r_1}, \quad \forall \lambda \geq 1$$

$$b) \text{ Tồn tại } x_0 \in K \setminus \{\theta\} \text{ thỏa } x - Ax \neq \lambda x_0 \quad \forall x \in K \cap S_{r_2}, \forall \lambda \geq 0$$

Khi đó, A có điểm bất động dương x thỏa $\min\{r_1, r_2\} \leq \|x\| \leq \max\{r_1, r_2\}$.

Bây giờ ta chứng minh bài toán

Kí hiệu: X là không gian các hàm liên tục, có chu kì ω , $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq \omega} |x(t)|$.

K là nón các hàm $x(t) \geq 0$.

$$Ax(t) = \int_{t-\tau}^t f[s, x(s)]ds.$$

Đặt $\alpha(\tau) = \inf_{t \in [0; \omega]} \int_{t-\tau}^t \varphi(s)ds$, ta có

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \alpha(\tau) = \infty \quad (\text{do } \alpha(\tau) \geq [\frac{\tau}{\omega}] \int_0^{\omega} \varphi(s)ds)$$

Gọi τ_0 là số mà $\alpha(\tau) > 1$, $\forall \tau > \tau_0$.

* Chọn $u(t) \equiv 1$, coi $x \neq Ax$, $\forall x \in S_{\rho}^+$, ta có:

$$(x = Ax + \lambda u, \quad x \in S_{\rho}^+, \quad \lambda > 0) \Rightarrow x(t) \geq \lambda$$

$$\Rightarrow x(t) \geq \int_{t-\tau}^t \frac{f[s, x(s)]}{x(s)} x(s)ds \geq \int_{t-\tau}^t \varphi(s)ds. \min_{0 \leq t \leq \omega} x(t) \geq \alpha(t) \cdot \min_{0 \leq t \leq \omega} x(t)$$

Vô lí vì $\alpha(\tau) > 1$

* $\forall \tau > \tau_0$, đặt $C(\tau)$ là số thỏa $\frac{f(t, x)}{x} \leq \frac{1}{\tau} \quad \forall x \geq C(\tau), \forall t \in [0; \omega]$

$$M(\tau) = \max\{f(t, x) : t \in [0, \omega], x \in [0; C(\tau)]\}$$

Chọn $r > \tau M(\tau)$, coi $x \neq Ax \quad \forall x \in S_r^+$, ta có $Ax = \lambda x, x \in S_r^+$

$$\Rightarrow \lambda x(t) \leq \int_{t-\tau}^t \max\{\frac{x(s)}{\tau}, M(\tau)\}ds \leq \max\{\|x\|, \tau M(\tau)\} = \|x\|$$

$$\Rightarrow \lambda < 1$$

Ví dụ 2.1.2. Phương trình tích phân dạng đa thức

Xét phương trình tích phân phi tuyến

$$u(x) = \int_G k(x, y)f(y, u(y))dy \quad (2.1.1)$$

trong đó G là một miền mở, bị chặn trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ và

$$f(x, u) = \sum_{i=1}^m a_i(x)u^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.1.2)$$

Rõ ràng, $u(x) \equiv 0$ là nghiệm tầm thường của phương trình (2.1.1). Để cho thuận tiện chúng ta trình bày rõ ràng chính xác một vài điều kiện cho hạt nhân $k(x, y)$:

(H_1) $k(x, y)$ không âm và liên tục trên $G \times G$ và tồn tại một tập đóng

$G_0 \subset G$ với $mes G_0 > 0$ và $0 < \varepsilon_0 < 1$ sao cho

$$k(x, y) > 0, \forall (x, y) \in G_0 \times G_0,$$

$$k(x, y) \geq \varepsilon_0 k(z, y), \forall x \in G_0, y \in G, z \in G$$

(H_2) $k(x, y)$ không âm và liên tục trên $G \times G$ và tồn tại $x_0 \in G$ sao cho $k(x_0, x_0) > 0$

(H_3) Với bất kì quả cầu đóng $T \subset \overset{0}{G}$ ($\overset{0}{G}$ kí hiệu phần trong của G),

tồn tại $\varepsilon^* = \varepsilon^*(T) > 0$ sao cho

$$\int_T k(x, y) dy \geq \varepsilon^* \int_G k(x, y) dy, \forall x \in G$$

Trong phần tiếp theo, chuẩn trong $C(G)$ được kí hiệu là $\|\bullet\|$ và chuẩn trong $L(G)$ được kí hiệu là $\|\bullet\|_L$.

Bổ đề 2.1.1. Cho $u_n(x) \in C(G)$, $u(x) \in C(G)$, $u_n(x) \geq 0$, $u(x) \geq 0$ và $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Khi đó, với $\alpha > 0$ bất kì, ta có

$$\|u_n^\alpha - u^\alpha\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.1.3)$$

Chứng minh bổ đề 2.1.1. Theo bất đẳng thức đã biết

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leq \alpha(x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1}) |x - y|, \quad x > 0, y > 0, \alpha > 0, \quad (2.1.4)$$

Ta thấy rằng (2.1.3) đúng với $\alpha \geq 1$. Bây giờ, giả sử rằng $0 < \alpha < 1$. Với $\varepsilon > 0$ bất kì, cho

$$\varepsilon^* = \left(\frac{\varepsilon}{2\alpha + 2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \text{ và}$$

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & \text{khi } u(x) \geq \varepsilon^* \\ \varepsilon^*, & \text{khi } u(x) < \varepsilon^* \end{cases} \quad \text{tại } x$$

$$\omega(x) = \begin{cases} u(x), & \text{khi } u(x) < \varepsilon^* \\ \varepsilon^*, & \text{khi } u(x) \geq \varepsilon^* \end{cases} \quad \text{tại } x$$

$$v_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & \text{khi } u_n(x) \geq \varepsilon^* \\ \varepsilon^*, & \text{khi } u_n(x) < \varepsilon^* \end{cases} \quad \text{tại } x$$

$$\omega_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & \text{ khi } u_n(x) < \varepsilon^* \\ \varepsilon^*, & \text{ khi } u_n(x) \geq \varepsilon^* \end{cases} \text{ tại } x$$

Rõ ràng,

$$v(x) + \omega(x) = u(x) + \varepsilon^*; \quad v_n(x) + \omega_n(x) = u_n(x) + \varepsilon^*$$

$$[v(x)]^\alpha + [\omega(x)]^\alpha = [u(x)]^\alpha + (\varepsilon^*)^\alpha;$$

$$[v_n(x)]^\alpha + [\omega_n(x)]^\alpha = [u_n(x)]^\alpha + (\varepsilon^*)^\alpha$$

$$\text{Và } \|v_n - v\| \rightarrow 0, \quad \|\omega_n - \omega\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.1.5)$$

Do đó theo (2.1.5) ta có

$$\begin{aligned} |[u_n(x)]^\alpha - [u(x)]^\alpha| &\leq |[v_n(x)]^\alpha - [v(x)]^\alpha| + |[\omega_n(x)]^\alpha - [\omega(x)]^\alpha| \\ &\leq 2\alpha(\varepsilon^*)^{\alpha-1} |v_n(x) - v(x)| + 2(\varepsilon^*)^\alpha \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Từ (2.1.5) ta biết rằng tồn tại $N = N(\varepsilon)$ sao cho

$$\|v_n - v\| < \varepsilon^*, \quad \forall n > N \quad (2.1.7)$$

Từ (2.1.6) và (2.1.7) suy ra

$$\|u_n^\alpha - u^\alpha\| < 2\alpha(\varepsilon^*) + 2(\varepsilon^*)^\alpha = \varepsilon, \quad \forall n > N$$

và do đó (2.1.3) đúng.

Định lý 2.1.1. *Giả sử rằng*

(i) *Hạt nhân $k(x, y)$ thỏa mãn (H_1)*

(ii) *$a_i(x) \geq 0$, $a_i(x) \in L$ ($n = 1, 2, \dots, m$) và trong số các a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) tồn tại $a_{i_0} < 1$*

và $a_{i_1} > 1$ sao cho $\inf_{x \in G_0} a_{i_0}(x) > 0$ và $\inf_{x \in G_0} a_{i_1}(x) > 0$

$$(iii) \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L < M^{-1}, \text{ trong đó } M = \max_{(x,y) \in G \times G} k(x, y)$$

thì phương trình (2.1.1) có ít nhất hai nghiệm không tầm thường, không âm, liên tục.

Chứng minh định lý 2.1.1. Cho $K = \{u \in C(G) \mid u(x) \geq 0, \min_{x \in G_0} u(x) \geq \varepsilon_0 \|u\|\}$

Để dàng kiểm tra rằng K là một nón của không gian $E = C(G)$. Ta định nghĩa

$$Au(x) = \int_G k(x, y) f(y, u(y)) dy.$$

với $u \in K$, theo (H_1) ta có

$$Au(x) \geq \varepsilon_0 \int_G k(z, y) f(y, u(y)) dy = \varepsilon_0 Au(z), \quad \forall x \in G, z \in G$$

nên $\min_{x \in G_0} Au(x) \geq \varepsilon_0 \|Au\|$, nghĩa là, $Au \in K$

Do đó $A(K) \subset K$ (2.1.8)

Do bổ đề 2.1.1, dễ dàng chỉ ra rằng $A : K \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Với $u \in K$ và $x \in G_0$, ta có

$$\begin{aligned} Au(x) &\geq \int_{G_0} k(x, y) a_{i_0}(y) [u(y)]^{\alpha_{i_0}} dy \\ &\geq \tau \tau_0 (mes G) \varepsilon_0^{\alpha_{i_0}} \|u\|^{\alpha_{i_0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Au(x) &\geq \int_{G_0} k(x, y) a_{i_1}(y) [u(y)]^{\alpha_{i_1}} dy \\ &\geq \tau \tau_1 (mes G) \varepsilon_0^{\alpha_{i_1}} \|u\|^{\alpha_{i_1}} \end{aligned}$$

trong đó $\tau = \min_{(x, y) \in G_0 \times G_0} k(x, y) > 0$, $\tau_0 = \inf_{x \in G_0} a_{i_0}(x) > 0$

và $\tau_1 = \inf_{x \in G_0} a_{i_1}(x) > 0$

Do đó

$$\|Au\| \geq \tau \tau_0 (mes G) \varepsilon_0^{\alpha_{i_0}} \|u\|^{\alpha_{i_0}}, \quad \forall u \in K, \quad (2.1.9)$$

Và

$$\|Au\| \geq \tau \tau_1 (mes G) \varepsilon_0^{\alpha_{i_1}} \|u\|^{\alpha_{i_1}}, \quad \forall u \in K \quad (2.1.10)$$

Từ (2.1.9) và (2.1.10) suy ra tồn tại $R > 1 > r > 0$ sao cho

$$\|Au\| > \|u\|, \quad \forall u \in K, \quad \|u\| = r \quad (2.1.11)$$

Và

$$\|Au\| > \|u\|, \quad \forall u \in K, \quad \|u\| = R \quad (2.1.12)$$

Mặt khác, theo điều kiện (iii), ta biết

$$\|Au\| \leq M \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L \|u\|^{\alpha_i} = M \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L < 1 = \|u\|, \quad \forall u \in K, \quad \|u\| = 1 \quad (2.1.13)$$

Từ (2.1.8), (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13) và áp dụng định lí 1.3.4, ta khẳng định rằng A có hai điểm bất động u^* và u^{**} trong K sao cho

$$r < \|u^*\| < 1 < \|u^{**}\| < R$$

Rõ ràng, $u^*(x)$ và $u^{**}(x)$ là hai nghiệm không tầm thường, không âm, liên tục của phương trình (2.1.1). $\square$

Định lí 2.1.2. *Giả sử rằng*

(i) *Hạt nhân $k(x, y)$ thỏa mãn (H_1) và*

(ii) *$a_i(x) \geq 0$, $a_i(x) \in L$, $a_i > 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$) và trong số các $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) tồn*

tại $a_{i_0}(x)$ sao cho $\inf_{x \in G_0} a_{i_0}(x) > 0$ thì phương trình (2.1.1) có

ít nhất một nghiệm không tầm thường, không âm, liên tục.

Chứng minh định lí 2.1.2. Như chứng minh của định lí 2.1.1 ta thấy rằng $A : K \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục và (2.1.10) đúng. Do đó tồn tại $R > 0$ sao cho (2.1.12) đúng.

Ngoài ra vì $\alpha_i > 1$ ($i = 1, 2, \dots$) tồn tại $0 < r < R$ sao cho

$$\|Au\| \leq M \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L \cdot \|u\|^{\alpha_i} < \|u\|, \quad u \in K, \quad \|u\| = r \quad (2.1.14)$$

Từ (2.1.12), (2.1.14) và định lí 1.3.4 suy ra A có ít nhất một điểm bất động $\bar{u} \in K$ thỏa mãn

$$r < \|\bar{u}\| < R. \quad \square$$

Ví dụ 2.1.3. Chứng minh sự tồn tại của nghiệm bội dương của hệ phương trình tích phân kiểu Hammerstein cho bởi

$$\begin{cases} \varphi(x) = \int_G k_1(x, y) f_1(y, \varphi(y), \psi(y)) dy \\ \psi(x) = \int_G k_2(x, y) f_2(y, \varphi(y), \psi(y)) dy \end{cases} \quad (2.1.15)$$

trong đó G là một miền đóng, bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, $k_i(x, y) : G \times G \rightarrow \mathbb{R}^+$ là một hàm không âm, liên tục và $f_i(x, u, v) : G \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ là một hàm liên tục

$(i = 1, 2)$. Nếu ta đặt

$$A_i(\varphi, \psi)(x) = \int_G k_i(x, y) f_i(y, \varphi(y), \psi(y)) dy, \quad i = 1, 2,$$

Và $A(\varphi, \psi) = (A_1(\varphi, \psi), A_2(\varphi, \psi))$ thì (2.1.15) tương đương với điểm bất động của toán tử A

Cho toán tử K_i được xác định bởi

$$(K_i \varphi)(x) = \int_G k_i(x, y) \varphi(y) dy \quad (x \in G), \quad i = 1, 2$$

với bán kính phổ $r(K_i) > 0$ ($i = 1, 2$). $f_i(x, u, v) : G \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm k_i là hàm liên tục không âm suy ra rằng toán tử K_i tuyến tính, hoàn toàn liên tục ($i=1,2$). Hiển nhiên, toán tử A_i cũng hoàn toàn liên tục ($i=1,2$). Khi đó, theo định lý Krein-Rutman tồn tại hàm liên tục $g_i(x) \geq 0$, $g_i(x) \not\equiv 0$ sao cho

$$\int_G k_i(y, x) g_i(y) dy = r(K_i) g_i(x), \quad \forall x \in G, \quad i = 1, 2 \quad (2.1.16)$$

Ta đặt những sự giả định sau:

(C₁) tồn tại hàm liên tục không âm $a_i(x)$ ($i = 1, 2$) sao cho

$$k_i(x, y) \geq a_i(x) k_i(\tau, y), \quad \forall x, y, \tau \in G \quad (2.1.17)$$

$$\delta_i = \int_G a_i(x) g_i(x) dx > 0 \quad (2.1.18)$$

trong đó $g_i(x)$ được xác định bởi (2.1.16)

(C₂) Nếu một trong hai điều kiện

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f_1(x, u, v)}{u} > r^{-1}(K_1) \quad \text{đều với } x \in G, v \in \mathbb{R}^+ \quad (2.1.19)$$

và

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f_2(x, u, v)}{u} > r^{-1}(K_2) \quad (2.1.20)$$

đều đối với $x \in G$, $u \in \mathbb{R}^+$ được thỏa mãn.

$$(C_3) \text{ Cho } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x, u, v)}{u} > r^{-1}(K_1) \quad \text{đều với } x \in G, v \in \mathbb{R}^+ \quad (2.1.21)$$

và

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x, u, v)}{u} > r^{-1}(K_2) \quad (2.1.22)$$

đều với $x \in G$, $u \in \mathbb{R}^+$.

(C₄) Tồn tại $r_1 > 0$ với $0 < u + v < r_1$ sao cho

$$f_i(x, u, v) \leq \lambda r_1 \quad (\forall x \in G) \quad (2.1.23)$$

trong đó $0 < \lambda \leq (\|h_1\| + \|h_2\|)^{-1}$, $h_i(x) = \int_G k_i(x, y) dy$, $\|h_i\| = \max_{x \in G} |h_i(x)|$, $i = 1, 2$

Định lí 2.1.3. *Giả sử rằng những điều kiện từ (C₁) đến (C₄) đúng. Khi đó bài toán (2.1.15) có ít nhất hai nghiệm dương, liên tục (φ_1, ψ_1) và (φ_2, ψ_2) thỏa mãn*

$$0 < \|\varphi_1\| + \|\psi_1\| < r_1 < \|\varphi_2\| + \|\psi_2\|$$

Chứng minh định lí 2.1.3. Đặt $C(G) = \{\varphi \mid \varphi(x) \text{ liên tục trên } G\}$, $X = C(G) \times C(G)$. Chuẩn trong X được xác định khi $\|\varphi, \psi\|_X = \|\varphi\| + \|\psi\|$ và rõ ràng X là một không gian Banach. Đặt

$$K_i = \{\varphi \in C(G) \mid \varphi(x) \geq 0, \int_G g_i(x) \varphi(x) dx \geq \delta_i \|\varphi\|\}$$

trong đó δ_i được xác định bởi (2.1.18) (i=1,2). Dễ dàng thấy rằng $K = K_1 \times K_2$ là một nón

trong X. Đặt $T(\varphi, \psi) = (r^{-1}(K_1)K_1\varphi, r^{-1}(K_2)K_2\psi)$

Trước hết ta thấy rằng toán tử A là ánh xạ từ K vào K. Thật vậy, với bất kì

$(\varphi, \psi) \in K$ theo (2.1.17) ta được

$$\begin{aligned} \int_G g_1(x) A_1(\varphi, \psi)(x) dx &= \int_G g_1(x) dx \int_G k_1(x, y) f_1(y, \varphi(y), \psi(y)) dy \\ &\geq \int_G g_1(x) dx \int_G a_1(x) k_1(\tau, y) f_1(y, \varphi(y), \psi(y)) dy \\ &\geq \delta_1 A_1(\varphi, \psi)(\tau), \quad \forall \tau \in G \end{aligned}$$

Suy ra $A_1(\varphi, \psi) \in K_1$. Tương tự, $A_2(\varphi, \psi) \in K_2$ và do đó $A(\varphi, \psi) \in K$, vậy

$$A(K) \subset K. \text{ Tương tự, } T(K) \subset K. \text{ Ta lấy } B(\varphi, \psi) = \int_G g_1(x) \varphi(x) dx$$

thì B là ánh xạ từ K vào nón $K_1 = [0, +\infty)$ khác trong không gian Banach thực $E_1 = \mathbb{R}$ và hiển nhiên B là một toán tử bảo toàn thứ tự và thuần nhất.

Đặt $\Omega_r = \{(\varphi, \psi) \in X \mid \|\varphi\| + \|\psi\| < r\}$ thì $\theta \in \Omega_r$.

Điều kiện (2.1.19) suy ra rằng ta có thể tìm một số r_0 với $0 < r_0 < r_1$ sao cho

$$f_1(x, u, v) \geq r^{-1}(K_1)u, \quad \forall 0 < u \leq r_0 \quad (2.1.24)$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng (2.1.19) đúng trong (C_2) và A không có điểm bất động trên $\partial\Omega_{r_0}$. Theo (2.1.16) và (2.1.24) với mọi $(\varphi, \psi) \in \partial\Omega_{r_0} \cap K$, ta được

$$\begin{aligned} BA(\varphi, \psi) - B(\varphi, \psi) &= \int g_1(x)A_1(\varphi(x), \psi(x))dx - B(\varphi, \psi) \\ &= \int_G g_1(x)dx \int_G k_1(x, y)f_1(y, \varphi(y), \psi(y))dy - \int_G g_1(x)\varphi(x)dx \\ &= r_1(K_1) \int_G g_1(y)f_1(y, \varphi(y), \psi(y))dy - \int_G g_1(x)\varphi(x)dx \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Rõ ràng rằng $BA(\varphi, \psi) - B(\varphi, \psi) \neq 0$, vì vậy $BA(\varphi, \psi) - B(\varphi, \psi) > 0$. Do đó, với mọi $(\varphi, \psi) \in \partial\Omega_{r_0} \cap K$ sao cho $BA(\varphi, \psi) \not\leq B(\varphi, \psi)$

Từ định lí 1.3.8 suy ra chỉ số điểm bất động

$$i(A, \Omega_{r_0} \cap K, K) = 0 \quad (2.1.25)$$

Từ (3.7) trong (C_3) , khi đó tồn tại các số dương ε và b_1 sao cho

$$f_1(x, u, v) \geq (r^{-1}(K_1) + \varepsilon)u - b_1, \quad \forall x \in G, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0 \quad (2.1.26)$$

$$\text{Ta đặt } R > \max \left\{ r_1, \frac{2b_1 \int_G g_1(y)dy}{\varepsilon r(K_1)\delta_1} \right\}$$

Và đặt $\Omega_R = \{(\varphi, \psi) \in X \mid \|\varphi\| + \|\psi\| < R\}$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng A không có điểm bất động trên

$\partial\Omega_R$. Với bất kì $(\varphi, \psi) \in \partial\Omega_R \cap K$, ta có $\|\varphi\| + \|\psi\| = R$. Giả sử $\|\varphi\| \geq \frac{R}{2}$, bởi vì chúng minh

sẽ tương tự khi $\|\psi\| \geq \frac{R}{2}$. Theo (2.1.26) và (2.1.16) ta được

$$\begin{aligned}
& BA(\varphi, \psi) - B(\varphi, \psi) \\
&= \int g_1(x) A_1(\varphi(x), \psi(x)) dx - B(\varphi, \psi) \\
&= \int_G g_1(x) dx \int_G k_1(x, y) f_1(y, \varphi(y), \psi(y)) dy - \int_G g_1(x) \varphi(x) dx \\
&= r(K_1) \int_G g_1(y) f_1(y, \varphi(y), \psi(y)) dy - \int_G g_1(x) \varphi(x) dx \\
&\geq r(K_1)(r^{-1}(K_1) + \varepsilon) \int_G g_1(y) \varphi(y) dy - b_1 \int_G g_1(y) dy - \int_G g_1(x) \varphi(x) dx \\
&= \varepsilon r(K_1) \int_G g_1(y) \varphi(y) dy - b_1 \int_G g_1(y) dy \\
&\geq \varepsilon r(K_1) \delta_1 \|\varphi\| - b_1 \int_G g_1(y) dy > 0
\end{aligned}$$

Do đó, với bất kì $(\varphi, \psi) \in \partial\Omega_R \cap K$ sao cho

$$BA(\varphi, \psi) \not\leq B(\varphi, \psi)$$

Từ định lí 1.3.8 suy ra rằng chỉ số điểm bất động

$$i(A, \Omega_R \cap K, K) = 0 \quad (2.1.27)$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng A không có điểm bất động trên $\partial\Omega_{r_1}$. Với bất kì

$$(\varphi, \psi) \in \partial\Omega_{r_1} \cap K, \text{ khi đó } \|\varphi\| + \|\psi\| = r_1$$

Theo (2.1.23), ta được $A_i(\varphi, \psi)(x) \leq \lambda r_1 \int_G k_i(x, y) dy = \lambda r_1 h_i(x), \quad (i = 1, 2)$

Khi đó $\|A_i(\varphi, \psi)\| \leq \lambda r_1 \|h_i\|$. Do đó

$$\|A(\varphi, \psi)\|_X \leq \lambda r_1 (\|h_1\| + \|h_2\|) \leq r_1 = \|(\varphi, \psi)\|_X$$

Theo cách lấy $Bx = \|x\|_X$, $\forall x \in K$ trong định lí 1.3.4, ta thấy rằng chỉ số điểm bất động

$$i(A, \Omega_{r_1} \cap K, K) = 1 \quad (2.1.28)$$

Rõ ràng rằng $\overline{\Omega_{r_0}} \subset \Omega_{r_1}, \overline{\Omega_{r_1}} \subset \Omega_R$. Ta thấy (2.1.25), (2.1.27), (2.1.28) suy ra theo tính chất cộng tính của chỉ số điểm bất động. Chỉ số điểm bất động

$$i(A, (\Omega_R \setminus \Omega_{r_1}) \cap K, K) = -i(A, (\Omega_{r_1} \setminus \Omega_{r_0}) \cap K, K) = 1.$$

Do đó, theo tính chất nghiệm của chỉ số điểm bất động suy ra A có ít nhất hai nghiệm dương liên tục (φ_1, ψ_1) và (φ_2, ψ_2) thỏa mãn

$$0 < \|\varphi_1\| + \|\psi_1\| < r_1 < \|\varphi_2\| + \|\psi_2\|$$

Kết thúc chứng minh. $\square$

2.2. Ứng dụng vào phương trình vi phân

Ví dụ 2.2.1. Xét bài toán giá trị biên hai điểm của phương trình vi phân thường sau:

$$\begin{cases} x'' + f(x) = 0, & 0 \leq t \leq 1; \\ x(0) = x'(1) = 0. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Kết luận : Cho $f(x)$ là hàm không âm, liên tục trên $x \geq 0$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} < 2 \quad (2.2.2)$$

Giả sử tồn tại $a > d > 0$ sao cho $f(x) < 2d$ với $0 \leq x \leq d$ và $f(x) \geq 4a$

với $a \leq x \leq 2a$. Khi đó, bài toán (2.2.1) có ít nhất ba nghiệm không âm và thuộc về $C^2[0,1]$.

Chứng minh. Bài toán (2.2.1) tương đương với phương trình tích phân

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(x(s))ds, \quad (2.2.3)$$

trong đó $G(t,s)$ là hàm Green $G(t,s) = \min\{t,s\} = \begin{cases} t, & t \leq s \\ s, & t > s \end{cases}$

$$\text{Đặt } Ax(t) = \int_0^1 G(t,s)f(x(s))ds \quad (2.2.4)$$

$E = C[0,1]$ và $K = \{x(t) \in C[0,1] \mid x(t) \geq 0, \forall 0 \leq t \leq 1\}$.

$A : K \rightarrow K$ rõ ràng là hoàn toàn liên tục. Đặt $\alpha(x) = \min_{\frac{1}{2} \leq t \leq 1} x(t)$. Điều đó cũng cho thấy rõ rằng

α là một hàm lõm, liên tục, không âm trên K với $\alpha(x) \leq \|x\|$ với bất kì $x(t) \in K$, tồn tại $0 < \sigma < 2$ và $\tau > 0$ sao cho $f(x) < \sigma x$ với $x > \tau$ và do đó

$$0 \leq f(x) \leq \sigma x + \beta, \quad x \geq 0, \quad (2.2.5)$$

trong đó $\beta = \max_{0 \leq x \leq \tau} f(x)$. Bây giờ, ta chọn

$$r > \max \left\{ \frac{\beta}{2 - \sigma}; 2a \right\} \quad (2.2.6)$$

Và chứng minh rằng tất cả những điều kiện của định lí 1.4.4 được thỏa mãn với $b = 2a$ và $c = r$. Trước hết ta chứng minh $A(\overline{K_r}) \subset \overline{K_r}$.

Thật vậy, khi $x \in \overline{K_r}$ theo (2.2.5) và (2.2.6) ta tìm được

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \int_0^1 s f(x(s)) ds \leq \int_0^1 s [\sigma x(s) + \beta] ds \\ &\leq \frac{1}{2} (\sigma \|x\| + \beta) \leq \frac{1}{2} (\sigma r + \beta) < r, \end{aligned}$$

Do đó $Ax \in K_r$.

Rõ ràng, $\{x \in K(\alpha, a, 2a) \mid \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ vì chẳng hạn $x_0 \in \{x \in K(\alpha, a, 2a) \mid \alpha(x) > a\}$,

trong đó $x_0(t) \equiv \frac{3a}{2}, 0 \leq t \leq 1$. Hơn nữa, với $x \in K(\alpha, a, 2a)$, ta có

$$\begin{aligned} \alpha(Ax) &= \int_0^1 G\left(\frac{1}{2}, s\right) f(x(s)) ds > \int_{\frac{1}{2}}^1 G\left(\frac{1}{2}, s\right) f(x(s)) ds \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 4a \, ds = a \end{aligned}$$

Cho thấy rằng điều kiện (i) của định lí 1.4.4 được thỏa mãn. Việc kiểm tra điều

kiện (ii) thì đơn giản, vì $x \in \overline{K_a}$ suy ra

$$\|Ax\| = \int_0^1 s f(x(s)) ds < \int_0^1 s \cdot 2a \, ds = a$$

Cuối cùng, với $x \in K(\alpha, a, r)$ với $\|Ax\| > 2a$, ta có

$$\begin{aligned}\alpha(Ax) &= \int_0^1 G\left(\frac{1}{2}, s\right) f(x(s)) ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} sf(x(s)) ds + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x(s)) ds \\ &> \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} sf(x(s)) ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 sf(x(s)) ds \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 sf(x(s)) ds = \frac{1}{2} \|Ax\| > a\end{aligned}$$

Và do đó điều kiện (iii) cũng được kiểm tra. Vì vậy theo định lý 1.4.4, A có ít nhất ba điểm bất động trong $\overline{K_r}$. $\square$

Ví dụ 2.2.2. Xét bài toán giá trị biên hai điểm của một phương trình vi phân thường:

$$-x'' = f(x), \quad 0 \leq t \leq 1; \quad x(0) = x(1) = 0, \quad (2.2.7)$$

trong đó $f(x)$ liên tục và không âm với $x \geq 0$ và $f(0) = 0$. Rõ ràng, $x(t) \equiv 0$ là một nghiệm tầm thường của bài toán (2.2.7). Ta có khẳng định sau: nếu

$$0 \leq \overline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \frac{f(x)}{x} < 8 \text{ và } 24\sqrt{3} < \overline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \frac{f(x)}{x} \leq +\infty \quad (2.2.8)$$

thì bài toán (2.2.7) có ít nhất một nghiệm tầm thường $x(t)$ thuộc $C^2[0, 1]$ và thỏa mãn

$$x(t) > 0, \quad \forall \quad 0 < t < 1. \quad (2.2.9)$$

Để chứng minh khẳng định trên, trước hết ta nhận xét rằng bài toán (2.2.7) tương đương với phương trình tích phân

$$x(t) = \int_0^1 k(t, s) f[x(s)] ds,$$

Trong đó $k(t, s)$ là hàm Green của toán tử khả vi $-x''$ với điều kiện biên $x(0) = x(1) = 0$; được cho bởi

$$k(t, s) = \begin{cases} t(1-s), & t \leq s; \\ s(1-t), & t > s \end{cases} \quad (2.2.10)$$

$$\text{Đặt } Ax(t) = \int_0^1 k(t, s) f[x(s)] ds$$

$$K = \{x(t) \in C[0,1] \mid x(t) \geq 0\} \text{ và } K_\varepsilon = \{x(t) \in K \mid \min_{\frac{1}{2}-\varepsilon \leq t \leq \frac{1}{2}+\varepsilon} x(t) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)\|x\|\}$$

trong đó $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ và $\|x\|$ là kí hiệu chuẩn của $x(t)$ trong không gian

$E = C[0,1]$. Hiển nhiên, K và K_ε là nón của $C[0,1]$, $K_\varepsilon \subset K$ và $A : K \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Cho $x(t) \in K$. Vì $k(t,s) \leq s(1-s)$,

$$\|Ax\| \leq \int_0^1 s(1-s)f[x(s)]ds. \quad (2.2.11)$$

Ngoài ra, khi $\frac{1}{2} - \varepsilon \leq t \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$, ta có

$$k(t,s) = \begin{cases} t(1-s) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)(1-s) & \text{khi } t \leq s \\ s(1-t) \geq s[1 - (\frac{1}{2} + \varepsilon)] = (\frac{1}{2} - \varepsilon) & \text{khi } t > s \end{cases}$$

nên $k(t,s) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)s(1-s)$, $\forall \frac{1}{2} - \varepsilon \leq t \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$, $0 \leq s \leq 1$.

$$\text{Do đó } \min_{\frac{1}{2}-\varepsilon \leq t \leq \frac{1}{2}+\varepsilon} Ax(t) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon) \int_0^1 s(1-s)f[x(s)]ds \quad (2.2.12)$$

Từ (2.2.11) và (2.2.12) suy ra

$$\min_{\frac{1}{2}-\varepsilon \leq t \leq \frac{1}{2}+\varepsilon} Ax(t) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)\|Ax\|,$$

nghĩa là, $Ax(t) \in K_\varepsilon$. Vì vậy $A(K) \subset K_\varepsilon$ nên

$$A(K_\varepsilon) \subset K_\varepsilon, \forall 0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \quad (2.2.13)$$

Bây giờ, theo (2.2.8), tồn tại $0 < r < \eta < +\infty$ sao cho $0 \leq f(x) \leq 8x$

với $0 \leq x \leq r$ và $f(x) \geq 24\sqrt{3}x$ với $x \geq \eta$. Vì vậy, cho $x(t) \in K$ với $\|x\| = r$

$$\begin{aligned} \text{ta có } Ax(t) &\leq 8 \int_0^1 k(t,x)x(s)ds \leq 8\|x\| \int_0^1 k(t,s)ds \\ &= 4t(1-t)\|x\| \leq \|x\|, \quad \forall 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

và do đó

$$\|Ax\| \leq \|x\|, \quad \forall x(t) \in K, \quad \|x\| = r. \quad (2.2.14)$$

Mặt khác, đặt

$$R_\varepsilon = \max\{2r, \eta(\frac{1}{2} - \varepsilon)^{-1}\}, \quad \forall 0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \quad (2.2.15)$$

Ta có $R_\varepsilon > r$ và cho $x(t) \in K_\varepsilon$ với $\|x\| = R_\varepsilon$

$$\min_{\frac{1}{2}-\varepsilon \leq t \leq \frac{1}{2}+\varepsilon} x(t) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)\|x\| = (\frac{1}{2} - \varepsilon)R_\varepsilon \geq \eta$$

Do đó,

$$\begin{aligned} Ax\left(\frac{1}{2}\right) &\geq \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} k\left(\frac{1}{2}, s\right) f[x(s)] ds \geq 24\sqrt{3} \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} k\left(\frac{1}{2}, s\right) x(s) ds \\ &\geq 24\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \|x\| \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} k\left(\frac{1}{2}, s\right) ds \\ &= 12\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \varepsilon (1 - \varepsilon) \|x\| \end{aligned}$$

Vì vậy

$$\|Ax\| \geq 12\sqrt{3} \varepsilon (1 - \varepsilon) \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \|x\|, \quad \forall x(t) \in K_\varepsilon, \|x\| = R_\varepsilon \quad (2.2.16)$$

Dễ dàng thấy rằng hàm $\psi(\varepsilon) = \varepsilon(1 - \varepsilon)\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ với $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ đạt giá trị lớn nhất tại

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 3 - \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ và giá trị lớn nhất } \psi(\varepsilon_0) = \frac{\sqrt{3}}{36}.$$

Cuối cùng, chọn $\varepsilon = \varepsilon_0$ trong (2.2.16), ta được

$$\|Ax\| \geq \|x\|, \quad \forall x(t) \in K_{\varepsilon_0}, \|x\| = R_{\varepsilon_0} \quad (2.2.17)$$

Từ (2.2.13), (2.2.14) và (2.2.17) và sử dụng định lí 1.3.2 với

$$\Omega_1 = \{x(t) \in C[0,1] \mid \|x\| < r\}, \quad \Omega_2 = \{x(t) \in C[0,1] \mid \|x\| < R_{\varepsilon_0}\} \quad \text{và } K_{\varepsilon_0}$$

Ta khẳng định rằng A có một điểm bất động $x(t)$ trong $K_{\varepsilon_0} \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$. $\square$

Ví dụ 2.2.3. Xét bài toán giá trị riêng tương ứng với bài toán (2.2.7):

$$\mu x'' + f(x) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad x(0) = x(1) = 0 \quad (2.2.18)$$

trong đó như đã biết, $f(x)$ liên tục và không âm với $x \geq 0$ và $f(0) = 0$. Ta có khẳng định sau: nếu

$$0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \leq +\infty \quad (2.2.19)$$

thì tồn tại $R > 0$ sao cho với mỗi $r > R$, bài toán (2.2.18) có nghiệm $x_r(t) \in C^2[0,1]$, $\mu_r > 0$ thỏa mãn $x_r(t) > 0$ ($\forall 0 < t < 1$) và

$$\|x_r\| = \max_{0 \leq t \leq 1} x_r(t) = r$$

Như trong ví dụ 2.2.2, bài toán (2.2.18) tương đương với phương trình tích phân

$$\mu x(t) = \int_0^1 k(t,s) f[x(s)] ds = Ax(t) \quad (2.2.20)$$

trong đó $k(t,s)$ tương ứng với hàm Green (2.2.10). Bằng cách tương tự như trong ví dụ 2.2.2, ta có thể chứng minh rằng (2.2.13) đúng. Theo (2.2.19) tồn tại $\tau > 0$ và $\eta > 0$ sao cho $f(x) > \tau x$ với $x \geq \eta$.

Bây giờ, ta cố định ε ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$) và chứng minh rằng $R = \eta \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right)^{-1}$ cần tìm.

Với $r > R$ ta đặt $\Omega_r = \{x(t) \in C[0,1] \mid \|x\| < r\}$.

Vì vậy, khi $x(t) \in K_\varepsilon \cap \partial\Omega_r$, ta có

$$\min_{\frac{1}{2}-\varepsilon \leq t \leq \frac{1}{2}+\varepsilon} x(t) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \|x_r\| = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) r > \eta$$

Do đó,

$$\begin{aligned} Ax\left(\frac{1}{2}\right) &\geq \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} k\left(\frac{1}{2}, s\right) f[x(s)] ds \geq \tau \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} k\left(\frac{1}{2}, s\right) x(s) ds \\ &\geq \tau \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \|x\| \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} k\left(\frac{1}{2}, s\right) ds = \frac{1}{2} \tau \varepsilon (1 - \varepsilon) \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) r \end{aligned}$$

Vì vậy

$$\inf_{x(t) \in K_\varepsilon \cap \partial\Omega_r} \|Ax\| \geq \frac{1}{2} \tau \varepsilon (1 - \varepsilon) \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) r > 0 \quad (2.2.21)$$

Từ (2.2.21) và định lí 1.3.10 suy ra tồn tại $x(t) \in K_\varepsilon \cap \partial\Omega_r$ và $\mu_r > 0$ sao cho $Ax_r(t) = \mu_r x_r(t)$. $\square$

Ví dụ 2.2.4. Xét bài toán biên hai điểm của phương trình vi phân thường:

$$\begin{cases} x'' + x^\alpha + x^\beta = 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ x(0) = x'(1) = 0 \end{cases} \quad (2.2.22)$$

trong đó $\beta > 1 > \alpha > 0$. Khi đó bài toán (2.2.22) có hai nghiệm không tầm thường $x_1(t)$ và $x_2(t)$ thuộc về $C^2[0,1]$ và thỏa mãn

$$x_1(t) > 0, \quad x_2(t) > 0, \quad \forall \quad 0 < t \leq 1 \quad (2.2.23)$$

$$r < \max_{0 \leq t \leq 1} x_1(t) < 1 < \max_{0 \leq t \leq 1} x_2(t) < R \quad (2.2.24)$$

trong đó

$$r = \left[\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha + 2)^{\alpha+2}} \right]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}, \quad R = \left[\frac{(\beta + 2)^{\beta+2}}{\beta^\beta} \right]^{\frac{1}{2(\beta-1)}} \quad (2.2.25)$$

Chứng minh. Bài toán (2.2.22) tương đương với phương trình tích phân

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) \{ [x(s)]^\alpha + [x(s)]^\beta \} ds \quad (2.2.26)$$

trong đó $G(t,s)$ là hàm Green của toán tử khả vi $-x''$ với điều kiện biên $x(0) = x'(1) = 0$, cho bởi:

$$G(t,s) = \min\{t,s\} = \begin{cases} t, & t \leq s \\ s, & t > s \end{cases} \quad (2.2.27)$$

Đặt $E = C[0,1]$, $K = \{x(t) \in C[0,1] \mid x(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 1\}$ và

$$K_\tau = \left\{ x(t) \in K \mid \min x(t) \geq \tau \|x\| \right\}, \text{ trong đó } 0 < \tau < 1.$$

Rõ ràng, K và K_τ là nón của E và $K_\tau \subset K$.

$$\text{Đặt } Ax(t) = \int_0^1 G(t,s) \{ [x(s)]^\alpha + [x(s)]^\beta \} ds \quad (2.2.28)$$

Rõ ràng rằng $A : K \rightarrow K$ hoàn toàn liên tục. Bây giờ với $x(t) \in K$ và $0 < \tau < 1$

Ta có:

$$\begin{aligned} \min_{\tau < t < 1} Ax(t) &= \int_0^1 G(\tau, s) \{ [x(s)]^\alpha + [x(s)]^\beta \} ds \\ &= \int_0^\tau s \{ [x(s)]^\alpha + [x(s)]^\beta \} ds + \int_\tau^1 \tau \{ [x(s)]^\alpha + [x(s)]^\beta \} ds \\ &\geq \tau \int_0^1 s \{ [x(s)]^\alpha + [x(s)]^\beta \} ds \\ &= \tau \int_0^1 G(1, s) \{ [x(s)]^\alpha + [x(s)]^\beta \} ds \\ &= \tau \|Ax\| \end{aligned}$$

Do đó $A(K) \subset K_\tau$ nên

$$A(K_\tau) \subset K_\tau, \quad \forall 0 < \tau < 1 \quad (2.2.29)$$

Trong phần sau kí hiệu mặt cầu $\{x(t) \in C[0,1] \mid \|x\| = \rho\}$ theo S_ρ ($0 < \rho < +\infty$)

Với $x(t) \in K \cap S_1$, ta có:

$$\|Ax\| = \int_0^1 s \{ [x(s)]^\alpha + [x(s)]^\beta \} ds \leq (\|x\|^\alpha + \|x\|^\beta) \int_0^1 s ds = 1 = \|x\| \quad (2.2.30)$$

Bây giờ ta chứng minh

$$Ax \neq x, \quad \forall x \in K \cap S_1 \quad (2.2.31)$$

Thật vậy, nếu có $x^* \in K \cap S_1$ sao cho $Ax^* = x^*$ thì từ (2.2.30)

$$\int_0^1 s \{ [x^*(s)]^\alpha + [x^*(s)]^\beta \} ds = 1$$

$$\text{nên } \int_0^1 s \{ (1 - [x^*(s)]^\alpha + [x^*(s)]^\beta) \} ds = 0$$

Vì vậy, $x^*(s) = 1$ ($0 \leq s \leq 1$), mâu thuẫn với

$$x^*(0) = Ax^*(0) = \int_0^1 G(0; s) \{ [x^*(s)]^\alpha + [x^*(s)]^\beta \} ds = 0$$

Vì vậy (2.2.31) đúng

Với $x(t) \in K_\tau$, ta có

$$\|Ax\| = \int_0^1 s \{ [x(s)]^\alpha + [x(s)]^\beta \} ds \geq \int_\tau^1 s \{ [x(s)]^\alpha + [x(s)]^\beta \} ds$$

$$\geq (\tau^\alpha \|x\|^\alpha + \tau^\beta \|x\|^\beta) \int_\tau^1 s ds = \frac{1}{2} (1 - \tau^2) (\tau^\alpha \|x\|^\alpha + \tau^\beta \|x\|^\beta). \quad (2.2.32)$$

Để dàng thấy rằng hàm $h_2(\tau) = (1 - \tau^2)\tau^\alpha$ đạt được giá trị lớn nhất trong $0 < \tau < 1$ tại

$$\tau = \tau_1 = \left(\frac{\alpha}{\alpha} + 2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ và hàm } h_2(\tau) = (1 - \tau^2)\tau^\beta \text{ tại } \tau_2 = \left(\frac{\beta}{\beta} + 2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Đặt $\tau = \tau_1, \tau = \tau_2$ trong (2.2.32), liên hệ với (2.2.25) cho ta

$$x \in K_{\tau_1} \cap S_r \quad \|Ax\| > \frac{1}{2} (1 - \tau_1^2) \tau_1^\alpha \|x\|^\alpha = r = \|x\| \quad (2.2.33)$$

$$x \in K_{\tau_2} \cap S_R \quad \|Ax\| > \frac{1}{2} (1 - \tau_2^2) \tau_2^\beta \|x\|^\beta = R = \|x\| \quad (2.2.34)$$

Cuối cùng, từ (2.2.29), (2.2.30), (2.2.31), (2.2.33) và (2.2.34) ta biết rằng theo định lí 1.3.2 A sẽ có hai điểm bất động $x_1(t) \in K_{\tau_1}$ và $x_2(\tau) \in K_{\tau_2}$ sao cho $r < \|x_1\| < 1 < \|x_2\| < R$. $\square$

KẾT LUẬN

Từ nhiều kết quả về định lí Krasnosel'skii và các vấn đề liên quan được trình bày trong các bài báo khoa học và các giáo trình, luận văn đã cho một trình bày tương đối đầy đủ, có hệ thống về đề tài này với các chứng minh chi tiết cho các kết luận được giới thiệu. Luận văn có thể được sử dụng như một tài liệu tham khảo để làm quen với Lí thuyết phương trình trong không gian có thứ tự. Luận văn có thể mở rộng theo hướng nghiên cứu định lí Krasnosel'skii cho các ánh xạ đa trị.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. D.Guo and V.Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press, San Diego, 1988
2. K.Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, NewYork, 1985
3. M.A.Krasnosel'skii and P.P.Zabreiko, *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg ,New York,1984
4. L.Gasinski, N.S.Papageorgiou, *Nonlinear Analysis*, Chapman & Hall/CRC, 2006
5. Feng Wang and Fang Zhang, *An extension of fixed point theorems concerning cone expansion and compression and its application*, K.Math. Soc.24(2009), No.2, pp.281-290.