BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN CHÍ THÀNH

ĐỐI NGẪU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTOR LỒI MỞ RỘNG

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60. 46. 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. HOÀNG QUANG TUYẾN

Đà Nẵng - Năm 2011

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài.

Tối ưu đa mục tiêu không lồi được các nhà toán học rất quan tâm trong vài chục năm trở lại đây, không chỉ từ quan điểm lý thuyết mà còn từ thực tế. Các bài toán tối ưu vector lồi mở rộng (là sự mở rộng của bài toán tối ưu vector lồi) nảy sinh trong quá trình xây dựng và giải thích các mô hình kinh tế; trong lựa chọn phương án tối ưu về tài chính, kỹ thuật, sản xuất, vận tải và trong nhiều lĩnh vực hiện đại khác. Khi nghiên cứu bài toán tối ưu vector lồi mở rộng thì lý thuyết đối ngẫu cũng là một trong những công cụ quan trọng. Phân tích song song một cặp bài toán đối ngẫu cho trường hợp lồi mở rộng (rộng hơn bài toán lồi) ta cũng nhận được những kết luận hay cả về mặt toán học và cả về ý nghĩa thực tế rất hiện đại. Do đó, tôi chọn đề tài:

" Đối ngẫu của bài toán tối ưu vector lồi mở rộng"

với nội dung là nghiên cứu các dạng đối ngẫu mới cho bài toán tối ưu vector lồi mở rộng. Có thể nói rõ hơn, qui hoạch lồi đóng vai trò cơ bản trong lý thuyết tối ưu và trong các kết quả đối ngẫu,... Tuy nhiên, đối với nhiều bài toán gặp phải trong kinh tế, trong kỹ thuật,...giả thuyết lồi trở nên quá nặng. Do đó, cần phải giảm nhẹ. Trên thực tế có thể giảm nhẹ giả thuyết lồi mà vẫn đạt được kết quả (Định lý Kuhn - Tucker,...) Hàm invexity (Tính lồi bất biến) là một ví dụ như là sự mở rộng của lớp hàm lồi.
Đề tài khảo cứu một số dạng đối ngẫu mới cho các bài toán tối ưu vector lồi mở rộng:
1-Đối ngẫu Mond - Weir (tổng quát) cho bài toán tối ưu vector khả vi.
2-Đối ngẫu Mond - Weir (tổng quát) cho bài toán tối ưu vector không khả vi.
3-Đối ngẫu Mond - Weir (tổng quát) cho bài toán tối ưu vector không khả vi có hàm d-Univex.
4-Đối ngẫu Mond - Weir (tổng quát) cho bài toán tối ưu vector không khả vi có hàm d-Type-I Univex.
5-Đối ngẫu cho bài toán tối ưu vector (P) trong không gian Banach.
6-Đối ngẫu cho bài toán tối ưu phân thức (P).

2. Mục tiêu và nội dung nghiên cứu

Luận văn khảo cứu một số kết quả đối ngẫu mới (trong vòng 10 năm trở lại đây) cho một số bài toán tối ưu vector lồi mở rộng.

3. Phương pháp nghiên cứu

Hệ thống các kiến thức cơ bản về tập lồi, hàm lồi, hàm tuyến tính, hàm khả vi,

hàm không khả vi, hàm Invex, hàm quasiinvex, pseudoinvex, hàm Type-I và hàm Type-I mở rộng, hàm V-Invex và hàm Univex,... để phục vụ cho nhu cầu nghiên cứu đề tài.
Phương pháp tham khảo tài liệu: Tìm hiểu chi tiết các khái niệm, bổ đề, mệnh đề, định lý, hệ quả,... về lý thuyết đối ngẫu.
Nghiên cứu các tài liệu trong nước và ngoài nước, Giáo trình hoặc các bài báo liên quan,...

4. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Hệ thống được một số dạng bài toán tối ưu vector lồi mở rộng.
Trình bày chi tiết các dạng đối ngẫu mới của các bài toán tối ưu vector lồi mở rộng rất hữu ích về nghiên cứu lý thuyết cũng như ý nghĩa thực tế.

5. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mục lục, mở đầu và kết luận, luận văn gồm 3 chương:
Chương 1. Cơ bản về hàm lồi mở rộng.
Chương 2. Hàm Type-I mở rộng và các hàm liên quan.
Chương 3. Đối ngẫu của bài toán tối ưu vector lồi mở rộng.

Chương 1

Cơ bản về hàm lồi mở rộng

1.1 Hàm lồi và hàm lồi mở rộng

Định nghĩa 1.1.1. *Tập con X của $\mathbb{R}^n$ là lồi nếu mỗi $x_1, x_2 \in X$ và $0 < \lambda < 1$, ta có*

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X.$$

Định nghĩa 1.1.2. *Hàm $f : X \to \mathbb{R}$ xác định trên tập con lồi X của $\mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu cho bất kỳ $x_1, x_2 \in X$ và $0 < \lambda < 1$, ta có*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Nếu ta có bất đẳng thức chặt với mọi $x_1 \neq x_2$ trong định nghĩa trên thì hàm f được gọi là hàm lồi chặt.

Định nghĩa 1.1.3. *Hàm $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là tựa-lồi trên tập X nếu*

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(y), \forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0; 1].$$

hoặc tương đương

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\}, \forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0; 1].$$

Định nghĩa 1.1.4. *Hàm $f : X \to \mathbb{R}$ khả vi được gọi là tựa-lồi trên tập X nếu*

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow (x-y)\nabla f(y) \leq 0, \forall x, y \in X.$$

Chú ý 1.1.1. Một tính chất quan trọng của hàm lồi khả vi là bất kì điểm dừng nào cũng là điểm cực tiểu toàn cục.

Định nghĩa 1.1.5. *Cho $f : X \to \mathbb{R}$ là khả vi trên tập mở $X \subset \mathbb{R}^n$ lúc đó f được gọi là giả-lồi trên X nếu*

$$f(x) < f(y) \Rightarrow (x-y)\nabla f(y) < 0, \forall x, y \in X.$$

hoặc tương đương nếu

$$(x-y)\nabla f(y) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y), \forall x, y \in X.$$

Định nghĩa 1.1.6. *Hàm $f : X \to \mathbb{R}$ khả vi trên tập mở $X \subset \mathbb{R}^n$ là giả lồi chặt trên X nếu*

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow (x - y)\nabla f(y) < 0, \forall x, y \in X, x \neq y.$$

hoặc tương đương nếu

$$(x - y)\nabla f(y) \geq 0 \Rightarrow f(x) > f(y), \forall x, y \in X, x \neq y.$$

Các hàm lồi đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết tối ưu. Bài toán tối ưu:

$$\begin{array}{rl} \text{Min } f(x), & \text{với mọi } x \in X \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \text{v.đ.k.} & g(x) \leqq 0, \end{array}$$

được gọi là qui hoạch lồi nếu các hàm liên quan là lồi trên X con của $\mathbb{R}^n$.

1.2 Hàm Invex và các hàm mở rộng

Định nghĩa 1.2.1. *Một hàm khả vi $f : X \to \mathbb{R}$, X là tập con mở của $\mathbb{R}^n$, được gọi là Invex trên X đối với η nếu tồn tại hàm giá trị vector $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ sao cho*

$$f(x) - f(y) \geq \eta^T(x, y)\nabla f(y), \forall x, y \in X.$$

Tên "Invex" do Craven (1981) đặt, là viết tắt của cụm từ "invariant covex". Tương tự, f được gọi là giả-Invex trên X đối với η nếu tồn tại hàm giá trị vector $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\eta^T(x, y)\nabla f(y) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y), \forall x, y \in X.$$

Hàm $f : X \to \mathbb{R}$, X tập con mở của $\mathbb{R}^n$, được gọi là tựa Invex trên X đối với η nếu tồn tại hàm giá trị vector $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ sao cho

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow \eta^T(x, y)\nabla f(y) \leq 0, \forall x, y \in X.$$

Định lý 1.2.1. *(Ben-Israel và mond (1986)) Cho hàm $f : X \to \mathbb{R}$ là khả vi trên tập mở $X \subset \mathbb{R}^n$, khi đó f là Invex nếu và chỉ nếu mỗi điểm dừng của f là một điểm cực tiểu toàn cục của f trên X.*

Định nghĩa 1.2.2. *Hàm $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là Pre-Invex (Invex không khả vi) trên X nếu tồn tại một hàm vector $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ sao cho*

$$(y + \lambda\eta(x, y)) \in X, \forall\lambda \in [0; 1], \forall x, y \in X$$

và

$$f(y + \lambda\eta(x, y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall\lambda \in [0; 1], \forall x, y \in X.$$

1.3 Hàm Type-I và các hàm liên quan

Hanson và Mond đã đưa ra hai lớp hàm mới, hai lớp hàm này không chỉ đủ mà còn cần cho tính tối ưu trong các bài toán gốc và bài toán đối ngẫu tương ứng. Cho

$$P = \{x : x \in X, g(x) \leqq 0\} \text{ và } D = \{x : (x, y) \in Y\},$$

trong đó $Y = \{(x, y) : x \in X, y \in \mathbb{R}^m, \nabla_x f(x) + y^T \nabla_x g(x) = 0; y \geqq 0\}$.

Định nghĩa 1.3.1. *$f(x)$ và $g(x)$ lần lượt là hàm mục tiêu và hàm ràng buộc Type I đối với $\eta(x)$ tại $\bar{x}$ nếu tồn tại một hàm vector $\eta(x) : X \times X \to \mathbb{R}^n$ sao cho*

$$f(x) - f(\bar{x}) \geqq [\nabla_x f(\bar{x})]^T \eta(x, \bar{x}), \quad \forall x \in P$$

và

$$-g(\bar{x}) \geqq [\nabla_x g(\bar{x})]^T \eta(x, \bar{x}), \quad \forall x \in P.$$

Hàm mục tiêu và hàm ràng buộc $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là Type I chặt nếu ta có các bất đẳng thức chặt trong định nghĩa trên.

Định nghĩa 1.3.2. *$f(x)$ và $g(x)$ là hàm mục tiêu và hàm ràng buộc Type II tương ứng, đối với $\eta(x)$ tại $\bar{x}$ nếu tồn tại một hàm vector $\eta(x) : X \times X \to \mathbb{R}^n$ sao cho*

$$f(\bar{x}) - f(x) \geqq [\nabla_x f(x)]^T \eta(x, \bar{x}), \quad \forall x \in P$$

và

$$-g(x) \geqq [\nabla_x g(x)]^T \eta(x, \bar{x}), \quad \forall x \in P.$$

Hàm mục tiêu và hàm ràng buộc $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là Type II chặt nếu ta có các bất đẳng thức chặt trong định nghĩa trên.

Định nghĩa 1.3.3. *Hàm mục tiêu và hàm ràng buộc Pseudo-Type-I.*

Định nghĩa 1.3.4. *Hàm mục tiêu và hàm ràng buộc Quasi-Type-I.*

Định nghĩa 1.3.5. *Các hàm $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt là hàm mục tiêu và hàm ràng buộc Quasi-Pseudo-Type-I tương ứng, đối với $\eta(x)$ tại $\bar{x}$ nếu tồn tại một hàm vector $\eta(x) : X \times X \to \mathbb{R}^n$ sao cho*

$$f(x) - f(\bar{x}) \leqq 0 \Rightarrow [\nabla_x f(\bar{x})]^T \eta(x, \bar{x}) \leqq 0, \quad \forall x \in P$$

và

$$[\nabla_x g(x)]^T \eta(x, \bar{x}) \geqq 0 \Rightarrow -g(x) \geqq 0, \quad \forall x \in P.$$

Định nghĩa 1.3.6. *Các hàm $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt là hàm mục tiêu và hàm ràng buộc Pseudo-Quasi-Type-I tương ứng, đối với $\eta(x)$ tại $\bar{x}$ nếu tồn tại một hàm vector $\eta(x) : X \times X \to \mathbb{R}^n$ sao cho*

$$[\nabla_x f(\bar{x})]^T \eta(x, \bar{x}) \geqq 0 \Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) \geqq 0, \quad \forall x \in P$$

và

$$-g(x) \leqq 0 \Rightarrow [\nabla_x g(x)]^T \eta(x, \bar{x}) \leqq 0, \quad \forall x \in P.$$

1.4 Hàm Univex và các hàm liên quan

Cho f là hàm khả vi xác định trên một tập $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ và cho $b : X \times X \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$, $\varnothing : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $k : X \times X \to \mathbb{R}^+$. Cho $x, \bar{x} \in X$, chúng ta kí hiệu

$$k(x,\bar{x}) = \lim_{\lambda \to 0} b(x,\bar{x},\lambda) \geqq 0$$

Định nghĩa 1.4.1. *Hàm f được gọi là B-Invex đối với η và k tại $\bar{x}$ nếu $\forall x \in X$, ta có*

$$k(x,\bar{x})[f(x) - f(\bar{x})] \geqq [\nabla_x f(\bar{x})]^T \eta(x,\bar{x}).$$

Định nghĩa 1.4.2. *Hàm f được gọi là Univex đối với η, $\varnothing$ và k tại $\bar{x}$ nếu $\forall x \in X$, ta có*

$$k(x,\bar{x})\varnothing(f(x) - f(\bar{x})) \geqq [\nabla_x f(\bar{x})]^T \eta(x,\bar{x}).$$

Định nghĩa 1.4.3. *Hàm f là Quasi-Univex.*

Định nghĩa 1.4.4. *Hàm f là Pseudo-Univex.*

1.5 Hàm V-Invex và các hàm liên quan

Jeyakumar and Mond (1992) đã giới thiệu khái niệm của hàm V-Invex cho một hàm vector $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$, và các ứng dụng của nó cho các bài toán tối ưu đa mục tiêu bị ràng buộc, như sau:

Định nghĩa 1.5.1. *Hàm vector $f : X \to \mathbb{R}^p$ được gọi là V-Invex nếu tồn tại các hàm $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ và $\alpha_i : X \times X \to \mathbb{R}^+ - \{0\}$ sao cho mỗi $x, \bar{x} \in X$ và cho $i = 1, 2, 3...p$,*

$$f_i(x) - f_i(\bar{x}) \geqq \alpha_i(x,\bar{x}) \nabla f_i(\bar{x}) \eta(x,\bar{x}).$$

Định nghĩa 1.5.2. *Bài toán tối ưu vector:*

(VP) $\quad$ *V-min*$(f_1, f_2, ..., f_p)$

$$v.đ.k \quad g(x) \leqq 0,$$

trong đó $f_i : X \to \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., p$ và $g : X \to \mathbb{R}^m$ là các hàm khả vi trên X được gọi là bài toán tối ưu vector V-Invex nếu mỗi $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$ và $g = (g_1, g_2, ..., g_m)$ là một hàm V-Invex.

Định nghĩa dưới đây là mở rộng từ tính Invex-Type-I vô hướng sang tính Invex vector.

Định nghĩa 1.5.3. *Bài toán vector (VP) được gọi là V-Type-I tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại các hàm giá trị thực dương α_i và β_j được định nghĩa trên tập $X \times X$ và một hàm vector giá trị $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ sao cho*

$$f_i(x) - f_i(\bar{x}) \geqq \alpha_i(x,\bar{x}) \nabla f_i(\bar{x}) \eta(x,\bar{x})$$

và

$$-g_i(\bar{x}) \geqq \beta_j(x,\bar{x}) \nabla g_j(\bar{x}) \eta(x,\bar{x}),$$

Với mọi $x \in X$ và cho mọi $i = 1, 2, ..., p$ và $j = 1, 2, ..., m$.

Chương 2

Hàm Type-I mở rộng và các hàm liên quan

2.1 Hàm Type-I Univex mở rộng

Chúng ta định nghĩa bài toán Type-I Univex mở rộng.Trong định nghĩa sau, $b_0, b_1 : X \times X \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$, $b(x,a) = \lim\limits_{\lambda \to 0} b(x,a,\lambda) \geq 0$,
và b không phụ thuộc vào λ nếu các hàm số khả vi $\phi_0, \phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
và $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ là một hàm giá trị vector n-chiều.
Xét bài toán quy hoạch đa mục tiêu sau:

(VP) Min $f(x)$

v.đ.k $g(x) \leq 0$, $x \in X$.
trong đó $f : X \to \mathbb{R}^k, g : X \to \mathbb{R}^m$, X là tập con mở khác rỗng của $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 2.1.1. *Ta gọi bài toán (VP) là Pseudo-Type-I Univex chặt yếu tại $a \in X_0$ nếu tồn tại hàm giá trị thực b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η sao cho*

$$b_0(x,a)\phi_0(f(x) - f(a)) \leq 0 \to (\nabla f(a))\eta(x,a) < 0,$$

$$-b_1(x,a)\phi_1(g(a)) \leqq 0 \to (\nabla g(a))\eta(x,a) \leqq 0,$$

cho mọi $x \in X_0$ và với mọi $i = 1, ..., p$ và $j = 1, ..., m$.
Nếu (VP) là Pseudo-Type-I Univex chặt yếu tại mỗi $a \in X$, ta nói (VP) là Pseudo-Type-I Univex chặt yếu trên X. Nếu trong định nghĩa trên ta đặt $b_0(x,a) = 1 = b_1(x,a), \phi_0$ và ϕ_1 như những hàm đồng nhất, Chúng ta được Pseudo-quasi-Type-I chặt yếu.

Định nghĩa 2.1.2. *Ta gọi bài toán (VP) là Pseudo-quasi-Type-I Univex mạnh tại $a \in X_0$ nếu tồn tại hàm giá trị thực b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η sao cho*

$$b_0(x,a)\phi_0(f(x) - f(a)) \leq 0 \to (\nabla f(a))\eta(x,a) \leq 0,$$

$$-b_1(x,a)\phi_1(g(a)) \leqq 0 \to (\nabla g(a))\eta(x,a) \leqq 0,$$

cho mỗi $x \in X_0$ *và với mọi* $i = 1, ..., p$ *và* $j = 1, ..., m$.
Nếu (VP) *là pseudo-quasi-Type-I Univex mạnh tại mỗi* $a \in X$ *, ta nói* (VP) *là Pseudo-quasi-Type-I Univex mạnh trên tập* X.

Định nghĩa 2.1.3. *Ta gọi bài toán* (VP) *là quasi-Pseudo-Type-I Univex chặt yếu ứng với* b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 *và* η *tại* $a \in X_0$. *Nếu tồn tại một hàm giá trị thực* b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 *và* η *sao cho*

$$b_0(x,a)\phi_0(f(x) - f(a)) \leq 0 \Rightarrow (\nabla f(a))\eta(x,a) \leqq 0,$$

$$-b_1(x,a)\phi_1(g(a)) \leqq 0 \Rightarrow (\nabla g(a))\eta(x,a) \leq 0,$$

cho mỗi $x \in X_0$ *và với mọi* $i = 1, ..., p$ *và* $j = 1, ..., m$.
Nếu (VP) *là quasi-Pseudo-Type-I univex chặt yếu tại mọi* $a \in X$, *ta nói* (VP) *là quasi-Pseudo-Type-I univex chặt yếu trên* X

Định nghĩa 2.1.4. *Ta gọi bài toán* (VP) *là Pseudo-Type-I Univex chặt yếu ứng với* b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 *và* η *tại* $a \in X_0$ *nếu tồn tại hàm giá trị thực* b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 *và* η *sao cho*

$$b_0(x,a)\phi_0(f(x) - f(a)) \leq 0 \Rightarrow (\nabla f(a))\eta(x,a) < 0,$$

$$-b_1(x,a)\phi_1(g(a)) \leqq 0 \Rightarrow (\nabla g(a))\eta(x,a) < 0,$$

cho mỗi $x \in X_0$ *và với mọi* $i = 1, ..., p$ *và* $j = 1, ..., m$.
Nếu (VP) *là Pseudo-Type-I Univex chặt yếu tại mỗi* $a \in X$, *ta nói* (VP) *là Pseudo-Type-I Univex chặt yếu trên* X. Ví dụ 2.1.1 - 2.1.3 về các hàm Type-I Univex mở rộng.

2.2 Hàm d-Type-I không khả vi và các hàm liên quan

Xét bài toán tối ưu vector sau:

(P)
$$\text{Min } f(x)$$
$$\text{v.đ.k } g(x) \leqq 0, x \in X,$$

trong đó $f : X \to \mathbb{R}^k, g : X \to \mathbb{R}^m, X$ là tập con mở khác rỗng của $\mathbb{R}^n$, $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ là hàm vector.$f^{'}(u, \eta(x,u))$ là ký hiệu đạo hàm của f theo hướng $\eta(x,u)$,

$$f^{'}(u, \eta(x,u)) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{[f(u + \lambda\eta(x,u)) - f(u)]}{\lambda}$$

và ký hiệu tương tự được tạo ra cho $g(u, \eta(x,u))$.
Cho $D = \{x \in X : g(x) \leqq 0\}$ là tập tất cả các giá trị chấp nhận được của bài toán (P) và ký hiệu $I = \{1, ..., k\}, M = \{1, 2, ..., m\}$ là các tập chỉ số.
$J(x) = \{j \in M : g_j(x) = 0\}$ và $\widetilde{J}(x) = \{j \in M : g_j(x) < 0\}$. Nó hiển nhiên rằng $J(x) \cup \widetilde{J}(x) = M$.
Trong các định nghĩa sau, $b_0, b_1 : X \times X \times [0,1] \to \mathbb{R}^+, \phi_0, \phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ là một hàm giá trị vector n-chiều.

Định nghĩa 2.2.1. *f được gọi là d-Univex đối với b_0, ϕ_0 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, ϕ_0 và η với mọi $x \in X$ sao cho*

$$b_0(x,u)\phi_0(f(x) - f(u)) \geq f^{'}(u, \eta(x,u))$$

Định nghĩa 2.2.2. *f được gọi là pseudo d-Univex chặt yếu đối với b_0, ϕ_0 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, ϕ_0 và η với mọi $x \in X$ sao cho*

$$b_0(x,u)\phi_0(f(x) - f(u)) \leq 0 \Rightarrow f^{'}(u, \eta(x,u)) < 0.$$

Định nghĩa 2.2.3. *f được gọi là pseudo d-Univex mạnh đối với b_0, ϕ_0 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, ϕ_0 và η với mọi $x \in X$ sao cho*

$$b_0(x,u)\phi_0(f(x) - f(u)) \leq 0 \Rightarrow f^{'}(u, \eta(x,u)) \leq 0.$$

Định nghĩa 2.2.4. *f được gọi là quasi d-Univex yếu đối với b_0, ϕ_0 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, ϕ_0 và η với mọi $x \in X$ sao cho*

$$b_0(x,u)\phi_0(f(x) - f(u)) \leq 0 \Rightarrow f^{'}(u, \eta(x,u)) \leqq 0.$$

Định nghĩa 2.2.5. *f được gọi là pseudo d-Univex yếu đối với b_0, ϕ_0 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, ϕ_0 và η với mọi $x \in X$ sao cho*

$$b_0(x,u)\phi_0(f(x) - f(u)) < 0 \Rightarrow f^{'}(u, \eta(x,u)) \leq 0.$$

Định nghĩa 2.2.6. *f được gọi là quasi d-Univex mạnh đối với b_0, ϕ_0 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, ϕ_0 và η với mọi $x \in X$ sao cho*

$$b_0(x,u)\phi_0(f(x) - f(u)) \leqq 0 \Rightarrow f^{'}(u, \eta(x,u)) \leq 0.$$

Định nghĩa 2.2.7. *(f, g) được gọi là d-Type-I Univex đối với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η với mọi $x \in X$ sao cho*

$$b_0(x,u)\phi_0(f(x) - f(u)) \geqq f^{'}(u, \eta(x,u))$$

và

$$-b_1(x,u)\phi_0(g(u)) \geqq g^{'}(u, \eta(x,u)).$$

Định nghĩa 2.2.8. *(f, g) được gọi là Pseudo-quasi-d-Type-I Univex chặt yếu đối với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η với mọi $x \in X$ sao cho*

$$b_0(x,u)\phi_0(f(x) - f(u)) \leq 0 \Rightarrow f^{'}(u, \eta(x,u)) < 0$$

và

$$-b_1(x,u)\phi_0(g(u)) \leqq 0 \Rightarrow g^{'}(u, \eta(x,u)) \leqq 0.$$

Định nghĩa 2.2.9. *(f, g) gọi là Pseudo-quasi-d-Type-I Univex mạnh đối với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η với mọi $x \in X$ sao cho*

$$b_0(x,u)\phi_0(f(x) - f(u)) \leq 0 \Rightarrow f^{'}(u, \eta(x,u)) \leq 0$$

và

$$-b_1(x,u)\phi_1(g(u)) \leqq 0 \Rightarrow g^{'}(u,\eta(x,u)) \leqq 0.$$

Định nghĩa 2.2.10. *(f,g) được gọi là quasi-Pseudo-d-Type-I Univex chặt yếu đối với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η với mọi $x \in X$ sao cho*

$$b_0(x,u)\phi_0(f(x) - f(u)) \leq 0 \Rightarrow f^{'}(u,\eta(x,u)) \leqq 0$$

và

$$-b_1(x,u)\phi_1(g(u)) \leqq 0 \Rightarrow g^{'}(u,\eta(x,u)) \leq 0.$$

Định nghĩa 2.2.11. *(f,g) được gọi là Pseudo-d-Type-I Univex chặt yếu đối với b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η tại $u \in X$ nếu tồn tại b_0, b_1, ϕ_0, ϕ_1 và η với mọi $x \in X$ sao cho*

$$b_0(x,u)\phi_0(f(x) - f(u)) \leq 0 \Rightarrow f^{'}(u,\eta(x,u)) < 0$$

và

$$-b_1(x,u)\phi_1(g(u)) \leqq 0 \Rightarrow g^{'}(u,\eta(x,u)) < 0.$$

2.3 Các hàm Type-I liên thông nửa địa phương

Giả sử $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập và $\eta : X_0 \times X_0 :\longrightarrow \mathbb{R}^n$ là một ứng dụng vector. Ta nói rằng X_0 là Invex tại $\bar{x} \in X_0$ nếu $\bar{x} + \lambda\eta(x,\bar{x}) \in X_0$ cho bất kỳ $x \in X$ và $\lambda \in [0,1]$. Ta nói rằng tập X_0 là Invex nếu X_0 là Invex tại bất kỳ $x \in X_0$.
Ta nhận xét rằng, nếu $\eta(x,\bar{x}) = x - \bar{x}$ cho bất kỳ $x \in X_0$. Khi đó X_0 là Invex tại $\bar{x}$ nếu X_0 là một tập lồi tại $\bar{x}$.

Định nghĩa 2.3.1. *Ta nói rằng tập $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập hình sao η- địa phương tại $x, \bar{x} \in X_0$, nếu cho bất kỳ $x \in X_0$, ở đó tồn tại $0 < a_\eta(x,\bar{x}) \leqq 1$ sao cho $\bar{x} + \lambda\eta(x,\bar{x}) \in X_0$ với bất kỳ $\lambda \in [0, a_\eta(x,\bar{x})]$.*

Định nghĩa 2.3.2. *(Preda 1996) Giả sử $f : X_0 \to \mathbb{R}^n$ là một hàm, ở đó $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập hình sao η-địa phương tại $\bar{x} \in X_0$. Ta nói rằng f là:*
*(a) Pre-Invex nữa địa phương (**slpi**) tại $\bar{x}$ nếu đúng với $\bar{x}$ và với mỗi $x \in X_0$, ở đó tồn tại một số dương $d_\eta(x,\bar{x}) \leqq a_\eta(x,\bar{x})$ sao cho $f(\bar{x} + \lambda\eta(x,\bar{x})) \leqq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(\bar{x})$ với $0 < \lambda < d_\eta(x,\bar{x})$.*
*(b) quasi-Pre-invex nữa địa phương (**slqpi**) tại $\bar{x}$ nếu đúng với $\bar{x}$ và với mỗi $x \in X_0$, ở đó tồn tại một số dương $d_\eta(x,\bar{x}) \leqq a_\eta(x,\bar{x})$ sao cho $f(x) \leqq f(\bar{x})$ và $0 < \lambda < d_\eta(x,\bar{x})$ suy ra $f(\bar{x} + \lambda\eta(x,\bar{x})) \leqq f(\bar{x})$.*

Định nghĩa 2.3.3. *Giả sử $f : X_0 \to \mathbb{R}^n$ là một hàm, trong đó $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập hình sao η- địa phương tại $\bar{x} \in X_0$. Ta nói rằng, f là η-nữa khả vi tại $\bar{x}$ nếu $(df)^+(\bar{x},\eta(x,\bar{x}))$ tồn tại với mỗi $\bar{x} \in X_0$. Khi đó*

$$(df)^+(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) = \lim_{\lambda \to 0+} \tfrac{1}{\lambda} \left[f(\bar{x} + \lambda \eta(x, \bar{x})) - f(\bar{x}) \right].$$

(Đạo hàm tại $\bar{x}$ theo hướng $\eta(x, \bar{x})$). Nếu f là η-nửa khả vi tại bất kỳ $\bar{x} \in X_0$. Khi đó f được gọi là η-nửa khả vi trên X_0.

Chú ý 2.3.1. Các hàm được định nghĩa trên là khả vi.

2.4 Hàm Invex không trơn và các hàm liên quan

2.5 Hàm Type-I và các hàm liên quan trong không gian Banach

Giả sử E, F, và G là ba không gian Banach. Xét bài toán quy hoạch toán học sau:

$$\text{(P)} \qquad Min\{f(x) : x \in C, -g(x) \in K\},$$

trong đó f và g là các ánh xạ từ E vào F và G tương ứng, và C và K lần lược là hai tập hợp con của E và G. Clarke đã mở rộng đạo hàm theo hướng của một hàm Lipschitz địa phương từ E vào $\mathbb{R}$ giống như định nghĩa 2.5.8 tại x theo hướng vector d. Ký hiệu là $f^0(x, d)$ (xem Clarke 1983), được cho bởi

$$f^0(x, d) = \limsup_{\substack{x \to x^0 \\ t \downarrow 0}} \tfrac{f(x+td) - f(x^0)}{t}.$$

Clarke đã mở rộng gradien của $\varnothing$ tại x được cho bởi

$$\partial \varnothing(\bar{x}) = \{x^* \in E^* : \varnothing^0(\bar{x}, d) \geq \langle x^*, d \rangle, \ \ \forall d \in X\},$$

trong đó E^* là không gian tô pô đối ngẫu của E và $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là ghép nhân đối ngẫu.
Giả sử C là một tập con không rỗng của E và xét hàm khoảng cách của nó, nghĩa là, hàm $\partial_c(\cdot) : E \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bằng
$\partial_c(x) = inf\{\|x - c\| : c \in C\}$.
Hàm khoảng cách thì không khả vi hầu khắp nơi, nhưng là Lipschitz địa phương.
Giả sử $\bar{x} \in C$. Một vector $d \in E$ được gọi là tiếp xúc với C tại $\bar{x}$ nếu
$\partial_c^0(\bar{x}, d) = 0$.
Tập hợp các vector tiếp xúc tới C tại $\bar{x}$ là một nón lồi đóng trong E, được gọi (theo Clarke) nón tiếp xúc tới C tại $\bar{x}$ và ký hiệu là $T_c(\bar{x})$.

Định nghĩa 2.5.1. *Một ánh xạ $h : E \to G$ gọi là ánh xạ Lipschitz compact mạnh tại $\bar{x} \in E$ nếu tồn tại một hàm đa mục tiêu $R : E \to comp(G)$ ($comp(G)$ là tập của tất cả các tập con compact định chuẩn của G) và một hàm $r : E \times E \to \mathbb{R}_+$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

1. $\lim\limits_{\substack{x \to \bar{x}, \\ d \to 0}} r(x, d) = 0;$

2. *Tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $t^{-1}[h(x+td) - h(x)] \in (d) + \|d\| r(x,t) B_G$, với mọi $x \in \bar{x} + \alpha B_G$ và $t \in (0, \alpha)$, trong đó B_G ký hiệu là hình cầu đóng xung tâm là gốc của G;*

3. *$R(0) = \{0\}$ và R là nửa liên tục trên.*

Định nghĩa 2.5.2. *Hàm $\varnothing$ là Invex tại $x \in C$.*

Định nghĩa 2.5.3. *Hàm $f : E \to F$ và $g : E \to G$ là Invex.*

Định nghĩa 2.5.4. *Các hàm Lipschitz địa phương giá trị thực $f : E \to \mathbb{R}$ và $g : E \to \mathbb{R}$ được gọi là Type-I tại $x \in C$, đối với C nếu với mọi $y \in C$, tồn tại $\eta(y,x) \in T_C(x)$ sao cho*

$$\begin{gathered} f(y) - f(x) \geq f^0(x; \eta(y,x)), \\ -g(x) \geq g^0(x; \eta(y,x)). \end{gathered}$$

Định nghĩa 2.5.5. *(f, g) được gọi là quasi-Type-I tại $x \in C$, đối với C nếu với mọi $y \in C$, tồn tại $\eta(y,x) \in T_C(x)$ sao cho*

$$\begin{gathered} f(y) \leq f(x) \Rightarrow f^0(x; \eta(y,x)) \leq 0, \\ -g(x) \leq 0 \Rightarrow g^0(x; \eta(y,x)) \leq 0. \end{gathered}$$

Định nghĩa 2.5.6. *(f, g) được gọi là Pseudo-Type-I tại $x \in C$, đối với C nếu với mọi $y \in C$, tồn tại $\eta(y,x) \in T_C(x)$ sao cho*

$$\begin{gathered} f^0(x; \eta(y,x)) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x), \\ g^0(x; \eta(y,x)) \geq 0 \Rightarrow -g(x) \leq 0. \end{gathered}$$

Định nghĩa 2.5.7. *(f, g) được gọi là quasi-Pseudo-Type-I tại $x \in C$, đối với C nếu với mọi $y \in C$, tồn tại $\eta(y,x) \in T_C(x)$ sao cho*

$$\begin{gathered} f(y) \leq f(x) \Rightarrow f^0(x; \eta(y,x)) \leq 0, \\ g^0(x; \eta(y,x)) \geq 0 \Rightarrow -g(x) \geq 0. \end{gathered}$$

Nếu trong định nghĩa trên, ta có

$$g^0(x; \eta(y,x)) \geq 0 \Rightarrow -g(x) > 0.$$

Khi đó, ta nói rằng (f, g) là quasi-Pseudo-Type-I chặt tại $x \in C$.

Định nghĩa 2.5.8. *(f, g) được gọi là Pseudo-quasi-Type-I tại $x \in C$, đối với C nếu với mọi $y \in C$, tồn tại $\eta(y,x) \in T_C(x)$ sao cho*

$$\begin{gathered} f^0(x; \eta(y,x)) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x), \\ -g(x) \leq 0 \Rightarrow g^0(x; \eta(y,x)) \leq 0. \end{gathered}$$

Chú ý 2.5.1. Ta sử dụng khái niệm tính Invex suy rộng (Type-I, Pseudo-Type-I, quasi-Type-I, v..v...) cho các hàm giữa các không gian Banach theo hướng suy rộng. Chính thức, theo hướng sau, ta nói $f : E \to F$ và $g : E \to G$ là Type-I, quasi-Type-I, Pseudo-Type-I, quasi-Pseudo-Type-I, Pseudo-quasi-Type-I tại $x \in C$ nếu $u^* \circ f$ và $v^* \circ g$ là Type-I, quasi-Type-I, Pseudo-Type-I, quasi-Pseudo-Type-I, Pseudo-quasi-Type-I, theo hướng của các định nghĩa 2.6.4, 2.6.5, 2.6.6, 2.6.7, 2.6.8, tương ứng, với mọi $u^* \in Q^*$ và $v^* \in K^*$.

Chương 3

Đối ngẫu của bài toán tối ưu vector lồi mở rộng

Khái niệm đối ngẫu có tầm quan trọng nền tảng trong quy hoạch tuyến tính. Năm 1961 Wolfe đã dùng các điều kiện tối ưu Kuhn - Tucker để thiết lập toán đối ngẫu cho bài toán tối ưu phi tuyến theo tinh thần đối ngẫu tuyến tính. Nghĩa là xác định một bài toán tối ưu mà giá trị hàm mục tiêu là chặn dưới giá trị hàm mục tiêu của bài toán ban đầu. Nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu suy ra được nghiệm của bài toán ban đầu với một số điều kiện cụ thể. Wolfe cũng đưa ra khái niệm đối ngẫu yếu, nghĩa là thêm điều kiện lồi vào điều kiện Kunh - Tucker thì nghiệm chấp nhận được của bài toán đối ngẫu cho giá trị hàm mục tiêu nhỏ hơn hoặc bằng giá trị hàm mục tiêu của mọi nghiệm chấp nhận được của bài toán ban đầu.

Tính chất lồi suy rộng đóng vai trò cực kỳ to lớn trong nghiên cứu lý thuyết đối ngẫu. Năm 1981 Mond và Weir đã đưa ra một kiểu đối ngẫu dựa trên đối ngẫu Wolfe. Tiến bộ của đối ngẫu Mond-Weir nằm ở chỗ hàm mục tiêu giống như hàm mục tiêu của bài toán gốc và kết quả đối ngẫu có được với điều kiện nới rộng hơn so với điều kiện lồi của Wolfe.
Trong chương này, ta quy ước cho các vector trong $\mathbb{R}^n$ như sau:

$x > y$ nếu và chỉ nếu $x_i > y_i$, $i = 1, 2, ...n$,
$x \geqq y$ nếu và chỉ nếu $x_i \geqq y_i$, $i = 1, 2, ...n$,
$x \geqslant y$ nếu và chỉ nếu $x_i \geqslant y_i$, $i = 1, 2, ...n$, nhưng $x \neq y$.

3.1 Đối ngẫu Mond-Weir cho bài toán tối ưu vector (VP) khả vi

Xét bài toán tối ưu vector (VP) sau:

(VP) $\qquad Min\ f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x))$

$$\text{v.đ.k} \qquad \begin{aligned} & g(x) \leq 0, \\ & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

trong đó $f : X \to \mathbb{R}^p$ và $g : X \to \mathbb{R}^m$ là các hàm khả vi và $X \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập mở. Giả sử X_0 là tập tất cả các phương án khả thi của bài toán (VP).

Định nghĩa 3.1.1. *Điểm $\bar{x} \in X$ được gọi là phương án hữu hiệu hay nghiệm Pareto của (VP) nếu không tồn tại $x \in X$ để $f(x) \leq f(\bar{x})$.*
Bài toán đối ngẫu Mond-Weir của bài toán (VP) là

$$
\begin{array}{lll}
\text{(MWD)} & & \text{Max } f(y) \\
& \text{v.đ.k} & \tau\nabla f(y) + \lambda\nabla g(y) = 0, \\
& & \lambda g(y) \geqq 0, \\
& & \lambda \geqq 0,\ \tau \geqq 0 \text{ và } \tau e = 1;
\end{array}
$$

trong đó $e = (1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^p$.
Giả sử Y^0 là tập các phương án khả thi của bài toán (MWD), nghĩa là

$$Y^0 = \{(y, \tau, \lambda) : \tau\nabla f(y) + \lambda\nabla g(y) = 0, \lambda g(y) \geqq 0, \tau \in \mathbb{R}^p, \lambda \in \mathbb{R}^m, \lambda \geqq 0\}.$$

Định lý 3.1.1 (Đối ngẫu yếu). *Giả sử rằng*
(i) $x \in X_0$;
(ii) $(y, \tau, \lambda) \in Y^0$ và $\tau > 0$;
(iii) Bài toán (VP) là Pseudo-quasi-Type-I Univex mạnh tại y đối với $b_0, b_1, \varnothing_0, \varnothing_1$ và η;
(iv) $u \leq 0 \Rightarrow \varnothing_0(u) \leq 0$ và $u \leqq 0 \Rightarrow \varnothing_1(u) \leqq 0$;
(v) $b_0(x, y) > 0$, và $b_1(x, y) \geqq 0$.
Khi đó

$$f(x) \nleq f(y).$$

Định lý 3.1.2 (Đối ngẫu yếu). *Giả sử rằng*
(i) $x \in X_0$;
(ii) $(y, \tau, \lambda) \in Y^0$ và $\tau^0 \geq 0$;
(iii) Bài toán (VP) là Pseudo-quasi-Type-I Univex chặt yếu tại y đối với $b_0, b_1, \varnothing_0, \varnothing_1$ và η;
(iv) $u \leq 0 \Rightarrow \varnothing_0(u) \leq 0$ và $u \leqq 0 \Rightarrow \varnothing_1(u) \leqq 0$;
(v) $b_0(x, y) > 0$, và $b_1(x, y) \geqq 0$.
Khi đó

$$f(x) \nleq f(y).$$

Định lý 3.1.3 (Đối ngẫu yếu). *Giả sử rằng*
(i) $x \in X_0$;
(ii) $(y, \tau, \lambda) \in Y^0$ và $\tau \geqq 0$;
(iii) Bài toán (VP) là Pseudo-Type-I Univex chặt yếu tại y đối với $b_0, b_1, \varnothing_0, \varnothing_1$ và η;
(iv) $u \leq 0 \Rightarrow \varnothing_0(u) \leq 0$ và $u \leqq 0 \Rightarrow \varnothing_1(u) \leqq 0$;
(v) $b_0(x, y) > 0$, và $b_1(x, y) \geqq 0$.
Khi đó

$$f(x) \nleq f(y).$$

Định lý 3.1.4 (Đối ngẫu mạnh). *Giả sử $\bar{x}$ là một phương án hữu hiệu của (VP) và $\bar{x}$ thỏa mãn một sự xác định ràng buộc của (VP), khi đó tồn tại $\bar{\tau} \in \mathbb{R}^p$ và $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ sao cho $(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\lambda})$ là phương án khả thi của (MWD). Nếu một trong các Định lý 3.1.1 - 3.1.3 về đối ngẫu yếu được thỏa mãn, khi đó $(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\lambda})$ là phương án hữu hiệu của (MWD).*

3.2 Đối ngẫu Mond-Weir tổng quát cho bài toán tối ưu vector (VP) khả vi

Xét bài toán tối ưu vector (VP) sau:

$$\text{(VP)} \qquad Min\ f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x))$$

$$\text{v.đ.k} \qquad g(x) \leq 0, \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n,$$

trong đó $f : X \to \mathbb{R}^p$ và $g : X \to \mathbb{R}^m$ là các hàm khả vi và $X \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập mở. Giả sử X_0 là tập tất cả các phương án khả thi của bài toán (VP).
Bài toán đối ngẫu Mond-Weir tổng quát của bài toán (VP) là:

$$\text{(GMWD)} \qquad Max\ \ f(y) + \lambda_{J_0} g_{J_0}(y) e$$

$$\text{v.đ.k} \quad \tau \nabla f(y) + \lambda \nabla g(y) = 0 \tag{3.3}$$

$$\lambda_{J_t} g_{J_t}(y) \geqq 0, \ \ 1 \leqq t \leqq r \tag{3.4}$$

$$\lambda \geqq 0, \ \ \tau \geqq 0 \ \ \text{và} \ \ \tau e = 1;$$

trong đó $e = (1, ..., 1)^T \in R^p$ và J_t, $0 \leqq t \leqq r$ là các phân hoạch của tập M.

Định lý 3.2.1 (Đối ngẫu yếu). *Giả sử rằng với mọi x là phương án khả thi của (VP) và mọi (y, τ, λ) là phương án khả thi của (GMWD), ta có*
(a) $\tau > 0$, $(f + \lambda_{J_0} g_{J_0}(\cdot)e, \lambda_{J_t} g_{J_t}(\cdot))$ là Pseudo-quasi-Type-I Univex mạnh tại y với bất kỳ t, $1 \leqq t \leqq r$ đối với $b_0, b_1, \varnothing_0, \varnothing_1$ và η, với $\varnothing_0, \varnothing_1$ tăng;
(b) $(f + \lambda_{J_0} g_{J_0}(\cdot)e, \lambda_{J_t} g_{J_t}(\cdot))$ là Pseudo-quasi-Type-I Univex chặt yếu tại y với bất kỳ t, $1 \leqq t \leqq r$ đối với $b_0, b_1, \varnothing_0, \varnothing_1$ và η, với $\varnothing_0, \varnothing_1$ tăng;
(c) $(f + \lambda_{J_0} g_{J_0}(\cdot)e, \lambda_{J_t} g_{J_t}(\cdot))$ là Pseudo-Type-I Univex chặt yếu tại y với bất kỳ t, $1 \leqq t \leqq r$ đối với $b_0, b_1, \varnothing_0, \varnothing_1$ và η, với $\varnothing_0, \varnothing_1$ tăng.
Khi đó

$$f(x) \nleq f(y) + \lambda_{J_0} g_{J_0}(y) e.$$

Định lý 3.2.2 (Đối ngẫu mạnh). *Cho $\bar{x}$ là một phương án hữu hiệu của (VP) và cho $\bar{x}$ thỏa mãn điều kiện Slater. Khi đó tồn tại $\bar{\tau} \in \mathbb{R}^p$ và $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ sao cho $(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\lambda})$ là phương án khả thi của (GMWD). Nếu bất kỳ tính đối ngẫu yếu trong định lý 3.2.1 vẫn còn đúng, khi đó $(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\lambda})$ là một phương án hữu hiệu của (GMWD).*

3.3 Đối ngẫu Mond-Weir cho bài toán tối ưu vector (P) không khả vi

Xét bài toán tối ưu vector sau:

$$(P) \qquad \text{Min } f(x) \quad \text{v.đ.k} \quad g(x) \leqq 0,\ x \in X,$$

trong đó $f : X \to \mathbb{R}^k, g : X \to \mathbb{R}^m, X$ là tập con mở khác rỗng của $\mathbb{R}^n$, $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ là các hàm vector. Ký hiệu $f^{'}(u, \eta(x, u)) = \lim\limits_{\lambda \to 0^+} \frac{[f(u+\lambda\eta(x,u)) - f(u)]}{\lambda}$ và ký hiệu tương tự cho $g^{'}(u, \eta(x, u))$.
Cho $D = \{x \in X : g(x) \leqq 0\}$ là tập tất cả các giá trị chấp nhận được của bài toán (P) và Ký hiệu $I = \{1, ..., k\}, M = \{1, 2, ..., m\}$ là các tập chỉ số.
$J(x) = \{j \in M : g_j(x) = 0\}$ và $\widetilde{J}(x) = \{j \in M : g_j(x) < 0\}$. Nó hiển nhiên rằng $J(x) \cup \widetilde{J}(x) = M$.

Định nghĩa 3.3.1. *Điểm $\bar{x} \in D$ được gọi là phương án hữu hiệu yếu hay nghiệm Pareto yếu của (P) nếu $f(x) \nless f(\bar{x}), \forall x \in D$.*

Định nghĩa 3.3.2. *Điểm $\bar{x} \in D$ được gọi là phương án hữu hiệu yếu địa phương hay nghiệm Pareto yếu địa phương của (P) nếu tồn tại một lân cận $N(\bar{x})$ của $\bar{x}$ sao cho $f(x) \nless f(\bar{x}), \forall x \in N(\bar{x}) \cap D$.*

Bổ đề 3.3.1 (Điều kiện tối ưu cần Karush-Kuhn-Tucker)**.** *Cho $\bar{x}$ là một phương án hữu hiệu Pareto yếu của (P). Giả sử rằng g_j thì liên tục với $j \in \widetilde{J}(\bar{x})$, f và g là đạo hàm theo hướng tại $\bar{x}$ với $f^{'}(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))$ và $g^{'}_{J(\bar{x})}(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))$ là các hàm Pre-Invex của x trên X. Hơn nữa, giả sử rằng g thỏa mãn ràng buộc Slater suy rộng tại $\bar{x}$. Khi đó tồn tại $\bar{\mu} \in R^m_+$ sao cho $(\bar{x}, \bar{\mu})$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$f^{'}(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) + \bar{\mu}^T g^{'}(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) \geqq 0, \forall x \in X, \tag{3.10}$$
$$\bar{\mu}^T g(\bar{x}) = 0, \tag{3.11}$$
$$g(\bar{x}) \leqq 0. \tag{3.12}$$

Bài toán đối ngẫu của bài toán (P) được xét ở dạng Mond-Weir (1981):

$$(MWD) \qquad \text{Max } f(y) = (f_1(y), f_2(y), ..., f_k(y))$$

$$\text{v.đ.k} \quad (\xi^T f^{'} + \mu^T g^{'})(y, \eta(x, y)) \geqq 0, \forall x \in D, \tag{3.13}$$
$$\mu_j g_j(y) \geqq 0, j = 1, 2, ..., m, \tag{3.14}$$
$$\xi^T e = 1, \tag{3.15}$$
$$\xi \in \mathbb{R}^k_+, \mu \in \mathbb{R}^m_+,$$

trong đó $e = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^k$.
Ký hiệu
$$W = \{(y, \xi, \mu) \in X \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m : (\xi^T f^{'} + \mu^T g^{'})(y, \eta(x, y)) \geqq 0,$$
$$\mu_j g_j(y) \geqq 0, j = 1, 2, ..., m, \xi \in \mathbb{R}^k_+, \xi^T e = 1, \mu \in \mathbb{R}^m_+\}$$
là tập tất cả các phương án khả thi của (MWD).
Trong suốt phần này, ta ký hiệu $pr_x W$ là tập chiếu của tập W lên X.

Định lý 3.3.1 (Đối ngẫu yếu). *Cho x và (y, ξ, μ) lần lượt là các phương án khả thi tương ứng của (P) và (MWD). Hơn nữa, ta giả sử rằng bất kỳ một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:*
(a) $(f, \mu^T g)$ là Pseudo-quasi-d-Type-I Univex mạnh tại y đối với η và $\xi > 0$;
(b) $(f, \mu^T g)$ là Pseudo-quasi-d-Type-I Univex chặt yếu tại y đối với η;
(c) $(f, \mu^T g)$ là Pseudo-d-Type-I Univex chặt yếu tại y đối với η tại y trên $D \cup pr_x W$.
Khi đó

$$f(x) \nleq f(y).$$

Định lý 3.3.2 (Đối ngẫu mạnh). *Cho $\bar{x}$ là một phương án hữu hiệu yếu địa phương hoặc phương án hữu hiệu yếu của (P) thỏa mãn điều kiện Slater suy rộng, giả sử f, g là khả vi theo hướng tại $\bar{x}$ với các hàm Pre-Invex $f'(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))$, $g'(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))$ trên X và cho g_j liên tục với $j \in \widehat{J}(\bar{x})$. Khi đó tồn tại $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^m_+$ sao cho $(\bar{x}, 1, \bar{\mu})$ là khả thi của (MWD). Nếu tính đối ngẫu yếu giữa (P) và (MWD) trong định lý 3.3.1 thỏa mãn, khi đó $(\bar{x}, 1, \bar{\mu})$ là một phương án hữu hiệu yếu địa phương của (MWD).*

Định lý 3.3.3 (Đối ngẫu đảo). *Cho $(\bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\mu})$ là một phương án hữu hiệu yếu của (MWD). Hơn nữa, $\bar{y}$ trong $D \cup pr_x W$, thỏa định lí 3.3.1, khi đó $\bar{y}$ là một phương án hữu hiệu yếu của (P).*

3.4 Đối ngẫu Mond-Weir tổng quát cho bài toán tối ưu vector (P) không khả vi

Xét bài toán đối ngẫu Mond-Weir tổng quát của bài toán (P) :

(GMWD) $\qquad \text{Max } \varnothing(y, \xi, \mu) = f(y) + \mu^T_{J_0} g_{J_0}(y) e$

$$\text{v.đ.k} \quad (\xi^T f' + \mu^T g')(y, \eta(x, y)) \geqq 0, \forall x \in D, \tag{3.28}$$
$$\mu_{J_t} g_{J_t}(y) \geqq 0, 1 \leqq t \leqq r, \tag{3.29}$$
$$\xi^T e = 1, \tag{3.30}$$
$$\xi \in \mathbb{R}^k_+, \mu \in \mathbb{R}^m_+,$$

trong đó $J_t, 0 \leqq t \leqq r$ là các phân hoạch của tập M và $e = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^k$.
Ký hiệu

$$\widetilde{W} = \{(y, \xi, \mu) \in X \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m : (\xi^T f' + \mu^T g')(y, \eta(x, y)) \geqq 0,$$
$$\mu_j g_j(y) \geqq 0, j = 1, 2, ..., m, \xi \in \mathbb{R}^k_+, \xi^T e = 1, \mu \in \mathbb{R}^m_+\}$$

là tập tất cả các phương án khả thi của (GMWD).

Định lý 3.4.1 (Đối ngẫu yếu). *Giả sử x và (y, ξ, μ) lần lượt là các phương án khả thi của (P) và (GMWD) tương ứng. Nếu có bất kỳ một trong các điều kiện sau:*
(a) $\xi > 0$, $(f + \mu_{J_0} g_{J_0}, \mu_{J_t} g_{J_t})$ là Pseudo-d-Type-I Univex mạnh tại y trong $D \cup pr_x \widetilde{W}$, đối với $\eta, \forall t, 1 \leqq t \leqq r$;

(b) $(f + \mu_{J_0} g_{J_0}, \mu_{J_t} g_{J_t})$ *là Pseudo-quasi-d-Type-I Univex chặt yếu tại y trong* $D \cup pr_x \widetilde{W}$*, đối với* $\eta, \forall t, 1 \leqq t \leqq r$*;*
(c) $(f + \mu_{J_0} g_{J_0}, \mu_{J_t} g_{J_t})$ *là Pseudo-d-Type-I Univex chặt yếu tại y trong* $D \cup pr_x \widetilde{W}$*, đối với* $\eta, \forall t, 1 \leqq t \leqq r$*.*
Khi đó

$$f(x) \nleq \varnothing(y, \xi, \mu).$$

Định lý 3.4.2 (Đối ngẫu mạnh)**.** *Cho* $\bar{x}$ *là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương hoặc nghiệm hữu hiệu yếu của (P) và điều kiện Slater suy rộng được thỏa mãn, cho f và g là khả vi theo hướng tại* $\bar{x}$ *và* $f^{'}(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))$ *và* $g^{'}(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))$ *là hàm Preinvex trên X, cho* g_j *là liên tục với* $j \in \widehat{J}(\bar{x})$*. Khi đó tồn tại* $\bar{\mu} \in R_+^m$ *sao cho* $(\bar{x}, 1, \bar{\mu})$ *là khả thi của (GMWD). Hơn nữa, nếu đối ngẫu yếu giữa (P) và (GMWD) trong định lý 3.4.1 thỏa mãn, thì* $(\bar{x}, 1, \bar{\mu})$ *là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương hoặc một nghiệm hữu hiệu yếu của (GMWD).*

3.5 Đối ngẫu Mond-Weir cho bài toán tối ưu vector (P) không khả vi có hàm d-Univex

Bài toán đối ngẫu của bài toán (P) được xét ở dạng Mond-Weir (1981):

(MWD) Max $f(y) = (f_1(y), f_2(y), ..., f_k(y))$

$$\text{v.đ.k} \quad (\xi^T f^{'} + \mu^T g^{'})(y, \eta(x, y)) \geqq 0, \forall x \in D, \tag{3.36}$$

$$\mu_j g_j(y) \geqq 0, j = 1, 2, ..., m, \tag{3.37}$$

$$\xi^T e = 1, \tag{3.38}$$

$$\xi \in \mathbb{R}_+^k, \mu \in \mathbb{R}_+^m,$$

trong đó $e = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^k$.
Ký hiệu
$W = \{(y, \xi, \mu) \in X \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m : (\xi^T f^{'} + \mu^T g^{'})(y, \eta(x, y)) \geqq 0,$
$\mu_j g_j(y) \geqq 0, j = 1, 2, ..., m, \xi \in \mathbb{R}_+^k, \xi^T e = 1, \mu \in \mathbb{R}_+^m\}$
là tập tất cả các phương án khả thi của (MWD).
Ký hiệu $pr_x W$ là tập chiếu của tập W lên X.

Chú ý 3.5.1 (còn có)**.** *Định lý 3.5.1 (đối ngẫu yếu); Định lý 3.5.2 (đối ngẫu mạnh); Định lý 3.5.3 (đối ngẫu đảo) thể hiện mối quan hệ giữa nghiệm bài toán gốc và nghiệm bài toán đối ngẫu của nó.*

3.6 Đối ngẫu Mond-Weir tổng quát cho bài toán tối ưu vector (P) không khả vi có hàm d-Univex

Xét bài toán đối ngẫu Mond-Weir tổng quát của bài toán (P) :

(GMWD) Max $\varnothing(y, \xi, \mu) = f(y) + \mu_{J_0}^T g_{J_0}(y) e$

$$\begin{aligned} \text{v.đ.k} \qquad & (\xi^T f' + \mu^T g')(y, \eta(x,y)) \geqq 0, \forall x \in D, & (3.51)\\ & \mu_{J_t} g_{J_t}(y) \geqq 0, \;\; 1 \leqq t \leqq r, & (3.52)\\ & \xi^T e = 1, & (3.53)\end{aligned}$$

$$\xi \in \mathbb{R}^k_+, \mu \in \mathbb{R}^m_+,$$

trong đó $J_t, 0 \leqq t \leqq r$ là các phân hoạch của tập M và $e = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^k$. Ký hiệu

$\widetilde{W} = \{(y, \xi, \mu) \in X \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m : (\xi^T f' + \mu^T g')(y, \eta(x,y)) \geqq 0,$
$\mu_j g_j(y) \geqq 0, j = 1, 2, ..., m, \xi \in \mathbb{R}^k_+, \xi^T e = 1, \mu \in \mathbb{R}^m_+\}$

là tập tất cả các phương án khả thi của (GMWD).

Chú ý 3.6.1 (còn có). *Định lý 3.6.1 (đối ngẫu yếu); Định lý 3.6.2 (đối ngẫu mạnh) thể hiện mối quan hệ giữa nghiệm bài toán gốc và nghiệm bài toán đối ngẫu của nó.*

3.7 Đối ngẫu Mond-Weir cho bài toán tối ưu vector (P) không khả vi có hàm d-Type-I-Univex

Bài toán đối ngẫu của bài toán (P) được xét ở dạng Mond-Weir (1981):

(MWD) $\qquad \text{Max } f(y) = (f_1(y), f_2(y), ..., f_k(y))$

$$\begin{aligned} \text{v.đ.k} \qquad & (\xi^T f' + \mu^T g')(y, \eta(x,y)) \geqq 0, \forall x \in D, & (3.59)\\ & \mu_j g_j(y) \geqq 0, j = 1, 2, ..., m, & (3.60)\\ & \xi^T e = 1, & (3.61)\end{aligned}$$

$$\xi \in \mathbb{R}^k_+, \mu \in \mathbb{R}^m_+,$$

trong đó $e = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^k$.
Ký hiệu
$W = \{(y, \xi, \mu) \in X \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m : (\xi^T f' + \mu^T g')(y, \eta(x,y)) \geqq 0,$
$\mu_j g_j(y) \geqq 0, j = 1, 2, ..., m, \xi \in \mathbb{R}^k_+, \xi^T e = 1, \mu \in \mathbb{R}^m_+\}$
là tập tất cả các phương án khả thi của (MWD).
Ký hiệu $pr_x W$ là tập chiếu của tập W lên X.

Định lý 3.7.1 (Đối ngẫu yếu). *Cho $\bar{x}$ và (y, ξ, μ) lần lượt là các phương án khả thi của (P) và (MWD) tương ứng. Giả sử có một trong các điều kiện sau:*
(a) f là Pseudo-d-Univex mạnh tại y trên $D \cup pr_x W$ đối với $b_0, \varnothing_0$ và η với $\xi > 0, b_0 > 0, a \leq 0 \Rightarrow \varnothing_0(a) \leq 0$ và $\mu^T g$ là quasi-d-Univex tại y trên $D \cup pr_x W$ đối với $b_1, \varnothing_1$ và η với $\xi > 0, a \leqq 0 \Rightarrow \varnothing_0(a) \leqq 0$;
(b) f là Pseudo-d-Univex chặt yếu tại y trên $D \cup pr_x W$ đối với $b_0, \varnothing_0$ và η với $b_0 \geq 0, a \leq 0 \Rightarrow \varnothing_0(a) \leq 0$ và $\mu^T g$ là quasi-d-Univex tại y trên $D \cup pr_x W$ đối với $b_1, \varnothing_1$ và η với $a \leqq 0 \Rightarrow \varnothing_1(a) \leqq 0$.
(c) f là Pseudo-d-Univex chặt yếu tại y trên $D \cup pr_x W$ đối với $b_0, \varnothing_0$ và η với $b_0 \geq 0, a \leq 0 \Rightarrow \varnothing_0(a) \leq 0$ và $\mu^T g$ là quasi-d-Univex chặt tại y trên $D \cup pr_x W$ đối với $b_1, \varnothing_1$ và η với $a \leqq 0 \Rightarrow \varnothing_1(a) \leqq 0$.

Khi đó

$$f(x) \nleq f(y)$$

Định lý 3.7.2 (Đối ngẫu mạnh). *Cho $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương hoặc nghiệm hữu hiệu yếu của (P) và điều kiện Slater suy rộng được thỏa mãn, cho (f, g) là khả vi theo hướng tại $\bar{x}$ với $f'(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))$ và $g'(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))$ là hàm Preinvex trên X, cho g_j là liên tục với $j \in \widehat{J}(\bar{x})$. Khi đó tồn tại $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^m_+$ sao cho $(\bar{x}, 1, \bar{\mu})$ là khả thi của (MWD). Hơn nữa, nếu đối ngẫu yếu giữa (P) và (MWD) trong định lý 3.5.1 thỏa mãn, khi đó $(\bar{x}, 1, \bar{\mu})$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của (MWD).*

Định lý 3.7.3 (Đối ngẫu đảo). *Cho $(\bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\mu})$ là một nghiệm hữu hiệu yếu của (MWD). Nếu giả thuyết của định lý 3.5.1 thỏa mãn tại $\bar{y}$ trong $D \cup pr_x W$, khi đó $\bar{y}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu của (P).*

3.8 Đối ngẫu Mond-Weir tổng quát cho bài toán tối ưu vector (P) không khả vi có hàm d-Type-I-Univex

Xét bài toán đối ngẫu Mond-Weir tổng quát của bài toán (P) :

(GMWD) $\qquad \text{Max } \varnothing(y, \xi, \mu) = f(y) + \mu^T_{J_0} g_{J_0}(y) e$

$$\text{v.đ.k} \quad (\xi^T f' + \mu^T g')(y, \eta(x, y)) \geqq 0, \forall x \in D, \tag{3.74}$$

$$\mu_{J_t} g_{J_t}(y) \geqq 0, 1 \leqq t \leqq r, \tag{3.75}$$

$$\xi^T e = 1, \tag{3.76}$$

$$\xi \in \mathbb{R}^k_+, \mu \in \mathbb{R}^m_+,$$

trong đó $J_t, 0 \leqq t \leqq r$ là các phân hoạch của tập M và $e = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^k$. Ký hiệu

$$\widetilde{W} = \{(y, \xi, \mu) \in X \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m : (\xi^T f' + \mu^T g')(y, \eta(x, y)) \geqq 0, \\ \mu_j g_j(y) \geqq 0, j = 1, 2, ..., m, \xi \in \mathbb{R}^k_+, \xi^T e = 1, \mu \in \mathbb{R}^m_+\}$$

là tập tất cả các phương án khả thi của (GMWD).

Định lý 3.8.1 (Đối ngẫu yếu). *Giả sử x và (y, ξ, μ) lần lượt là các phương án khả thi của (P) và (GMWD) tương ứng. Giả sử rằng một trong các điều kiện sau được giữ:*
(a) $\xi > 0$, $f + \mu_{J_0} g_{J_0}$ là Pseudo-d-Univex mạnh và $\mu_{J_t} g_{J_t}$ là quasi-d-Univex tại y trong $D \cup pr_x \widetilde{W}$, đối với $b_0, b_1, \varnothing_0, \varnothing_1$ η, với $b_0 > 0, \xi > 0, a \leq 0, \Rightarrow \varnothing_0(a) \leq 0$, và $a \leqq 0 \Rightarrow \varnothing_1(a) \leqq 0$, $\forall t, 1 \leqq t \leqq r$;
(b) $\xi > 0$, $f + \mu_{J_0} g_{J_0}$ là Pseudo-d-Univex chặt yếu và $\mu_{J_t} g_{J_t}$ là quasi-d-Univex tại y trong $D \cup pr_x \widetilde{W}$, đối với $b_0, b_1, \varnothing_0, \varnothing_1$ η, với $b_0 \geq 0, a \leq 0, \Rightarrow \varnothing_0(a) \leq 0$, và $a \leqq 0 \Rightarrow \varnothing_1(a) \leqq 0$, $\forall t, 1 \leqq t \leqq r$;
(c) $\xi > 0$, $f + \mu_{J_0} g_{J_0}$ là Pseudo-d-Univex chặt yếu và $\mu_{J_t} g_{J_t}$ là quasi-d-Univex chặt tại y trong $D \cup pr_x \widetilde{W}$, đối với $b_0, b_1, \varnothing_0, \varnothing_1$ η, với $b_0 \geq 0, a \leq 0, \Rightarrow \varnothing_0(a) \leq 0$, và $a \leqq 0 \Rightarrow \varnothing_1(a) \leqq 0$, $\forall t, 1 \leqq t \leqq r$.

Khi đó

$$f(x) \nleq \varnothing(y, \xi, \mu).$$

Định lý 3.8.2 (Đối ngẫu mạnh). *Cho $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương hoặc nghiệm hữu hiệu yếu của (P) và điều kiện Slater suy rộng được thỏa mãn, cho f,g là khả vi theo hướng tại $\bar{x}$ và $f^{'}(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))$ và $g^{'}(\bar{x}, \eta(x, \bar{x}))$ là các hàm Pre-Invex trên X, và cho g_j là liên tục với $j \in \widehat{J}(\bar{x})$. Khi đó tồn tại $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^m_+$ sao cho $(\bar{x}, 1, \bar{\mu})$ là khả thi của (GMWD). Hơn nữa, nếu đối ngẫu yếu giữa (P) và (GMWD) trong định lý 3.8.1 thỏa mãn, khi đó $(\bar{x}, 1, \bar{\mu})$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của (GMWD).*

3.9 Đối ngẫu Mond-Weir cho bài toán tối ưu vector (VP) không khả vi

Trong phần này ta xét một vài kết quả đối ngẫu của bài toán tối ưu vector không khả vi sử dụng đạo hàm Clarke.
Xét cặp bài toán tối ưu vector sau:

(VP)
$$\begin{aligned} &\text{Min } f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x)) \\ &\text{v.đ.k.} \quad g(x) \leqq 0,\ j = 1, ..., m, \end{aligned}$$

(VD)
$$\text{Max } f(u) = (f_1(u), ..., f_p(u))$$

$$\text{v.đ.k} \quad 0 \in \sum_{i=1}^{p} \mu_i \partial^c f_i(u) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \partial^c g_j(u), \tag{3.82}$$

$$\lambda_j g_j(u) \geqq 0, j = 1, ..., m, \tag{3.83}$$

$$(\mu_1, ..., \mu_p, \lambda_1, ..., \lambda_m) \geq 0, \tag{3.84}$$

trong đó $f_i : X \to \mathbb{R}, i = 1, ..., p$ và $g_j : X \to \mathbb{R}, j = 1, ..., m$, là các các hàm Lipschitz địa phương.

Định lý 3.9.1 (Đối ngẫu yếu). *Giả sử rằng (f, g) là Pseudo-Type-I chặt yếu đối với η. Sau đó, cho x là phương án khả thi bất kỳ của (VP) và (u, μ, λ) là phương án khả thi bất kỳ của (VD). Khi đó $f(x) \nless f(u)$.*

Định lý 3.9.2 (Đối ngẫu yếu). *Giả sử rằng (f, g) là Pseudo-Type-I Univex chặt yếu đối với η, $b_0 > 0, b_1 \geqq 0, \varnothing_0$ và $\varnothing_1$ là tăng. Sau đó, cho x là phương án khả thi bất kỳ của (VP) và (u, μ, λ) là phương án khả thi bất kỳ của (VD). Khi đó $f(x) \nless f(u)$.*

Định lý 3.9.3 (Đối ngẫu mạnh). *Cho $\bar{x}$ là một phương án hữu hiệu của (VP). Khi đó, tồn tại $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ và $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ sao cho $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ là một phương án khả thi của (VD) và giá trị mục tiêu của chúng thì giống nhau. Hơn nữa, nếu (f, g) là Pseudo-Type-I chặt yếu đối với η, khi đó $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ là một phương án hữu hiệu yếu của (VD).*

Định lý 3.9.4 (Đối ngẫu mạnh)**.** *Cho $\bar{x}$ là một phương án hữu hiệu yếu của (VP). Khi đó, tồn tại $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ và $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ sao cho $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ là một phương án khả thi của (VD) và giá trị mục tiêu của chúng thì giống nhau. Hơn nữa, Nếu (f, g) là Pseudo-Type-I Univex chặt yếu đối với $\eta, b_0, b_1, \varnothing_0$ và $\varnothing_1$, khi đó $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ là một phương án hữu hiệu yếu của (VD).*

3.10 Đối ngẫu cho bài toán tối ưu vector (P) trong không gian Banach

Bài toán tối ưu vector tổng quát được định nghĩa là

(P) $\quad$ Min $\{f(x) : x \in C, -g(x) \in K\}$

trong đó $f : E \to F$ và $g : E \to G$ là Lipschitz compact mạnh tại $x_0 \in E, K \subset G$ là một điểm nón lồi đóng với phần trong không rỗng, và C là một tập con khác rỗng của E.

Cho $\Im$ biểu thị tập của tất cả các phương án khả thi của bài toán (P), giả sử là không rỗng, đó là:

$$\Im = \{x \in C : g(x) \geq 0\} \neq \emptyset.$$

Mệnh đề 3.10.1. *Nếu $x_0 \in \Im$ là phương án hữu hiệu yếu của (P), khí đó có tồn tại một cặp vector khác không $(u^*, v^*) \in Q^* \times K^*$ sao cho, với $k > 0$,*

$$0 \in \partial(u^* \circ f + v^* \circ g + k\partial_c)(x_0),$$

$$\langle v^*, g(x_0)\rangle = 0.$$

Ta giả sử rằng giới hạn của bài toán (P) thỏa mãn điều kiện Slater.

Xét bài toán đối ngẫu của bài toán (P) sau:

(D) $\quad$ Max $f(w)$

v.đ.k $\quad w \in C, u^* \in Q^*, u^* \neq 0, v^* \in K^*,$

$$\langle v^*, g(w)\rangle \geq 0, 0_g \in \partial(u^* \circ f + v^* \circ g + k\partial_c)(w).$$

Chú ý 3.10.1 (còn có)**.** *Định lý 3.10.1 (đối ngẫu yếu); Định lý 3.10.2 (đối ngẫu yếu); Định lý 3.10.3 (đối ngẫu yếu); Định lý 3.10.4 (đối ngẫu mạnh); Định lý 3.10.5 (đối ngẫu mạnh); Định lý 3.10.6 (đối ngẫu mạnh).*

3.11 Đối ngẫu cho bài toán tối ưu phân thức (P)

Bài toán tối ưu phân thức (P) là

(P) $\quad$ Min $F(x) = \sup\limits_{y \in Y} \frac{f(x,y)}{h(x,y)}$

v.đ.k. $\quad g(x) \leqq 0,$

trong đó Y là một tập con compact của $\mathbb{R}^m$, $f(\cdot, \cdot)$ và $h(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ là các hàm khả vi với $f(x, y) \geqq 0$ và $h(x, y) > 0$, và $g(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ là một hàm khả vi. Ký hiệu

$Y(x) = \left\{ y \in Y : \frac{f(x,y)}{h(x,y)} = \sup\limits_{y \in Y} \frac{f(x,y)}{h(x,y)} \right\}, J = \{1, 2, ..., p\}, J(x) = \{j \in J : g_j(x) = 0\}$
và
$$K = \{(s, t, \in y) \in N \times \mathbb{R}^s_+ \times \mathbb{R}^{ms} : 1 \leqq s \leqq n+1, t = (t_1, ..., t_s) \in \mathbb{R}^s_+ \text{ với } \sum_{i=1}^{s} t_i = 1 \text{ và } \bar{y} = (y_1, ..., y_s) \text{ và } y_i \in Y(x), i = 1, ..., s\}.$$

Bổ đề 3.11.1 (Chandra và Kumar, 1995)**.** *Cho x^* là một phương án tối ưu của (P) và cho $\nabla g_j(x^*), j \in J(x^*)$ là độc lập tuyến tính. Khi đó tồn tại $(s^*, t^*, \bar{y}) \in K$, $v^* \in \mathbb{R}$, và $\mu \in \mathbb{R}^p_+$ sao cho*

$$\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* \{\nabla f(x^*, y_i) - v \nabla h(x^*, y_i)\} + \nabla \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* g_j(x^*) = 0, \tag{3.97}$$

$$f(x^*, y_i) - v^* h(x^*, y_i) = 0, i = 1, ..., s^*, \tag{3.98}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \mu_j^* g_j(x^*) = 0. \tag{3.99}$$

Xét bài toán đối ngẫu của bài toán (P) phân thức sau:

(D) $\quad Max_{(s,t,\bar{y}) \in K} \sup_{(z,t,\bar{y}) \in H_1(s,t,\bar{y})} V$

$$\text{v.đ.k} \quad \sum_{i=1}^{s} t_i \{\nabla f(z, y_i) - v \nabla h(z, y_i)\} + \nabla \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(z) = 0, \tag{3.100}$$

$$\sum_{i=1}^{s} t_i \{f(z, y_i) - v h(z, y_i)\} \geqq 0 \tag{3.101}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(z) \geqq 0, \tag{3.102}$$

$$(s, t, \bar{y}) \in K,$$

trong đó, $H_1(s, t, \bar{y})$ biểu thị tập của tất cả bộ ba $(z, \mu, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}_+$ thỏa mãn (3.100)- (3.102). Cho một bộ ba $(s, t, \bar{y}) \in K$, nếu tập $H_1(s, t, \bar{y})$ là rỗng, khi đó ta định nghĩa supremum trên nó là $-\infty$.

Chú ý 3.11.1 (còn có)**.** *Định lý 3.11.1 (đối ngẫu yếu); Định lý 3.11.2 (đối ngẫu yếu); Định lý 3.11.3 (đối ngẫu mạnh); Định lý 3.11.4 (đối ngẫu đảo chặt) thể hiện mối quan hệ giữa nghiệm bài toán gốc và nghiệm bài toán đối ngẫu của nó.*

Kết luận

Từ các công trình nghiên cứu có liên quan, chúng tôi đã cố gắng khảo sát, tổng hợp, sắp xếp một cách có hệ thống các kết quả thu nhận được, chứng minh và làm sáng tỏ một số định lí quan trọng về lí thuyết đối ngẫu của một số bài toán tối ưu vector lồi mở rộng ở dạng đối ngẫu Mond-Weir.

1. Nội dung chính của luận văn như sau:

Trong chương 1 hệ thống lại một số khái niệm cơ bản về hàm lồi và hàm lồi mở rộng cụ thể là: Hàm lồi và các hàm mở rộng, hàm Invex và các hàm mở rộng, hàm Type-I và các hàm liên quan, hàm Univex và các hàm liên quan, hàm V-Invex và các hàm liên quan.

Trong chương 2 hệ thống lại một số khái niệm về hàm Type-I mở rộng và các hàm liên quan cụ thể là: Hàm Type-I Univex mở rộng, hàm d-Type-I không khả vi và các hàm liên quan, các hàm Type-I liên thông nữa địa phương, hàm Invex không trơn và các hàm liên quan, hàm Type-I và các hàm liên quan trong không gian Banach.

Trong chương 3 đề tài đưa ra một số dạng đối ngẫu mới cho bài toán tối ưu vector lồi mở rộng và một vài định lý đối ngẫu yếu, đối ngẫu mạnh và đối ngẫu đảo của bài toán đối ngẫu cụ thể là: Đối ngẫu Mond-Weir (tổng quát) cho bài toán tối ưu vector (VP) khả vi, đối ngẫu Mond-Weir (tổng quát) cho bài toán tối ưu vector (P) không khả vi, đối ngẫu Mond-Weir (tổng quát) cho bài toán tối ưu vector (P) không khả vi có hàm d-Univex, đối ngẫu Mond-Weir (tổng quát) cho bài toán tối ưu vector (P) không khả vi có hàm d-Type-I-Univex, đối ngẫu Mond-Weir cho bài toán tối ưu vector (VP) không khả vi, đối ngẫu cho bài toán tối ưu vector (P) trong không gian Banach, đối ngẫu cho bài toán tối ưu phân thức (P).

Hy vọng luận văn là tài liệu tham khảo hữu ích về tối ưu đa mục tiêu.

2. Hướng phát triển tiếp theo của luận văn là: Nghiên cứu đối ngẫu Mond-Weir cho bài toán tối ưu lồi mở rộng trên không gian phức, từ đó hiểu sâu hơn về lí thuyết tối ưu đa mục tiêu.