

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Nguyễn Thị Hồng Hạnh

G_2 - CẤU TRÚC TRÊN ĐA TẠP 7 - CHIỀU

Chuyên ngành : Hình học và tô pô
Mã số : 60 46 10

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS. LÊ ANH VŨ

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS Lê Anh Vũ. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy, vì Thầy đã tạo cơ hội cho tôi làm quen với lý thuyết nhóm Lie và đại số Lie, G_2 - cấu trúc,...Thầy đã chỉ cho tôi cách tiếp cận với kiến thức toán học cao cấp, cách học tập và nghiên cứu một cách khoa học nhất để lĩnh hội được kiến thức.

Tôi xin chân thành cảm ơn TS Nguyễn Hà Thanh, Thầy đã cùng với PGS. TS Lê Anh Vũ truyền đạt cho chúng tôi các kiến thức để có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các Thầy trong tổ Hình học, khoa Toán – Tin Trường Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh đã giúp đỡ tôi nâng cao trình độ chuyên môn và phương pháp làm việc hiệu quả trong suốt quá trình học Đại học và Cao học.

Tôi xin chân thành cảm ơn bạn Nguyễn Thị Thu Hà, bạn đã ủng hộ tinh thần, đã giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình soạn thảo luận văn.

Chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Tổ chức hành chính, phòng Khoa học Công nghệ và Sau đại học, phòng Kế hoạch – Tài chính Trường Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh; cùng toàn thể quý đồng nghiệp, bạn bè, gia đình đã động viên, giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn thành luận văn này.

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 04 năm 2010

Tác giả

Nguyễn Thị Hồng Hạnh

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Sau nhiều kết quả về nhóm G_2 và lý thuyết biểu diễn của nó, có nhiều phương pháp đưa ra để tính các bất biến khác nhau của G_2 - cấu trúc, những kết quả đạt được đã được chia làm 3 nhóm chính:

Nhóm 1: Gồm những công thức được suy ra từ độ cong vô hướng và độ cong Ricci của G_2 - cấu trúc liên quan đến độ xoắn và đạo hàm hiệp biến với liên thông Levi – Civita. Khi 3 - dạng cơ bản của G_2 - cấu trúc là đóng thì độ cong vô hướng không dương và triệt tiêu khi và chỉ khi cấu trúc đó là xoắn tự do. Kết quả này đã được tổng quát hoá trong một kết quả gần đây của Clayton và Stefan Ivanov về sự không tồn tại của G_2 - cấu trúc Einstein trên một đa tạp compact 7 - chiều.

Nhóm 2: Đưa ra hình học của những bất biến thứ nhất và thứ hai của G_2 - cấu trúc theo quan điểm của lý thuyết biểu diễn của G_2 .

Nhóm 3: Đưa ra những công thức nghiệm cho dòng Lapla. Cụ thể là những công trình của Thomas Friedrich và Stefan Ivanov về phương trình Killing Spinor và hình học trên đa tạp G_2 vi phân.

Những kết quả trên về G_2 - cấu trúc đưa ra gần đây bởi các tác giả Hitchin, Joyce, Robert Bryant và Lê Hồng Vân,... Trong đó Robert Bryant tập hợp các kết quả của các tác giả khác và làm sáng tỏ hơn về G_2 - cấu trúc, song ông chưa khẳng định sự tồn tại của G_2 - cấu trúc trên đa tạp 7 - chiều. Việc khẳng định sự tồn tại của G_2 - cấu trúc trên đa tạp 7 - chiều có trong một bài báo của TS. Lê Hồng Vân. Do đó nhằm làm một nghiên cứu rõ ràng và có tính toàn cục hơn về vấn đề này chúng tôi chọn đề tài về G_2 - cấu trúc trên đa tạp 7 - chiều. Cụ thể, chủ yếu dựa trên tài liệu tham khảo của TS Lê Hồng Vân và Robert Bryant, chúng tôi muốn hệ thống các kết quả về G_2 - cấu trúc, chúng tôi cũng đưa ra hai cách quan sát G_2 - cấu trúc trên $S^3 \times S^4$ và xây dựng không gian phổ dụng cho G_2 - cấu trúc.

Một đa tạp Riemann 7 – chiều được gọi là một đa tạp G_2 nếu nhóm cấu trúc của nó cảm sinh bởi một nhóm Lie của G_2 . Sự tồn tại của G_2 - cấu trúc tương đương với sự tồn tại của 3 – dạng không suy biến trên đa tạp, ta còn gọi là dạng cơ bản đóng trên G_2 - đa tạp.

Một đa tạp paracompact 7 – chiều là G_2 - đa tạp nếu và chỉ nếu nó là một đa tạp tròn, có hướng.

Fernandez và Gray đã chia G_2 - đa tạp thành 16 lớp theo đạo hàm hiệp biến của 3 – dạng cơ bản. Nếu dạng cơ bản song song với liên thông Levi-Civita thì nhóm đối đồng điều chứa trong G_2 . Khi đó ta nói rằng G_2 - đa tạp hoặc G_2 - cấu trúc trên đa tạp là song song. Trong trường hợp này metric cảm sinh trên G_2 - đa tạp là phẳng Ricci. Gray đã chỉ ra rằng G_2 - đa tạp là song song khi dạng cơ bản của nó là điều hòa. Ví dụ đầu tiên về G_2 - đa tạp song song đầy đủ được đưa ra bởi Bryant và Salamon. Ví dụ compact về G_2 - đa tạp song song được đưa ra bởi Joyce, và gần đây bởi Kovalev. G_2 - đa tạp song song, compact được đề cập đến như là một không gian Joyce. Điểm quan trọng là độ cong vô hướng Riemann của G_2 - đa tạp có thể được biểu diễn trong các số hạng của dạng cơ bản và đạo hàm của nó, và hơn nữa độ cong vô hướng cho ta một cách kí hiệu về G_2 - đa tạp.

Trong chương II, tôi cũng đã trình bày về G_2 - đa tạp đóng, tức là G_2 - đa tạp với dạng cơ bản đóng (đôi khi trong một vài tài liệu còn gọi là G_2 - đa tạp mẫu). Những ví dụ compact về G_2 - đa tạp đóng được đưa ra bởi Fernandez. Robert Bryant đã chỉ ra rằng nếu độ cong vô hướng của G_2 - cấu trúc đóng không âm thì G_2 - đa tạp là song song.

Nếu không có tính cộng tính, sự tồn tại G_2 - cấu trúc là một câu hỏi thuần túy topo. Lớp trung gian của G_2 - cấu trúc đóng không được nghiên cứu sâu. Chúng tôi chỉ thấy vài ví dụ về cấu trúc này trên không gian thuần nhất và hình học địa phương của chúng. Ví dụ về G_2 - cấu trúc phẳng trên M^7 được xây dựng bởi Joyce và Kovalev, họ bắt đầu từ một M^7 với holonomy đơn và sau đó thêm tính chất topo vào đa tạp này.

Ở chương III, chúng tôi trình bày một cách xây dựng G_2 - cấu trúc đóng bằng cách nhúng một đa tạp đóng M^7 thành nhóm nửa đơn G . Cơ sở cho xây dựng này là sự tồn tại của một 3 – dạng đa đối xứng đóng nào trên G thì hạn chế của 3 – dạng này trên bất kì đa tạp 7 – chiều nào trong G cũng sẽ là một G_2 - dạng. Chúng tôi cũng trình bày hai cách khác nhau để đưa G_2 - cấu trúc đóng lên $S^3 \times S^4$ bằng phương pháp này. Trong định lí 3.3.4, chúng tôi chứng minh rằng mọi G_2 - cấu trúc nguyên vẹn ϕ trên một M^7 compact có thể đa nhúng trong một tích hữu hạn của $S^3 = SU(2)$ với một 3 – dạng đóng chính tắc h sao cho cái kéo lại của h bằng với ϕ . Qua đây, tôi cũng nhận thấy rằng sự tồn tại của một G_2 - cấu trúc đóng trên một đa tạp mở M^7 là một câu hỏi topo.

Đó cũng chính là lí do đề tài của chúng tôi mang tên “ G_2 - cấu trúc trên đa tạp 7- chiều”.

2. Mục đích

Tìm hiểu về G_2 - cấu trúc và cách đưa G_2 - cấu trúc lên đa tạp 7- chiều.

3. Đối tượng và nội dung nghiên cứu

Nghiên cứu về G_2 - cấu trúc trên đa tạp 7- chiều.

4. Cấu trúc luận văn

Về nội dung, luận văn gồm Lời mở đầu, 3 chương và phần kết luận.

1. Lời mở đầu. Nêu xuất xứ của vấn đề và đặt bài toán nghiên cứu.

2. Chương I. Trình bày các kiến thức chuẩn bị: các lí thuyết biểu diễn của G_2 , G_2 - dạng ,... và giới thiệu các kiến thức chung nhất để làm toán trên đa tạp 7 - chiều.

3. Chương II. Trình bày cụ thể về G_2 - cấu trúc, G_2 - cấu trúc đóng.

4. Chương III. Trình bày sự tồn tại của G_2 - cấu trúc trên đa tạp 7 - chiều, không gian phổ dụng của G_2 .

5. Phần kết luận. Những kết luận rút ra từ việc nghiên cứu đề tài.

Chương 1: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này chủ yếu đưa ra những cơ sở lý thuyết cho các kết quả nghiên cứu ở các chương sau, trong đó, ta sẽ nhắc lại các khái niệm và những tính chất cơ bản về đại số Lie và nhóm Lie (thực).

Một số mệnh đề và định lý được phát biểu nhưng không chứng minh. Độc giả nào quan tâm đến các chứng minh hoặc muốn tìm hiểu sâu về các khái niệm xin xem các tài liệu...

1.1. Đại số Lie

1.1.1. Định nghĩa

Cho K là trường và $\mathfrak{g}$ là không gian vector trên K . Ta bảo $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie trên K hay K – đại số Lie nếu trên $\mathfrak{g}$ đã cho một phép nhân gọi là móc Lie:

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

$$(x, y) \mapsto [x, y] \quad (\text{tích Lie hay móc Lie của } x \text{ và } y)$$

sao cho các tiên đề sau đây thoả mãn:

(L₁) Móc Lie là hoán tử song tuyến tính. Tức là:

$$[\lambda x + \mu y, z] = \lambda [x, z] + \mu [y, z],$$

$$[x, \lambda y + \mu z] = \lambda [x, y] + \mu [x, z]; \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}, \quad \forall \lambda, \mu \in K$$

(L₂) Móc Lie phản xứng. Tức là: $[x, x] = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g}$

(L₃) Móc Lie thoả mãn đồng nhất thức Jacôbi. Tức là:

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \quad (\forall x, y, z \in \mathfrak{g})$$

Nhận xét

Nếu K là trường có đặc số khác 2 thì (L₂) tương đương với

$$(L'_2): [x, y] = -[y, x], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

Nếu $[x, y] = 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$ thì ta bảo móc Lie tầm thường và $\mathfrak{g}$ là đại số Lie giao hoán.

Số chiều của đại số Lie $\mathfrak{g}$ chính là số chiều của không gian vector $\mathfrak{g}$.

Cho $\mathfrak{g}$ là một không gian hữu hạn chiều trên trường K . Giả sử số chiều của $\mathfrak{g}$ là n . Cấu trúc đại số Lie trên $\mathfrak{g}$ có thể được cho bởi móc Lie của từng cặp vector thuộc cơ sở $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ đã chọn trước trên $\mathfrak{g}$ như sau:

$$[e_i, e_j] := \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad c_{ij}^k \in K$$

Các hệ số c_{ij}^k được gọi là hằng số cấu trúc của đại số Lie $\mathfrak{g}$.

Khi K là trường số thực $\mathbb{R}$ thì $\mathfrak{g}$ được gọi là đại số Lie thực. Nội dung của luận văn chỉ đề cập và nghiên cứu các đại số Lie thực nên nếu không sợ nhầm lẫn thì ta vẫn dùng thuật ngữ đại số Lie để chỉ đại số Lie thực.

1.1.2. Ví dụ

a) Không gian $\mathbb{R}^n$ với móc Lie $[x, y] \equiv 0$ (tầm thường) hiển nhiên là một đại số Lie.

Và được gọi là đại số Lie thực giao hoán n – chiều.

b) Không gian $\mathbb{R}^3$ với tích có hướng thông thường là một đại số Lie thực 3 -chiều.

c) Cho A là một đại số (kết hợp) trên trường K . Với mọi cặp $(x, y) \in A$, ta định nghĩa $[x, y] := xy - yx$, khi đó A trở thành một đại số Lie. Nói riêng ta có đại số $Mat(n, K)$ các ma trận vuông cấp n trên K là một đại số Lie với móc Lie $[A, B] := AB - BA, \forall A, B \in Mat(n, K)$.

d) Đặc biệt, xét đại số các toán tử tuyến tính $End(V)$ trên K – không gian vector V . Khi đó, $End(V)$ trở thành đại số Lie với móc Lie được xác định như sau: $[f, g] := f \circ g - g \circ f, \forall f, g \in End(V)$.

e) Cho A là một đại số trên trường K . Toán tử tuyến tính $\varphi: A \rightarrow A$ được gọi là toán tử vi phân trên A nếu:

$$\varphi(xy) = \varphi(x).y + x.\varphi(y)$$

Kí hiệu $Der(A)$ là tập hợp tất cả các toán tử vi phân trên A . Khi đó $Der(A)$ trở thành một đại số trên K với phép nhân là phép hợp thành ánh xạ. $Der(A)$ trở thành một đại số Lie trên K với móc Lie được định nghĩa là: $[\varphi_1, \varphi_2] := \varphi_1 \circ \varphi_2 - \varphi_2 \circ \varphi_1$

1.1.3. Đồng cấu và đẳng cấu đại số Lie

Cho $\mathfrak{g}_1$ và $\mathfrak{g}_2$ là hai K – đại số Lie và $f: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ là một ánh xạ.

Ta bảo f là một đồng cấu đại số Lie nếu:

(i) f là ánh xạ K – tuyến tính.

(ii) f bảo toàn móc Lie, tức là: $f([x, y]) = [f(x), f(y)], \forall x, y \in \mathfrak{g}_1$

Nếu f còn là một song ánh thì f được gọi là đẳng cấu đại số Lie.

Các đại số Lie trên trường K lập thành một phạm trù với các cấu xạ chính là các đồng cấu đại số Lie.

Mỗi đồng cấu đại số Lie $f: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \text{End}(V)$ ($\text{End}(V)$ là đại số Lie các toán tử tuyến tính trên không gian vector V) được gọi là biểu diễn tuyến tính của $\mathfrak{g}_1$ trong không gian vector V , kí hiệu (f, V) . Nếu $\dim V = n < +\infty$, khi ta cố định cơ sở nào đó của V thì ta có $f: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \text{End}(V) \equiv \text{Mat}(n, K)$. Để đơn giản thì đôi khi người ta dùng thuật ngữ “biểu diễn” thay cho thuật ngữ “biểu diễn tuyến tính”.

Khi f là một đơn cấu thì f được gọi là biểu diễn khớp.

ĐỊNH LÝ ADO

Mọi đại số Lie hữu hạn chiều đều có ít nhất một biểu diễn tuyến tính khớp hữu hạn chiều.

Định lý quan trọng này nói lên rằng, có thể quy tất cả các phép chứng minh của đại số Lie về trường hợp đại số Lie ma trận.

1.1.4. Biểu diễn chính quy của đại số Lie

Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie. $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \{f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} / f \text{ là toán tử vi phân}\}$ là đại số Lie.

Đồng cấu đại số Lie $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}) \subset \text{End}(\mathfrak{g})$

$$x \mapsto \text{ad}_x$$

ở đó $\text{ad}_x: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$

$$y \mapsto \text{ad}_x(y) = [x, y]$$

là biểu diễn tuyến tính ad của $\mathfrak{g}$ trong chính $\mathfrak{g}$ (ad_x là toán tử tuyến tính trên không gian vector $\mathfrak{g}$). Biểu diễn này được gọi là biểu diễn chính quy của $\mathfrak{g}$.

Hạt nhân của biểu diễn này là $\text{Ker}(\text{ad}) = \{x \in \mathfrak{g} / \text{ad}_x \equiv 0\}$ chính là tâm của $\mathfrak{g}$.

1.1.5. Đại số Lie giải được và đại số Lie lũy linh

Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie và M là một không gian con của $\mathfrak{g}$. Ta bảo M là *đại số con* của $\mathfrak{g}$ nếu $[M, M] \subset M$.

Ta bảo M là *ideal* của $\mathfrak{g}$ nếu $[\mathfrak{g}, M] \subset M$. Trong đó ký hiệu:

$$[M, M] := \{[x, y]: x, y \in M\}, \quad [\mathfrak{g}, M] := \{[x, y]: x \in \mathfrak{g}, y \in M\}$$

Khi M là một ideal của $\mathfrak{g}$ thì không gian thương $\mathfrak{g}/M$ trở thành một đại số Lie với móc Lie được định nghĩa một cách tự nhiên như sau:

$$\mathfrak{g}/M \times \mathfrak{g}/M \rightarrow \mathfrak{g}/M$$

$$(g_1 + M, g_2 + M) \mapsto [g_1 + M, g_2 + M] := [g_1, g_2] + M$$

Cho $\mathfrak{g}$ là K -đại số Lie. Đặt:

$$\mathfrak{g}^1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^2 := [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1], \dots, \mathfrak{g}^n := [\mathfrak{g}^{n-1}, \mathfrak{g}^{n-1}] \quad (n \geq 2)$$

$$\mathfrak{g}_1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}_2 := [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}_n := [\mathfrak{g}_{n-1}, \mathfrak{g}] \quad (n \geq 2)$$

Mệnh đề

a. $\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}_k$ là các ideal của $\mathfrak{g}$. Riêng $\mathfrak{g}^k$ được gọi là ideal dẫn xuất thứ k của $\mathfrak{g}$ ($k=1,2,3,\dots$)

b. Ta có các dãy bao hàm thức sau:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{g} & \supset & \mathfrak{g}^1 & \supset & \mathfrak{g}^2 & \supset & \dots \supset \mathfrak{g}^n \supset \dots \\ & & \square & & \cap & & \cap \\ \mathfrak{g} & \supset & \mathfrak{g}_1 & \supset & \mathfrak{g} & \supset & \dots \supset \mathfrak{g}_n \supset \dots \end{array}$$

c. Nếu $\dim \mathfrak{g} < +\infty$ thì $\exists n \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\mathfrak{g}^n = \mathfrak{g}^{n+1} = \dots = \mathfrak{g}^\infty; \quad \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}_{n+1} = \dots = \mathfrak{g}_\infty$$

Đại số Lie $\mathfrak{g}$ gọi là *giải được* nếu $\mathfrak{g}^\infty = \{0\}$, $\mathfrak{g}$ gọi là *luỹ linh* nếu $\mathfrak{g}_\infty = \{0\}$. Chỉ số n nhỏ nhất để các đẳng thức xảy ra được gọi là *hạng* của đại số Lie *giải được* (tương ứng, *luỹ linh*) $\mathfrak{g}$.

ĐỊNH LÝ LIE

Cho f là biểu diễn tuyến tính hữu hạn chiều của đại số Lie giải được $\mathfrak{g}$ trong không gian vector V trên trường đóng đại số K . Khi đó f tương đương với biểu diễn ma trận tam giác trên, tức là $f(x) \in T(n, K), \forall x \in \mathfrak{g}$.

Hệ quả

Nếu $\mathfrak{g}$ là đại số Lie giải được thì $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ là đại số Lie lũy linh.

ĐỊNH LÝ ANGEL

Đại số Lie $\mathfrak{g}$ là lũy linh khi và chỉ khi với mọi $x \in \mathfrak{g}$, ad_x là toán tử lũy linh (tức là tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $(ad_x)^n = 0$).

1.2. Nhóm Lie

1.2.1. Định nghĩa

Tập hợp G được gọi là một nhóm Lie (thực) nếu các điều kiện sau thỏa mãn:

- (i) G là một nhóm;
- (ii) G là đa tạp thực khả vi;
- (iii) Phép toán nhóm $G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy^{-1}$ khả vi.

Nhóm Lie G được gọi là giao hoán nếu phép toán nhóm giao hoán.

Số chiều của nhóm Lie G chính là số chiều của đa tạp khả vi G .

Vì nhóm Lie vừa có cấu trúc nhóm, vừa là đa tạp khả vi nên ta có thể đưa nhiều công cụ của đại số, giải tích, tôpô, hình học vi phân, ... để nghiên cứu cấu trúc của nhóm Lie.

1.2.2. Liên hệ giữa nhóm Lie và đại số Lie

1.2.2.1. Đại số Lie tương ứng với nhóm Lie đã cho

Cho G là một nhóm Lie. Ta ký hiệu $T_e G$ là không gian tiếp xúc của G tại điểm đơn vị $e \in G$. Không gian này thường được ký hiệu là $\mathfrak{g}$. Khi đó $\mathfrak{g}$ trở thành một đại số Lie với móc Lie được xác định bởi hoán tử như sau:

$$[X, Y] := XY - YX, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Tức là $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \forall f \in C^\infty(G)$; trong đó $C^\infty(G)$ là đại số các hàm trơn trên G nhận giá trị thực.

Như vậy, mỗi nhóm G sẽ xác định duy nhất một đại số Lie $\mathfrak{g}$ và $\mathfrak{g}$ được gọi là đại số Lie của G (nói cách khác $\mathfrak{g}$ được gọi là đại số Lie tương ứng với G).

Ngoài cách định nghĩa trên, ta còn có thể định nghĩa $\mathfrak{g}$ như là đại số Lie con các trường vector bất biến trái trên G . Tất nhiên hai định nghĩa này tương đương. Cụ thể, gọi $X(G)$ là đại số Lie các trường vector khả vi trên G với các phép toán như sau:

$$(X + Y)_g := X_g + Y_g, \quad \forall g \in G$$

$$(\lambda X)_g := \lambda X_g, \quad \forall g \in G, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf), \quad \forall X, Y \in X(G), \quad \forall f \in C^\infty(G)$$

Với mọi $g \in G$. Đặt $L_g : G \rightarrow G, x \mapsto gx$ là phép tịnh tiến trái theo g , $R_g : G \rightarrow G, x \mapsto xg$ là phép tịnh tiến phải theo g . Khi đó L_g và R_g là các vi phôi trên G . Chúng cảm sinh các ánh xạ trên không gian tiếp xúc $T(G)$ của G như sau

$$L_{g*} : T(G) \rightarrow T(G), R_{g*} : T(G) \rightarrow T(G),$$

Trường vector X được gọi là bất biến trái nếu $L_g^*(X) = X, \forall g \in G$. Điều này đồng nghĩa với biểu thức $L_g^*(X)_x = X_{gx}$

Tương tự, trường vector X được gọi là bất biến phải nếu $R_g^*(X) = X, \forall g \in G$. Tức là: $R_g^*(X)_x = X_{xg}$.

Gọi $\mathfrak{g} := \{X \in X(G) / X \text{ là trường vector bất biến trái}\}$, thì $\mathfrak{g}$ là đại số Lie con của $X(G)$ và gọi là đại số Lie của nhóm Lie G . Đôi khi ta ký hiệu là $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$.

1.2.2.2. Nhóm Lie liên thông đơn liên tương ứng với đại số Lie

Với cách xây dựng như trên thì ta thấy, mỗi nhóm Lie sẽ xác định một đại số Lie duy nhất. Ngược lại, ta có định lý dưới đây.

Định lý

- Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie thực bất kì. Khi đó luôn tồn tại duy nhất nhóm Lie liên thông đơn liên $\tilde{G}$ sao cho đại số Lie của $\tilde{G}$ chính là $\mathfrak{g}$.
- Nếu G là một nhóm Lie liên thông nhận $\mathfrak{g}$ làm đại số Lie thì tồn tại nhóm con chuẩn tắc rời rạc D của $\tilde{G}$ sao cho $G = \tilde{G}/D$.

Nhóm Lie G được gọi là *giải được* (tương ứng, *luỹ linh*) nếu đại số Lie $\mathfrak{g}$ của nó là *giải được* (tương ứng, *luỹ linh*).

1.2.2.3. Ánh xạ mũ exponent

Cho G là nhóm Lie với phần tử đơn vị e_G , $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ là đại số Lie của G .

Mệnh đề

Với mỗi $X \in \mathfrak{g}$, tồn tại duy nhất nhóm con $\{x(t) / t \in \mathbb{R}\} \subset G$ sao cho:

- $x(0) = e_G$;
- $x(t+s) = x(t).x(s); \forall t, s \in \mathbb{R}$
- $x'(0) = X (= X_e)$.

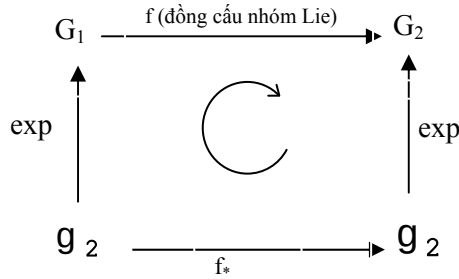
và được gọi là nhóm con 1 – tham số trên G xác định bởi X .

Ta định nghĩa ánh xạ mũ như sau $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G, X \mapsto \exp(X) := x(1)$

Một cách tổng quát, ta định nghĩa $\exp(tX) := x(t) \in G; t \in \mathbb{R}$.

Định lý (về tính chất của ánh xạ exp)

- Ánh xạ $\exp$ là vi phân địa phương.
- Ánh xạ $\exp$ có tính chất tự nhiên. Tức là biểu đồ sau đây giao hoán



với mọi đồng cấu nhóm Lie $f : G_1 \longrightarrow G_2$, tức là $f \circ \exp = \exp \circ f_*$

Định nghĩa nhóm exponential

Nếu $\exp$ vi phôi (toàn cục) thì G gọi là nhóm *exponential*.

Hệ quả

Có một song ánh giữa tập các biểu diễn tuyến tính hữu hạn chiều của các đại số Lie và các nhóm Lie liên thông đơn liên.

1.2.2.4. Biểu diễn phụ hợp, biểu diễn đối phụ hợp và K – quỹ đạo của nhóm Lie

Cho G là nhóm Lie, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ là đại số Lie của G . Ký hiệu $\mathfrak{g}^* := \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \{F : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R} / F \text{ là dạng tuyến tính}\}$ là không gian đối ngẫu của $\mathfrak{g}$. Với mỗi $\mathfrak{g} \in G$ ta có các phép tịnh tiến trái $L_{\mathfrak{g}} : G \rightarrow G$ và phải $R_{\mathfrak{g}} : G \rightarrow G$ tương ứng được xác định như sau:

$$L_{\mathfrak{g}}(x) := \mathfrak{g}x, \quad R_{\mathfrak{g}}(x) := x\mathfrak{g}; \quad \forall x \in G.$$

Đặt $A_{(\mathfrak{g})} = L_{\mathfrak{g}} \circ R_{\mathfrak{g}}^{-1} : G \rightarrow G$, $x \mapsto A_{(\mathfrak{g})}(x) := \mathfrak{g}x\mathfrak{g}^{-1}$. Ánh xạ $A_{(\mathfrak{g})}$ được gọi là *tự đẳng cấu trong* của G ứng với $\mathfrak{g} \in G$. Tự đẳng cấu này cảm sinh ánh xạ

$$A_{(\mathfrak{g})*} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

$$X \mapsto A_{(\mathfrak{g})*}(X) := \left. \frac{d}{dt} [\mathfrak{g} \exp(tX) \mathfrak{g}^{-1}] \right|_{t=0}$$

mà được gọi là ánh xạ tiếp xúc (hay vi phân) của $A_{(\mathfrak{g})}$.

Định nghĩa

Tác động

$$Ad : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$$

$$\mathfrak{g} \mapsto Ad(\mathfrak{g}) := A_{(\mathfrak{g})*}$$

xác định một biểu diễn của nhóm Lie G trong $\mathfrak{g}$ mà được gọi là *biểu diễn phụ hợp* của nhóm Lie G trong $\mathfrak{g}$.

Định nghĩa

Tác động

$$K: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}^*)$$

$$g \mapsto K_{(g)}$$

ở đó $K_{(g)}: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$

$$F \mapsto K_{(g)}(F)$$

$$\langle K_{(g)}F, X \rangle := \langle F, \text{Ad}(g^{-1})X \rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{g} \quad \text{với} \quad \text{Ad}(g^{-1}): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

xác định một biểu diễn của nhóm Lie G trong $\mathfrak{g}^*$ mà được gọi là *biểu diễn đối phụ hợp* hay *K-biểu diễn* của G trong $\mathfrak{g}^*$.

Định nghĩa. Mỗi quỹ đạo của K-biểu diễn gọi là *K-quỹ đạo* của G .

Như vậy, với mỗi $F \in \mathfrak{g}^*$, K-quỹ đạo của G đi qua F được xác định bởi $\Omega_F := \{K_{(g)}F / g \in G\}$. Số chiều mỗi K-quỹ đạo của một nhóm Lie G tùy ý luôn là một số chẵn (không vượt quá số chiều của G).

1.3. Nhóm G_2

Xét $\{e_1, e_2, \dots, e_7\}$ là cơ sở chính tắc của $\square^7$, và $\{e^1, e^2, \dots, e^7\}: \square^7 \rightarrow \square$ là cơ sở đối ngẫu tương ứng của $(\square^7)^* = \text{Hom}(\square^7, \square)$.

Kí hiệu e^{ijk} là tích ngoài $e^i \wedge e^j \wedge e^k$ trong không gian $\wedge^3((\square^7)^*)$.

1.3.1. Xét 3- dạng

$$(CT 1.1) \quad \phi = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356}$$

Theo định lí Schouten [16], nhóm con của $GL(7, \square)$ giữ bất động ϕ là một nhóm Lie đơn compact, liên thông, có kiểu G_2 .

Một cách tổng quát ta có định nghĩa dưới đây:

1.3.2. Định nghĩa (nhóm G_2)

$$G_2 = \{g \in GL(7, \square) \mid g^*(\phi) = \phi\}$$

1.4. Một vài tính chất của G_2

- G_2 bất khả qui trên $\square^7$, bảo toàn mêtric, và bảo toàn hướng chính tắc, tức là metric và hướng mà cơ sở chính tắc $e_1, e_2, \dots, e_7$ là một cơ sở trực giao định hướng dương.

- Các kí hiệu g_ϕ và $\langle, \rangle_\phi$ sẽ được dùng để chỉ mêtric trên $\square^7$. Toán tử Hodge định nghĩa bằng mêtric này và hướng chính tắc sẽ được kí hiệu là $*_\phi$.

- G_2 cũng có định bốn dạng :

$$*_\phi \phi = e^{4567} + e^{2367} + e^{2345} + e^{1367} - e^{1346} - e^{1256} - e^{1247}$$

1.5. G_2 tác động

Nhóm G_2 tác động bắc cầu lên mặt cầu $S^6 \subset \square^7$. Mọi nhóm con ổn định của bất kì một vector khác 0 nào trong $\square^7$ đều đẳng cấu với $SU(3) \subset SO(6)$. Do đó $S^6 = G_2 / SU(3)$.

Vì $SU(3)$ tác động bắc cầu lên $S^5 \subset \square^6$ nên kéo theo G_2 tác động bắc cầu lên các cặp vector trực giao trong $\square^7$. Tuy nhiên G_2 không tác động bắc cầu lên các bộ ba vector trực giao trong $\square^7$ vì nó bảo toàn ba dạng ϕ .

1.6. ε - kí hiệu

Xét các biểu thức sau:

$$(CT\ 1.2) \quad \phi = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} e^i \wedge e^j \wedge e^k, \quad \varepsilon_{ijk} \in \square; 1 \leq i < j < k \leq 7$$

$$(CT\ 1.3) \quad *_\phi \phi = \frac{1}{24} \varepsilon_{ijkl} e^i \wedge e^j \wedge e^k \wedge e^l, \quad \varepsilon_{ijkl} \in \square; 1 \leq i < j < k < l \leq 7$$

$$\text{Chẳng hạn: } \varepsilon_{123} = 1$$

$$\varepsilon_{4567} = 1$$

$$\varepsilon_{124} = \varepsilon_{3456} = 0$$

Các kí hiệu này cho ta tích chéo như sau: $e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k$

Các ε – kí hiệu thỏa mãn các tính chất sau đây:

$$(CT\ 1.4) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} = 6 \delta_{kl}$$

$$(CT\ 1.5) \quad \varepsilon_{ijq} \varepsilon_{ijkl} = 4 \varepsilon_{qkl}$$

$$(CT\ 1.6) \quad \varepsilon_{ipq} \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{pqk} + \delta_{pj} \delta_{qk} - \delta_{pk} \delta_{qj}$$

$$(CT\ 1.7) \quad \varepsilon_{ipq}\varepsilon_{ijkl} = \delta_{pj}\varepsilon_{qkl} - \delta_{jq}\varepsilon_{pkl} + \delta_{pk}\varepsilon_{jql} - \delta_{kq}\varepsilon_{jpl} + \delta_{pl}\varepsilon_{jkq} - \delta_{lq}\varepsilon_{jkp}$$

Các đẳng thức trên chứng minh bằng cách sử dụng G_2 tác động bắc cầu lên mỗi cặp trực chuẩn.

Chẳng hạn, ta chứng minh (CT 1.6):

Không mất tính tổng quát, ta có thể cho $p = 1$ và $q = 2$. Khi đó mỗi số hạng khác 0 ở vế trái là $\varepsilon_{312}\varepsilon_{3jk}$. Theo định nghĩa của ϕ và $*_{\phi}\phi$, hai vế của phương trình triệt tiêu, ngoại trừ $\{j, k\}$ là một trong những tập con của $\{1, 2\}; \{4, 7\}$ hoặc $\{5, 6\}$ và rõ ràng hai vế bằng nhau. Những đẳng thức khác chứng minh tương tự.

1.7. Ma trận và biểu diễn vector

Biểu diễn ε có thể được sử dụng để minh họa đại số $\mathfrak{g}_2$ như là một đại số con của $so(7)$ - các ma trận phản xứng cấp 7. Xét ma trận $a = (a_{ij})$, phản xứng cấp 7 ta có:

$$\text{Ma trận đối xứng lệch: } (a = (a_{ij}) \in \mathfrak{g}_2) \Leftrightarrow (\varepsilon_{ijk}a_{jk} = 0 \quad (\forall i)).$$

Với mọi vector $v = v_i e_i \in \square^7$, định nghĩa $[v] = (v_{ij}) \in so(7)$ bằng công thức:

$$v_{ij} = e_{ijk}v_k$$

Khi đó: $so(7) = \mathfrak{g}_2 \oplus [\square^7]$ là sự phân tích G_2 - bất biến bất khả quy của $so(7)$.

Chú ý: $[v]$ là ma trận biểu diễn của phép biến đổi tuyến tính của $\square^7$ cảm sinh bởi tích chéo với $v \in \square^7$.

Định nghĩa ánh xạ: $\langle \cdot \rangle: gl(7) \rightarrow \square^7$ bằng cách $\langle (a_{ij}) \rangle = (\varepsilon_{ijk}a_{jk})$

Suy ra Ker của ánh xạ này giao với $so(7)$ là $\mathfrak{g}_2$. Hơn nữa, $\forall a, b \in \square^7$, ta có:

$$(CT\ 1.8) \quad \langle [a] \rangle = 6a$$

$$(CT\ 1.9) \quad \langle [a][b] \rangle = 3[b]a = -3[a]b$$

1.8. Phân tích kiểu G_2 của các dạng ngoài

Để tránh viết $(\square^7)^*$ nhiều lần, ta sử dụng cách viết tắt V cho không gian vector $\square^7$.

Như vậy: G_2 bất khả quy trên V còn $\Lambda^1(V^*)$ và $\Lambda^6(V^*)$ không tác động bất khả quy trên $\Lambda^p(V^*)$ ($\forall 2 \leq p \leq 5$).

Để hiểu phân tích bất khả quy của $\Lambda^p(V^*)$ ($\forall 2 \leq p \leq 5$), ta xét $p = 2$ và $p = 3$.

Vì toán tử $*_\phi$ cảm sinh một đẳng cấu của G_2 – môđun $\Lambda^p(V^*) = \Lambda^{7-p}(V^*)$

Trong [2] đã chỉ ra có một phân tích G_2 – môđun bất khả quy.

$$(CT\ 1.10) \quad \Lambda^2(V^*) = \Lambda_{14}^2(V^*) \oplus \Lambda_7^2(V^*)$$

$$(CT\ 1.11) \quad \Lambda^3(V^*) = \Lambda_{27}^3(V^*) \oplus \Lambda_7^3(V^*) \oplus \Lambda_1^3(V^*)$$

Trong đó $\Lambda_d^p(V^*)$ kí hiệu một G_2 – môđun bất biến có số chiều là d .

$$\text{Với } p = 4 \text{ hoặc } 5: \Lambda_d^p(V^*) = *_\phi(\Lambda_d^p(V^*))$$

Ta có:

$$(CT\ 1.12) \quad \begin{aligned} \Lambda_7^2(V^*) &= \left\{ *_\phi(\alpha \wedge *_\phi \phi) \mid \alpha \in \Lambda^1(V^*) \right\} \\ &= \left\{ \alpha \in \Lambda^2(V^*) \mid \alpha \wedge \phi = 2 *_\phi \alpha \right\} \\ \Lambda_{14}^2(V^*) &= \left\{ \alpha \in \Lambda^2(V^*) \mid \alpha \wedge \phi = - *_\phi \alpha \right\} = \mathfrak{g}_2^b \\ \Lambda_1^3(V^*) &= \left\{ r\phi \mid r \in \mathbb{R} \right\} \\ \Lambda_7^3(V^*) &= \left\{ *_\phi(\alpha \wedge \phi) \mid \alpha \in \Lambda^1(V^*) \right\} \\ \Lambda_{27}^3(V^*) &= \left\{ \alpha \in \Lambda^3(V^*) \mid \alpha \wedge \phi = 0, \alpha \wedge *_\phi \phi = 0 \right\} \\ &= i_\phi(S_0^2(V^*)) \end{aligned}$$

Đặt $\mathfrak{g}_2^b$ là đẳng cấu $\mathfrak{b}: V \rightarrow V^*$ cảm sinh bởi tích trong $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ (là một G_2 - bất biến), một đại số Lie của G_2 , là $\mathfrak{g}_2 \subset V \otimes V^*$, đồng nhất với $\mathfrak{g}_2^b = (\mathfrak{b} \otimes 1)(\mathfrak{g}_2) \subset \Lambda^2(V^*) \subset V^* \otimes V^*$. Không gian con này là G_2 môđun bất biến vì G_2 là đơn.

Xét: $i_\phi(S_0^2(V^*))$ với $i_\phi: S^2(V^*) \rightarrow \Lambda^3(V^*)$ là một ánh xạ tuyến tính được định nghĩa bởi:

$$(CT\ 1.13) \quad i_\phi(\alpha \circ \beta) = \alpha \wedge *_\phi(\beta \wedge *_\phi \phi) + \beta \wedge *_\phi(\alpha \wedge *_\phi \phi)$$

Ánh xạ i_ϕ là G_2 bất biến và có thể chỉ ra rằng $S^2(V^*) = \mathbb{R} \mathfrak{g}_\phi \oplus S_0^2(V^*)$ là một phân tích của $S^2(V^*)$ thành các số hạng G_2 bất khả quy ($i_\phi \neq 0$ trên mỗi số hạng và do đó là ánh xạ).

Do đó ánh $i_\phi(S_0^2(V^*)) \subset \Lambda^3(V^*)$ là 27 chiều và bất khả quy.

Phương trình sau:

$$(CT 1.14) \quad \Lambda_{27}^3(V^*) = \{ \alpha \in \Lambda^3(V^*) \mid \alpha \wedge \phi = 0, \alpha \wedge *_\phi \phi = 0 \}$$

Cho thấy $\Lambda_{27}^3(V^*)$ như là một G_2 - bất biến, là không gian con 27 chiều của $\Lambda^3(V^*)$.

Bằng cách đếm số chiều, ta thấy giao của $\Lambda_{27}^3(V^*)$ với $i_\phi(S_0^2(V^*))$ không thô và cũng là một G_2 - bất khả quy.

$$i_\phi(S_0^2(V^*)) = \Lambda_{27}^3(V^*)$$

Dùng ε - kí hiệu, có thể thấy ánh xạ i_ϕ được biểu thị như sau

$$(CT 1.15) \quad i_\phi(h_{ij}e^i e^j) = \varepsilon_{ikl} h_{ij} e^j \wedge e^k \wedge e^l$$

Suy ra:
$$i_\phi(g_\phi) = 6\phi$$

1.8.2. Định nghĩa:

Sử dụng ánh xạ ngược của i_ϕ , ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa ánh xạ $j_\phi : \Lambda^3(V^*) \rightarrow S^2(V^*)$ theo công thức:

$$(CT 1.16) \quad j_\phi(\gamma)(v, w) = *_\phi((v \lrcorner \phi) \wedge (w \lrcorner \phi) \wedge \gamma)$$

Với $\gamma \in \Lambda^3(V^*)$, và $v, w \in V$. Ta nhận thấy rằng:

$$j_\phi(i_\phi(h)) = 8h + 4(tr_{g_\phi}(h))g_\phi \quad (\forall h \in S^2(V^*)).$$

Chú ý: $j_\phi(\phi) = 6g_\phi$, khi $j_\phi(\Lambda_7^3(V^*)) = 0$. Và i_ϕ và j_ϕ không đẳng cự khi $S_0^2(V^*)$ và $\Lambda_{27}^3(V^*)$ cho bởi các metric tự nhiên. Ta có: $\gamma \in \Lambda_{27}^3(V^*)$ thỏa mãn $|j_\phi(\gamma)|^2 = 8|\gamma|^2$ khi $h \in S_0^2(V^*)$ thỏa mãn $|i_\phi(h)|^2 = 8|h|^2$.

1.9. Lý thuyết biểu diễn của G_2

1.9.1. Biểu diễn chuẩn

Biểu diễn cơ bản $V_{1,0} \square \square^7$ là biểu diễn chuẩn trong G_2 được định nghĩa trong luận văn này.

Biểu diễn $V_{p,0} (\forall p \geq 0)$ đẳng cấu với $S_0^p(\square^7)$ (biểu diễn bất khả quy của $so(7)$ giữ nguyên tính bất khả quy khi nó là biểu diễn của G_2). Trong luận văn này biểu diễn quan trọng khi $p = 0; 1; 2$.

1.9.2. Biểu diễn phụ hợp

Biểu diễn cơ bản khác $V_{1,0} \square \square^{14}$ thì đẳng cấu với $\mathfrak{g}_2$ (nghĩa là một biểu diễn phụ hợp của G_2). Biểu diễn $V_{p,0}$ ($\forall p \geq 0$) là thành phần bất khả quy bậc cao nhất trong $S^p(\mathfrak{g}_2)$.

$$V_{0,1} \square \mathfrak{g}_2 \text{ và } V_{0,2} \square \square^{77}$$

Ở đây cả $V_{0,2}$ và $V_{0,3}$ đều có chiều là 77, ta cần tránh nhầm lẫn giữa hai biểu diễn này.

Nhóm G_2 có bậc 2 và xuyên lớn nhất của G_2 có thể thu được bằng cách lấy một xuyên lớn nhất trong nhóm con $SU(3)$. Mỗi thành phần trong $\mathfrak{g}_2$ là một liên hợp $Ad(G_2)$ đối với mỗi thành phần trong xuyên lớn nhất. Mỗi thành phần trong $\Lambda_{14}^2(\square^7) = \mathfrak{g}_2^b$ liên hợp với một thành phần của dạng:

$$(CT\ 1.17) \quad \alpha = \lambda_1 e^{23} + \lambda_2 e^{45} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{67}$$

$t^b \subset \mathfrak{g}_2^b$ (với $t \subset \mathfrak{g}_2$ là một đại số con Cartan). Hơn nữa vành các đa thức bất biến $Ad(G_2)$ trên $\mathfrak{g}_2$ là một vành đa thức tự do 2 phần tử sinh, một phần tử sinh bậc 2, một phần tử sinh bậc 6. Hai phần tử sinh này có thể gọi là $|\alpha|^2$ và $|\alpha^3|^2$. Ở đó α và β trong $\Lambda_{14}^2(\square^7)$ liên hợp dưới tác động của G_2 nếu chúng thỏa mãn $|\alpha|^2 = |\beta|^2$ và $|\alpha^3|^2 = |\beta^3|^2$.

Trong (CT 1.17) ta có thể giả sử $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$.

Khi đó $\forall \alpha \in \Lambda_{14}^2(V^*)$, ta dễ dàng kiểm tra được

$$(CT\ 1.18) \quad |\alpha^2|^2 = |\alpha|^4$$

$$(CT\ 1.19) \quad |\alpha^3|^2 \leq \frac{2}{3} |\alpha|^6$$

Sử dụng (CT 1.17) ta cũng có thể chứng minh

$$(CT\ 1.20) \quad \alpha \wedge *_\phi(\alpha \wedge \alpha) = |\alpha|^2 *_\phi \alpha - \frac{1}{3} *_\phi(\alpha)^3 \wedge *_\phi \phi \quad (\forall \alpha \in \Lambda_{14}^2(V^*))$$

1.9.3. Biểu diễn khác

Trong những biểu diễn $V_{p,q}$ với $p, q > 0$, ta quan tâm tới $V_{1,1} \boxtimes \boxtimes^{64}$. Mỗi biểu diễn khác $V_{p,q}$ với $p, q > 0$ có chiều ít nhất là 189, tích tensor và sự khai triển hàm tử Schur sẽ được sử dụng:

$$(CT\ 1.21) \quad \begin{aligned} S^2(V_{1,0}) &\boxtimes V_{0,0} \oplus V_{2,0} \\ \Lambda^2(V_{1,0}) &\boxtimes V_{1,0} \oplus V_{0,1} \\ V_{1,0} \otimes V_{0,1} &\boxtimes V_{1,0} \oplus V_{2,0} \oplus V_{1,1} \\ S^2(V_{0,1}) &\boxtimes V_{0,0} \oplus V_{2,0} \oplus V_{0,2} \\ \Lambda^2(V_{0,1}) &\boxtimes V_{0,1} \oplus V_{3,0} \end{aligned}$$

1.9.4. Một ví dụ

Xét sự phân tích $\beta \wedge \beta \in \Lambda^4(V^*)$ thành G_2 dạng của nó, với $\beta \in \Lambda_{14}^2(V^*) \boxtimes V_{0,1}$.

$$(CT\ 1.22) \quad \Lambda^4(V^*) \boxtimes V_1^4(V^*) \oplus \Lambda_7^4(V^*) \oplus \Lambda_{27}^4(V^*) \boxtimes V_{0,0} \oplus V_{1,0} \oplus V_{0,2}$$

Do (CT 1.22), ta có $S^2(V_{0,1}) \boxtimes V_{0,0} \oplus V_{2,0} \oplus V_{0,2}$

Do đó $\beta \wedge \beta$ có thể không có thành phần trong $\Lambda_7^4(V^*) \boxtimes V_{0,1}$.

Tồn tại 1 hằng số λ sao cho:

$$(CT\ 1.23) \quad \beta \wedge \beta = \lambda |\beta|^2 *_\phi \phi + (\beta \wedge \beta - \lambda |\beta|^2 *_\phi \phi)$$

Ở đó, số hạng thứ nhất của vế phải nhận giá trị trong $\Lambda_1^4(V^*)$, trong khi số hạng thứ 2 nhận giá trị trong $\Lambda_{27}^4(V^*)$.

Hằng số λ được xác định như sau: Do $\beta \wedge \phi = -*_\phi \beta$ khi $\gamma \wedge \phi = 0$ ($\gamma \in \Lambda_{27}^4(V^*)$)

nên:

$$(CT\ 1.24) \quad -|\beta|^2 *_\phi 1 = \beta \wedge \beta \wedge \phi = (\lambda |\beta|^2 *_\phi \phi) \wedge \phi = 7\lambda |\beta|^2 *_\phi 1$$

Suy ra $\lambda = -\frac{1}{7}$. Do đó, ta có:

$$(CT\ 1.25) \quad \beta \wedge \beta = -\frac{1}{7} |\beta|^2 *_\phi \phi + \left(\beta \wedge \beta + \frac{1}{7} |\beta|^2 *_\phi \phi \right) \quad (\beta \in \Lambda_{14}^2(V^*))$$

Áp dụng (CT 1.18), ta có:

$$(CT\ 2.26) \quad |\beta|^4 = |\beta \wedge \beta|^2 = \frac{1}{7} |\beta|^4 + \left| \beta \wedge \beta + \frac{1}{7} |\beta|^2 *_\phi \phi \right|^2.$$

Chương 2: G_2 - CẤU TRÚC

2.1. G_2 - cấu trúc và định nghĩa 3 – dạng.

2.1.1. Các định nghĩa.

Định nghĩa 1. Cho M là 1 đa tạp trơn có số chiều là 7. Hợp của các không con $\Lambda_+^3(T_x^*M)$ là 1 phân thớ con mở $\Lambda_+^3(T_x^*M) \subset \Lambda^3(T_x^*M)$ của các thớ 3 – dạng trên M .

Định nghĩa 2. (Định nghĩa 3 – dạng trên đa tạp) Một 3 – dạng σ trên M nhận giá trị trong $\Lambda_+^3(T_x^*M)$ được gọi là 3 – dạng trên M . Tập hợp các 3 – dạng trên M được kí hiệu là $\Omega_+^3(M)$.

Mỗi định nghĩa 3 – dạng trên M xác định 1 G_2 - cấu trúc trên M theo cách sau:

Đặt $F \in GL(V)$ là thớ trên M gồm các đối tọa độ $u: T_x M \rightarrow V$. Với bất kì $\sigma \in \Omega_+^3(M)$ ta định nghĩa G_2 - thớ như sau:

$$(CT.2.1) \quad F_\sigma = \{u \in Hom(T_x M, V) / x \in M, u^*(\phi) = \sigma_x\}$$

Mỗi G_2 - rút gọn của F (tức là G_2 -cấu trúc trên M với số chiều thông thường) là dạng F_σ với mỗi $\sigma \in \Omega_+^3(M)$ duy nhất, được gọi là G_2 - cấu trúc trong luận văn này.

Định nghĩa 3. Với mọi $\sigma \in \Omega_+^3(M)$, kí hiệu $g_\sigma; *_\sigma; \times_\sigma$ là metric, toán tử sao Hodge, và vector tích trên M có liên kết chính tắc với σ . Khi cần thớ tọa độ trực giao có hướng của g_σ với hướng này được kí hiệu là $F_\sigma = F_\sigma \cdot SO(7)$.

2.1.2. Sự tồn tại của G_2 - cấu trúc.

Vì G_2 vừa liên thông, vừa đơn liên, nên 1 đa tạp 7 chiều M đơn liên có thể mở rộng thành một G_2 - cấu trúc nếu và chỉ nếu nó vừa xoắn, vừa có hướng.

Ngược lại, vì G_2 chỉ liên thông, nên ảnh của nó dưới ánh xạ $\rho: Spin(7) \rightarrow SO(7)$ của một nhóm con của $Spin(7)$ sẽ được gọi là G_2 . Vì $Spin(7)$ có biểu diễn trong $\square^8$ và do đó có thể được xem như một nhóm con của $SO(8)$. $Spin(7)$ tác động lên mặt cầu 7 – chiều trong $\square^8$ giữ ổn định G_2 .

Bây giờ giả sử M^7 có hướng và xoắn. Chọn metric Riemann g , có hướng và 1 xoắn $\tilde{F} \rightarrow M$, tức là 1 phủ xoắn của thớ $SO(7)$ từ $F \rightarrow M$ gồm các hệ đối tọa độ g -trực giao, có hướng trên M . Thớ xoắn liên kết $S = \tilde{F} \times_{Spin(7)} \square^8$ là 1 thớ vectơ bậc 8 trên đa tạp 7 – chiều M

và do đó có lát cắt không bị triệt tiêu $s: M \rightarrow S$, cảm sinh 1 nhóm cấu trúc của $\tilde{F}$ (tức là của F) từ $Spin(7)$ tới G_2 ($Spin(7)$ giữ ổn định bất kì 1 vector khác 0 nào của $\square^8$). Do đó M chấp nhận 1 G_2 - cấu trúc liên kết với metric và có hướng đã chọn sẵn.

2.2. Dạng phân tích.

Vì G_2 - tác động khả quy lên $\Lambda^p(V^*)$ với $2 \leq p \leq 5$, nên có thể liên kết với mọi G_2 - cấu trúc σ trên M cỡ thứ p – dạng $\Lambda^p(T^*M)$ thành các tổng trực, sẽ dẫn lên $\Lambda_d^p(T^*M, \sigma)$, để đơn giản hơn, ta viết $\Lambda_d^p(T^*M)$ khi cấu trúc σ đã rõ. Kí hiệu không gian các lát cắt của $\Lambda_d^p(T^*M, \sigma)$ bởi $\Omega_d^p(M, \sigma)$.

Ví dụ trong (CT 1.12) ta có:

$$(CT\ 2.2) \quad \Omega_7^2(M, \sigma) = \{ \beta \in \Omega^2(M) / \beta \wedge \sigma = 2 *_\sigma \beta \}$$

$$(CT\ 2.3) \quad \Omega_{14}^2(M, \sigma) = \{ \beta \in \Omega^2(M) / \beta \wedge \sigma = - *_\sigma \beta \}$$

Modun tối giản chiều 14 và 27 chỉ xảy ra trong mỗi cặp đối ngẫu của từng chiều. Modun tối giản 7 – chiều xảy ra với mỗi bậc p , $1 \leq p \leq 6$. Do đó có thể nhận ra rằng các thừa số tỉ lệ có thể được thấy bằng các đẳng cấu giữa những modun khác nhau này. Ví dụ với $\alpha \in \Omega_7^1(M)$, ta có:

$$(CT\ 2.4) \quad *_\sigma (*_\sigma (\alpha \wedge \sigma) \wedge \sigma) = -4\alpha$$

$$*_\sigma (*_\sigma (\alpha \wedge *_\sigma \sigma) \wedge *_\sigma \sigma) = 3\alpha$$

Đồng nhất thức này có thể hữu ích trong nhiều biểu thức. Ta cũng nhớ rằng dùng metric, mỗi 1 – dạng α có 1 trường vector đối ngẫu tương ứng $\alpha^\#$ và có đồng nhất thức của dạng:

$$(CT\ 2.5) \quad *_\sigma (\alpha \wedge \sigma) = -\alpha^\# / *_\sigma \sigma$$

$$*_\sigma (\alpha \wedge *_\sigma \sigma) = \alpha^\# / \sigma$$

2.3. Đạo hàm ngoài.

2.3.1. Mệnh đề. (Dạng xoắn) Với mọi G_2 - cấu trúc $\sigma \in \Omega_+^3(M)$, tồn tại các dạng vi phân duy nhất $\tau_0 \in \Omega^0(M)$, $\tau_1 \in \Omega^1(M)$, $\tau_2 \in \Omega_{14}^2(M, \sigma)$, $\tau_3 \in \Omega_{27}^3(M, \sigma)$ sao cho phương trình sau thỏa mãn:

$$(CT\ 2.6) \quad \begin{aligned} d\sigma &= \tau_0 *_\sigma \sigma + 3\tau_1 \wedge \sigma + *_\sigma \tau_3 \\ d*_\sigma \sigma &= 4\tau_1 \wedge *_\sigma \sigma + \tau_2 \wedge \sigma \end{aligned}$$

Chúng minh:

Theo (CT 1.12) thì tồn tại duy nhất các dạng:

$\tau_0 \in \Omega^0(M); \tau_1, \tilde{\tau}_1 \in \Omega^1(M), \tau_2 \in \Omega_{14}^2(M, \sigma), \tau_3 \in \Omega_{27}^3(M, \sigma)$ sao cho phương trình trên đúng với $d\sigma$, tức là $d *_\sigma \sigma = 4\tilde{\tau}_1 \wedge *_\sigma \sigma + \tau_2 \wedge \sigma$.

Tuy nhiên theo (CT 2.4) có đồng nhất thức sau (xem chú ý 2.3.3):

$$(CT 2.7) \quad *_\sigma \sigma \wedge *_\sigma (d(*_\sigma \sigma)) + (*_\sigma d\sigma) \wedge \sigma = 0, \text{ với mọi } \sigma \in \Omega_+^3(M).$$

Suy ra $\tilde{\tau}_1 = \tau_1$. $\square$

2.3.2. Định nghĩa. (Dạng xoắn) Với $\sigma \in \Omega_+^3(M)$, $(\tau_0; \tau_1; \tau_2; \tau_3)$ cho trong (CT 2.6) được gọi là dạng xoắn trong của σ .

2.3.3. Chú ý. (Xoắn trong) Với mọi nhóm con $G \subset SO(n)$, bất biến theo bậc thứ nhất (được gọi là xoắn trong) của G - cấu trúc F trên đa tạp n – chiều M nhận giá trị trong thớ trên M liên kết với G - biểu diễn trên $(so(n)/\mathfrak{g}) \otimes \square^n$. Khi đó bất biến theo bậc thứ nhất của G - cấu trúc bị triệt tiêu, nó còn được gọi là “1 – phẳng” hoặc phẳng theo bậc thứ nhất.

Trong trường hợp $G_2 \subset SO(7)$, không gian biểu diễn của xoắn này là:

$$(CT 2.8) \quad (so(7)/\mathfrak{g}_2) \otimes \square^7 \simeq V_{1,0} \oplus V_{0,0} \oplus V_{1,0} \oplus V_{0,1} \oplus V_{2,0}$$

Vì 4 số hạng này đẳng cấu với nhau, do đó ta có 4 không gian đẳng cấu là $\Lambda^0(V^*), \Lambda^1(V^*), \Lambda_{14}^2(V^*), \Lambda_{27}^3(V^*)$. Vì đạo hàm ngoài của dạng σ và $*_\sigma \sigma$ có thể biểu diễn tuyến tính trong các số hạng của bất biến bậc thứ nhất của F_σ , tức là trong $\Lambda^1(V^*)$. Do đó hai 1 – dạng $\tilde{\tau}_1, \tau_1$ trong chứng minh 2.3.1 thỏa mãn, khi đó thay σ bởi $\lambda^3 \sigma$ với $\lambda > 0$ và thay $*_\sigma \sigma$ bởi $\lambda^4 *_\sigma \sigma$ thì mệnh đề 2.3.1 được sáng tỏ. $\square$

2.3.4. Mệnh đề (1 – phẳng của G_2 - cấu trúc) Một G_2 - cấu trúc $\sigma \in \Omega_+^3(M)$ là phẳng đối với bậc thứ nhất khi và chỉ khi các dạng xoắn của nó triệt tiêu hoàn toàn, tức là khi và chỉ khi $d\sigma = d *_\sigma \sigma = 0$.

Chứng minh: Một G_2 - cấu trúc $\sigma \in \Omega_+^3(M)$ là phẳng với bậc đầu tiên tại $p \in M$ nếu tồn tại 1 hệ tọa độ tâm p là $x: U \rightarrow \square^7$ sao cho 3 – dạng $\sigma - x^*(\phi)$ trên U triệt tiêu đối với bậc ít nhất là 2 tại p.

Ánh xạ $S: \Lambda_+^3(W^*) \rightarrow \Lambda_+^4(W^*)$ định nghĩa trong (CT 1.6) là một phủ trơn. Do đó nếu $\sigma - x^*(\phi)$ triệt tiêu với bậc ít nhất là 2 tại p thì $*_\sigma \sigma - x^*(*_\phi \phi)$ cũng triệt tiêu đối với bậc ít nhất là 2 đối với p.

Vì $d\phi = d *_\phi \phi = 0$, nếu σ là phẳng đối với bậc thứ nhất tại p , thì khi đó $d\sigma$ và $d *_\sigma \sigma$ phải triệt tiêu đối với bậc thứ nhất tại p . Vì vậy nên bài toán được chứng minh.

Để chứng minh chiều ngược lại, ta cần chỉ ra rằng bất cứ 3 – dạng σ nào được định nghĩa trong lân cận của $0 \in \square^7$ cũng thỏa mãn $\sigma_0 = \phi$ và $d\sigma = d *_\sigma \sigma = 0$ là phẳng với bậc thứ nhất tại $0 \in \square^7$.

Ta gọi ψ là một 3 – dạng bất kì trong $\square^7$ triệt tiêu tại $0 \in \square^7$, thì do $\Lambda_+^3(V^*)$ là 1 tập mở trong $\Lambda^3(V^*)$, nên 3 – dạng $\sigma = \phi + \psi$ là 1 định nghĩa 3 – dạng trên 1 lân cận mở của $0 \in \square^7$. Vì $d\sigma = d\psi$, và vì với bất kì 4 – dạng $\psi \in \Lambda^4(V^*)$, tồn tại 3 – dạng ψ trên $\square^7$ triệt tiêu tại $0 \in \square^7$ và thỏa $(d\psi)_0 = \Psi$, do đó thỏa điều kiện $d\sigma = 0$, tức là $\tau_0 = \tau_1 = \tau_3 = 0$. Vì những điều kiện này xác định không gian con G_2 - bất biến của xoắn $V_{0,0} \oplus V_{1,0} \oplus V_{0,1} \oplus V_{2,0}$, bằng cách đếm số chiều, ta thấy nó có không gian con là $V_{0,0} \oplus V_{1,0} \oplus V_{2,0}$.

Tương tự, vì $\Lambda_+^4(W^*)$ là 1 tập con mở của $\Lambda^4(W^*)$ và vì $S: \Lambda_+^3(W^*) \rightarrow \Lambda_+^4(W^*)$ là 1 phủ trơn, nên nếu ψ là một 4 – dạng trơn bất kì triệt tiêu tại $0 \in \square^7$, thì tồn tại 1 lân cận mở của $0 \in \square^7$ trên đó tồn tại 1 dạng xác định σ sao cho $\sigma_0 = \phi$ và $*_\sigma \sigma = *_\phi \phi + \psi$. Hơn nữa, nếu Ψ là một 5 – dạng bất kì trong $\Lambda^5(W^*)$, thì tồn tại một 4 – dạng ψ triệt tiêu tại $0 \in \square^7$ sao cho $(d\psi)_0 = \Psi$. Khi đó 3 – dạng σ sẽ thỏa mãn $d *_\sigma \sigma = d\psi$, sao cho $(d *_\sigma \sigma)_0 = \Psi$. Từ đó dẫn đến $d *_\sigma \sigma = 0$, tức là $\tau_0 = \tau_1 = 0$. Do những điều kiện này định nghĩa không gian con G_2 - bất biến của xoắn $V_{0,0} \oplus V_{1,0} \oplus V_{0,1} \oplus V_{2,0}$, bằng cách đếm số chiều ta có nó là không gian con của $V_{1,0} \oplus V_{0,1}$. Do đó, kết hợp các điều kiện $d\sigma = 0$ và $d *_\sigma \sigma = 0$ ta có xoắn trong của σ bị triệt tiêu, tức là σ là phẳng với bậc thứ nhất tại mỗi điểm. $\square$

2.4. Tính toán trên phân thớ tọa độ

2.4.1. Liên thông Levi – Civita

Đặt $\sigma \in \Omega_+^3(M)$ là G_2 - cấu trúc với liên kết G_2 - thớ $F_\sigma \subset \mathcal{F}$. Thớ này có thể mở rộng chính tắc đến thớ tọa độ trực giao có hướng $F_\sigma = F_\sigma \cdot SO(7) \subset \mathcal{F}$ và thớ rộng hơn này sẽ được đề cập đến như một thớ tọa độ mêtric liên kết của σ .

$\pi: F_\sigma \rightarrow M$ có một hằng đúng V là một dạng ω sao cho

$\omega(v) = u(\pi_*(v)) \quad (\forall v \in T_u F)$. Có thể xem ω như một mở rộng trong cơ sở e_i của $\omega = \sum \omega_i e_i$ và $\omega = (\omega_i)$.

Liên thông Levi – Civita biểu diễn trên F_σ như 1 – dạng ψ trên F_σ nhận giá trị trong $so(7)$ (ma trận đối xứng lệch $7 \times 7 : \psi = (\psi_{ij})$ với $\psi_{ij} = -\psi_{ji}$).

ψ thỏa phương trình cấu trúc thứ nhất của Cartan:

$$(CT\ 2.9) \quad d\omega = -\psi \wedge \omega$$

Nếu biểu diễn có số, phương trình ma trận này có thể viết lại là:

$$(CT\ 2.10) \quad d\omega_i = -\psi_{ij} \wedge \omega_j$$

Độ cong của liên thông này được đại diện bởi 2 – dạng $\Psi = d\psi + \psi \wedge \psi$. Nó thỏa mãn phương trình Bianchi thứ nhất:

$$(CT\ 2.11) \quad \psi \wedge \omega = 0$$

Và có dạng biểu diễn:

$$(CT\ 2.12) \quad \Psi_{ij} = d\psi_{ij} + \psi_{ik} \wedge \psi_{kj} = \frac{1}{2} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l$$

2.4.1.1. Xoắn trong và liên thông tự nhiên trên F_σ

Kí hiệu cái kéo lại của ω và ψ đối với F_σ bằng các kí hiệu giống nhau.

Cái kéo lại của ψ đối với F_σ không nhận giá trị trong $\mathfrak{g}_2 \subset so(7)$. Do phân tích chính tắc $so(7) = \mathfrak{g}_2 \oplus [V]$, nên có duy nhất một phân tích dạng

$$(CT\ 2.13) \quad \psi = \theta + 2[\tau]$$

Trong đó θ nhận giá trị trong $\mathfrak{g}_2$ và τ nhận giá trị trong V .

Khi đó θ là liên thông 1 – dạng trên F_σ và định nghĩa này đề cập đến nó như một liên thông tự nhiên liên kết với G_2 - cấu trúc σ . Liên thông này không phải là xoắn tự do (nên không phải là liên thông Levi - Civita), trừ khi τ triệt tiêu.

2.4.2. Xoắn G - cấu trúc

Xây dựng này của liên thông tự nhiên cho G_2 - cấu trúc σ là một bất biến $\forall G \subset O(n)$. Gọi $\mathfrak{g} \subset so(n)$ là một đại số Lie của G , tồn tại duy nhất một G - đẳng biến

sao cho $so(n) = g \oplus g^\perp$ được thiết lập bằng cách sử dụng tiêu chuẩn $O(n)$ - tích trong bất biến trên $so(n)$.

$\forall G$ - cấu trúc $\pi: F \rightarrow M$, có một thứ tọa độ trực giao liên kết $F = F.O(n)$ có thể kéo lại liên thông Levi – Civita ψ trên F tới F và phân tích nó thành dạng $\psi = \theta + \tau$ ở đó $\theta \subset g$ và $\tau \subset g^\perp \cap so(n)/g$. Một dạng θ định nghĩa một liên thông tự nhiên trên F (nó là cái kéo lại đối với F của liên thông tương thích metric với xoắn trên F), 1 – dạng τ biểu diễn một lát cắt T của một thứ xoắn liên kết $F \times \rho(g^\perp \otimes \square^n)$, ở đó $\rho: G \rightarrow End(g^\perp \otimes \square^n)$ là tích tensor của hai biểu diễn.

Các bất biến vi phân bậc thứ nhất theo từng điểm của G - cấu trúc $F \subset \mathcal{F}$ là đa thức đạo hàm của lát cắt σ của thứ $\mathcal{F}/G$ có thể được mở rộng như một đa thức trong lát cắt T .

Hơn nữa, với $k \geq 2$, tất cả bất biến vi phân bậc thứ k theo từng điểm của G - cấu trúc $F \subset \mathcal{F}$ là một đa thức trong đạo hàm bậc k của lát cắt σ của thứ $\mathcal{F}/G$ có thể được mở rộng thành các đa thức trong lát cắt T , đạo hàm hiệp biến bậc $(k-1)$ với liên thông θ , độ cong θ và đạo hàm hiệp biến bậc $(k-2)$ (với liên thông θ).

Ngược lại, với mỗi $k \geq 1$, đa thức bất biến theo từng điểm bậc k là đa thức trong định nghĩa chính tắc của thứ vector dạng:

$$(CT\ 2.14) \quad F \times \rho_1 \times \dots \times \rho_k \left(V_1(g) \oplus \dots \oplus V_k(g) \right)$$

Ở đó $V_k(g)$ là G - biểu diễn duy nhất thỏa mãn

$$(CT\ 2.15) \quad (\mathfrak{gl}(n, \square)/\mathfrak{g}) \otimes S^k(\square^n) = V_k(g) \oplus (\square^n \otimes S^{k+1}(\square^n))$$

Trong trường hợp tương tự với $\mathfrak{g} = so(n)$, không gian xoắn thứ nhất $V_1(so(n))$ triệt tiêu (đây là bổ đề cơ bản của hình học Riemann) và có kết quả là những bất biến theo từng điểm của một metric có thể được mở rộng thành những số hạng của Tensor cong Riemann và đạo hàm hiệp biến của nó với liên thông Levi – Civita.

2.4.3. Một vài công thức cơ bản

Trường hợp đặc biệt của $G_2 \subset SO(7)$, ta có

$$(CT\ 2.16) \quad V_1(\mathfrak{g}_2) \cap V_{0,0} \oplus V_{1,0} \oplus V_{0,1} \oplus V_{2,0}$$

ở đó $V_2(g_2)$ có chiều 392, có phân tích

$$(CT\ 2.17) \quad V_2(\mathfrak{g}_2) \cap V_{0,0} \oplus 2V_{1,0} \oplus V_{0,1} \oplus 3V_{2,0} \oplus 2V_{1,1} \oplus V_{0,2} \oplus V_{3,0}$$

Không gian này có $V_2(\mathfrak{so}(7))$, tức là Tensor cong của mêtric trong không gian 7 – chiều được chia thương. Để so sánh, nhận thấy rằng

$$(CT\ 2.18) \quad V_2(\mathfrak{so}(7)) \cong V_{0,0} \oplus 2V_{2,0} \oplus V_{1,1} \oplus V_{0,2}$$

Tensor Ricci nhận giá trị trong không gian con đẳng cấu với $V_{0,0} \oplus V_{2,0}$.

2.4.4. Phương trình cấu trúc thứ hai

Từ (CT 1.8) thấy rằng 2 – dạng $2[\tau] \wedge [\tau] + [[\tau] \wedge \tau]$ nhận giá trị trong $\mathfrak{g}_2$. Định nghĩa:

$$(CT\ 2.19) \quad \begin{aligned} D\tau &= d\tau + \theta \wedge \tau - [\tau] \wedge \tau \\ D\theta &= d\theta + \theta \wedge \theta + 4[\tau] \wedge [\tau] + 2[[\tau] \wedge \tau] \end{aligned}$$

Với định nghĩa này, $D\theta$ nhận giá trị trong $\mathfrak{g}_2$. Hơn nữa

$$(CT\ 2.20) \quad \psi = d(\theta + 2[\tau]) + (\theta + 2[\tau]) \wedge (\theta + 2[\tau]) = D\theta + 2[D\tau]$$

Sao cho phương trình Bianchi thứ nhất nhận dạng

$$(CT\ 2.21) \quad (D\theta + 2[D\tau]) \wedge \omega = 0$$

2.4.5. Tính toán theo chỉ số

Ta có:

$$(CT\ 2.22) \quad d\omega_i = -\theta_{ij} \wedge \omega_j - 2\varepsilon_{ijk}\tau_k \wedge \omega_j$$

Kí hiệu $\pi^*(\sigma)$ bằng σ và kí hiệu $\pi^*(\star_\sigma \sigma)$ bằng $\star \sigma$. Khi đó:

$$(CT\ 2.23) \quad \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \omega_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k \\ \star \sigma &= \frac{1}{24} \varepsilon_{ijkl} \omega_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k \wedge \omega_l \\ \Rightarrow d\sigma &= \varepsilon_{ijk} \tau_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k \wedge \omega_l \\ d\star \sigma &= -(\tau_p \wedge \omega_p) \wedge (\varepsilon_{ijk} \omega_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k) \\ &= -6(\tau_p \wedge \omega_p) \wedge \sigma \end{aligned}$$

2.4.5.1. Phân tích xoắn

Tồn tại duy nhất những hàm F_{ij} trên F_σ sao cho: $\tau_i = T_{ij} \omega_j$

Những phương trình này có thể dùng để mở rộng dạng xoắn trong như sau

$$(CT\ 2.24) \quad \begin{aligned} \pi^*(\tau_0) &= \frac{24}{7} T_{ii} \\ \pi^*(\tau_1) &= \varepsilon_{ijk} T_{ij} \omega_k \end{aligned}$$

$$\pi^*(\tau_2) = 4T_{ij}\omega_i \wedge \omega_j - \varepsilon_{ijkl}T_{ij}\omega_k \wedge \omega_l$$

$$\pi^*(\tau_3) = -\frac{3}{2}\varepsilon_{ikl}(T_{ij} + T_{ji})\omega_j \wedge \omega_k \wedge \omega_l + \frac{18}{7}T_{ii}\sigma$$

2.4.5.2. Biểu thị độ cong

Vì phân hiệp biến có thể được biểu diễn như sau

$$(CT\ 2.25) \quad D\tau = (D\tau_i) = \left(\frac{1}{2}T_{ijk}\omega_j \wedge \omega_k \right)$$

$$D\theta = (D\theta_{ij}) = \left(\frac{1}{2}S_{ijkl}\omega_j \wedge \omega_k \right)$$

Trong đó T và S đối xứng lệch; $D\theta \in \mathfrak{g}_2$ và

$$(CT\ 2.26) \quad \varepsilon_{ijm}.S_{ijkl} = 0 \quad (\forall m, k, l)$$

Vì $\Psi = D\theta + 2[D\tau]$, nên độ cong Riemann có thể được viết lại:

$$(CT\ 2.27) \quad R_{ijkl} = S_{ijkl} + 2\varepsilon_{ijp}T_{pkl}$$

Do đó đồng nhất thức Bianchi thứ nhất được mở rộng thành:

$$(CT\ 2.28) \quad S_{ijkl} + S_{iljk} + S_{iklj} + 2\varepsilon_{ijp}T_{pkl} + 2\varepsilon_{ilp}T_{pjk} + 2\varepsilon_{ikp}T_{plj} = 0$$

Để có (CT 2.28) ta lợi dụng 28 điều kiện tuyến tính trên T_{ijk} . Có thể cách dễ nhất để bắt nguồn từ 28 điều kiện này là mở rộng phương trình sau

$$(CT\ 2.29) \quad d(d(\sigma)) = d(d(\star\sigma)) = 0$$

và sử dụng những phương trình cấu trúc (CT 2.22) với (CT 2.19) và (CT 2.25) suy ra điều kiện (CT 2.29) tương đương với phương trình sau

$$(CT\ 2.30) \quad \begin{aligned} 0 &= T_{ijj} \\ 0 &= \varepsilon_{ipq}T_{jpq} - \varepsilon_{jpq}T_{ipq} \\ 0 &= \varepsilon_{ipq}T_{pqj} - \varepsilon_{jpq}T_{pqi} \end{aligned}$$

Suy ra (T_{ijk}) nhận giá trị trong G_2 - môđun của dạng

$$(CT\ 2.31) \quad \begin{aligned} V_{1,0} \otimes \Lambda^2(V_{1,0}) &= V_{1,0} \otimes (V_{1,0} \oplus V_{0,1}) \\ &= V_{0,0} \oplus 2V_{1,0} \oplus V_{0,1} \oplus 2V_{2,0} \oplus V_{1,1} \end{aligned}$$

nhận giá trị trong môđun con của dạng

$$(CT\ 2.32) \quad V_{0,0} \oplus 2V_{2,0} \oplus V_{1,1}$$

2.4.5.3. Đồng nhất thức Ricci

Bonan đã chỉ ra rằng đồng nhất thức Bianchi đơn giản là một G_2 - cấu trúc với xoắn bị triệt tiêu cần có Tensor Ricci bị triệt tiêu. Do đó, ta có biểu thức độ cong Ricci trong các số hạng của T_{ijk} . Do đó bằng việc kết hợp đồng nhất thức Bianchi thứ nhất với đồng nhất thức ε ta dẫn đến thành phần độ cong Ricci là: $R_{ij} = R_{kikj}$

$$(CT\ 2.33) \quad R_{ij} = 6\varepsilon_{pqi}T_{pqj}$$

Điều này dẫn đến biểu thức độ cong Ricci với các số hạng của 4 dạng xoắn và đạo hàm của nó. Công thức cuối cùng cho độ cong vô hướng của mêtric g_σ là

$$(CT\ 2.34) \quad Scal(g_\sigma) = 12\delta\tau_1 + \frac{21}{8}\tau_0^2 + 30|\tau_1|^2 - \frac{1}{2}|\tau_2|^2 - \frac{1}{2}|\tau_3|^2$$

Tensor Ricci đầy đủ thì phức tạp hơn, nhưng có thể mô tả như sau:

- Đầu tiên, ta định nghĩa quadratic G_2 - bất biến $Q: \Lambda^3(T^*) \times \Lambda^3(T^*) \rightarrow \Lambda^3(T^*)$

theo cách làm sau:

Chọn cơ sở địa phương $e_1, \dots, e_7$ của trường vector trực giao sao cho $\sigma(e_i, e_j, e_k) = \varepsilon_{ijk}$ (như là cơ sở thường được gọi là trường G_2 - tọa độ).

- Sau đó, lấy $\alpha, \beta \in \Omega^3(M)$, tập

$$(CT\ 2.35) \quad Q(\alpha, \beta) = *_\sigma \left[\varepsilon_{ijkl} \left((e_i \wedge e_j) \lrcorner *_\sigma \alpha \right) \wedge \left((e_k \wedge e_l) \lrcorner *_\sigma \beta \right) \right]$$

Kết quả ánh xạ Q không phụ thuộc vào việc chọn trường G_2 - tọa độ địa phương. Với định nghĩa này (và giữ điều kiện (CT 1.16) của j) ta có:

$$(CT\ 2.36) \quad \begin{aligned} Ric(g_\sigma) = & - \left(\frac{3}{2}\delta\tau_1 - \frac{3}{8}\tau_0^2 + 15|\tau_1|^2 - \frac{1}{4}|\tau_2|^2 + \frac{1}{2}|\tau_3|^2 \right) g_\sigma \\ & + j \left(-\frac{5}{4}d(*_\sigma(\tau_1 \wedge *_\sigma \sigma)) - \frac{1}{4}d\tau_2 + \frac{1}{4}*_\sigma d\tau_3 \right) \\ & + \frac{5}{2}\tau_1 \wedge *_\sigma(\tau_1 \wedge *_\sigma \sigma) - \frac{1}{8}\tau_0\tau_3 + \frac{1}{4}\tau_1 \wedge \tau_2 \\ & + \frac{3}{4}*_\sigma(\tau_1 \wedge \tau_3) + \frac{1}{8}*_\sigma(\tau_2 \wedge \tau_2) + \frac{1}{64}Q(\tau_3, \tau_3) \end{aligned}$$

2.4.6. Tensor Ricci trên G_2 - đa tạp

Cho (M, ω) là một G_2 - đa tạp với dạng cơ bản ω . Gọi g là một mêtric Riemann liên kết. Tensor cong của liên thông Levi – Civita ∇^g của metric g được biểu diễn như sau:

$$(CT\ 2.37) \quad R_{X,Y} = [\nabla_X^g, \nabla_Y^g] - \nabla_{[X,Y]}^g$$

Tensor Ricci ρ được định nghĩa

$$(CT\ 2.38) \quad \rho_{ij} = R_{sij s}$$

Ở đó $R_{sij s}$ là thành phần của tensor cong với cơ sở trực giao $e_1, \dots, e_7$, được biểu diễn như sau:

$$(CT\ 2.39) \quad R_{sijk} = g(R(e_s, e_i)e_j, e_k)$$

2.4.6.1. Định nghĩa. Trên (M, ω) ta định nghĩa tensor đối xứng thứ hai ρ^* bởi

$$(CT\ 2.40) \quad \rho_{sm}^* = R_{ijkl} \omega_{ij s} \omega_{kl m}$$

Ta gọi ρ^* là Tensor Ricci $\star$ của G_2 - đa tạp

Gọi $s = tr_g \rho = \rho_{ii}$ là độ cong vô hướng và vết của ρ^* kí hiệu là $s^* = tr_g \rho^* = \rho_{ii}^*$.

2.4.6.2. Mệnh đề. Trên G_2 - đa tạp ta có $s^* = -2s$

Chúng minh:

Áp dụng 1.4 để định nghĩa s^* và sử dụng tính đối xứng lệch của $\star \omega$ và đồng nhất thức Bianchi suy ra $R_{ijkl} \omega_{ijkl} = 0$. □

2.4.6.3. Định nghĩa

Ta sử dụng số hạng $\star$ Einstein cho G_2 - đa tạp (M, ω) khi phần vết ít nhất của Tensor $\star$ - Ricci triệt tiêu, tức là khi phương trình sau thỏa

$$(CT\ 2.41) \quad \rho^* = \frac{s^*}{7} g$$

Ta định nghĩa 3 – dạng Ricci liên kết bằng công thức sau

$$(CT\ 2.42) \quad \rho_{ijk}^* = R_{ijlm} \omega_{lmk} + R_{jklm} \omega_{lmi} + R_{kilm} \omega_{lmj}$$

$$\rho_{ijk} = \rho_{is} \omega_{sjk} + \rho_{js} \omega_{ski} + \rho_{ks} \omega_{sij}$$

2.4.6.4. Mệnh đề. $\forall G_2$ - đa tạp, ta có công thức sau

$$(CT\ 2.43) \quad d\delta\omega + \delta d\omega = \nabla^{g^*} \nabla^{g\omega} + \rho + \rho^*$$

2.5. G_2 - cấu trúc đóng

2.5.1. G_2 - cấu trúc đóng

Gọi (M^7, w) là G_2 - dạng với dạng cơ bản đóng. Khi đó 2 – dạng $\delta\omega$ nhận giá trị trong Λ_{14}^2 .

2.5.1.1. Mệnh đề. Trên G_2 - cấu trúc đóng, ta có:

$$(CT\ 2.44) \quad \delta w_{ij} w_{ijk} = 0 \quad \delta w_{ip} w_{pjk} + \delta w_{jp} w_{pki} + \delta w_{kp} w_{pij} = 0$$

2.5.1.2. Định nghĩa. G_2 - cấu trúc là song song nếu và chỉ nếu nó đóng và đối đóng, tức là $dw = \delta w = 0$.

Hai – dạng δw có thể được xem như độ lệch của w từ G_2 - cấu trúc song song.

2.5.1.3. Định nghĩa. Liên thông chính tắc $\tilde{\nabla}$ của G_2 - cấu trúc có thể được định nghĩa bởi phương trình

$$(CT\ 2.45) \quad g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X^g Y, Z) - \frac{1}{6} \delta w(X, e_i) w(e_i, Y, Z) \quad (\forall X, Y, Z)$$

Dùng (CT 2.44) ta dễ thấy $\tilde{\nabla}$ là metric G_2 - liên thông, tức là nó thỏa mãn

$$\tilde{\nabla} w = 0, \quad \tilde{\nabla} g = 0$$

Xoắn T của $\tilde{\nabla}$ được định nghĩa bởi:

$$g(T(X, Y), Z) = \frac{1}{6} \delta w(Z, e_i) w(e_i, X, Y)$$

Trên G_2 - đa tạp, liên thông chính tắc có thể được đặc trưng như G_2 - liên thông của xoắn nhỏ nhất với L^2 - chuẩn trên M . Ta cũng có thể nói rằng $\nabla^g - \tilde{\nabla} \subset \Lambda_7^2$ là phần bù trực giao của $\mathfrak{g}_2 \subset \Lambda^2$ với metric cảm sinh bởi $\mathfrak{g}$.

Từ tính chất của liên thông chính tắc và δw , ta có:

2.5.1.4. Mệnh đề. Với G_2 - cấu trúc đóng, ta có:

$$(CT\ 2.46) \quad \nabla_i^g w_{jkl} = \frac{1}{2} \delta w_{ip} w_{pjkl}$$

$$(CT\ 2.47) \quad \nabla_i^g w_{jklm} = -\frac{1}{2} (\delta w_{ij} w_{klm} - \delta w_{ik} w_{lmj} + \delta w_{il} w_{mjk} - \delta w_{im} w_{jkl})$$

$$(CT\ 2.48) \quad \nabla^g \nabla^g w_{jkl} = \frac{1}{4} \|\delta w\|^2 w_{jkl} - \frac{1}{4} (\delta w_{ip} \delta w_{ij} w_{pkl} + \delta w_{ip} \delta w_{ik} w_{plj} + \delta w_{ip} \delta w_{il} w_{pjk})$$

Áp dụng (CT 2.45) và (CT 2.46) ta có độ cong $\tilde{R}$ của liên thông chính tắc $\tilde{\nabla}$ liên quan đến liên thông Levi-Civita cho bởi công thức sau:

(CT 2.49)

$$R_{ijkl} = \tilde{R}_{ijkl} + \frac{1}{6} [\nabla_i^g \delta w_{jp} - \nabla_j^g \delta w_{ip}] w_{pkl} + \frac{1}{9} \delta w_{is} \delta w_{jp} w_{spkl} - \frac{1}{36} [\delta w_{ik} \delta w_{jl} - \delta w_{il} \delta w_{jk}]$$

2.5.2. Độ cong của G_2 - cấu trúc đóng

Gọi (M^7, w) là G_2 - đa tạp với G_2 - cấu trúc đóng. Ta có:

2.5.2.1 Mệnh đề. Tensor Ricci của G_2 - cấu trúc đóng (M, w) được cho bởi công thức:

$$(CT\ 2.50) \quad \rho_{lm} = -\frac{1}{4}d\delta w_{sjm}w_{sjl} + \frac{1}{2}\delta w_{lj}\delta w_{mj}$$

$$(CT\ 2.51) \quad \rho^*_{lm} = d\delta w_{sjm}w_{sjl} + \delta w_{lj}\delta w_{mj} - \frac{1}{2}\|\delta w\|^2\delta_{ml}$$

2.5.2.2. Bổ đề. Nếu w là G_2 - cấu trúc đóng trên M^7 thì:

$$(CT\ 2.52) \quad \rho_{sr}w_{rkl} + \frac{1}{2}R_{skir}w_{lir} - \frac{1}{2}R_{slir}w_{kir} = -\frac{1}{4}(d\delta w_{sjp} + \nabla_s^g \delta w_{jp})w_{pjkl} + \frac{1}{2}\delta w_{pj}\delta w_{sj}w_{klp}$$

(CT 2.53)

$$\begin{aligned} & -R_{sijr}w_{rkml} - R_{sikr}w_{jrml} - R_{silr}w_{jkrm} - R_{simr}w_{jklr} = \\ & \frac{1}{2}\left[(\nabla_i^g \delta w_{sj} - \nabla_s^g \delta w_{ij})w_{klm} - (\nabla_i^g \delta w_{sk} - \nabla_s^g \delta w_{ik})w_{lmj}\right] \\ & + \frac{1}{2}\left[(\nabla_i^g \delta w_{sl} - \nabla_s^g \delta w_{il})w_{mjk} - (\nabla_i^g \delta w_{sm} - \nabla_s^g \delta w_{im})w_{jkl}\right] \\ & - \frac{1}{4}\left[(\delta w_{ij}\delta w_{sp} - \delta w_{sj}\delta w_{ip})w_{pklm} - (\delta w_{ik}\delta w_{sp} - \delta w_{sk}\delta w_{ip})w_{plmj}\right] \\ & - \frac{1}{4}\left[(\delta w_{il}\delta w_{sp} - \delta w_{sl}\delta w_{ip})w_{pmjk} - (\delta w_{im}\delta w_{sp} - \delta w_{sm}\delta w_{ip})w_{pjkl}\right] \end{aligned}$$

Từ (CT 2.45) ta có:

$$(CT\ 2.55) \quad \nabla_k^g \delta w_{is}w_{ism} = \tilde{\nabla}_k \delta w_{is}w_{ism} + \frac{1}{6}\delta w_{kr}\delta w_{rq}w_{siq}w_{ism} = \delta w_{kr}\delta w_{mr}$$

(vì $\tilde{\nabla}\delta w \in \Lambda_{14}^2$)

Nhân 2 vế của (CT 2.52) với w_{mkl} và sử dụng đồng nhất thức Bianchi, kết hợp với (CT 2.54) ta có (CT 2.50).

Nhân 2 vế của (CT 2.54) với w_{mlj} , và lại sử dụng đồng nhất thức Bianchi ta có:

$$(CT\ 2.56) \quad R_{silr}w_{klr} = (\nabla_s^g \delta w_{ik} - \nabla_i^g \delta w_{sk}) + \frac{1}{4}(\delta w_{ij}\delta w_{sp} - \delta w_{sj}\delta w_{ip})w_{jpk}$$

Từ (CT 2.56) ta có:

$$(CT\ 2.57) \quad \rho^*_{km} = R_{silr}w_{klr}w_{sim} = d\delta w_{sik}w_{sim} - \nabla_k^g \delta w_{is}w_{sim} + \frac{1}{2}\delta w_{ij}\delta w_{sp}w_{jpk}w_{sim}$$

Số hạng thứ 2 đã được tính trong (CT 2.55). Số hạng cuối cùng ta kết hợp (CT 2.44) và (CT 1.7), ta có:

$$(CT\ 2.58) \quad \text{Ở đây } \delta w \in \Lambda_{14}^2$$

$$\begin{aligned}
\delta w_{ij} \delta w_{sp} w_{jpk} w_{sim} &= (-\delta w_{pj} w_{jki} - \delta w_{kj} w_{jip}) \delta w_{sp} w_{sim} \\
&= \delta w_{sp} (\delta w_{jp} w_{kij} w_{sim} + \delta w_{jk} w_{jip} w_{sim}) \\
&= \delta w_{sp} \delta w_{jp} (-w_{kjsm} + \delta_{ks} \delta_{jm} - \delta_{km} \delta_{js}) + \delta w_{sp} \delta w_{jp} (-w_{jpsm} + \delta_{js} \delta_{pm} - \delta_{jm} \delta_{ps}) \\
&= -\|\delta w\|^2 \delta_{km} + 4\delta w_{jm} \delta w_{jk}
\end{aligned}$$

Do đó (CT 2.51) được suy ra từ (CT 2.58), (CT 2.55), (CT 2.57). $\square$

Từ (CT 2.55) ta có:

$$(CT\ 2.59) \quad d\delta w_{sim} w_{sjm} = 3\|\delta w\|^2$$

Từ (CT 2.50) và (CT 2.59) ta có công thức cho độ cong vô hướng của G_2 - cấu trúc như sau:

2.5.2.3. Bổ đề. Độ cong vô hướng của G_2 - cấu trúc đóng không dương trong khi độ cong vô hướng $\star$ thì không âm.

$$\begin{aligned}
s &= -\frac{1}{4}\|\delta w\|^2 \\
s^\star &= \frac{1}{2}\|\delta w\|^2
\end{aligned}$$

(CT 2.60)

Trong (CT 2.60), tensor Ricci ρ^0 có biểu diễn như sau:

$$(CT\ 2.61) \quad \rho^0 = \rho + \frac{1}{28}\|\delta w\|^2 g$$

2.5.2.4. Định nghĩa. Liên thông chính tắc cho ta một tensor Ricci thứ 3 mà ta kí hiệu là $\tilde{\rho}$ như sau:

$$\tilde{\rho}_{ij} = \tilde{R}_{sij s}$$

2.5.2.5. Bổ đề. Trên đa tạp 7 – chiều có G_2 - cấu trúc đóng, tensor Ricci của liên thông chính tắc liên quan tới tensor Ricci Riemann qua công thức sau:

$$\tilde{\rho} = \frac{2}{3}\rho$$

Chúng minh:

Từ (CT 2.49) ta có:

$$\rho_{il} = \tilde{\rho}_{il} - \frac{1}{12}d\delta w_{pij} w_{pjl} + \frac{1}{6}\delta w_{is} \delta w_{ls}$$

Từ PT này và kết hợp với (2.50) ta có điều cần chứng minh. $\square$

2.5.2.6. Mệnh đề. 3 – dạng Ricci của G_2 - cấu trúc đóng cho bởi:

$$(CT\ 2.62) \quad \rho_{jlk} = -\frac{1}{4}\|\delta w\|^2 w_{jlk} - d\delta w_{jlk} - \frac{1}{2}(\delta w_{li} \delta w_{pi} w_{pj k} + \delta w_{ki} \delta w_{pi} w_{plj} + \delta w_{ji} \delta w_{pi} w_{pkl})$$

(CT 2.63)

$$\rho^*_{sik} = 2d\delta w_{sik} + \frac{1}{4}(\delta w_{ij}\delta w_{pj}w_{psk} + \delta w_{kj}\delta w_{pj}w_{pis} + \delta w_{sj}\delta w_{pj}w_{pki})$$

2.5.2.7. Định lí. Đặt (M^7, w) là G_2 - cấu trúc với dạng cơ bản đóng. Nếu (M, w) là

Einstein và $\star$ -Einstein thì M là song song.

Chứng minh: Giả sử (M, w) là G_2 - cấu trúc với dạng cơ bản đóng. Giả sử rằng cả phương trình Einstein và phương trình $\star$ -Einstein đều thỏa mãn. Mệnh đề 2.5.2.1 trong trường hợp này cho:

$$\begin{aligned} \delta w_{ij}\delta w_{pj} &= \frac{1}{7}\|\delta w\|^2 \delta_{ip} \\ d\delta w_{ijk}w_{ijm} &= \frac{3}{7}\|\delta w\|^2 \delta_{km} \end{aligned}$$

(CT 2.64)

Kết hợp (CT 2.64) với các phương trình (CT 2.48) và (CT 2.62), ta có:

$$\begin{aligned} \rho^*_{ijk} &= 2d\delta_{ijk} - \frac{3}{28}\|\delta w\|^2 w_{ijk} \\ \nabla^{g*}\nabla^g w_{ijk} &= \frac{1}{7}\|\delta w\|^2 w_{ijk} \\ \rho_{ijk} &= -\frac{3}{28}\|\delta w\|^2 w_{ijk} \end{aligned}$$

(CT 2.65)

Từ đó suy ra :

$$d\delta w = \frac{1}{14}\|\delta w\|^2 w$$

(CT 2.66)

Xem [3], tác giả Bryant đã chỉ ra rằng trong 1 đa tạp Einstein với G_2 - cấu trúc đóng phần

Λ_{27}^3 của $d\delta w$ được cho bởi phần Λ_{27}^3 của $*(\delta w \wedge \delta w)$. Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng phần

Λ_{27}^3 của $*(\delta w \wedge \delta w)$ bị triệt tiêu.

2.5.2.8. Bổ đề. Gọi α là 2 dạng trong Λ_{14}^2 . Khi đó, phần Λ_{27}^3 của $*(\alpha \wedge \alpha)$ triệt tiêu khi và chỉ khi $\alpha = 0$.

Chứng minh:

Thuận: Giả sử α là 2 dạng trong Λ_{14}^2 , khi đó: $\alpha \otimes \alpha \in S^2\Lambda_{14}^2 \subset S^2(\Lambda^2)$. Ta có:

$$S^2\Lambda_{14}^2 = V_{(0,2)}^{77} + V_{(0,2)}^{27} + V_{(0,0)}^1$$

Ta đã biết ánh xạ

$$S^2\Lambda^2 \rightarrow \Lambda^4$$

$$\beta \vee \gamma \mapsto \beta \vee \gamma$$

Là toàn ánh và đẳng biến. Từ bổ đề Schurs, ta có: $\alpha \wedge \alpha \in \Lambda_{27}^4 \oplus \Lambda_1^4$ nếu $\alpha \in \Lambda_{14}^2$.

Đảo: Giả sử $(\alpha \wedge \alpha)_{\Lambda_{27}^4} = 0$. Ta có thể kết luận được rằng $\alpha \wedge \alpha = c * w$ với mọi hằng số c .

Tuy nhiên, khi α là 2 dạng trên 1 không gian có chiều lẻ thì nó sẽ bị suy biến. Gọi $X \in \mathfrak{g}$ là vecto khác không sao cho $X \lrcorner \alpha = 0$. Khi đó:

$$cX \lrcorner * w = X \lrcorner (\alpha \wedge \alpha) = 2(X \lrcorner \alpha) \wedge \alpha = 0$$

Nhưng về trái sẽ triệt tiêu nếu $c = 0$. Do đó $\alpha \otimes \alpha \in V_{(0,2)}^{77}$ khi $\alpha \in \Lambda_{14}^2$ thỏa mãn

$(\alpha \wedge \alpha)_{\Lambda_{27}^4} = 0$. Nhưng $V_{(0,2)}^{77}$ là không gian trong đó độ cong Riemann phẳng Ricci của G_2 -

đa tạp song song, khi đó: $\|\alpha\|^2 = 0$.

Từ đó, ta có: $\delta w = 0$, khi $\nabla^g w = 0$.

2.5.3. Công thức tích phân trên G_2 -đa tạp đóng.

2.5.3.1. Mệnh đề. Cho (M, w, g) là G_2 -đa tạp compact với dạng cơ bản đóng. Khi đó:

$$(CT\ 2.67) \quad \int_M \left(\frac{1}{24} \|\delta w\|^4 + \frac{28}{9} \|\rho^0\|^2 - \frac{7}{18} \rho_{pl}^0 \delta w_{bl} \delta w_{bp} - \frac{7}{9} (\delta R)_{bkl} w_{jkl} \delta w_{bj} \right) dV = 0$$

2.5.3.2. Bổ đề. Trên G_2 -đa tạp compact với dạng cơ bản đóng, ta có:

$$(CT\ 2.68) \quad \int_M R_{akbl} \delta w_{ak} \delta w_{bl} dV = \int_M \left(\frac{1}{3} \|d\delta w\|^2 - \|\nabla^g \delta w\|^2 - 2\rho_{sp} \delta w_{st} \delta w_{pt} \right) dV$$

2.5.3.4. Định lý. Cho (M, w, g) là G_2 -đa tạp compact với dạng cơ bản đóng w . Giả sử rằng

phần Λ_7^2 của đối vi phân của tensor Weyl triệt tiêu, $\delta W = \delta W_{14}^2$. Khi đó (M, w, g) là 1

không gian Joyce (xem chương 1)

Chứng minh:

Trên đa tạp Riemann 7 – chiều, tensor Weyl được biểu diễn như sau:

$$W_{ijkl} = R_{ijkl}^g - h_{ik} g_{jl} + h_{jl} g_{ik} + h_{il} g_{jk} \ , \quad \left(h = -\frac{1}{5} \left(\rho - \frac{s}{12} g \right) \right)$$

Từ đồng nhất thức Bianchi thứ 2, ta có:

$$(CT\ 2.69) \quad \begin{aligned} \nabla_i^g \rho_{jk} - \nabla_j^g \rho_{ik} &= (\delta R)_{kij} \\ ds_i &= 2\nabla_j^g \rho_{ji} \\ (\delta W)_{kij} &= -4(\nabla_i^g h_{jk} - \nabla_i^g h_{ik}) \end{aligned}$$

Điều kiện của định lí dẫn đến:

$$0 = (\delta W)_{kij} w_{ijl} = \frac{4}{5} (\nabla_i^g \rho_{jk} - \nabla_j^g \rho_{ik}) w_{ijl} - \frac{2}{15} ds_i w_{ikl}$$

Do đó:

$$(CT\ 2.70) \quad \frac{4}{5} (\delta R)_{kij} w_{ijl} \delta w_{kl} = (\nabla_i^g \rho_{jk} - \nabla_j^g \rho_{ik}) w_{ijl} \delta w_{kl} = 0 \quad (\text{vì } \delta w \in \Lambda_{14}^2)$$

Đặt $K_i = w_{ijl} \rho_{jk} \delta w_{kl}$. Phương trình (CT 2.70) kết hợp với (CT 2.50) ta có:

$$\delta K = -\frac{1}{2} \rho_{jk} \delta w_{jl} \delta w_{kl} - 2 \|\rho\|^2$$

Lấy tích phân trên M, ta có:

$$(CT\ 2.71) \quad \int_M \rho_{jk} \delta w_{jl} \delta w_{kl} dV = -4 \int_M \|\rho\|^2 dV$$

Từ (CT 2.70), (CT 2.71), (CT 2.61), (CT 2.67), ta có:

$$\int_M \left(\frac{1}{24} \|\delta w\|^4 + \frac{14}{3} \|\rho^0\|^2 \right) dV = 0$$

Vậy định lí được chứng minh. $\square$

2.5.3.5. Định lí. Mọi đa tạp 7 – chiều compact với G_2 - cấu trúc đóng là Einstein với liên thông chính tắc là không gian Joyce.

Chương 3: MỞ RỘNG VỀ G_2 - CẤU TRÚC

3.1. Nhắc lại và bổ sung vài khái niệm sẽ được sử dụng

- Đặt $\Lambda^k V^n$ là không gian k – tuyến tính phản xứng trên không gian tuyến tính V^n .

Với mọi $\omega \in (\Lambda^k) V^n$ ta kí hiệu $I\omega$ là ánh xạ tuyến tính

$$\begin{aligned} I\omega: V^n &\rightarrow \Lambda^{k-1}(V^n) \\ x &\rightarrow (x \lrcorner \omega) := \omega(x, \dots) \end{aligned}$$

- Một k – dạng được gọi là đa đối ngẫu, nếu $I\omega$ là một đơn ánh. Lớp các đa đối ngẫu 3 – dạng trong không gian 7 chiều được xây dựng bởi Bures và Vanzura.

- Có 8 kiểu trong các dạng này, giữa chúng có hai lớp chung là G_2 – dạng ω_1^3 và G_2 – dạng ω_2^3 . Chúng có cùng phương dưới $Gl(V^7)$ – tác động

- $Gl(V^7)(\omega_i^3)$ ($i=1,2$) là một tập mở trong $\Lambda^3(V^7)$.

- Nhóm đẳng hướng tương ứng là nhóm compact G_2 và nhóm không compact đối ngẫu G_2 . Ta có biểu diễn chính tắc của G_2 – dạng ω_1^3 .

$$(CT\ 3.1) \quad \omega_1^3 = \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 + \alpha_1 \wedge \theta_1 + \alpha_2 \wedge \theta_2 + \alpha_3 \wedge \theta_3$$

Với α_i là 2 – dạng trên V^7 được viết bởi

$$(CT\ 3.2) \quad \alpha_1 = y_1 \wedge y_2 + y_3 \wedge y_4$$

$$\alpha_2 = y_1 \wedge y_3 - y_2 \wedge y_4$$

$$\alpha_3 = y_1 \wedge y_4 + y_2 \wedge y_3$$

$(\theta_1, \theta_2, \theta_3, y_1, y_2, y_3, y_4)$ là cơ sở có hướng của $(V^7)^*$.

- Một đa tạp 7 – chiều M^7 được gọi là có G_2 – cấu trúc nếu có một 3 – dạng ϕ^3 trên đó sao cho $\forall x \in M^7$, dạng $\phi^3(x)$ là G_2 – dạng.

- Một G_2 – cấu trúc ϕ được gọi là đóng, nếu $d\phi = 0$. Tính đóng của G_2 – cấu trúc ϕ là điều kiện cần để G_2 – cấu trúc là phẳng, tức là độ cong Ricci của metric Riemann liên kết $g(\phi)$ (với mọi phép nhúng chính tắc $G_2 \rightarrow SO(7)$) triệt tiêu. Ta nhận thấy rằng ví dụ đầu tiên của metric Riemann với holonom G_2 được xây dựng bởi Joyce

bằng cách làm biến dạng G_2 – cấu trúc đóng. 3 – dạng đóng được sử dụng bởi Severa và Weinstein để làm biến dạng cấu trúc Poisson.

- Ta cũng gọi một G_2 cấu trúc đóng là nguyên vẹn nếu đối đồng điều của G_2 - dạng ϕ là một lớp nguyên vẹn trong $H^3(M^7, \square) \subset H^3(M^7, \square)$.

3.2. Hai cách đưa G_2 - cấu trúc đóng lên $S^3 \times S^4$

Trong định lý 3.2.2 và 3.2.4, ta xét những đa tạp đóng $S^3 \times S^4$ trong nhóm lie nửa đơn $SU(3)$ và $G \times (SU(2))^N$, $N = 80 + 8 \times C_8^3$.

Với mỗi nhóm lie nửa đơn G , tồn tại 3 – dạng bất biến kép ϕ_0^3 được định nghĩa với đại số lie $\mathfrak{g} = T_e G$ như sau

$$(CT\ 3.3) \quad \phi_0^3(X, Y, Z) = \langle X, [Y, Z] \rangle$$

Ở đó $\langle, \rangle$ kí hiệu dạng Killing trên $\mathfrak{g}$.

3.2.1. Bổ đề. Dạng ϕ_0^3 là một đa đối xứng

Chúng minh.

Ta sẽ chỉ ra rằng $I_{\phi_0^3}$ là đơn ánh. Ta nhận thấy nếu

$X \in \text{Ker} I_{\phi_0^3}$ thì

$$(CT\ 3.4) \quad \langle X, [Y, Z] \rangle = 0 \quad (\forall Y, Z \in \mathfrak{g})$$

Chiều ngược trái với tính nửa đơn của $\mathfrak{g}$.

Xét nhóm $G = SU(3)$. Với mỗi $1 \leq i \leq j \leq 3$, đặt $g_{ij}(g)$ là hàm phức trên $SU(3)$ cảm sinh từ biểu diễn ρ của $SU(3)$ trên $\square^3$.

$$(CT\ 3.5) \quad g_{ij}(g) := \langle \rho(g) \circ e_i, \bar{e}_j \rangle$$

Ở đó $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ là một cơ sở đơn vị của $\square^3$. Ta đặt X^7 là tập con có đối chiều một trong $SU(3)$ được kí hiệu bởi phương trình $\text{Im}(g_{11}(g)) = 0$. $\square$

3.2.2 Định lý

Tập con X^7 là đồng phôi với đa tạp $S^3 \times S^4$. Hơn nữa X^7 có G_2 - dạng đóng ω^3 , có giới hạn là ϕ_0^3 với X^7 .

Chúng minh.

Đặt $SU(2) = \{g \in SU(3) \mid \rho(g) \circ e_1 = e_1\} \subset SU(3)$

Đặt π là một phép chiếu tự nhiên.

$$(CT\ 3.6) \quad \pi : SU(3) \rightarrow SU(3) / SU(2)$$

Ta đồng nhất $SU(3) / SU(2)$ với mặt cầu $S^5 \subset \mathbb{C}^3$ ngoại trừ biểu diễn chuẩn ρ của $SU(3)$ trên $\mathbb{C}^3$. Kí hiệu $\bar{\rho}$ như sau $\bar{\rho}(g \circ SU(2)) = g \circ e_1$

$$\text{Gọi} \quad \bar{\rho} \circ \pi : SU(3) \rightarrow SU(3) / SU(2) \rightarrow S^5$$

Đặt $S^4 \subset S^5$ là đường tròn lớn gồm các điểm $v \in S^5$ sao cho : $\text{Im } e^1(v) = 0$

Ở đó $\{e^i, i = 1, 2, 3\}$ là 1 – dạng phức trên $\mathbb{C}^3$ là đối ngẫu của $\{e_i\}$

Ảnh $\Pi^{-1}(S^4)$ gồm các $g \in SU(3)$ sao cho

$$(CT\ 3.7) \quad \text{Im } e^1(g \circ e_1) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(g_{11}) = 0$$

Do đó X^7 là phân thớ $SU(2)$ trên S^4 . Nhưng phân thớ này là giới hạn của thớ $SU(2)$ là $\Pi^{-1}(D^5)$ trên nửa mặt cầu D^5 với biên $\partial D^5 = S^4$. Do đó đây là phân thớ thô. Do đó định lí được chứng minh.

Kí hiệu $m_L(g)$ là phép nhân trái với $g \in SU(3)$.

3.2.3. Bổ đề

X^7 là bất biến dưới tác động của $m_L(SU(2)) \cdot m_R(SU(2))$. Với mỗi $v \in S^4$, tồn tại một $\alpha \in SO(2)^1$ và $g \in SU(2)$ sao cho $\Pi(g \cdot \alpha) = v$. Ngược lại, $\forall x \in X^7$, tồn tại $g_1, g_2 \in SU(2)$ và $\alpha \in SO(2)^1$ sao cho

$$(CT\ 3.8) \quad x = g_1 \circ \alpha \circ g_2$$

Chứng minh.

Ta thấy $X^7 = \Pi^{-1}(S^4)$ có quỹ đạo của tác động $m_R(SU(2))$ trên X^7 là thớ $\Pi^{-1}(v)$.

Đặt $v = (\cos \alpha, z_2, z_3) \in S^4, (z_i \in \mathbb{C})$. Ta chọn $\alpha \in SO(2)^1$ sao cho

$$\rho(\alpha) \circ e_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha) \in \mathbb{C}^2$$

Suy ra α được kí hiệu một cách duy nhất bởi v với kí hiệu $\pm$. Ta đặt:

$$\omega = (\sin \alpha, 0) \in \mathbb{C}^2 = \langle e_2, e_3 \rangle \otimes \mathbb{C}$$

Suy ra (CT 3.9) $|z_2|^2 + |z_3|^2 = \sin^2 \alpha$

Vì $SU(2)$ tác động lên mặt cầu S^3 với bán kính $|\sin \alpha|$ trong $\square^2 = \langle e_2, e_3 \rangle$, nên tồn tại $g \in SU(2)$ sao cho

$$\rho(g) \circ \omega = (z_2, z_3) \quad \Rightarrow \quad \Pi(g \circ \alpha) = v$$

Từ đó do $X^7 = \Pi^{-1}(S^4)$ nên tồn tại $g_1, g_2 \in SU(2)$ và $\alpha \in SO(2)^1$ sao cho $x = g_1 \cdot \alpha \cdot g_2$

Từ (CT 3.8) giúp ta kiểm tra được rằng giá trị của ω tại mọi $\alpha \in SO(2)^1 \subset X^7$ là G_2 - dạng, vì ϕ_0^3 là dạng một bất biến kép trên $SU(3)$. Ta sẽ chia định lí 3.2.2 thành 2 bước

Bước 1. Ta chỉ ra giá trị ω^3 tại $\alpha = e$

Bước 2. Ta chỉ ra giá trị ω^3 tại $\alpha \in SO(2)^1$

Bước 1. Ta chứng minh $\omega^3(e) \in X^7$. Ta dùng metric Killing để đồng nhất đại số Lie $SU(3)$ với đối đại số $\mathfrak{g}$. Vì vậy ta không phân biệt đối vector và vector, đa vector và dạng ngoài trên $SU(3)$. Ta có

$$(CT 3.10) \quad T_e X^7 = \{v \in SU(3) : \text{Im } g_{11}(v) = 0\}$$

Ta đồng nhất $gl(\square^3)$ với $\square^3 \otimes (\square^3)^*$ và ta định nghĩa $e_{ij} \in gl(\square^3)$ là dạng $e_i \otimes (e_j)^*$.

Tính toán ta có

$$(CT 3.11) \quad \omega^3(x_0) = \sqrt{2}\delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1 \wedge \delta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_2 \wedge \delta_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_3 \wedge \delta_3$$

ở đó δ_i là 1 - dạng trong $T_e X^7$ được định nghĩa như sau

$$(CT 3.12) \quad \begin{cases} \delta_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}(e_{22} - e_{33}) \\ \delta_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(e_{23} - e_{32}) \\ \delta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{23} + e_{32}) \end{cases}$$

Hơn nữa ω_i là 2 - dạng trên $T_e X^7$ có biểu diễn như sau

$$\begin{cases} 2\omega_1 = -(e_{12} - e_{21}) \wedge i(e_{12} + e_{21}) + (e_{13} - e_{31}) \wedge i(e_{13} + e_{31}) \\ 2\omega_2 = -(e_{12} - e_{21}) \wedge (e_{13} - e_{31}) - i(e_{12} + e_{21}) \wedge i(e_{13} + e_{31}) \\ 2\omega_3 = -(e_{12} - e_{21}) \wedge i(e_{13} + e_{31}) + i(e_{12} + e_{21}) \wedge (e_{13} - e_{31}) \end{cases}$$

So sánh (CT 3.11) với (CT 3.1) suy ra hai 3 – dạng này là $Gl(\square^7)$ tương đương. Suy ra $\omega^3(x_0)$ là G_2 - dạng. Bước 1 chứng minh xong.

Bước 2: Dùng bước 1, ta chỉ ra rằng

$$(CT\ 3.13) \quad Dm_L(\alpha^{-1})(T_\alpha X^7) = T_e X^7 \quad \left(\forall \alpha \in SO(2)^1 \subset X^7, \alpha \neq e \right)$$

Vì $X^7 \supset \alpha \cdot SU(2)$, nên ta có

$$(CT\ 3.14) \quad su(2) \subset Dm_L(\alpha^{-1})(T_\alpha X^7)$$

Kí hiệu $SO(3)$ là nhóm trực giao chuẩn của $\square^3 \subset \square^3$. Vì $\alpha \in SO(3) \subset X^7$ nên ta có $Dm_L(\alpha^{-1})(T_\alpha SO(3)) \subset Dm_L(\alpha^{-1})(T_\alpha X^7)$. Đặc biệt, ta có

$$(CT\ 3.15) \quad \langle (e_{12} - e_{21}); (e_{13} - e_{31}) \rangle \otimes \square \subset Dm_L(\alpha^{-1})(T_\alpha X^7)$$

Vì $SU(2) \cdot \alpha \subset X^7$, ta có

$$(CT\ 3.16) \quad Ad(\alpha^{-1})su(2) \subset Dm_L(\alpha^{-1})(T_\alpha X^7)$$

Dùng công thức

$$Ad(\alpha^{-1}) = \exp \left(-ad \left(t \cdot \frac{e_{12} - e_{21}}{\sqrt{2}} \right) \right), \quad t \neq 0$$

Kết hợp từ (CT 3.14), (CT 3.15) và (CT 3.16) ta có

$$(CT\ 3.17) \quad \langle i(e_{12} + e_{21}), i(e_{13} + e_{31}) \rangle \otimes \square \subset Dm_L(\alpha^{-1})(T_\alpha X^7)$$

Kết hợp với (CT 3.14), (CT 3.15) ta có (CT 3.13).

Vậy định lí 3.2.2 được chứng minh.

Để đưa G_2 - cấu trúc đóng lên $S^3 \times S^4$ ta kết hợp định lí 3.2.2 với cách chứng minh của định lí 3.5.5.

3.2.4. Định lí

Cho nửa nhóm lie đơn G , compact, đơn liên và với bất kỳ G_2 - cấu trúc đóng ϕ trên $S^3 \times S^4$, tồn tại một phép nhúng $f: S^3 \times S^4 \rightarrow G' = G \times (SU(2))^{80+4.C_8^3}$ sao cho giới hạn của dạng bất biến kép chuẩn ϕ_0^3 từ G' tới $f(S^3 \times S^4)$ bằng ϕ . Hơn nữa, ta cần chỉ ra rằng cái kéo lại (ngoại trừ phép chiếu) của một $d \in H^3(M, \square)$ với ảnh $f(S^3 \times S^4)$ bằng với $[\phi] \in H^3(M, \square)$.

Chúng minh.

$$\text{Ta có } H^3(S^3 \times S^4, \square) = \pi_3(S^3) = \square$$

Mà giả thiết của định lí 3.2.4 thì ta có $H^3(G, \square) = \pi_3(G)$, nên ta cần ánh xạ $f_1: M^7 \rightarrow G$ sao cho điều kiện thứ 2 trong định lí 3.3.4 thỏa mãn. Chúng minh tương tự định lí 3.3.4, ta có $f_1: M^7 \rightarrow G$ nhúng vào f . Ta chỉ cần phải chỉ ra rằng số chiều của đa tạp là thỏa mãn. Thay vì số 7 trong M^7 , ta chọn 4 đĩa mở phủ lên $S^3 \times S^4$, tương tự như bước 2 của định lí 3.3.4. $\square$

3.3. Không gian phổ dụng cho G_2 - cấu trúc đóng

Trong phần này ta sẽ chỉ ra rằng bất kì G_2 - cấu trúc đóng ϕ trên đa tạp 7 – chiều M^7 tron, compact có thể cảm sinh từ một phép nhúng M^7 lên không gian phổ dụng $(\overline{\omega}, \overline{h})$.

Định nghĩa không gian phổ dụng dựa trên công trình của Dold và Thom.

Đặt $SP^q(X)$ là tích đối xứng q – thành phần của một không gian compact địa phương, paracompact hausdorff; tức là $SP^q(X)$ là không gian chia thương Cartesian q – thành phần $(X^q, 0)$ trên nhóm hoán vị σ_q . Ta sẽ kí hiệu $SP(X, 0)$ là giới hạn của $SP^q(X)$ với liên hệ sau

$$X = SP^1(X) \xrightarrow{i_1} SP^2(X) \xrightarrow{i_2} \dots \longrightarrow SP^q(X) \xrightarrow{i_q} \dots$$

$$\text{ở đó } SP^q(X) \xrightarrow{i_q} SP^{q+1}(X): [x_1, x_2, \dots, x_q] \mapsto [0, x_1, x_2, \dots, x_q]$$

Ta có thể viết

$$(CT\ 3.18) \quad SP(X, 0) = \sum_q SP^q(X) / ([x_1, x_2, \dots, x_q] \square [0, x_1, x_2, \dots, x_q])$$

Nên ta kí hiệu i_q là liên hệ chính tắc $SP^q(X) \rightarrow SP(X, 0)$

3.3.1. Định lí

Tồn tại đẳng cấu tự nhiên $j: H_q(X, \square) \rightarrow \pi_q(SP(X, 0))$ (với $q > 0$)

3.3.2. Bổ đề

Bất kì bản đồ liên tục $f: M^7 \rightarrow SP(S^3, 0)$ là một đồng luân tương đương với một bản đồ liên tục $\tilde{f}: M^7 \rightarrow i_3(SP^3(S^3)) \subset SP(S^3, 0)$.

Chúng minh.

Ta xét sự phân hoạch sau $S^3 = \square^3 \cup \{0\}$. Khi đó $SP^q(S^3)$ có sự phân hoạch sau

$$(CT\ 3.19) \quad SP^q(S^3) = \{0\} \cup_{p=1}^q \left(\square^3 \right)^p$$

$$\text{Theo đó (CT 3.20)} \quad SP(S^3, 0) = \{0\} \cup_{p=1}^{\infty} \left(\square^3 \right)^p$$

Đặt $\Sigma^7(SP(S^3, 0))$ là khung 7 – chiều của $SP(X^3, 0)$.

Suy ra ánh xạ liên tục $f: M^7 \rightarrow SP(S^3, 0)$ đồng luân với ánh xạ

$$\bar{f}: M^7 \rightarrow \Sigma^7(SP(S^3, 0))$$

Do đó vì $i_3: SP^3(S^3) \rightarrow SP(S^3, 0)$ chính tắc nên kết hợp với (CT 3.19) và (CT 3.20) thì bổ đề 3.2.2 được chứng minh.

Đặt dx_j^i , $i=1,2,3$ là bất biến trái 1 – dạng trên S_j^3 ($S^3 = SU(2)$) đối ngẫu với $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ trong (CT 3.11). Khi đó:

$$(CT\ 3.21) \quad \begin{cases} dx_j^1 = \sqrt{2} dx_j^2 \wedge dx_j^3 \\ dx_j^2 = -\sqrt{2} dx_j^1 \wedge dx_j^3 \\ dx_j^3 = \sqrt{2} dx_j^1 \wedge dx_j^2 \end{cases}$$

Đặt $\pi_j: \Pi_{j=1}^k S_j^3 \rightarrow S_j^3 = S^3$ là phép chiếu chính tắc. Ta viết gọn $\Pi_i^*(dx_j^i)$ bằng dx_j^i .

3.3.3. Bổ đề

Dạng vi phân $h = \sum_{j=1}^k dx_j^1 \wedge dx_j^2 \wedge dx_j^3$ là đóng, nó giảm xuống một dạng vi phân $\bar{h}$ trên

$SP^k(S^3)$. Dạng $\bar{h}$ này là phần tử sinh của $H^3(SP^k(S^3), \square) = H^3(SP^k(S^3), \square) = \square$.

Chứng minh.

Dễ thấy h là đóng. Hơn nữa dạng h là bất biến dưới tác động của nhóm hoán vị σ_k trên $\Pi_{i=j}^k S_j^3$. Điều này chỉ ra rằng tồn tại $\bar{h}$ trên $SP^k(S^3)$.

Mặt khác, vì tích phân của $\bar{h}$ trên $i_{k-1} \circ \dots \circ i_1(S^3 = SP^1(S^3)) \subset SP^k(S^3)$ bằng 1 nên $\bar{h}$ là phần tử sinh của $H^3(SP^k(S^3), \square) = H^3(SP^k(S^3), \square) = \square$.

3.3.4. Định lí

Giả sử ϕ là tích phân G_2 - dạng đóng trên đa tạp trơn M^7 . Khi đó, tồn tại một phép nhúng $f: M^7 \rightarrow (\overline{\omega}, \overline{h})$ sao cho $f^*(\overline{h}) = \phi$.

Chứng minh.

Chứng minh định lý này, ta dựa vào nguyên lý – H (xem phụ lục)

Nhắc lại :

Gọi V và W là những đa tạp trơn. Ta kí hiệu $(V, W)^{(r)}$, $r \geq 0$ là không gian các r – tia từ $V \rightarrow W$. Ta coi mỗi ánh xạ $f: V \rightarrow W$ như một thớ $V \times W = (V, W)^{(0)}$ trên V . Vì $(V, W)^{(r)}$ là một thớ trên V , và ta kí hiệu p^r là phép chiếu chính tắc từ $(V, W)^{(r)}$ tới V , và p_r^s là phép chiếu chính tắc từ $(V, W)^{(s)} \rightarrow (V, W)^{(r)}$.

Giả sử một quan hệ vi phân $R \subset (V, W)^{(r)}$ thỏa nguyên lý H cho ánh xạ $f_0: V \rightarrow W$, nếu mỗi lát cắt $\phi_0: V \rightarrow R$ nằm trên f_0 , (tức là $p_0^r \circ \phi_0 = f_0$) có thể được mang tới một lát cắt holonom ϕ_1 bởi một đồng luân của lát cắt $\phi_t: V \rightarrow R_U$, $t \in [0; 1]$, với mọi lân cận mở bất kì U của $f_0(V)$ trong $V \times W$. Với một tập mở $U \subset V \times W$ ta viết

$$R_U := (p_0^r)^{-1}(U) \cap R \subset (V, W)^{(r)}$$

Nguyên lý – H được gọi là C^0 - trừ mật, nếu nó thỏa C^0 , gần như với mọi $f: V \rightarrow W$.

Gọi h là k - dạng vi phân trơn trên W . Một không gian con $T \subset T_\omega W$ được gọi là $h(\omega)$ - chính qui, nếu phân tích của $T_{h(\omega)}$ với giới hạn đồng phối

$$\begin{aligned} \Lambda^{k-1} T_\omega W &\rightarrow \Lambda^{k-1} T \\ T_\omega W &\mapsto \Lambda^{k-1} T \end{aligned}$$

Một phép nhúng chìm $f: V \rightarrow W$ được gọi là h - chính qui nếu $\forall v \in V$, không gian con $Df(T_v V)$ là $h(f(v))$ - chính qui.

Gọi G là một nhóm hữu hạn trên W . Khi đó quỹ đạo $\overline{W} = W / G$ có thể đồng nhất với dạng vi phân G - bất biến trên W .

Bất kì ánh xạ $\overline{f}: V \rightarrow \overline{W}$ có thể được coi như một G - bất biến đa xạ. Ngược lại, bất kì G - bất biến đa xạ đều giảm được xuống ánh xạ $\overline{f}: V \rightarrow \overline{W}$. Ta nói rằng: một G - bất biến đa xạ $f: V \rightarrow W$ là một đa nhúng chìm h - chính qui tại mọi nhánh của f .

Định nghĩa này có thể giảm xuống tới $\overline{W}$ và cho chú ý về sự nhúng chìm $\overline{h}$ - chính qui.

Nói cách khác ta định nghĩa H – nguyên lí cho G - bất biến đa xạ từ $V \rightarrow W$ tương đương với H – nguyên lí cho $\overline{f}: V \rightarrow \overline{W}$.

Giả sử cho một quan hệ vi phân $R \subset (V, W)^{(r)}$. Lấy $k \geq r, k \in \mathbb{N}$ và gọi $\Phi(U)$ là không gian C^k - nghiệm của R trên U (với mọi mở $U \subset V$). Giới hạn $\Phi(U) \rightarrow \Phi(U')$ ($\forall U' \subset U$) làm Φ thành một bó. Ta nói Φ thỏa nguyên lí – H nếu R thỏa nguyên lí – H.

Một bó Φ được gọi là uốn được (vi uốn), nếu ánh xạ giới hạn $\Phi(C) \rightarrow \Phi(C')$ là một thớ (vi thớ) với mọi cặp tập con compact C và $C' \subset C$ trong M .

(một ánh xạ $\alpha: A \rightarrow A'$ được gọi là vi thớ nếu $\exists \varepsilon > 0$ sao cho ψ có thể nâng lên thành một $\overline{\psi}: P \times [0, \varepsilon] \rightarrow A$)

Bây giờ ta giả sử M^7 là một đa tạp compact với một G_2 - dạng đóng ϕ . Vì ϕ không triệt tiêu nên $[\phi]$ biểu diễn một lớp đối đồng luân không thô trong $H^3(M^7, \mathbb{R})$. Đa tạp $M^8 = M^7 \times (-1; 1)$ cho bởi dạng $g = \phi \oplus 0$. Kí hiệu Φ_{reg} là bó các nhúng chìm h - chính qui $\overline{f}$ từ $M^8 \rightarrow (\overline{W}, \overline{h})$ sao cho $\overline{f}^*[\overline{h}] = [g]$.

3.3.5. Mệnh đề

Bó Φ_{reg} là vi uốn

Đặt $\overline{f}_0$ là một nhúng chìm h - chính qui từ $M^8 \rightarrow \overline{W}$ sao cho $\overline{f}_0^*[\overline{h}] = [g]$

Kí hiệu $\overline{F}_0: M^8 \times \overline{W} \rightarrow M^8$ sao cho $\overline{F}_0(v) = (v, \overline{f}_0(v))$.

Đặt $\Gamma_0 \subset M^8 \times \overline{W}$ là đồ thị của $\overline{f}_0$ (tức là ảnh của $\overline{F}_0$), gọi $p(g)$ và $p(\overline{h})$ là cái kéo lại của dạng g và $\overline{h}$ tới $M^8 \times \overline{W}$.

Lấy một lân cận nhỏ $\overline{Y} \supset \Gamma_0$ trong $M^8 \times \overline{W}$. Từ đó có bổ đề sau

3.3.6. Bổ đề

Đồ thị Γ_0 là một co rút của $\overline{Y}$.

3.3.7. Bổ đề

Giả sử ánh xạ $\bar{F}: M^8 \rightarrow \bar{Y}$ tương ứng với một nhúng chìm h – chính qui $\bar{f}: M^8 \rightarrow \bar{W}$.

Khi đó, $\bar{F}$ là một nhúng chìm $d\hat{h}$ – chính qui.

3.3.8. Bổ đề

Với một ánh xạ $\bar{F}: M^8 \rightarrow \bar{Y}$ và 1 – dạng ϕ trên M^8 , đặt $D(\bar{F}, \phi) = \bar{F}^*(\hat{h}) + d\phi$

Toán tử vi phân D là vô cùng bé khả đảo tại $(\bar{F}, \phi)$ với mọi ánh xạ $\bar{f}$ là nhúng chìm $\bar{h}$ – chính qui.

3.3.9. Mệnh đề

Tồn tại lát cắt s của thớ $Mono\left((TM^8, g), (\bar{F}^*(T\bar{W}, h))\right)$ sao cho $s(z)(T_z M^8)$ là không gian con h – chính qui $\forall z \in M^8$.

Trong trường hợp $W = (S^3)^N$. Do thớ trực giao song song hóa, nên

$$\bar{F}^*(T\bar{W}) = M \times \square^{3N}$$

Chúng minh.

Ta chứng minh theo ba bước sau

Bước 1: Ta chỉ ra sự tồn tại của một lát cắt $s_1 \in Mono\left(TM^8, M \times \square^{3N_0}\right)$ sao cho ảnh của

s_1 là thớ con h – chính qui trong $M \times \square^{3N_0}$. Gọi h là 3 – dạng trên $\square^{3N_0}$

$$h = \sum_{j=1}^{N_0} dx_j^1 \wedge dx_j^2 \wedge dx_j^3$$

Dễ thấy h là đa đối xứng. Ta giả sử rằng $(w_i^j), 1 \leq i \leq 3$ là vectơ cơ sở trong $\square_i^3$.

3.3.10. Bổ đề

Với mỗi $k \geq 3$ tồn tại một không gian con k – chiều V^k trong $\square^{3N_0}$ sao cho V^k là không gian con h – chính qui. Ta chỉ ra rằng

$$(CT\ 3.22) \quad N_0 \geq 5 + \left(\frac{k}{2} - 2\right) \left(3 + \frac{k}{2}\right) \quad \text{nếu } k \text{ chẵn}$$

$$N_0 \geq 6 + \left(\left[\frac{k}{2}\right] - 2\right) \left(3 + \left[\frac{k}{2}\right]\right) + \left[\frac{k}{2}\right] \quad \text{nếu } k \text{ lẻ}$$

Chúng minh.

Xây dựng ánh xạ nhúng tuyến tính $f: V^k \rightarrow \square^{3N_0}$ thỏa điều kiện của bổ đề 3.3.10

Mỗi ánh xạ tuyến tính f có thể viết như sau

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_N), \quad f_i: V^k \rightarrow \square_i^3 \quad (i = \overline{1, N_0})$$

Giả sử rằng $V^3 \subset V^4 \subset \dots \subset V^k$ chuỗi không gian con trong V^k với cơ sở $(e_1, \dots, e_k)$ trong V^k .

Gọi $(e_1^*, \dots, e_k^*)$ là cơ sở đối ngẫu của $(V^k)^*$. Hạn chế của cơ sở $(e_1^*, \dots, e_i^*)$ với V^i là cơ sở đối ngẫu của $(e_1, \dots, e_i) \in V^i$.

Tương tự, gọi giới hạn của v_j^* với không gian con V^i cũng là $v_j^* (\neq 0)$. Giả sử $f_i \in V^k$ sao cho $\forall 3 \leq i \leq k$ thì

$$(CT \ 3.23) \quad \left\langle f_1^* \left(\Lambda^2 \left(\square_1^3 \right) \right), f_2^* \left(\Lambda^2 \left(\square_2^3 \right) \right), \dots, f_{\delta(i)}^* \left(\Lambda^2 \left(\square_{\delta(i)}^3 \right) \right) \right\rangle_{\otimes \square} = \Lambda^2(V^i)$$

Từ (CT 3.23) suy ra $f(V^i)$ là h – chính qui, vì

$$I_h \left(\square_1^3 \times \dots \times \square_{\delta(i)}^3 \right) = \bigoplus_{j=1}^{\delta(i)} \Lambda^2 \left(\square_j^3 \right)$$

Với $i = 3$, ta có $f_1 = Id$ và $\delta(1) = 1$. Giả sử $f_{\delta(i)}$ đã xây dựng rồi. Khi đó để tìm f_j với $\delta(i) + 1 \leq j \leq \delta(i + 1)$ ta cần tìm một nhúng tuyến tính $f_{\delta(i)+1}, \dots, f_{\delta(i+1)}$ sao cho

$$(CT \ 3.24) \quad \left\langle f_{\delta(i)+1}^* \Lambda^2 \left(\square_{\delta(i)+1}^3 \right), \dots, f_{\delta(i+1)}^* \Lambda^2 \left(\square_{\delta(i+1)}^3 \right) \right\rangle_{\otimes \square} \supset e_{i+1}^* \wedge \Lambda^1(V^i)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} f_i(e_{i+1}) = \omega_j^1 \in \square_j^3 & \text{nếu } j \geq \delta(i) \\ f_i(e_{i+1}) = 0 & \text{nếu } j \leq \delta(i) \end{cases}$$

Gọi l là một chỉ số thỏa $1 \leq l \leq i$ và $j \geq \delta(i) + 1$. Khi đó ta có $f_j(e_l) = 0$ hoặc $f_j(e_l) = \omega_j^2$ hoặc $f_j(e_l) = \omega_j^3$ sao cho (CT 3.24) thỏa mãn. Do đó hàm suy rộng của $f_j(e_l)$ thỏa điều kiện trong bổ đề 3.3.10.

Ta chọn một không gian con h – chính qui V^{17} trong $\square^{80}$ theo bổ đề 3.3.10 ta tìm một lát cắt s_1 theo bước 1 với $s_1 \in Mono(TM^8, M \times V^{17})$. s_1 này tồn tại vì thớ $Mono(T_x M^8, \square^{17})$

tương đương đồng luân với $SO(17)/SO(9)$ có nhóm đồng luân π_j triệt tiêu, $j \leq 18$.

Như vậy bước 1 thỏa mãn.

Bước 2: Với mỗi s_1 ở bước 1, đặt $g_1 = g - s_1^*(h)$

Ta chỉ ra sự tồn tại của $s_2 \in \text{End}\left((TM^8, g_1), (M \times \square^{3N_1}, h)\right)$ (s_2 không cần đơn ánh)

[Nash 1956] (xem tài liệu tham khảo) chỉ ra: tồn tại một số hữu hạn các phủ mở U_i^j , $j = \overline{1, 8}$ của M^8 thỏa tính chất sau

$$(CT\ 3.25) \quad N_i^j \cap N_k^j = \emptyset, \forall j = \overline{1, 8} \text{ và } i \neq k$$

Và U_i^j đồng phôi với một đĩa mở $\forall i, j$.

Vì U_i^j thỏa điều kiện (CT 3.25) ($\forall j$) nên có thể nhúng $U_i U_i^j$ vào $\square^8$. Do đó, với mỗi j , $U_i U_i^j$ có một hệ tọa độ địa phương x_j^r , $r = \overline{1, 8}, j = \overline{1, 8}$. Ta có thể viết

$$(CT\ 3.26) \quad g_1(z) = \sum_{j=1}^8 f_j(z) \cdot \mu_j^{r_1 r_2 r_3}(z) \cdot dx_j^{r_1} \wedge dx_j^{r_2} \wedge dx_j^{r_3}, \quad r_i \in (1, \dots, 8)$$

Đặt $N_1 = 8.C_8^3$, ta có

$$s_2(z) = (s_1(z), \dots, s_{N_1}(z)), \quad s_q(z) \in \text{End}(T_z M^8, \square_q^3)$$

$$\text{sao cho } s_{\theta(j, r_1 r_2 r_3)}(z) = f_j(z) \cdot \mu_j^{r_1 r_2 r_3}(z) \cdot A_{r_1, r_2, r_3}$$

$$(\text{với } A(\partial x_{r_i}) = \delta_i^i e_i)$$

(e_1, e_2, e_3) là một vector cơ sở trong $\square_q^3$ ($q = \theta(j, r_1 r_2 r_3)$). Khi đó s_2 thỏa: $s_2(h) = g_1$. Do đó bước 2 được chứng minh xong.

Bước 3: Đặt $s = (s_1, s_2)$ với s_1 xây dựng trong bước 1 và s_2 xây dựng trong bước 2

Suy ra s thỏa điều kiện mệnh đề 3.3.9.

Như vậy: áp dụng 3.3.9, 3.3.7 ta chứng minh được định lí 3.3.4

KẾT LUẬN

Qua những phần đã trình bày, mục đích của chúng tôi là tìm hiểu về G_2 cấu trúc trên đa tạp 7 – chiều, chúng tôi đã làm rõ được các ý chính như sau:

- Sự tồn tại của G_2 - cấu trúc tương đương với sự tồn tại của 3 – dạng không suy biến trên đa tạp.

- Chúng tôi cũng đưa ra cách xây dựng G_2 - cấu trúc đóng trên đa tạp 7 – chiều, mà ví dụ rõ nhất là G_2 - cấu trúc đóng trên $S^3 \times S^4$.

- Khi 3 - dạng cơ bản của G_2 - cấu trúc đóng thì độ cong vô hướng không dương và triệt tiêu khi và chỉ khi cấu trúc đó là xoắn tự do.

- Mọi G_2 - cấu trúc nguyên vẹn ϕ trên một M^7 compact có thể nhúng trong một tích hữu hạn của $S^3 = SU(2)$ với một 3 – dạng đóng chính tắc h sao cho cái kéo lại của h bằng với ϕ .

- Tích phân của G_2 - cấu trúc đóng trên đa tạp 7 – chiều M^7 có thể tìm được bằng cách nhúng M^7 vào không gian phổ dụng $\left(W^{3(80+8.C_8^3)}, h\right)$.

- Do những hạn chế về nhiều mặt như: trình độ, thời gian,... Luận văn đã dừng lại trong những khuôn khổ nhất định.

Chúng tôi cũng mong muốn sẽ còn được tìm hiểu về G_2 - cấu trúc trên các đa tạp n – chiều với $n \geq 8$.

Sau cùng, mặc dù đã có nhiều cố gắng trong việc soạn thảo, nhưng những sai sót là không thể tránh khỏi, tôi xin chân thành lắng nghe và cảm ơn các độc giả đã, đang và sẽ đóng góp ý kiến cho quyển luận văn này!

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn!

Tp HCM, ngày 24 tháng 4 năm 2010

Tác giả

Nguyễn Thị Hồng Hạnh

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

- [1] Đào Văn Trà (1984), *Về một lớp các đại số Lie số chiều thấp*, Tuyển tập các báo cáo tại Hội thảo Khoa học Viện Toán học Việt Nam lần thứ 12 tại Hà Nội.
- [2] Lê Anh Vũ (1990), “*Không gian phân lá tạo bởi các K – quỹ đạo chiều cực đại của lớp nhóm Lie MD^4* ”, Luận án phó tiến sỹ Toán học, Viện Toán học – Viện khoa học Việt nam.

Tiếng Anh

- [3] Robert Bryant (1987), *Metrics with exceptional holonomy*, Ann. of Math.
- [4] Lê Hồng Vân, (2006), *Existence of closed G_2 -structures on 7-manifolds*
- [5] J. Differential Geom (1987) *An example of a compact calibrated manifold associated with the exceptional Lie group G_2* .
- [6] Marisa Fern´andez and Alfred Gray *Riemannian manifolds with structure group G_2* , Ann.
- [7] Thomas Friedrich and Stefan Ivanov (2002) *Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory*.
- [8] Alfred Gray, *Killing spinor equations in dimension 7 and geometry of integrable G_2 -manifolds*
- [9] F. Reese Harvey (1990), *Spinors and calibrations*, Academic Press Inc., Boston,
- [10] Richard Cleyton and Stefan Ivanov, *On the geometry of closed G_2 -structures*.
- [11] Nigel Hitchin, *The geometry of three-forms in 6 and 7 dimensions*, J.Differential Geom.
- [12] James Humphreys (1978), *Introduction to Lie algebras and representation theory*, second printing revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin.
- [14] Dominic Joyce, *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Mathematical Monographs.

PHỤ LỤC

A1. Nguyên lí – h và tính khả uốn

Nếu V là một đa tạp đa diện đếm được, compact đại phương thì mỗi bó uốn được trên V thỏa nguyên lí – H.

A2. Giả sử ϕ là một bó vi uốn trên V và đặt một đa tạp con $V_0 \subset V$ nhận tác động qua ϕ .

Khi đó $\phi_0 = \phi|_{V_0}$ là khả uốn và do đó nó thỏa nguyên lí – H.

Giả sử $U \subset U' \subset V$ là một tập con mở trong V . Ta nói $\delta_t : U \rightarrow U', t \in [0; 1]$, $\delta_0 = Id$ tác động vào bó Φ trên tập con $\Phi' \subset \Phi(U')$, nếu với δ_t và mỗi $\phi \in \Phi'$ có một đồng luân trong $\Phi(U)$ mà ta gọi là $\delta_t^* \phi$ sao cho

- $\delta_0^* \phi = \phi|_U$
- Nếu $\phi_1, \phi_2 \in \Phi'$ tại $u'_0 \in U'$ và nếu $\delta_{t_0}(u_0) = u'_0$ với $u_0 \in U$ và $t_0 \in [0; 1]$ thì $(\delta_{t_0}^* \phi_1)(u) = (\delta_{t_0}^* \phi_2)(u)$. Do đó, ta viết $\phi(\delta_t(u))$ thay vì $(\delta_t^* \phi)(u)$, $u \in U$.
- Đặt $U_0 \subset U$ là tập con mở lớn nhất ở đó $(\delta_t)|_{U_0} = Id$. Khi đó $\delta_t^*(\phi)$ là hằng số theo t trên U_0 .
- Nếu δ_t là hằng số theo t trên U thì $\delta_t^* \phi$ cũng là hằng số với $t \geq t_0$.
- Nếu $\phi_p \in \Phi'$ là một họ liên tục thì $\delta_t \phi_p$ cũng là 1 họ cũng liên tục.