

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HCM



Đinh Quốc Khánh

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ
TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

Chuyên ngành: LL và PPDH môn Toán

Mã số : 60 14 10

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS. TS. Lê Thị Hoài Châu

Thành Phố Hồ Chí Minh

- 2010 -

LỜI CẢM ƠN.

Đầu tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến PGS.TS. Lê Thị Hoài Châu, người đã nhiệt tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân trọng cảm ơn PGS.TS. Lê Thị Hoài Châu, PGS.TS. Lê Văn Tiến, TS. Lê Thái Bảo Thiên Trung, TS. Trần Lương Công Khanh đã nhiệt tình giảng dạy, truyền thụ cho chúng tôi những kiến thức cơ bản và rất thú vị về didactic toán, cung cấp cho chúng tôi những công cụ cần thiết và hiệu quả để thực hiện việc nghiên cứu.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn:

- Tất cả các bạn cùng khóa, những người đã cùng tôi làm quen, học tập và nghiên cứu về didactic toán trong suốt khóa học.

- Ban giám hiệu và các thầy cô, đồng nghiệp của trường THCS Nguyễn Gia Thiều quận Tân Bình và trường Trung Học Thực Hành ĐHSP TPHCM nơi tôi công tác, đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ và luôn động viên để tôi hoàn thành tốt khóa học của mình.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến những người thân yêu trong gia đình đã luôn động viên và nâng đỡ tôi về mọi mặt.

Đinh Quốc Khánh

MỞ ĐẦU

Chúng ta có thể nhận thấy hàm số không chỉ xuất hiện trong toán học mà còn có mặt trong các lĩnh vực khác như: vật lý, kinh tế, trắc địa, tin học, ... Trong lĩnh vực toán học hàm số xuất hiện trước hết với tư cách là đối tượng nghiên cứu, sau đó với tư cách là một *công cụ* để xây dựng các khái niệm toán học khác như: khái niệm phương trình, khái niệm bất phương trình... Còn trong chương trình Toán ở trường phổ thông hiện hành thì hàm số được đưa vào một cách tường minh ở lớp 7 sau đó đối tượng hàm số có mặt liên tục ở các lớp 9, 10, 11 và 12. Chúng ta thấy có một sự ngắt quãng ở đây, điều này có thể được giải thích dựa vào mục tiêu về kiến thức trong xây dựng chương trình toán ở bậc trung học cơ sở. Ở bậc học này mục tiêu của chương trình là lần lượt xây dựng và từng bước hoàn thiện các kiến thức toán học. Do đó tại thời điểm của lớp 8 hàm số không được đưa vào mà nhường chỗ cho việc giới thiệu và xây dựng các khái niệm toán học khác như: phương trình và bất phương trình.

Khi nói đến hàm số ta không thể không nói đến vai trò của đồ thị vì đồ thị được xem như là một công cụ để nghiên cứu hàm số, là một phương tiện để biểu thị hàm số. Hơn thế nữa biểu thức hàm số tương ứng với đồ thị đã cho thường được dùng để giải quyết những vấn đề thực tế. Do đó chắc chắn một mục đích không thể không nói đến của việc dạy học hàm số là giúp học sinh thấy được vai trò của hàm số trong thực tế đồng thời có thể sử dụng các kiến thức về hàm số để giải quyết các vấn đề trong thực tiễn. Việc cho học sinh thấy được vai trò của hàm số trong thực tiễn cũng như khả năng sử dụng các kiến thức hàm số để giải quyết các vấn đề thực tiễn là một trong các mục tiêu của dạy học hàm số nói riêng và dạy học toán nói chung. Điều này đã được thể chế khẳng định trong mục tiêu, quan điểm xây dựng và phát triển chương trình toán ở trường phổ thông, cụ thể: “Mục tiêu đầu tiên của xây dựng chương trình cần đạt được là ý nghĩa, ứng dụng của những kiến thức Toán học vào đời sống, vào việc phục vụ các môn học khác. Do đó cần tăng cường thực hành và vận dụng, thực hiện dạy học phải gắn với thực tiễn” (*Chương Trình Giáo Dục Phổ Thông Môn Toán, Bộ Giáo Dục Và Đào Tạo*)

Tuy nhiên một câu hỏi đặt ra cho chúng tôi là: liệu học sinh có thể sử dụng các kiến thức về hàm số đã được cung cấp để giải quyết các vấn đề thực tế hay không? Câu hỏi này cũng đồng nghĩa với việc học sinh có thể xác định được biểu thức của hàm số khi biết trước một số yếu tố thuộc đồ thị hay không?

Chính sự phong phú và đa dạng đó đã thúc đẩy chúng tôi đi tìm hiểu các đối tượng tri thức này.

1. Mục đích nghiên cứu

Một trong những lý do quan trọng để đưa hàm số vào chương trình Toán ở phổ thông nằm ở sự cần thiết của nó đối với cuộc sống. Do đó câu hỏi được đặt ra là thể chế dạy học hiện hành đáp ứng đáp ứng như thế nào với yêu cầu phát huy tính ứng dụng của hàm số trong những tình huống thực tiễn?

Câu hỏi này có liên quan đến vấn đề mô hình hóa trong dạy học toán nói chung và dạy học hàm số nói riêng.

Một thực tế cho thấy khi sử dụng công cụ hàm số để giải quyết các bài toán liên quan đến chuyển động của một vật, trước hết ta cần phải thiết lập được biểu thức hàm số tương ứng với chuyển động của vật đó. Khi nghiên cứu những bài toán này chúng ta thường chỉ xem xét tại một số thời điểm nhất định nào đó. Do đó thông tin mà chúng ta nhận thường khá rời rạc, các thông tin này thường được ghi lại dưới dạng bảng hay dưới dạng một số điểm và chúng được xem như đồ thị của hàm số. Điều này dẫn chúng tôi đến một câu hỏi liên quan đến quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số: Trước những thông tin đã cho dưới dạng bảng hay một số điểm thuộc đồ thị. Học sinh có biết cách thiết lập biểu thức hàm số tương ứng hay không?

Đồ thị mô tả chuyển động của một vật thường rất đa dạng và phức tạp. Do đó trong khuôn khổ của luận văn này chúng tôi chỉ tiến hành nghiên cứu các chuyển động mà đồ thị của chúng là các đường thẳng và các đường cong bậc hai. Để làm được điều này chúng tôi trước hết muốn tìm hiểu trong lĩnh vực Toán học và trong một số lĩnh vực khác ngoài Toán, kỹ thuật chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số đã được thực hiện như thế nào? Tiếp đến chúng tôi muốn làm rõ những vấn đề liên quan đến việc chuyển đổi trong chương trình hiện hành, cùng với mục tiêu cho việc dạy học chuyển đổi và sự cụ thể hóa mục tiêu này trong các sách giáo khoa (SGK), mà cụ thể là các SGK Toán lớp 7, lớp 9 và lớp 10, nơi mà hai đối tượng hàm số này được đưa vào. Từ đó xem xét ảnh hưởng của các yếu tố đó lên hoạt động học tập của học sinh. Cụ thể hơn, chúng tôi muốn tìm câu trả lời cho những câu hỏi sau:

Q₁. Trong lĩnh vực Toán học và trong một số lĩnh vực ngoài Toán quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số đã được thực hiện như thế nào? Mục đích là gì?

Q₂. Trong chương trình toán hiện hành yêu cầu cho việc chuyển đổi có được đặt ra đối với hai đối tượng hàm số này, mục đích của việc chuyển đổi là gì?

Với những câu hỏi trên có thể nói mục đích nghiên cứu của chúng tôi là :

✚ Nghiên cứu quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số trong lĩnh vực Toán học và trong một số lĩnh vực ngoài toán đã được thực hiện như thế nào? Mục đích là gì?

✚ Tìm hiểu chương trình và sách giáo khoa đã thực hiện quá trình chuyển đổi này ra sao, nhằm mục đích gì?

✚ Xây dựng thực nghiệm để nghiên cứu cách thức chuyển đổi và thông qua đó học sinh thấy được vai trò của hàm số trong thực tế?

2. Cơ sở lí thuyết

Chúng tôi đặt nghiên cứu của mình trong phạm vi của Didactic toán, cụ thể là *Thuyết nhân học* và khái niệm *Hợp đồng didactic* của lý thuyết tính huống cùng với *phương pháp dạy học mô hình hóa* làm cơ sở cho việc xác định phương pháp luận nghiên cứu và nền tảng cho việc tìm kiếm câu trả lời những câu hỏi. Đồng thời chúng tôi cũng sẽ cố gắng chỉ ra tính thỏa đáng cho sự lựa chọn phạm vi lý thuyết của mình.

Tuy nhiên trong luận văn, những yếu tố lý thuyết và phương pháp luận nghiên cứu không đề cập một cách tuyến tính, mà theo nhu cầu phân tích ở những giai đoạn khác nhau của công trình.

♦ **Lý thuyết nhân chủng : mối quan hệ thể chế, mối quan hệ cá nhân**

Lý thuyết nhân chủng trong didactic không xem xét hoạt động toán học và nghiên cứu toán học một cách tách rời, mà trong toàn thể các hoạt động của con người và của các thể chế xã hội, được đặt đồng thời trong thời gian và không gian.

Đặt nghiên cứu trong phạm vi của lý thuyết nhân chủng, chúng tôi sẽ nghiên cứu được **mối quan hệ thể chế I** đối với đối tượng O, **mối quan hệ cá nhân X** đối với đối tượng O, mà các câu hỏi của chúng tôi đều liên quan các khái niệm này. Cần nói thêm rằng đối tượng O ở đây là “Mô hình hóa với việc nghiên cứu quá trình chuyển đổi từ đồ thị đường thẳng và đường cong bậc hai sang biểu thức hàm số”, thể chế I mà chúng tôi quan tâm ở đây là dạy học theo chương trình hiện hành ở trường phổ thông, còn cá nhân được xem xét ở đây là học sinh.

Tuy nhiên, một trong những khiếm khuyết của cách đặt vấn đề theo mối quan hệ thể chế, theo Bosch et Chevarillard (1999), đó là thiếu một phương pháp phân tích thực tế của thể chế. Khái niệm **tổ chức toán học** được đưa vào bởi Chevarillard (1998) nhằm khắc phục lỗ hổng này.

♦ **Tổ chức toán học : Một công cụ nghiên cứu mối quan hệ thể chế**

Một **tổ chức praxéologique**, theo Chevarillard là một bộ bốn thành phần $[T, \tau, \theta, \Theta]$: kiểu nhiệm vụ T, kỹ thuật τ để giải quyết kiểu nhiệm vụ T, công nghệ θ giải thích cho kỹ thuật τ , lý thuyết Θ đóng vai trò công nghệ của θ , nghĩa là giải thích cho θ . Một tổ chức praxéologique mà các thành phần đã nêu mang bản chất toán học, thì được gọi là một **tổ chức toán học**.

Trong luận văn này, việc xác định các tổ chức toán học gắn với đối tượng O sẽ cho phép chúng tôi :

- Vạch rõ các quan hệ thể chế $R(I, O)$
- Hình dung được quan hệ cá nhân trong thể chế I duy trì đối với O.

♦ **Dạy học mô hình hóa :**

Để làm rõ một vài vấn đề liên quan đến nó, chúng tôi tham khảo một số tài liệu:

- *Các phương pháp tối ưu hóa; Bùi Thế Tâm, Trần Vũ Thiệu; Nhà xuất bản giao thông vận tải.*

- *Phương pháp dạy học môn toán ở trường phổ thông, Lê Văn Tiến, Nhà xuất bản đại học quốc gia TP HCM.*

Một trong các mục tiêu của dạy học toán học là cung cấp cho học sinh những tri thức toán học công cụ và quan trọng hơn là cách vận dụng những tri thức này trong việc giải quyết những vấn đề nảy sinh từ thực tiễn. Qua đó cho phép làm rõ vai trò và ý nghĩa thực tiễn của các tri thức toán học. Để làm được điều này nhất thiết phải xây dựng được một mô hình toán học của thực tiễn. Chúng tôi nhận thấy đòi hỏi trên có liên quan sự mô hình hóa trong dạy học toán. Nói khác đi đây chính là vấn đề **dạy học mô hình hóa** và **dạy học bằng mô hình hóa**. Để phân biệt hai khái niệm này chúng tôi lược trích trong *Phương pháp dạy học môn Toán* của tác giả Lê Văn Tiến:

“Một cách sơ lược có thể hiểu, **dạy học mô hình hóa** là dạy học cách thức xây dựng mô hình toán học của thực tiễn, nhằm tới trả lời cho câu hỏi, vấn đề nảy sinh từ thực tiễn.

Tuy nhiên, thuật ngữ “*dạy học mô hình hóa*” được hiểu như trên có dẫn tới cách hiểu sai lệch rằng : trước khi xây dựng mô hình của thực tế, cần phải có các tri thức toán học. Từ đó quy trình dạy học có thể là:

Dạy học tri thức toán học lí thuyết → Vận dụng các tri thức này vào việc giải các bài toán thực tiễn và do đó vào việc xây dựng mô hình của thực tiễn.

Quy trình này làm mất đi vai trò động cơ của các bài toán thực tiễn và do đó làm mất đi nguồn gốc thực tiễn của các tri thức toán học : tri thức toán học không còn nảy sinh từ nhu cầu giải quyết các bài toán thực tiễn.

Quan niệm **dạy học bằng mô hình hóa** cho phép khắc phục khuyết điểm này. Theo quan niệm này, vấn đề là dạy học toán thông qua dạy học mô hình hóa. Như vậy, tri thức toán học cần giảng dạy sẽ nảy sinh qua quá trình giải quyết các bài toán thực tiễn. Quy trình dạy học có thể là :

Bài toán thực tiễn → Xây dựng mô hình toán học → Câu trả lời cho các bài toán thực tiễn → Tri thức cần giảng dạy → Vận dụng tri thức này vào giải các bài toán thực tiễn.”

Trong luận văn của mình chúng tôi quan tâm đến vấn đề *dạy học bằng mô hình hóa*. Cũng cần nói thêm rằng, quá trình mô hình hóa toán cho một vấn đề thực tiễn thường trải qua các bước:

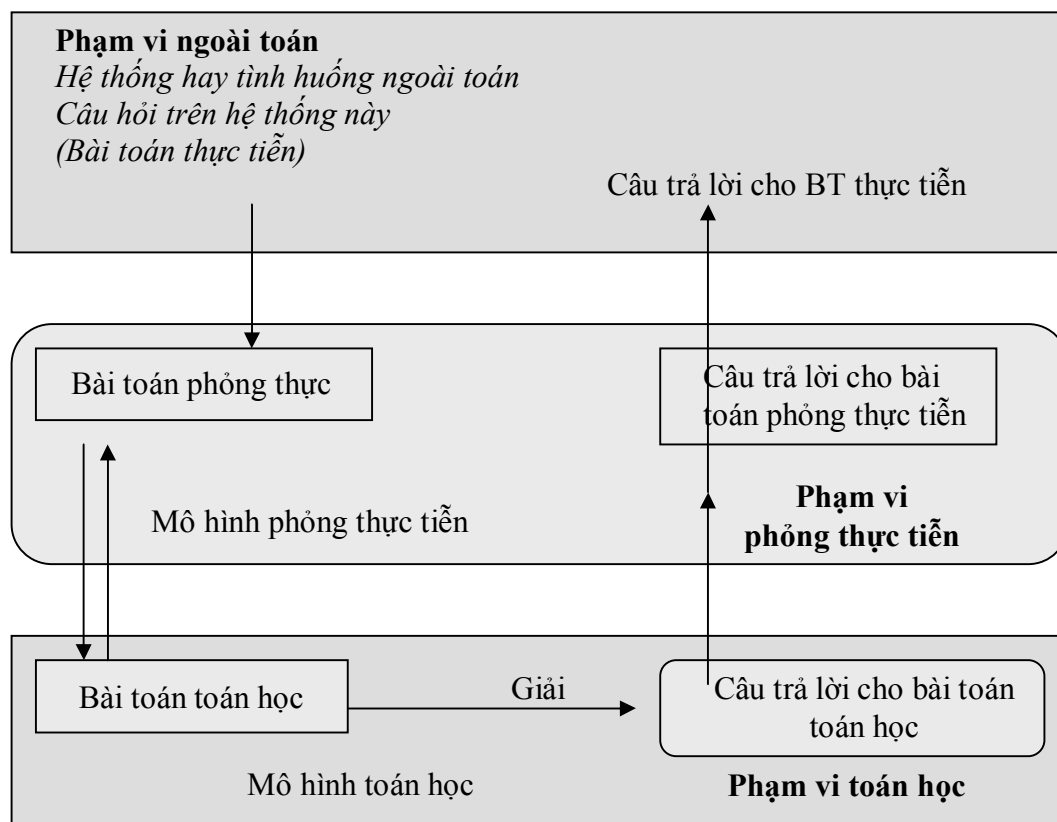
- **Bước 1.** Xây dựng mô hình định tính của vấn đề, tức là xác định các yếu tố có ý nghĩa quan trọng nhất và xác lập những quy luật mà chúng ta phải tuân theo.

- **Bước 2.** Xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả lại dưới dạng ngôn ngữ toán học cho mô hình định tính. Khi có một hệ thống ta chọn các biến cố đặc trưng cho các trạng thái của hệ thống. Mô hình toán học thiết lập mối quan hệ giữa các biến cố và hệ số điều khiển hiện tượng.

- **Bước 3.** Sử dụng các công cụ toán học để khảo sát và giải quyết bài toán hình thành ở bước hai. Căn cứ vào mô hình đã xây dựng cần phải chọn hoặc xây dựng phương pháp cho phù hợp.

- **Bước 4.** Phân tích và kiểm định lại các kết quả thu được trong bước ba. Trong phần này phải xác định mức độ phù hợp của mô hình và kết quả của tính toán với vấn đề thực tế.

Quá trình mô hình hóa một hệ thống ngoài toán học đã được Coulange tóm tắt lại bằng một sơ đồ và được tác giả Lê Văn Tiến mô phỏng lại trong *Phương pháp dạy học môn Toán* như sau:



Những phân tích trên cho thấy dạy-học mô hình hóa là một yêu cầu tự nhiên của việc hoàn thiện, nâng cao năng lực của học sinh, cũng là cách để giúp họ biết vận dụng những kiến thức đã học vào việc giải quyết các vấn đề thực tiễn một cách có hiệu quả. Do tính ứng dụng của hàm số mà việc dạy-học sự mô hình hóa dường như không thể bỏ qua.

3. Trình bày lại câu hỏi của luận văn

Trong phạm vi lí thuyết đã chọn, chúng tôi trình bày lại các câu hỏi của luận văn như sau:

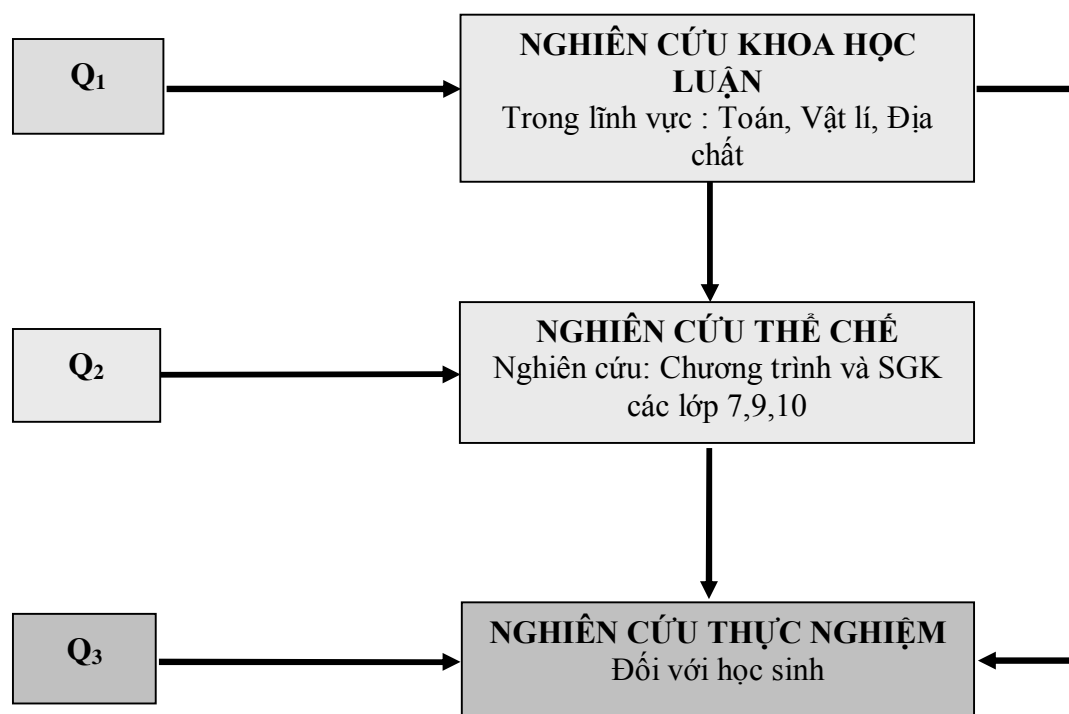
Q₁. Trong lĩnh vực Toán học và trong một số lĩnh vực ngoài Toán quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số đã được thực hiện như thế nào và có mặt trong các tổ chức praxéologique nào?

Q₂. Trong thể chế I_ thể chế dạy học hàm số bậc nhất và bậc hai, quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số có được tính đến hay không? Trong những tổ chức toán học nào cần có mặt sự chuyển đổi? Vấn đề dạy học bằng mô hình hóa có được thể chế quan tâm đến khi xây dựng quá trình chuyển đổi trên hai đối tượng hàm số này?

Q₃ . Sự lựa chọn của thể chế đã ảnh hưởng như thế nào đến học sinh khi họ đứng trước những kiểu nhiệm vụ liên quan đến việc chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số, hay những kiểu nhiệm vụ đòi hỏi phải có mặt sự mô hình hóa?

4. Phương pháp nghiên cứu

Luận văn của chúng tôi nhằm tìm kiếm những yếu tố trả lời cho các câu hỏi nêu trên. Để đạt được mục đích nghiên cứu, chúng tôi xác định phương pháp nghiên cứu được sơ đồ hóa như sau:



Có thể diễn giải sơ đồ phương pháp luận nghiên cứu như sau:

♦ Đối với câu hỏi **Q₁**, do không có điều kiện về tư liệu cũng như thời gian nên chúng tôi không thể dấn thân vào một nghiên cứu khoa học luận đầy đủ và ở hầu hết các lĩnh vực mà ở đó có mặt của hàm số. Do đó chúng tôi giới hạn lại và chỉ xem xét tại một số lĩnh vực như Trắc địa, Vật lí và Toán để tìm kiếm các yếu tố trả lời cho câu hỏi **Q₁** này. Kết quả sẽ được trình bày trong **chương 1** và đây cũng chính là cơ sở tham chiếu cho các nghiên cứu tiếp theo.

♦ Tham chiếu những kết quả thu được từ chương 1, chúng tôi sử dụng các khái niệm *tổ chức toán học, quan hệ thể chế, quan hệ cá nhân* để tiến hành phân tích chương trình toán trung học phổ thông và phân tích các sách giáo khoa toán các lớp 7, 9, 10 hiện hành là các lớp mà hiện nay đối tượng hàm số bậc nhất, hàm số bậc hai được đưa vào để trả lời cho câu hỏi **Q₂**. Nghiên cứu này sẽ được trình bày trong **chương 2**.

♦ Dựa trên kết quả nghiên cứu của hai phần trên cho phép chúng tôi dự đoán những gì có thể tồn tại ở học sinh. Đây là cơ sở để chúng tôi hình thành giả thuyết nghiên cứu và xây dựng một thực nghiệm nhằm tìm các yếu tố trả lời cho câu hỏi **Q₃**. Nghiên cứu này sẽ được trình bày trong **chương 3**.

Chương 1. NGHIÊN CỨU KHOA HỌC LUẬN VỀ VẤN ĐỀ CHUYỂN ĐỔI TỪ ĐỒ THỊ SANG HÀM SỐ.

Nghiên cứu chương này nhằm mục đích tìm câu trả lời cho câu hỏi Q_1 . Chúng tôi xin nhắc lại nội dung của câu hỏi trên như sau:

Q_1 . Trong lĩnh vực Toán học và trong một số lĩnh vực ngoài Toán quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số đã được thực hiện như thế nào?

Do mục đích nghiên cứu của chúng tôi là nghiên cứu quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số. Do đó trước hết chúng tôi sẽ tiến hành nghiên cứu ở mức độ khoa học luận để xem kỹ thuật chuyển đổi đã được thực hiện như thế nào? Vì lí do trong thực tế nhiều khi ta phải giải bài toán ngược: ta *không biết chính xác* hàm số $f(x)$ mà chỉ biết *một tập rời rạc hữu hạn* của đồ thị của nó và một vài nét rất khái quát về hàm số $f(x)$; ta muốn dựng lại hàm số $f(x)$ và dĩ nhiên không thể nào dựng được nguyên xi hàm số $f(x)$ (vì bản thân hàm số $f(x)$ lại chưa biết) nhưng ta hy vọng rằng dựng được một hàm số có các tính chất như hàm số $f(x)$ và dĩ nhiên đồ thị của hàm số được dựng ít ra cũng gần trùng với đồ thị của $f(x)$ tại tập các điểm rời rạc đã cho trước ở trên.

Trong chương này chúng tôi sẽ tiến hành nghiên cứu quá trình chuyển đổi trong các lĩnh vực Trắc địa, Vật lí mà cụ thể là trong Động học chất điểm và Toán học.

Các tài liệu được chúng tôi sử dụng:

- *Toán Cao Cấp tập 1*, Nguyễn Viết Đông – Lê Thị Thiên Hương – Nguyễn Anh Tuấn – Lê Anh Vũ, Nhà Xuất Bản Giáo Dục.
- *Vật Lí Đại Cương*, Lương Duyên Bình (chủ biên), Nhà Xuất Bản Giáo Dục.
- *Bài Tập Vật Lí*, Nguyễn Hữu Thọ, Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia TPHCM – 2009.
- *Textbook notes of Lagrangian Method of interpolation*, Autar Kaw and Michael Keteltas.
- *Toán Cao Cấp tập 2*, Nguyễn Đình Chí (chủ biên), Nhà Xuất Bản Giáo Dục.

I. Trong động học chất điểm.

Động học chất điểm là môn học nghiên cứu những đặc trưng của chuyển động và những dạng chuyển động khác nhau.

Trong động học chất điểm, muốn xác định vị trí của một vật trong không gian ta phải tìm những khoảng cách từ vật đó tới một hệ vật khác mà ta quy ước là đứng yên. Hệ vật mà ta quy ước là đứng yên dùng làm mốc để xác định vị trí của các vật trong không gian gọi là *hệ quy chiếu*.

Trong động học chất điểm ta có khái niệm *chất điểm*. Chất điểm là một vật có kích thước nhỏ không đáng kể so với những khoảng cách, những kích thước mà ta đang khảo sát. Thí dụ: khi xét chuyển động của viên đạn trong không khí, chuyển động của trái đất xung quanh mặt trời,...ta có thể coi viên đạn, quả đất, ... là những chất điểm. Để xác định chuyển động của một chất điểm người ta thường gắn vào hệ quy chiếu một hệ tọa độ. Hệ tọa độ *Đécac* gồm có ba trục Ox , Oy , Oz vuông góc

với nhau từng đôi một hợp thành một tam diện thuận Oxyz; O gọi là gốc tọa độ. Vị trí của một chất điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi ba tọa độ x, y, z của nó với đối với hệ tọa độ Đêcac, ba tọa độ này cũng là ba tọa độ của bán kính vector $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ trên ba trục.

Khi chất điểm M chuyển động, các tọa độ x, y, z thay đổi theo thời gian t; nói cách khác x, y, z là các hàm của thời gian t:

$$M \begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \\ z = h(t). \end{cases} \quad (1)$$

Nói gọn hơn, bán kính vector $\vec{r}$ của chất điểm chuyển động là hàm của thời gian t:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (2)$$

Các phương trình trên được gọi là *những phương trình chuyển động* của chất điểm M. Vì ở mỗi thời điểm t, chất điểm M có một vị trí xác định và khi t biến thiên thì M chuyển động một cách liên tục nên các hàm f(t), g(t), h(t), hay nói gọn hơn hàm $\vec{r}(t)$, sẽ là hàm xác định, đơn trị và liên tục của t.

Như vậy trong vật lí cơ học hay cụ thể hơn trong cơ học chất điểm, quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số thường được gán với kiểu nhiệm vụ sau:

- Kiểu nhiệm vụ T: “*Tìm quỹ tích chuyển động của một chất điểm*”
- Kỹ thuật được vận dụng là τ :

Bước 1: Phân tích lực để dự đoán chuyển động

Bước 2: Chọn hệ quy chiếu cho chuyển động.

Bước 3: Thiết lập phương trình chuyển động tương ứng (các phương trình này chính là các hàm của thời gian)

Bước 4: Từ phương trình kết luận quỹ đạo chuyển động của chất điểm.

- Yếu tố lí công nghệ θ ngầm ẩn trong kĩ thuật.

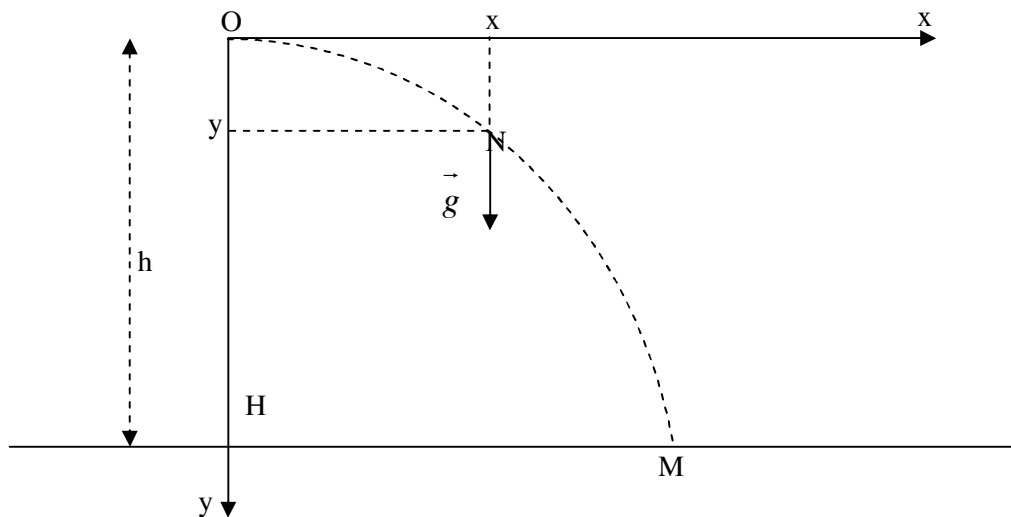
Để làm rõ thêm về kiểu nhiệm vụ này chúng tôi xét ví dụ sau:

Ví dụ . Từ một đỉnh tháp cao $h = 25m$ ta ném một hòn đá theo phương nằm ngang với vận tốc $v_0 = 15m/s$. Xác định:

a. Quỹ đạo của hòn đá.

b. Thời gian chuyển động của hòn đá (từ lúc ném đến lúc chạm đất).

[Bài tập vật lí đại cương – Cơ – Nhiệt, Lương Duyên Bình (chủ biên)]



⇒ **Phân tích tổ chức praxéologique có mặt trong bài toán này.**

✚ *TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ T:* Tìm quỹ đạo của hòn đá.

✚ *Kĩ thuật τ :*

Bước 1: Phân tích lực tác động lên hòn đá gồm trọng lực $\vec{p}$ và lực tác động theo phương nằm ngang với vận tốc v_0 .

Bước 2: Chọn hệ trục tọa độ Oxy với: gốc O trùng với điểm hòn đá bắt đầu chuyển động, trục Ox nằm ngang, trục Oy thẳng đứng hướng xuống phía dưới. Chọn gốc thời gian là lúc bắt đầu ném đá.

Bước 3: Lập phương trình chuyển động của hòn đá có dạng $y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$

Bước 4: Kiểm chứng và kết luận quỹ đạo của hòn đá chỉ là nhánh parabol OM.

✚ *Yếu tố công nghệ θ giải thích cho kĩ thuật τ :*

Bước 1: Nếu không có tác dụng của trọng lực thì hòn đá chỉ chuyển động theo phương nằm ngang. Nếu không có tác động của lực ném thì hòn đá rơi tự do. Dưới tác động của hai lực này chuyển động của hòn đá sẽ là chuyển động cong trong mặt phẳng đứng chứa $\vec{v}_0$.

Bước 2: Hòn đá chịu tác động của hai lực: trọng lực $\vec{p}$ hướng xuống và chuyển động theo phương nằm ngang với vận tốc v_0 .

Bước 3: Các phương trình chuyển động trong động học.

Theo phương nằm ngang Ox, hòn đá chuyển động với vận tốc v_0 , do đó theo công thức chuyển động thẳng đều:

$$x = v_0 t + 0 \quad (1)$$

Theo phương thẳng đứng Oy, hòn đá rơi tự do với gia tốc g , do đó theo công thức quãng đường rơi tự do:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

Bước 4: Đặc thù của biểu thức hàm số ta có: $y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$ với $x > 0, y \leq h$ có đồ thị là một phần đường cong parabol qua gốc tọa độ và hướng xuống.

↳ Lời giải.

Ta thấy hòn đá chịu tác động của hai lực: trọng lực $\vec{p}$ hướng xuống và chuyển động theo phương nằm ngang với vận tốc v_0 . Chuyển động này có hai thành phần kéo xuống và kéo ngang nên chuyển động tổng hợp của hòn đá sẽ là chuyển động cong trong mặt phẳng đứng chứa $\vec{v_0}$. Để giải bài toán cần xác định phương trình chuyển động của hòn đá.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy: gốc O trùng với điểm hòn đá bắt đầu chuyển động, trục Ox nằm ngang, trục Oy thẳng đứng hướng xuống phía dưới. Chọn gốc thời gian là lúc bắt đầu ném đá.

Gọi x, y là tọa độ hòn đá tại thời điểm t .

Theo phương nằm ngang Ox, hòn đá chuyển động với vận tốc v_0 , do đó theo công thức chuyển động thẳng đều:

$$x = v_0 t + 0 \quad (1)$$

Theo phương thẳng đứng Oy, hòn đá rơi tự do với gia tốc g , do đó theo công thức quãng đường rơi tự do:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

(1) và (2) chính là các phương trình chuyển động của hòn đá.

a. Khử t trong các phương trình (1) và (2) ta có phương trình của quỹ đạo.

$$\text{Từ (1) có } t = \frac{x}{v_0}$$

$$\text{Thay vào (2), ta có: } y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

Vì $x > 0, y \leq h$ nên quỹ đạo của hòn đá chỉ là nhánh parabol OM.

b. Khi hòn đá chạm đất $y = h$. Gọi τ là thời gian chuyển động của hòn đá. Từ (2) suy ra:

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25}{9,81}} = 2,26 \text{ (s)}$$

➤ Nhận xét:

Qua phân tích **tổ chức praxéologique** trên, chúng tôi nhận thấy nếu đem so sánh các bước trong kĩ thuật τ của kiểu nhiệm vụ trên với các bước của quá trình mô hình hóa thì chúng có một sự tương đồng. Cụ thể chúng tôi lập bảng so sánh như sau :

	Các bước trong quá trình mô hình hóa	Các bước trong kĩ thuật giải quyết kiểu nhiệm vụ trên
Bước 1	Xác định các yếu tố có ý nghĩa quan trọng và xác lập những quy luật mà chúng ta phải tuân theo.	Xác định được hai lực tác động lên hòn đá là trọng lực $\vec{p}$ hướng xuống và chuyển động theo phương nằm ngang, nên chuyển động tổng hợp của hòn đá sẽ là chuyển động cong.
Bước 2	Xây dựng mô hình toán học cho các vấn đề đang xét.	Chọn hệ trục tọa độ Oxy: gốc O trùng với điểm hòn đá bắt đầu chuyển động, trục Ox nằm ngang, trục Oy thẳng đứng hướng xuống phía dưới. Chọn gốc thời gian là lúc bắt đầu ném đá.
Bước 3	Sử dụng các công cụ toán học để giải quyết bài toán hình thành ở bước 2.	Lập phương trình chuyển động của hòn đá có dạng $y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$
Bước 4	Kiểm định lại kết quả thu được trong bước ba và xác định mức độ phù hợp với vấn đề thực tế.	Vì $x > 0, y \leq h$ nên quỹ đạo của hòn đá chỉ là nhánh parabol

Như vậy có thể nói vấn đề mô hình hóa đã được tính đến khi giải quyết kiểu nhiệm vụ nói trên trong lĩnh vực Vật lí.

II. Trong lĩnh vực toán học.

Trước tiên chúng tôi nêu ra một số tính chất của hàm số cùng với ý nghĩa hình học của chúng để tìm hiểu kiểu nhiệm vụ đầu tiên liên quan đến việc chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số.

1. Một vài tính chất của hàm số cùng với ý nghĩa hình học. (Toán Cao Cấp tập 1, trang 39)

1.1. Hàm số đơn điệu.

Hàm số $f: R \rightarrow R$ gọi là tăng (tăng nghiêm ngặt) trên tập $E \subset R$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in E$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \left(f(x_1) < f(x_2) \right)$$

và gọi là giảm (giảm nghiêm ngặt) trên E , nếu với mọi $x_1, x_2 \in E$

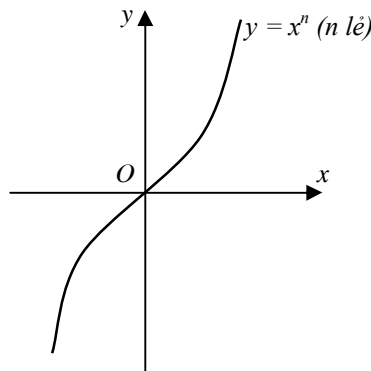
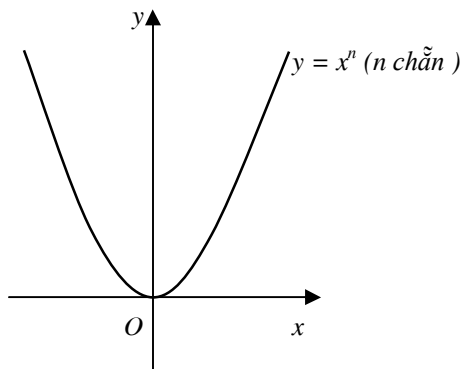
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \left(f(x_1) > f(x_2) \right)$$

Ta bảo f là hàm đơn điệu (đơn điệu nghiêm ngặt) trên E , nếu nó tăng hoặc giảm (tăng hoặc giảm nghiêm ngặt) trên E .

▪ Ý nghĩa hình học.

Thông thường khi biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ, các khoảng tăng nghiêm ngặt (giảm nghiêm ngặt) của hàm số được mô tả bởi đường đi lên (đi xuống) của đồ thị.

▪ Ví dụ.



Hàm $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

- n lẻ : hàm số tăng nghiêm ngặt

- n chẵn : hàm số tăng nghiêm ngặt trên $[0; +\infty)$, giảm nghiêm ngặt trên $(-\infty; 0]$

Có đồ thị như hình trên.

1.2. Hàm số bị chặn và không bị chặn. (Toán Cao Cấp tập 1, trang 41)

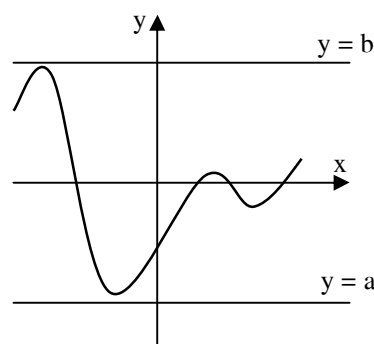
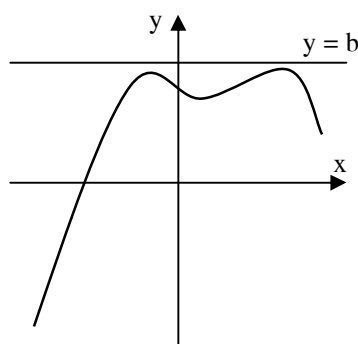
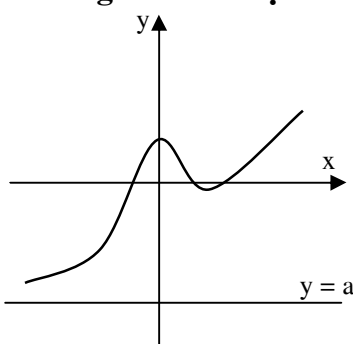
Hàm số f gọi là bị chặn trên, hoặc bị chặn dưới, hoặc bị chặn, nếu tập hợp R_f các giá trị của nó có tính chất tương tự.

Như vậy:

Hàm số f bị chặn dưới nếu và chỉ nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \geq a \ (x \in D_f)$. Hàm số f bị chặn trên nếu tồn tại $b \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \leq b \ (x \in D_f)$.

Hàm số f bị chặn khi và chỉ khi cả hai điều kiện trên đều thỏa mãn

Ý nghĩa hình học.



Hàm số bị chặn dưới thì đồ thị của f chứa trong nửa mặt phẳng đóng bị chặn dưới bởi đường thẳng $y = a$.

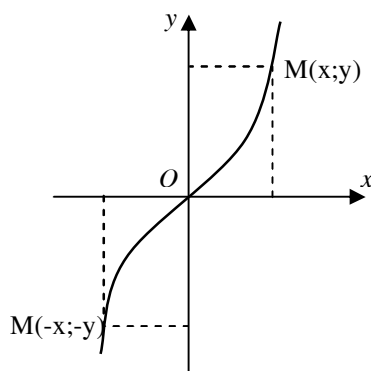
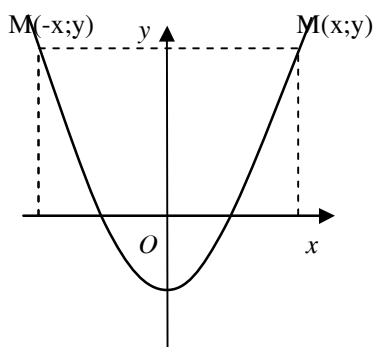
Hàm số bị chặn trên thì đồ thị của f chứa trong nửa mặt phẳng đóng bị chặn trên bởi đường thẳng $y = b$.

Hàm số bị chặn thì đồ thị của f chứa trong dải đóng bị chặn dưới bởi đường thẳng $y = a$, chặn trên bởi đường thẳng $y = b$.

1.3. Hàm số chẵn và lẻ. (Toán Cao Cấp tập 1, trang 42)

Hàm số f có tập xác định là tập đối xứng đối với điểm O , nghĩa là $x \in D_f$ suy ra $-x \in D_f$. Hàm số như vậy gọi là hàm số chẵn $f(-x) = f(x)$ ($x \in D_f$), và gọi là lẻ nếu $f(-x) = -f(x)$ ($x \in D_f$)

Ý nghĩa hình học.



Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua trục tung, nghĩa là nếu điểm $M(x, y)$ thuộc đồ thị ξ thì điểm $M'(-x, y)$ cũng thuộc đồ thị. Thật vậy, nếu f là hàm số chẵn và $x \in D_f$ thì $-x \in D_f$, nên $(-x, f(x)) = (-x, f(-x)) \in \xi$.

Đồ thị của hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ, nghĩa là nếu điểm $M(x, y)$ thuộc đồ thị ξ thì điểm $M'(-x, -y)$ cũng thuộc đồ thị. Thật vậy, nếu f là hàm số lẻ và $x \in D_f$ thì $-x \in D_f$, nên $(-x, -f(x)) = (-x, f(-x)) \in \xi$.

➤ Nhận xét:

- Qua trích dẫn trên chúng ta thấy xuất hiện kiểu nhiệm vụ liên quan đến việc chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số là: “Tìm các tính chất của hàm số bằng đồ thị”.

Kĩ thuật giải quyết kiểu nhiệm vụ trên là τ : Từ dạng đồ thị suy ra các tính chất tương ứng.

Yếu tố công nghệ giải thích cho kỹ thuật θ : các định lý và tính chất trong giải tích hàm cùng với ý nghĩa hình học của chúng.

- Sau đây, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu kỹ thuật chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số và tìm hiểu xem mục đích của việc chuyển đổi là gì?

2. Một nghiên cứu chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số trong Toán.

Trong toán, ta muốn phục hồi một hàm số $f(x)$ tại mọi giá trị $x \in [a, b]$ nào đó mà chỉ biết một số hữu hạn điểm rời rạc $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$. Làm thế nào chúng ta có thể tìm được biểu thức xác định hàm số đó? Ta nhận thấy nếu có một hàm số liên tục $f(x)$ đi qua $(n+1)$ điểm này thì hàm số đó có thể được sử dụng để làm đại diện. Khi đó vấn đề là loại hàm số $f(x)$ nào sẽ được chọn? Một đa thức bậc n dạng :

$$P_n(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_n \neq 0$$

với $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, sao cho $P_n(x)$ trùng với $f(x)$ tại các nút $x_i, i = \overline{0, n}$, nghĩa là

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i$$

thường được chọn vì đa thức là loại hàm số đơn giản nhất, dễ tính nhất, dễ đánh giá sự khác biệt và thỏa được yêu cầu đặt ra ở trên. Đa thức $P_n(x)$ tìm được đó gọi là *đa thức nội suy trong đó x_i được gọi là các nút nội suy, y_i là các giá trị (hàm) nội suy với $i = \overline{0, n}$* .

Một câu hỏi đặt liệu có thể tìm được nhiều đa thức nội suy khác nhau của cùng một hàm số ?

Câu trả lời được tìm thấy thông qua định lý sau:

“Nếu tồn tại đa thức nội suy $P_n(x)$ của hàm số $f(x)$ thì đa thức đó là duy nhất”

(Toán Cao Cấp tập 2, Nguyễn Đình Chí (chủ biên), Nhà Xuất Bản Giáo Dục, trang 60)

Như vậy, có thể có nhiều dạng đa thức nội suy nhưng do tính duy nhất, nhất thiết chúng có thể quy về nhau được.

Trong lĩnh vực Toán học mà cụ thể là trong lý thuyết và toán ứng dụng có nhiều cách để xây dựng đa thức nội suy của hàm số như: nội suy Lagrange; nội suy Newton; nội suy Newton - các điểm nút cách đều; nội suy ghép trơn (spline). Tuy nhiên trong khuôn khổ của luận văn này chúng tôi chỉ trình bày phương pháp nội suy theo kiểu Lagrange, gọi là *nội suy Lagrange* và kí hiệu $L_n(x)$.

Ta đặt

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}, i = \overline{0, n}$$

Hiển nhiên $l_i(x)$ là đa thức bậc n và

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} \text{ nghĩa là } l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{khi } j = i \\ 0 & \text{khi } j \neq i \end{cases}$$

$l_i(x)$ được gọi là *đa thức Lagrange cơ sở*.

Bây giờ ta lập đa thức

$$L_n(x) := \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

Hiển nhiên $L_n(x)$ là đa thức bậc n thỏa : $L_n(x_i) = y_i$

Do vậy $L_n(x)$ là đa thức nội suy bậc n của hàm số $f(x)$.

Ta xét một số đa thức nội suy thông dụng.

- *Nội suy bậc nhất* (hay là nội suy tuyến tính)

Trường hợp này có hai điểm nút suy ra $n = 1$ và có bảng:

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

Đa thức nội suy $L_1(x)$ có dạng

$$L_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

Trong đó

$$\begin{cases} l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \\ l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

- *Nội suy bậc hai*

Trường hợp này có ba nút suy ra $n = 2$ và có bảng:

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

Đa thức nội suy $L_2(x)$ có dạng

$$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

Trong đó

$$\begin{cases} l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{cases}$$

Có một vấn đề đặt ra khi nội suy đa thức Lagrange là:

Liệu ta có thể suy giá trị của y tại bất kì một giá trị nào đó x không trùng với các nút ?

Để suy ra giá trị của y tại một giá trị nào đó của x không trùng với các nút ta có thể thực hiện theo các cách sau:

Cách 1: Viết đa thức nội suy dạng $L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x)$ nhưng không tính các đa thức nội suy cơ sở $L_k(x)$, sau đó thay x vào biểu thức trên để tìm y .

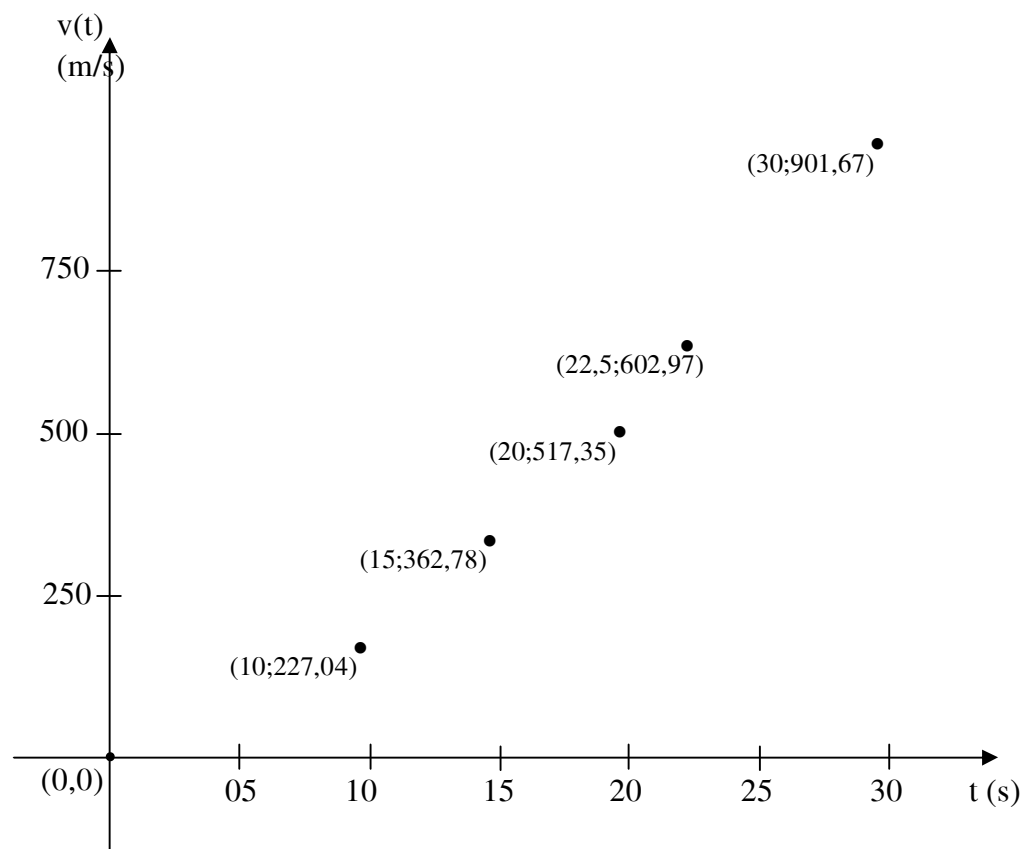
Cách 2: Tìm ra đa thức nội suy dạng $P_n(x) := a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, a_n \neq 0$, sau đó thay x vào đa thức trên để suy ra giá trị.
Để cụ thể hóa hơn cho kiểu nhiệm vụ xây dựng đa thức nội suy theo kiểu Lagrange, chúng tôi đưa vào đây một số ví dụ:

Ví dụ 1.

Biết vận tốc đi lên của một tên lửa được cho là hàm của thời gian trong Bảng 1.

Bảng 1: Vận tốc là một hàm của thời gian

t (s)	0	10	15	20	22,5	30
V(t) (m/s)	0	227,04	362,78	517,35	602,79	901,67



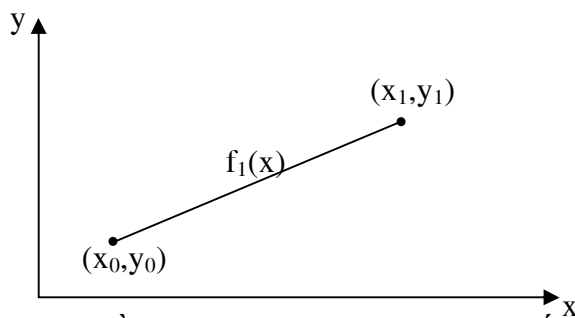
Hình 1. Vận tốc so với dữ liệu thời gian cho các ví dụ tên lửa

Xác định giá trị của vận tốc tại $t = 16$ giây bằng cách sử dụng đa thức nội suy tuyến tính.

⇒ **Phân tích tổ chứng toán học ứng với kiểu nhiệm vụ này:**

- Kiểu nhiệm vụ : “Tính giá trị của hàm số tại giá trị t bất kì thuộc tập xác định”
- Kỹ thuật τ :
 - Chọn hai điểm nút gần với giá trị $t = 16$.
 - Tìm các đa thức nội suy cơ sở $l_0(t) = \frac{t-t_1}{t_0-t_1}$ & $l_1(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}$.
 - Chọn đa thức nội suy vận tốc có dạng: $v(t) = l_0(t)v(t_0) + l_1(t)v(t_1)$
 - Thay $t = 16$ vào biểu thức trên để tìm giá trị vận tốc.
- Yếu tố công nghệ θ : ngầm ẩn trong kỹ thuật.

⇒ **Lời giải có thể quan sát:**



Hình 2. Đồ thị của đa thức nội suy tuyến tính.

Vì chúng ta muốn tìm giá trị vận tốc tại $t = 16$ giây, chúng ta chọn hai điểm gần nhất với giá trị $t = 16$. Hai điểm đó có $t_0 = 15$ và $t_1 = 20$.

Ta có :

$$t_0 = 15, v(t_0) = 362,78$$

$$t_1 = 20, v(t_1) = 517,35$$

$$l_0(t) = \frac{t-t_1}{t_0-t_1} \text{ \& } l_1(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}$$

Nên

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{t-t_1}{t_0-t_1} v(t_0) + \frac{t-t_0}{t_1-t_0} v(t_1) \\ &= \frac{t-20}{15-20} (362,78) + \frac{t-15}{20-15} (517,35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(16) &= \frac{16-20}{15-20} (362,78) + \frac{16-15}{20-15} (517,35) \\ &= 0,8(362,78) + 0,2(517,35) \\ &= 393,7 \text{ m / s.} \end{aligned}$$

Chúng ta có thể thấy rằng $l_0(t) = 0,8$ và $l_1(t) = 0,2$ được xem như là các định mức cơ sở cho vận tốc tại $t = 15$ và $t = 20$ để tính vận tốc tại $t = 16$.

Ví dụ 2.

Vận tốc đi lên của một tên lửa được cho là hàm của thời gian trong Bảng 2.

Bảng 2: Vận tốc là một hàm của thời gian

t (s)	0	10	15	20	22,5	30
V(t) (m/s)	0	227,04	362,78	517,35	602,79	901,67

Xác định giá trị của vận tốc tại $t = 16$ giây sử dụng đa thức nội suy bậc hai.

Phân tích tổ chứng toán học ứng với kiểu nhiệm vụ này:

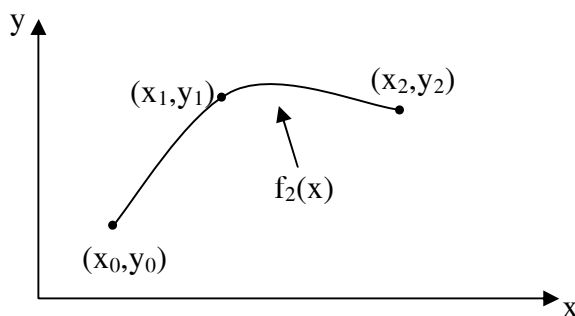
- Kiểu nhiệm vụ : “Tính giá trị của hàm số tại giá trị t bất kì thuộc tập xác định”.
- Kỹ thuật τ :
 - Chọn ba điểm nút gần với giá trị $t = 16$.
 - Tìm các đa thức nội suy cơ sở

$$l_0(t) = \left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2} \right) \& l_1(t) = \left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2} \right) \& l_2(t) = \left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0} \right) \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \right)$$

- Chọn đa thức nội suy vận tốc có dạng:

$$v(t) = l_0(t)v(t_0) + l_1(t)v(t_1) + l_2(t)v(t_2)$$
- Thay $t = 16$ vào biểu thức trên để tìm giá trị vận tốc.
- Yếu tố công nghệ θ : ngấm ẩn trong kỹ thuật.

Lời giải có thể quan sát:



Hình 2. Đồ thị của đa thức nội suy bậc hai.

Vì chúng ta muốn tìm giá trị vận tốc tại $t = 16$ giây, chúng ta chọn ba điểm gần nhất với giá trị $t = 16$. Có ba điểm đó có $t_0 = 10$ và $t_1 = 15$, $t_2 = 20$.

Ta có :

$$t_0 = 10, v(t_0) = 227,04$$

$$t_1 = 15, v(t_1) = 362,78$$

$$t_2 = 20, v(t_2) = 517,35$$

Nên

$$l_0(t) = \left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2} \right) \& l_1(t) = \left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2} \right) \\ \& l_2(t) = \left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0} \right) \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \right)$$

$$v(t) = \left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2} \right) v(t_0) + \left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2} \right) v(t_1) \\ + \left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0} \right) \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \right) v(t_2)$$

$$v(16) = \left(\frac{16-15}{10-15} \right) \left(\frac{16-20}{10-20} \right) (227,04) + \left(\frac{16-10}{15-10} \right) \left(\frac{16-20}{15-20} \right) (362,78) \\ + \left(\frac{16-10}{20-10} \right) \left(\frac{16-15}{20-15} \right) (517,35) \\ = (-0,08)(227,04) + (0,96)(362,78) + (0,12)(517,35) \\ = 392,19 \text{ m / s.}$$

Ví dụ 3. Nếu $y(1) = 3, y(3) = 9, y(4) = 30, y(6) = 132$. Tìm công thức hàm số nhận giá trị y_i cho trước tương ứng với các x_i .

☞ **Phân tích tổ chứng toán học ứng với kiểu nhiệm vụ này:**

- Kiểu nhiệm vụ : Xác định biểu thức hàm số đi qua các nút.

- Kỹ thuật τ :

- Viết lại các nút này dưới dạng :

$$\left. \begin{array}{cccc} x_0 = 1 & x_1 = 3 & x_2 = 4 & x_3 = 6 \\ y_0 = 3 & y_1 = 9 & y_2 = 30 & y_3 = 132 \end{array} \right\} y = f(x) = ?$$

- Chọn đa thức nội suy Lagrange qua các điểm nút có dạng:

$$f(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2 + l_3(x)y_3$$

- Tìm các đa thức nội suy cơ sở

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1} \right) \left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2} \right) \left(\frac{x-x_3}{x_0-x_3} \right) \\
l_1(x) &= \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right) \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2} \right) \left(\frac{x-x_3}{x_1-x_3} \right) \\
l_2(x) &= \left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0} \right) \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right) \left(\frac{x-x_3}{x_2-x_3} \right) \\
l_3(x) &= \left(\frac{x-x_0}{x_3-x_0} \right) \left(\frac{x-x_1}{x_3-x_1} \right) \left(\frac{x-x_2}{x_3-x_2} \right)
\end{aligned}$$

- Thay các giá trị $l_k(x)$ vào biểu thức $f(x)$ ta nhận được biểu thức hàm số.

- Yếu tố công nghệ θ : ngấm ẩn trong kĩ thuật.

🔍 **Lời giải có thể quan sát:**

Ta có công thức nội suy lagrange:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x-3)(x-4)(x-6)3}{(-2)(-3)(-5)} + \frac{(x-1)(x-4)(x-6)9}{(2)(-1)(-3)} \\
&+ \frac{(x-1)(x-3)(x-6)30}{(3)(1)(-2)} + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)132}{(5)(3)(2)} \\
&= \frac{-1}{10}(x-3)(x-4)(x-6) + \frac{3}{2}(x-1)(x-4)(x-6) \\
&- 5(x-1)(x-3)(x-6) + \frac{22}{5}(x-1)(x-3)(x-4) \\
&= \frac{1}{10} [8x^3 - 4x^2 - 58x + 84]
\end{aligned}$$

Vì thế đa thức nội suy của hàm số có dạng: $f(x) = \frac{1}{5} [4x^3 - 2x^2 - 29x + 42]$

➤ **Nhận xét:**

Với phương pháp nội suy Lagrange nói trên, chúng ta có thể nội suy được biểu thức mô tả hàm số đi qua $n + 1$ điểm nút đã cho và kết quả nhận được là một đa thức bậc n dạng

$P_n(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_n \neq 0$. Kết quả này một lần nữa giúp chúng ta khẳng định ta có thể chọn

đa thức $P_n(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_n \neq 0$ làm biểu thức mô tả hàm số đi qua $(n+1)$ điểm đã cho.

Vậy một cách tự nhiên chúng ta có thể chọn *biểu thức mô tả hàm số qua hai điểm nút là một đa thức tuyến tính dạng* $P(x) = ax + b, (a \neq 0)$, *hay tương tự cho việc chọn biểu thức mô tả hàm số qua ba*

điểm nút là một đa thức bậc 2 dạng $P(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

III. Trong lĩnh vực Trắc địa.

(Trích trong nghiên cứu của Nguyễn Chí Nghĩa, Đại Học Mỏ-Địa Chất)

Khi chỉnh lý tài liệu quan trắc động thái rất cần phải xác định quy luật biến đổi của các yếu tố động thái theo không gian và thời gian. Để giải quyết vấn đề này tác giả đã sử dụng phép nội suy bằng đa thức Lagrange trên cơ sở những số liệu thực nghiệm.

Sử dụng đa thức Lagrange có thể xác định được hàm số biểu diễn quan hệ giữa mực nước và khoảng cách từ các lỗ khoan quan sát đến sông. Từ kết quả nghiên cứu các tác giả đã rút ra kết luận:

- Khi chỉnh lý tài liệu quan trắc động thái nước dưới đất (NDĐ), phương pháp nội suy Lagrange cho phép xác định quy luật biến đổi của các yếu tố động thái (cao trình mực nước, lưu lượng, nhiệt độ, thành phần hoá học của nước...) theo thời gian, không gian, cũng như theo sự biến đổi của các nhân tố ảnh hưởng đến các yếu tố động thái.

- Kết hợp phương pháp nội suy Lagrange với phương pháp thống kê cho phép ngoại suy khuynh hướng để dự báo sự phát triển của động thái NDĐ theo thời gian và không gian.

Quá trình xử lý tài liệu thường cần xác định hàm số $H = f(x)$, qua các giá trị quan trắc được $H_0, H_1, \dots, H_n$ ứng với các giá trị $x_0, x_1, \dots, x_n$ trong khoảng xác định $[a, b]$.

Chẳng hạn có một tuyến quan trắc mực nước ngầm gồm 4 lỗ khoan (0, 1, 2, 3) bố trí vuông góc với sông, cách sông tương ứng - x_0, x_1, x_2, x_3 , tại một thời điểm đã quan trắc được cao trình mực NDĐ ở các lỗ khoan - H_0, H_1, H_2, H_3 , yêu cầu xác định hàm $H = f(x)$? Hay tại một lỗ khoan đã quan trắc được cao trình mực nước H_0, H_1, H_2, H_3 ở các thời điểm t_0, t_1, t_2, t_3 , yêu cầu xác định hàm $H = f(t)$.

Ta có thể xem bài toán trên có dạng: có chuỗi quan trắc tại $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ biết $(y_0, y_1, \dots, y_n)$. Như vậy trước ta tìm cách xây dựng đa thức:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (1)$$

thoả mãn điều kiện:

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i; \quad i = \overline{0, n} \quad (2)$$

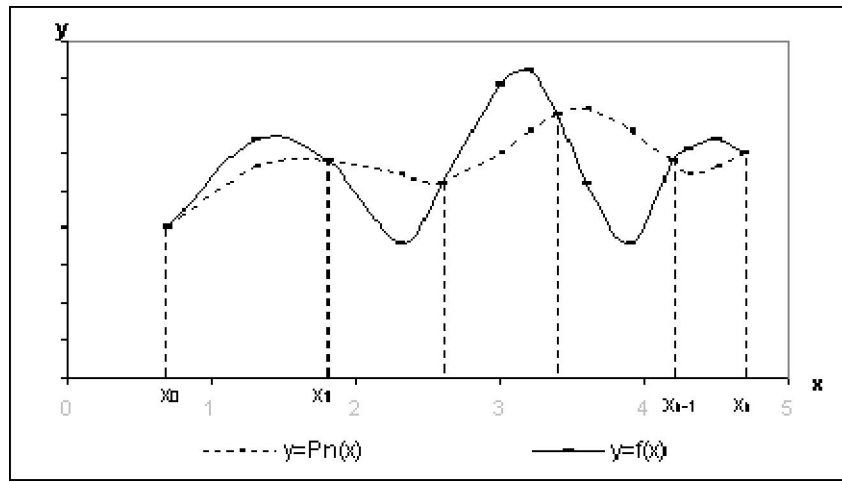
Ở đây: $P_n(x)$ - được gọi là đa thức nội suy của hàm $f(x)$.

$x_i, i = \overline{0, n}$ - các nút nội suy.

$(a_0, a_1, \dots, a_n)$ - giá trị tham số xác định được khi thành lập hàm Lagrange.

Về mặt hình học có nghĩa là tìm đường cong đi qua các điểm $M_i(x_i, y_i)$ đã biết $(i = \overline{0, n})$ của đường cong $y = j(x)$ (Hình 1).

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

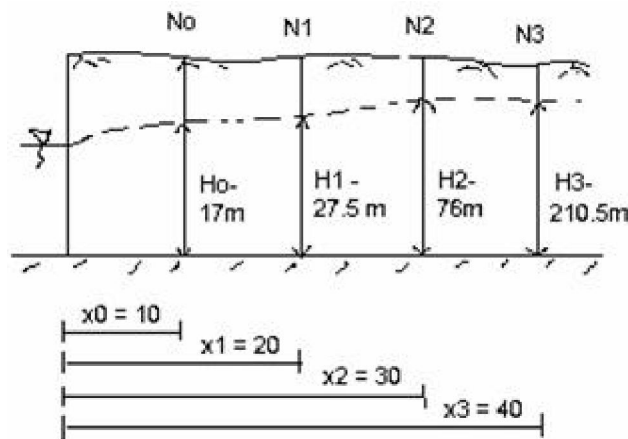


Hình 1. Đường cong $y = f(x)$

Sau đó dùng đa thức $P_n(x)$ thay cho hàm số $f(x)$ để tính gần đúng giá trị của hàm số $f(x)$ tại các điểm $x \neq x_i \left(i = \overline{0, n} \right)$. Nếu điểm $x \in (x_0, x_n)$ thì phép tính trên gọi là phép nội suy. Nếu $x \notin (x_0, x_n)$ gọi là phép ngoại suy.

Ví dụ. Để nghiên cứu động thái mực nước gần sông người ta đã thiết lập một tuyến các lỗ khoan quan trắc vuông góc với sông (Hình 2). Khoảng cách từ các lỗ khoan đến sông lần lượt là: $x_0 - 10$ m, $x_1 - 20$ m, $x_2 - 30$ m, $x_3 - 40$ m. Cao trình mực nước tại các lỗ khoan vào một thời điểm nào đó như sau : $H_0 - 17$ m, $H_1 - 27,5$ m, $H_2 - 76$ m, $H_3 - 210,5$ m.

Hãy nội suy khuynh hướng dâng cao mực nước bằng đa thức Lagrange và nội suy giá trị dâng cao tại $x = 25$ m.



Hình 2. Tuyến các lỗ quan trắc

➤ **Phân tích tổ chứng toán học ứng với kiểu nhiệm vụ này:**

- Kiểu nhiệm vụ : “Nội suy khuynh hướng dâng cao mực nước”.
- Kỹ thuật τ :
- Chọn đa thức nội suy Lagrange qua các điểm nút có dạng:

$$H(x) = l_0(x)H_0 + l_1(x)H_1 + l_2(x)H_2 + l_3(x)H_3$$

- Tìm các đa thức nội suy cơ sở

$$l_0(x) = \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1} \right) \left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2} \right) \left(\frac{x-x_3}{x_0-x_3} \right)$$

$$l_1(x) = \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right) \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2} \right) \left(\frac{x-x_3}{x_1-x_3} \right)$$

$$l_2(x) = \left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0} \right) \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right) \left(\frac{x-x_3}{x_2-x_3} \right)$$

$$l_3(x) = \left(\frac{x-x_0}{x_3-x_0} \right) \left(\frac{x-x_1}{x_3-x_1} \right) \left(\frac{x-x_2}{x_3-x_2} \right)$$

- Suy ra đa thức nội suy.

- Yếu tố công nghệ θ : ngấm ẩn trong kĩ thuật.

➤ **Lời giải có thể quan sát:**

Ở đây $n = 3$ nên đa thức nội suy là một đa thức bậc 3. Nên ta có:

$$P_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} H_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} H_1 \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} H_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} H_3$$

Thay số vào biểu thức trên ta có:

$$P_3(x) = \frac{(x-20)(x-30)(x-40)}{(10-20)(10-30)(10-40)} 17 + \frac{(x-10)(x-30)(x-40)}{(20-10)(20-30)(20-40)} 27,5 \\ + \frac{(x-10)(x-20)(x-40)}{(30-10)(30-20)(30-40)} 76 + \frac{(x-10)(x-20)(x-30)}{(40-10)(40-20)(40-30)} 210,5 \\ = 0,008x^3 - 0,29x^2 + 4,15x - 3,5$$

Với $x = 25$ m từ phương trình trên tính được $H = 44$ m.

➤ **Nhận xét:**

Chúng ta nhận thấy trong kiểu nhiệm vụ nói trên, nội suy biểu thức hàm số được thực hiện tương tự như trong Toán học. Điều này cho thấy khả năng ứng dụng rộng rãi của công thức nội suy Lagrange trong nhiều lĩnh vực khác nhau của thực tế.

IV. Kết luận chương 1.

Kết quả phân tích trong chương 1 đã cho chúng tôi thấy cách thức chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số ngay trong lĩnh vực Toán và trong một số lĩnh vực ngoài toán, cũng như các kiểu nhiệm vụ liên quan đến việc chuyển đổi. Thực hiện việc chuyển đổi này đã giúp chúng tôi thấy được lợi ích của Toán học nói chung và của hàm số nói riêng trong thực tế.

Các kết quả đã đạt được trong nghiên cứu chương 1.

- Xét các kiểu nhiệm vụ liên quan đến việc chuyển đổi: có hai kiểu nhiệm vụ

+ Kiểu nhiệm vụ T_1 : “Tìm các tính chất của hàm số bằng đồ thị”.

+ Kiểu nhiệm vụ T_2 : “Tìm biểu thức xác định hàm số”.

Hay

“Tính giá trị của hàm số tại bất kì giá trị nào của biến”

Kiểu nhiệm vụ T_2 thường được gắn với các bài thực tiễn, do đó việc giải quyết được kiểu nhiệm vụ T_2 sẽ giúp ta phân nào thấy được vai trò của Toán học nói chung và của hàm số nói riêng trong thực tế.

- Xét về quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang công thức hàm số:

Trong vật lí cơ học hay cụ thể hơn trong cơ học chất điểm để tìm chuyển động hay quỹ tích của một chất điểm chuyển động ta thường gắn vào hệ quy chiếu một hệ tọa độ, sau đó thiết lập các phương trình chuyển động tương ứng. Các phương trình này chính là các hàm của thời gian t . Ngoài ra, qua phân tích *tổ chức praxéologique* liên quan đến kiểu nhiệm vụ “*Tìm quỹ tích chuyển động của một chất điểm*”, chúng tôi nhận thấy các bước trong kĩ thuật τ của kiểu nhiệm vụ trên với các bước của quá trình mô hình hóa có một sự tương đồng. Như vậy có thể nói vấn đề mô hình hóa đã được tính đến khi giải quyết kiểu nhiệm vụ nói trên trong lĩnh vực Vật lí.

Trong Toán học hay trong Trắc địa: muốn phục hồi một hàm số $f(x)$ tại mọi giá trị $x \in [a, b]$ nào đó mà chỉ biết một số hữu hạn gồm $(n + 1)$ giá trị của hàm số tại các điểm rời rạc $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Ta tìm một đa thức bậc n dạng:

$$P_n(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_n \neq 0$$

với $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, sao cho $P_n(x)$ trùng với $f(x)$ tại các nút x_i , $i = \overline{0, n}$, nghĩa là

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i$$

Đa thức $P_n(x)$ tìm được đó gọi là *đa thức nội suy*. Đa thức này có thể tìm được bằng các phương pháp như: nội suy theo kiểu Lagrange, nội suy Newron, nội suy Newton–các điểm nút cách đều, hay nội suy ghép tron (spline). Việc chọn đa thức bậc n dạng $P_n(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_n \neq 0$ làm biểu thức mô tả hàm số đi qua $(n + 1)$ điểm đã cho thì một cách tự nhiên chúng ta có thể chọn *biểu thức mô tả hàm số qua hai điểm nút là một đa thức tuyến tính dạng $P(x) = ax + b; (a \neq 0)$, hay tương tự cho việc chọn biểu thức mô tả hàm số qua ba điểm nút là một đa thức bậc 2 dạng $P(x) = ax^2 + bx + c; (a \neq 0)$* . Liệu cách làm trên có được thể chế sử dụng để xét kiểu nhiệm tìm biểu thức mô tả hàm số bậc nhất và bậc hai hay không ?

Câu trả lời sẽ được tìm thấy trong nghiên cứu tiếp theo ở chương 2.

Ngoài ra cũng cần phải kể đến sự khác biệt trong cách nội suy hàm số ở hai lĩnh vực Toán học và Vật lí cơ học là ở chỗ, trong Cơ học chất điểm trước khi nội suy biểu thức số thì ta cần dự đoán trước đồ thị của hàm số đó, tức là cần biết các nét đặc trưng về hàm số cần dựng, sau đó dựa vào các phương trình

chuyển động để lập biểu thức hàm số. Còn trong lĩnh vực toán học thì ta cần biết một tập hữu hạn rời rạc các điểm thuộc đồ thị và sử dụng các công cụ đã nêu trên để nội suy biểu thức hàm số.

Những kết quả đạt được ở chương 1 sẽ là cơ sở tham chiếu cho việc phân tích sách giáo khoa mà chúng tôi sẽ thực hiện ở chương 2.

Chương 2.

NGHIÊN CỨU THỂ CHẾ VỀ QUÁ TRÌNH CHUYỂN ĐỔI TỪ ĐỒ THỊ SANG HÀM SỐ TRÊN HAI ĐỐI TƯỢNG HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ HÀM SỐ BẬC HAI

Mục đích nghiên cứu của chúng tôi trong chương này là tìm kiếm các yếu tố trả lời cho câu hỏi Q_2 . Chúng tôi xin nhắc lại hai câu hỏi này như sau:

Q_2 . Trong thể chế I_ thể chế dạy học hàm số bậc nhất và bậc hai, quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số có được tính đến hay không? Trong những tổ chức toán học nào cần có mặt sự chuyển đổi? Vấn đề dạy học bằng mô hình hóa có được thể chế quan tâm đến khi xây dựng quá trình chuyển đổi trên hai đối tượng hàm số này?

Để thực hiện được điều này, chúng tôi sẽ nghiên cứu chương 2 theo trình tự sau:

- Trước hết chúng tôi nghiên cứu chương trình toán Việt Nam hiện hành để tìm các kiểu nhiệm vụ cùng với các yêu cầu liên quan đến việc chuyển đổi đặt ra trên hai đối tượng hàm số nói trên.
- Sau đó chúng tôi tiến hành nghiên cứu sách giáo khoa (SGK) Việt Nam hiện hành nơi mà hai đối tượng hàm số này được đưa vào, mà cụ thể là SGK các lớp 7, 9, 10, để xem các yêu cầu trên đã được cụ thể hóa như thế nào? Đồng thời làm rõ các tổ chức toán học liên quan cùng với việc xem xét vấn đề mô hình hóa được thực hiện ra sao?

Chúng tôi sử dụng các tài liệu:

- Các sách giáo khoa (SGK): Toán 7 tập 1; Toán 9 tập 1 và 2; Toán 10 nâng cao và cơ bản.
- Các sách giáo viên (SGV): Toán 7 tập 1; Toán 9 tập 1,2; Toán 10 nâng cao và cơ bản.
- Chương trình giáo dục phổ thông môn toán của Bộ giáo dục và đào tạo.

1. Phân tích chương trình toán Việt Nam hiện hành

Trong chương trình toán Việt Nam hiện hành, hai đối tượng hàm số bậc nhất và bậc hai được đưa vào ngay từ bậc trung học cơ sở, cụ thể ở các lớp 7 và 9, sau đó hai đối tượng này tiếp tục được xem xét ở lớp 10 của bậc trung học phổ thông. Do đó để làm rõ các kiểu nhiệm vụ liên quan đến việc chuyển đổi, chúng tôi sẽ tiến hành xem xét từng cấp lớp.

Lớp 7

Đầu tiên, chúng tôi xin trích dẫn một mục tiêu về đồ thị trong SGK Toán 7, tr.73:

“*Biết được ý nghĩa đồ thị trong thực tiễn và trong nghiên cứu hàm số.*”

Rõ ràng đây chính là một trong các mục đích của việc chuyển từ đồ thị sang hàm số mà chúng tôi đã chỉ ra trong phần nghiên cứu khoa học luận. Tuy nhiên sau khi đề ra mục tiêu, chúng tôi không thấy thể chế đưa ra kiểu nhiệm vụ nào cũng như cách làm nào để cụ thể hóa mục đích nêu trên. Do đó một

câu hỏi đặt ra ở đây là bằng cách nào thể chế có thể đạt được mục tiêu đã đề ra? Việc tìm kiếm các yếu tố trả lời sẽ được chúng tôi tiếp tục ở phần phân tích SGK.

Lớp 9

Ở cấp lớp này, đầu tiên chúng tôi trích dẫn một mục tiêu trong SGK Toán 9 tập 1 tr.56 đặt ra cho việc dạy học Toán nói chung và dạy học hàm số nói riêng như sau:

“Về thực tiễn, học sinh thấy được rằng: Toán học là môn khoa học trừu tượng, nhưng các vấn đề toán học nói chung cũng như vấn đề hàm số nói riêng lại thường được xuất phát từ việc nghiên cứu các bài toán thực tế.”

Mục tiêu này gắn liền với mục đích của quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số. Như trong phân tích khoa học luận chúng tôi đã chỉ ra, để đạt được mục đích này thì nhất thiết cần phải có những bước chuyển từ bài toán thực tế sang bài toán Toán học, mà điều này lại liên quan đến vấn đề mô hình hóa trong Toán. Ngoài ra cũng trong phân tích khoa học luận, chúng ta nhận thấy để giải quyết được các bài toán thực tế thì nhất thiết phải thiết lập được các biểu thức hàm số. Như vậy với mục tiêu đã đề ra, cho thấy thể chế có quan tâm đến vấn đề mô hình hóa và vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số. Thể chế đã cụ thể hóa mục tiêu trên ra sao? Câu trả lời sẽ được tìm thấy khi chúng tôi phân tích SGK.

Ngay sau đó, chúng tôi tìm thấy một yêu cầu được đặt ra cho việc dạy-học đồ thị hàm số bậc nhất $y = ax + b$ như sau:

“Biết đồ thị của hàm số $y = ax + b$ là một đường thẳng.

Biết vẽ đồ thị của hàm số $y = ax + b$ bằng cách xác định hai điểm thuộc đồ thị”

Từ đây chúng tôi tự hỏi, liệu ta có thể xác định được biểu thức hàm số khi đã biết hai điểm thuộc đồ thị? Việc phân tích các tổ chức toán học sẽ cho chúng ta câu trả lời này.

Tiếp theo đó là một số những yêu cầu khác có liên quan đến việc chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số, được đặt ra đối với đối tượng hàm số bậc nhất $y = ax + b$:

“Khi hai đường thẳng song song, cắt nhau, trùng nhau biết biết tìm điều kiện tương ứng cho các biểu thức hàm số của chúng”

(SGV Toán 9 Tập 1, tr.65)

“Biết khi góc hợp bởi giữa đường thẳng và trục hoành Ox là α thì $\tan \alpha = a$.”

(SGV Toán 9 Tập 1, tr.70)

Còn đối với hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) thì có yêu cầu sau:

“Từ đồ thị biết suy ra các tính chất của hàm số”

(SGV Toán 9 Tập 2, tr.31)

Có thể thấy các yêu cầu trên tập trung vào kiểu nhiệm vụ T_1 : “Tìm các tính chất của hàm số bằng đồ thị”.

♦ Lớp 10.

Đến chương trình lớp 10 thì việc sử dụng đồ thị để nghiên cứu hàm số được đưa lên hàng đầu thông qua nhận xét sau:

“Với tư tưởng từ trực quan sinh động đến tư duy trừu tượng, đồ thị được xem là phương tiện chủ yếu để khảo sát hàm số. Điều đó dựa trên những cơ sở lý luận và thực tiễn sau:

- Mặc dù không tuyệt đối chính xác nhưng đồ thị của hàm số có ưu điểm nổi bật là phản ánh một cách trực quan hầu hết các tính chất của hàm số.

- Cách tiếp cận khá đơn giản: ở lớp dưới, học sinh đã được học khá đầy đủ về hàm số $y = ax$ và hàm số $y = ax^2$; chỉ bằng phép tịnh tiến đồ thị, tương ứng ta có ngay đồ thị của hàm số $y = ax + b$ & $y = ax^2 + bx + c$ rồi từ đồ thị mà suy ra các sự biến thiên của các hàm số này.

- Cách tiếp cận này phù hợp với phương hướng đổi mới phương pháp dạy học: giáo viên tổ chức các hoạt động trên lớp để qua đó dẫn dắt cho học sinh tự khám phá, rút ra những kết luận khoa học cần thiết”

(SGV Toán 10 Nâng cao, tr.67)

Sau nhận xét của thể chế là các mục tiêu cụ thể:

“ Khi cho hàm số bằng đồ thị cần:

- Biết cách tìm giá trị của hàm số tại một điểm cho trước thuộc tập xác định.*
- Nhận biết được sự biến thiên và lập bảng biến thiên của một hàm số thông qua đồ thị của nó.*
- Bước đầu nhận biết một vài tính chất của hàm số như: giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của hàm số (nếu có), dấu của hàm số tại một điểm hoặc trên một khoảng.*

- Nhận biết được tính chẵn-lẻ của hàm số thông qua đồ thị.”

(SGV Toán 10 Nâng cao, tr.69)

Các mục tiêu nêu trên liên quan đến hai kiểu nhiệm vụ sau:

Kiểu nhiệm vụ T₁: “Tìm các tính chất của hàm số bằng đồ thị”

Kiểu nhiệm vụ T₂: “Tìm giá trị của hàm số tại một điểm cho trước thuộc tập xác định”

Chúng tôi quan tâm đến kiểu nhiệm vụ thứ hai, vì trong phân tích khoa học luận, chúng tôi đã chỉ ra kỹ thuật để tính giá trị của hàm số tại một điểm bất kỳ thuộc tập xác định đó là: thay giá trị cần tìm vào biểu thức của hàm đã tìm được để suy ra giá trị của hàm số. Còn trong thể chế dạy-học hàm số ở trường phổ thông chúng tôi thấy kỹ thuật sau:

“Chẳng hạn, để tìm $f(-2)$, từ điểm -2 trên trục hoành ta kẻ một đường thẳng với trục Oy cắt đồ thị tại điểm M. Từ điểm M kẻ đường thẳng song song với trục Ox, cắt trục tung tại điểm -1 . Ta được $f(-2) = -1$ ”

(SGV Toán 10 Cơ bản, tr.53)

Kĩ thuật trên rõ ràng chỉ thực hiện được khi chúng ta biết rõ đường biểu diễn đồ thị của hàm số. Tuy nhiên liệu kết quả mà ta nhận được có thực sự chính xác. Điều này được thể chế giải thích như sau:

“Nói chung, kết quả nhận được là các giá trị gần đúng, tuy nhiên nếu kết hợp với các phương pháp khác thì có thể tìm được giá trị chính xác”

(SGV Toán 10 Nâng cao, tr.69).

Như vậy, ở trường phổ thông một số kết quả thu được bằng việc sử dụng đồ thị có thể được chấp nhận mà không cần đến biểu thức hàm số. Nói khác đi đồ thị dạng chính tắc có thể thay cho biểu thức hàm. Một tình huống được đặt ra là khi không biết được đồ thị dạng chính tắc thì kĩ thuật để thực hiện kiểu nhiệm vụ nói trên là gì? Chúng tôi tìm thấy một mục tiêu khác như sau:

“Tìm được phương trình parabol $y = ax^2 + bx + c$ khi biết một trong các hệ số và biết đồ thị đi qua hai điểm cho trước.

Ví dụ. Viết phương trình của parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó :

a. Đi qua hai điểm $A(1;5)$ và $B(-2;8)$.

b. Cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$. ”

(Trích trong chương trình giáo dục phổ thông môn toán của Bộ giáo dục và đào tạo, tr.136)

Qua mục tiêu này ta sẽ tìm được biểu thức hàm số khi chưa biết dạng chính tắc của đồ thị. Tuy nhiên trong biểu thức cần tìm thì một trong các hệ số đã biết nên trong xét về kĩ thuật thì ta chỉ cần tìm hai điểm thuộc đồ. Giải thích cho việc tại sao trong biểu thức lại cần phải cho trước một hệ số, vì tại thời điểm này học sinh chưa được làm quen với hệ phương trình bậc nhất ba ẩn. Liệu cách làm này có ảnh hưởng gì đến quan điểm của học sinh về việc xác định biểu thức hàm số?

Kết luận.

Qua phân tích chương trình, chúng tôi rút ra được hai điều sau:

- Các mục tiêu của chương trình đề ra cho việc dạy-học hàm số trùng với các mục đích trong nghiên cứu chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số mà chúng tôi chỉ ra trong phân tích khoa học luận.

- Có hai kiểu nhiệm vụ liên quan đến việc chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số.

+ Kiểu nhiệm vụ T_1 : “Tìm các tính chất của hàm số bằng đồ thị”

+ Kiểu nhiệm vụ T_2 :

“Tìm biểu thức hàm số”

Hay

“Tìm giá trị của hàm số tại một điểm cho trước thuộc tập xác định”

Nhằm làm rõ các tổ chức chức toán học có liên quan đến ba kiểu nhiệm vụ nói trên, cùng với việc làm rõ mối quan tâm của thể chế dành cho vấn đề mô hình hóa. Chúng tôi tiến hành phân tích sách giáo khoa.

2. Phân tích sách giáo khoa.

Trong phần này chúng tôi tiến hành phân tích SGK các lớp 7, 9 và 10 nơi mà hai đối tượng hàm số bậc nhất và bậc hai được cụ thể hóa, làm rõ các tổ chức toán học có liên quan đến việc chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số mà chúng tôi đã chỉ ra trong phân tích chương trình.

☑ **SGK Toán 7**

Đầu tiên, chúng tôi xin nhắc lại một mục tiêu đã được đề cập trong phân tích chương trình:

“Biết được ý nghĩa đồ thị trong thực tiễn và trong nghiên cứu hàm số.”

Việc cụ thể hóa mục tiêu nói trên được thể chế thể hiện bằng cách đưa vào các bài tập có nội dung thực tiễn và một số bài tập với yêu cầu đọc đồ thị.

Xem xét các bài tập được đưa vào trong SGK lớp 7, chúng tôi thấy có các tổ chức toán học (TCTH) sau:

➤ **TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ T_{TGTHS}** : Tìm giá trị của hàm số tại một điểm cho trước thuộc tập xác định.

Kĩ thuật:

τ_{TGTHS} – Bảng đồ thị:

- Từ điểm x_0 cho trước, kẻ đường thẳng song song với trục tung Oy cắt đồ thị tại M.
- Qua M, kẻ đường thẳng song song với trục hoành Ox cắt trục tung tại y_0 .
- Kết luận $f(x_0) = y_0$

Công nghệ:

θ_{TGTHS} : Dạng chính tắc của đồ thị được xem như biểu thức của hàm số.

➤ **TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ T_{XDCTHS}** : Xác định công thức hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$).

Kĩ thuật:

τ_{XDCTHS} (Biết đồ thị mô tả hàm số):

- Chọn biểu thức mô tả hàm số có đồ thị là đường thẳng đi qua gốc tọa độ dạng: $y = ax$
- Tìm một điểm thuộc đồ thị.
- Thay vào công thức $y = ax$ để tìm a.

τ'_{XDCTHS} (Không biết dạng chính tắc của đồ thị):

- Tìm yêu cầu đặt ra cho bài toán.
- Tìm các đại lượng liên quan và các giá trị mà chúng có thể nhận. Gọi các biến đại diện (nếu cần).
- Tìm các công thức biểu diễn mối liên hệ giữa các đại lượng đã chọn.
- Kiểm tra lại các kết quả nhận được.

Công nghệ:

θ_{XDCTHS} (Biết đồ thị mô tả hàm số):

- Điểm thuộc đồ thị: $M(x_0; y_0) \in y = f(x) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

θ'_{XDCTHS} (Không biết dạng chính tắc của đồ thị):

Ngầm ẩn trong kĩ thuật.



Nhận xét.

Qua phân tích SGK lớp 7, chúng tôi nhận thấy có hai kiểu nhiệm vụ (KNV) liên quan đến quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số.

KNV thứ 1: Tìm giá trị của hàm số tại một điểm cho trước thuộc tập xác định.

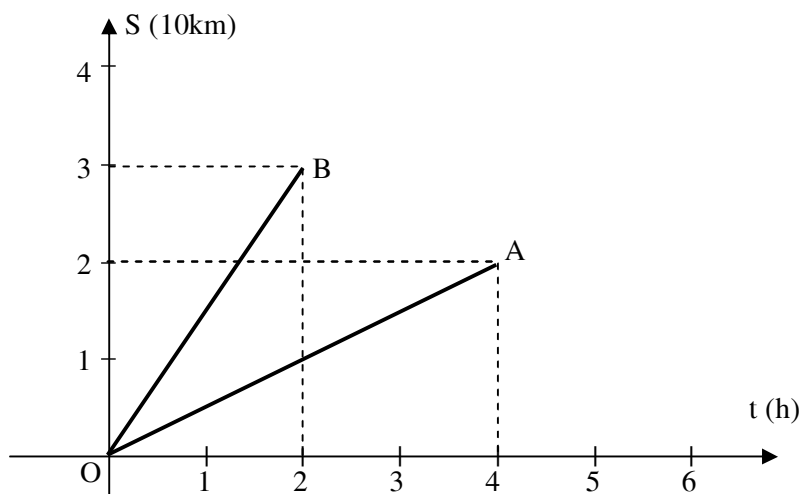
KNV thứ 2: Xác định công thức hàm số

Đây cũng chính là các kiểu nhiệm vụ đã được tìm thấy trong phân tích khoa học luận. Tuy nhiên có điểm khác biệt trong kĩ thuật giải quyết kiểu nhiệm vụ “Tính giá trị của hàm số” là : ta có thể sử dụng dạng chính tắc của đồ thị hàm số đã cho để tính giá trị của hàm số mà không cần đến biểu thức xác định hàm số đó. Do đó chúng tôi coi đây như là một kiểu nhiệm vụ tách biệt. Còn trong kiểu nhiệm vụ “Tìm công thức xác định hàm số $y = ax$ ”, chúng tôi thấy có hai vấn đề được đặt ra:

- + Vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số.
- + Vấn đề mô hình hóa trong giải quyết các bài toán có nội dung thực tiễn.

Để làm rõ vấn đề mô hình hóa đã được có mặt trong kiểu nhiệm vụ “Tìm biểu thức hàm số”, chúng tôi chọn bài tập số 43 tr.72 trong SGK toán 7 tập 1 với nội dung như sau.

“Cho hình vẽ:



Trong hình trên, đoạn thẳng OA là đồ thị biểu diễn chuyển động của người đi bộ và đoạn thẳng OB là đồ thị biểu diễn chuyển động của người đi xe đạp. Qua đồ thị, em hãy cho biết:

Vận tốc (km/h) của người đi bộ, của người đi xe đạp.”

Phân tích TCTH có mặt trong bài tập này:



Kiểu nhiệm vụ: “Tìm biểu thức mô tả hàm số”



Kĩ thuật:

- Xác định yêu cầu bài toán: Tìm vận tốc của mỗi người.

- Tìm các đại lượng liên quan và thiết lập mối quan hệ:
 - + Đối với người đi bộ: Từ đồ thị ta thấy tại thời điểm 4h, quãng đường của người này đạt được là 20km.
 - + Đối với người đi xe đạp: Từ đồ thị ta thấy tại thời điểm 2h, quãng đường của người này đạt được là 30km.
- Tìm công thức mô tả mối liên hệ giữa các đại lượng này:

Gọi s , t và v lần lượt là quãng đường, vận tốc và thời gian.

Ta có công thức mô tả mối liên hệ giữa ba đại lượng này là: $s = v.t$.

Thay các giá trị đã có vào công thức ta tìm được vận tốc của mỗi người:

$$v(\text{người đi bộ}) = \frac{s}{t} = \frac{20}{4} = 5 \text{ (km / h)}$$

$$v(\text{người đi xe đạp}) = \frac{s}{t} = \frac{30}{2} = 15 \text{ (km / h)}$$

✚ Công nghệ: ngầm ẩn trong kĩ thuật.

Đem so sánh các bước trong kĩ thuật giải quyết kiểu nhiệm vụ trên với các bước của quá trình mô hình hóa, chúng tôi nhận thấy đây chính là các *bước 1*, *bước 2* và *bước 3* của quá trình mô hình hóa, điều này cho thấy quá trình mô hình hóa đã được sử dụng trong dạy-học hàm số ở lớp 7, mà cụ thể là chúng được sử dụng trong các bài toán có nội dung thực tiễn. Nhưng để xét về “mức độ quan tâm” của thể chế dành cho vấn đề mô hình hóa thì chúng ta sẽ nhìn thấy trong bảng thống kê bên dưới.

Sau đây là bảng thống kê số lượng bài tập có liên đến hai kiểu nhiệm vụ nói trên cùng với các kĩ thuật.

		Kĩ thuật		Tổng số bài tập trong chương	Tỷ lệ
		Biết dạng chính tắc của đồ thị	Không biết dạng chính tắc của đồ thị		
Kiểu nhiệm vụ	T _{TGTHS} (Tính giá trị hàm số)	3 (5,4%)		56	5,4%
	T _{TBTHS} (Tìm biểu thức hàm số)	2 (3,57%)	2 (3,57%)	56	7,1%

Qua bảng thống kê cho ta thấy số lượng các bài tập liên quan đến việc chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số chỉ chiếm một tỷ lệ khá nhỏ vào khoảng 3,57% cụ thể là có 2/56 bài và các bài toán có sử dụng quá trình mô hình hóa trong toán cũng chỉ chiếm một tỷ lệ khoảng 3,57%. Điều đó cho thấy vấn đề mô hình hóa và vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số đã không xuất hiện như là một kiểu nhiệm vụ cần quan tâm.

SGK Toán 9

Chúng tôi bắt đầu bằng một ví dụ được SGK sử dụng để mô tả hàm số cũng như giúp học sinh thấy được ứng dụng của hàm số trong thực tiễn.

“Thí nghiệm của Ga-li-lê về vật rơi tự do (không kể đến sức cản của không khí):

Tại đỉnh tháp nghiêng Pisa, ở Italy, G. Gallilei đã thả hai quả cầu bằng chì có trọng lượng khác nhau để làm thí nghiệm nghiên cứu chuyển động của một vật rơi tự do. Ông khẳng định rằng, khi một vật rơi tự do (không kể đến sức cản của không khí), vận tốc của nó tăng dần và không phụ thuộc vào trọng lượng của vật. Quãng đường chuyển động s của nó được biểu diễn gần đúng bởi công thức $s = 5t^2$

trong đó t là thời gian tính bằng giây, s tính bằng mét.

Công thức $s = 5t^2$ biểu thị một hàm có dạng $y = ax^2$ ($a \neq 0$). ”

(SGK Lớp 9 tập 2, trang 28-29)

Rõ ràng ví dụ trên đáp ứng được mục tiêu đề ra của thể chế là: cho học sinh thấy được toán học nói chung và hàm số nói riêng có liên quan đến thực tế. Nhưng trong bài toán trên chúng ta không thấy thể chế chỉ ra các bước thực hiện để tìm ra biểu thức hàm số, cũng như chưa quan tâm đến đồ thị của vật chuyển động. Nên nhìn chung vấn đề chuyển đổi cũng như vấn đề mô hình hóa chưa được tìm thấy ở đây. Tiếp tục nghiên cứu SGK để tìm các tổ chức toán liên quan đến quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số, chúng tôi thấy có những tổ chức toán học sau được đưa vào:

➤ **TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ T_{TCHS}** : Tìm tính chất của hàm số bằng đồ thị.

Kĩ thuật :

τ_{XTBT} – Xét tính biến thiên:

- Nếu đồ thị hướng lên (từ trái qua phải) thì hàm số đồng biến.
- Nếu đồ thị hướng xuống (từ trái qua phải) thì hàm số nghịch biến.

$\tau_{XVTĐ}$ – Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng:

Cho hai đường thẳng $(d): y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $(d'): y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$).

- $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$
- $d \text{ trùng } d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- $d \text{ cắt } d' \Leftrightarrow a \neq a'$

τ_{TGH} – Tìm góc hợp bởi:

- Gọi α là góc hợp bởi đường thẳng và trục hoành Ox.

- Nếu

$$\alpha < 90^\circ \text{ thì } \tan \alpha = |a|$$

$$\alpha < 90^\circ \text{ thì } \tan(180^\circ - \alpha) = |a|$$

Công nghệ:

θ_{XTBT} – Xét tính biến thiên:

Ý nghĩa hình học của hàm số đồng biến, nghịch biến.

θ_{XVTTD} – Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng:

Các định lý về vị trí tương đối của hai đường thẳng.

θ_{TGHb} – Tìm góc hợp bởi:

Tỷ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông.

➤ **TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ T_{TGTHS}** : *Tìm giá trị của hàm số tại giá trị x bất kì thuộc tập xác định.*

Kĩ thuật :

τ_{TGTHS} (Biết đồ thị mô tả hàm số):

- Từ điểm x_0 cho trước, kẻ đường thẳng song song với trục tung Oy cắt đồ thị tại M.
- Qua M, kẻ đường thẳng song song với trục hoành Ox cắt trục tung tại y_0 .
- Kết luận $f(x_0) = y_0$

Công nghệ:

θ_{TGTHS} (Biết đồ thị mô tả hàm số):

- Dạng chính tắc của đồ thị được xem như biểu thức của hàm số.

➤ **TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ $T_{XDCTHb1}$** : *Xác định công thức hàm số.*

Kĩ thuật :

τ_{XDCTHS} (Biết đồ thị dạng chính tắc):

 Xác định công thức hàm bậc nhất:

- Chọn biểu thức mô tả hàm số có đồ thị là đường thẳng dạng: $y = ax + b (a \neq 0)$
- Tìm hệ số a từ giả thiết hay từ đặc điểm đường thẳng cần tìm song song với một đường thẳng cho trước.
- Tìm một điểm thuộc đồ thị hàm số để suy ra b.
- Thay a và b vừa tìm được vào công thức $y = ax + b$.

 Xác định công thức hàm bậc hai dạng $y = ax^2 (a \neq 0)$

- Chọn biểu thức mô tả hàm số có đồ thị là đường cong parabol đi qua gốc tọa độ dạng:

$$y = ax^2 (a \neq 0)$$

- Tìm một điểm đã cho thuộc đồ thị hàm số.

- Thay tọa độ điểm trên vào công thức $y = ax^2$ để tìm a.

Công nghệ:

θ_{XDCTHS} (Biết đồ thị dạng chính tắc):

 Xác định công thức hàm bậc nhất:

- Các định lý về vị trí tương đối của hai đường thẳng.

- Lí thuyết phương trình

- Điểm thuộc đồ thị: $M(x_0; y_0) \in y = f(x) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$

 Xác định công thức hàm bậc hai dạng $y = ax^2 (a \neq 0)$:

- Lí thuyết phương trình

- Điểm thuộc đồ thị: $M(x_0; y_0) \in y = f(x) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$

Nhận xét.

So với SGK lớp 7 thì rõ ràng số kiểu nhiệm vụ liên quan đến việc nghiên cứu chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số đã tăng lên. Cụ thể, chúng tôi tìm thấy có ba kiểu nhiệm vụ (KNV) như sau:

+ KNV thứ 1: Nghiên cứu các tính chất hàm số bằng đồ thị.

+ KNV thứ 2: Xác định công thức hàm số.

+ KNV thứ 3: Tìm giá trị của hàm số tại một điểm cho trước thuộc tập xác định.

Có một điều khác biệt so với SGK lớp 7 khi giải quyết kiểu nhiệm vụ thứ 2 “Xác định công thức hàm số”, chúng tôi chỉ nhìn thấy vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số được đặt ra, còn vấn đề mô hình hóa thì hoàn toàn vắng mặt.

Với vấn đề chuyển đổi đặt ra trên hai đối tượng hàm số được đưa vào ở lớp 9, kĩ thuật đã chỉ ra ở trên sẽ giúp ta giải quyết được vấn đề này một cách trọn vẹn. Tuy nhiên ta có thể thắc mắc, tại sao trong kĩ thuật tìm biểu thức hàm tuyến tính thể chế không thực hiện như trong nghiên cứu khoa học luận đã chỉ ra, đó là: chọn hai điểm thuộc đồ thị, rồi từ đó tìm các hệ số trong biểu thức. Điều này có thể được trả lời ngay là vì, trong phân phối chương trình Toán 9, lí thuyết hệ phương trình bậc nhất hai ẩn chưa được đưa vào nghiên cứu tại thời điểm này.

Còn đối với vấn đề mô hình hóa không được tìm thấy khi giải quyết kiểu nhiệm vụ “Tìm biểu thức hàm số” sẽ được chúng tôi làm rõ thông qua việc phân tích các bước trong kĩ thuật để giải một trong các bài toán có nội dung thực tiễn được đưa vào SGK toán 9. Chúng tôi xin trích dẫn ra đây bài tập số 3 tr.30 SGK toán 9 tập 2:

“Lực F của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc v của gió, tức là $F = av^2$ (a là hằng số). Biết rằng khi vận tốc gió bằng $2m/s$ thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền bằng $120N$ (Niu-ton).

a. Tính hằng số a .

b. Hỏi khi $v = 10m/s$ thì lực F bằng bao nhiêu? Cùng câu hỏi này khi $v = 20m/s$?

c. Biết rằng cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là $12000N$. Hỏi con thuyền có thể đi trong gió bão với vận tốc gió $90km/h$ hay không?”

Phân tích tổ chức toán học có mặt trong bài tập trên:

✚ Kiểu nhiệm vụ: “Tính lực F của gió”

✚ Kỹ thuật:

- Thay giá trị của F và v đã cho ban đầu vào công thức $F = av^2$. Suy ra a .
- Với a vừa tìm được ta có công thức $F = 30v^2$. Lần lượt thế $v = 10$ & $v = 20$ vào công thức để tìm F .
- Nhận xét gió bão có vận tốc $90km/h = 25m/s$ nên so sánh với kết quả đã tìm được ở trên để kết luận.

✚ Công nghệ: ngầm ẩn trong kỹ thuật.

Phân tích trên cho thấy trong kỹ thuật chỉ tương ứng với bước 3, trong bốn bước giải cần tiến hành để thực hiện mô hình hóa toán học. Nói cách khác, các bài tập có nội dung thực tiễn được đưa vào SGK toán 9 đều được viết dưới dạng một bài toán, việc của học sinh chỉ là giải toán. Không có bài tập nào yêu cầu thực hiện bước 1 và bước 2_ bước chuyển từ hệ thống hay tình huống ngoài toán học vào trong mô hình toán học, điều này cho thấy vấn đề mô hình hóa toán học đã không được tính đến.

Ngoài ra để làm rõ mức độ quan tâm của thể đối với vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số mà đặc biệt là ở vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số. Chúng tôi tiến hành thống kê số lượng bài tập có liên quan đến các kiểu nhiệm vụ nói trên, cùng với các kỹ thuật giải quyết. Số liệu được ghi lại trong bảng sau:

		Kỹ thuật (Biết dạng chính tắc của đồ thị)	Tổng số bài tập về hàm số trong SGK	Tỷ lệ
Kiểu nhiệm vụ	T_{TTCHS} (Tìm tính chất của hàm số)	3	48	6,25%
	T_{TGTHS} (Tính giá trị hàm số)	1	48	2,1%

	T_{TBTHS} (Tìm biểu thức hàm số)	3	48	6,25%
--	--	----------	-----------	--------------

Số liệu trong bảng thống kê cho ta thấy các bài tập liên quan đến vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số chiếm một tỉ lệ khá thấp, chỉ khoảng 6,25%. Điều này cho thấy kiểu nhiệm vụ tìm biểu thức hàm số bằng đồ thị chưa thực sự được quan tâm.

SGK Toán 10.

SGK lớp 10 là nơi mà việc cụ thể hóa các mục tiêu đề ra cho việc dạy-học chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số trên hai đối tượng hàm số bậc nhất và bậc hai được tìm thấy một cách rõ ràng nhất. Các mục tiêu đó là:

-  Nghiên cứu các tính chất hàm số bằng đồ thị.
-  Thực hiện việc chuyển đổi giúp giải quyết các bài toán thực tế.

Trước tiên, chúng tôi tiến hành phân tích các tổ chức toán học (TCTH) liên quan đến quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số để làm rõ các mục tiêu nói trên cùng với kỹ thuật thực hiện.

➤ **TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ T_{TCHS}** : *Tìm tính chất của hàm số bằng đồ thị.*

Kỹ thuật :

τ_{XTBT} – Xét tính biến thiên trên một khoảng:

- Trong khoảng đó, nếu đồ thị hướng lên (từ trái qua phải) thì hàm số đồng biến.
- Trong khoảng đó, nếu đồ thị hướng xuống (từ trái qua phải) thì hàm số nghịch biến.

τ_{TTXD} – Tìm tập xác định của hàm số:

Tìm trên Ox các khoảng mà x có thể nhận giá trị.

τ_{XTCL} – Xét tính chẵn, lẻ của hàm số:

- Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Công nghệ:

θ_{XTBT} – Xét tính biến thiên trên một khoảng:

Ý nghĩa hình học của hàm số đồng biến, nghịch biến.

θ_{TTXD} – Tìm tập xác định của hàm số:

Ngầm ẩn trong kỹ thuật.

θ_{XTCL} – Xét tính chẵn, lẻ của hàm số:

Ý nghĩa hình học của hàm số chẵn, lẻ.

➤ **TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ T_{TGTHS}** : *Tính giá trị hàm số tại giá trị x bất kì thuộc tập xác định.*

Kĩ thuật :

τ_{TGTHS} (Biết đồ thị mô tả hàm số):

- Từ điểm x_0 cho trước, kẻ đường thẳng song song với trục tung Oy cắt đồ thị tại M.
- Qua M, kẻ đường thẳng song song với trục hoành Ox cắt trục tung tại y_0 .
- Kết luận $f(x_0) = y_0$

Công nghệ:

θ_{TGTHS} : Dạng chính tắc của đồ thị được xem như biểu thức của hàm số.

➤ **TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ T_{XDCTHS}** : *Xác định công thức hàm số.*

Kĩ thuật :

τ_{XDCTHS} _Bảng đồ thị:

 Xác định công thức hàm bậc nhất :

- Chọn biểu thức mô tả hàm số có đồ thị là đường thẳng dạng : $y = ax + b (a \neq 0)$.
- Tìm hai điểm thuộc đồ thị.
- Thiết lập hệ phương trình bậc nhất hai ẩn a và b bằng cách thay tọa độ hai điểm này vào trong phương trình tổng quát. Từ hệ này tìm a và b.
- Thay a và b vừa tìm được vào công thức $y = ax + b$.

 Xác định công thức hàm bậc hai :

- Chọn biểu thức mô tả hàm số có đồ thị là đường cong parabol dạng : $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$
- Tìm ba điểm thuộc đồ thị hàm số.
- Thay tọa độ điểm trên vào công thức $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ để tìm a, b, c.

τ_{XDCTHS} _Bảng phép tịnh tiến đồ thị:

- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ đã cho. Thực hiện phép tịnh tiến:
 - + Tịnh tiến song song với trục hoành Ox sang trái hay sang phải k đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = g(x) = f(x \pm k)$
 - + Tịnh tiến song song với trục tung Oy lên trên hay xuống dưới k đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = g(x) = f(x) \pm k$
- Từ đồ thị suy ra biểu thức hàm tương ứng.

τ'_{XDCTHS} (Không biết dạng chính tắc của đồ thị):

- Tìm yêu cầu đặt ra cho bài toán.
- Tìm các đại lượng liên quan và các giá trị mà chúng có thể nhận. Gợi các biến đại diện (nếu cần).
- Tìm các công thức biểu diễn mối liên hệ giữa các đại lượng đã chọn.
- Kiểm tra lại các kết quả nhận được.

Công nghệ:

θ_{XDCTHS} (Biết đồ thị dạng chính tắc):

 Xác định công thức hàm bậc nhất:

- Các định lý về vị trí tương đối của hai đường thẳng.
- Lí thuyết phương trình
- Điểm thuộc đồ thị: $M(x_0; y_0) \in y = f(x) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$

 Xác định công thức hàm bậc hai dạng $y = ax^2 (a \neq 0)$:

- Lí thuyết phương trình

Điểm thuộc đồ thị: $M(x_0; y_0) \in y = f(x) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$

θ_{XDCTHS} – Bằng phép tịnh tiến đồ thị:

- Định lý về phép tịnh tiến đồ thị.

θ'_{XDCTHS} (Không biết dạng chính tắc của đồ thị):

Ngầm ẩn trong kĩ thuật.

 **Nhận xét.**

Phân tích các tổ chức toán học có mặt trong SGK toán 10 liên quan đến quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số, chúng tôi cũng tìm thấy ba kiểu nhiệm vụ (KNV) sau:

- + KNV thứ 1: Nghiên cứu các tính chất hàm số bằng đồ thị.
- + KNV thứ 2: Xác định công thức hàm số.
- + KNV thứ 3: Tìm giá trị của hàm số tại một điểm cho trước thuộc tập xác định.

So với SGK toán 9 thì KNV thứ 3 không có gì khác biệt. Còn trong KNV thứ nhất thì việc sử dụng đồ thị có thể giúp chúng ta nghiên cứu thêm được một số tính chất khác của hàm số như: tính chẵn-lẻ, miền xác định và miền giá trị của hàm số. Riêng trong KNV thứ 2, khi giải quyết kiểu nhiệm vụ này chúng tôi nhận thấy có hai vấn đề nảy sinh:

- + Vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số.
- + Vấn đề mô hình hóa trong việc giải các bài toán có nội dung thực tiễn.

Rõ ràng với các bước trong kĩ thuật đã chỉ ra ở trên, vấn đề thứ nhất được giải quyết trọn vẹn. Còn đối với vấn đề thứ 2 liên quan đến quá trình mô hình hóa toán học cho một bài toán thực tiễn sẽ

được chúng tôi làm rõ thông qua một bài tập cụ thể của SGK. Bài tập 25 tr.54 SGK toán 10 nâng cao:

“Một hãng taxi quy định giá thuê xe đi mỗi kilômét là 6 nghìn đồng đối với 10km đầu tiên và 2,5 nghìn đồng đối với các kilômét tiếp theo. Một hành khách thuê taxi đi quãng đường x kilômét phải trả y nghìn đồng. Khi đó, y là một hàm số đối với x , xác định với mọi $x \geq 0$.

a. Hãy phát biểu y như một hàm số bậc nhất trên từng khoảng ứng với đoạn $[0;10]$ và khoảng $(10;+\infty)$.

b. Tính $f(8), f(10), f(18)$. ”

Phân tích TCTH có mặt trong bài tập này:

✚ Kiểu nhiệm vụ: “Tìm biểu thức và tính giá trị của hàm số”

✚ Kỹ thuật:

- Xác định yêu cầu bài toán: Tìm công thức hàm mô tả tổng số tiền cần trả theo quãng đường đã đi”.
- Tìm các đại lượng liên quan và thiết lập mối liên hệ:

+ Khi quãng đường đã đi nhỏ hơn 10km thì:

Tổng số tiền phải trả bằng số kilômét đã đi $\times$ 6 ngàn

+ Khi quãng đường đã đi lớn hơn 10km thì số tiền phải trả gồm hai khoản:

Khoản 1: Trong 10km phải trả với giá 6 ngàn đồng cho mỗi kilômét nên số tiền phải trả cho 10km đầu là 60 ngàn

Khoản 2: Trong $(x - 10)$ km tiếp theo phải trả với giá 2,5 ngàn/km.

- Tìm công thức mô tả mối liên hệ giữa các đại lượng này:

Gọi $f(x)$ là số tiền phải trả theo quãng đường x .

Khi $0 \leq x \leq 10$ thì số tiền phải trả là : $f(x) = 6x$.

Khi $x > 10$ thì số tiền phải trả là : $f(x) = 60 + 2,5(x - 10) = 2,5x + 35$

a. Vậy hàm số phải tìm là :

$$f(x) = \begin{cases} 6x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 10 \\ 2,5x + 35 & \text{nếu } x > 10 \end{cases}$$

b. Từ công thức trên suy ra:

$$f(8) = 6.8 = 48; \quad f(10) = 6.10 = 60$$

$$f(18) = 2,5.18 + 25 = 80$$

✚ Công nghệ: ngầm ẩn trong kỹ thuật.

Qua phân tích trên cho thấy các bước trong kĩ thuật giải quyết kiểu nhiệm vụ nói trên đều tương ứng với các bước của quá trình mô hình hóa, chúng tôi nhận thấy đây chính là các *bước 1*, *bước 2* và *bước 3* của quá trình mô hình hóa, điều này cho thấy vấn đề mô hình hóa có mặt trong dạy-học hàm số ở lớp 10.

Sau đây là bảng thống kê số lượng bài tập có liên đến hai kiểu nhiệm vụ nói trên cùng với các kĩ thuật.

		Kĩ thuật			Tổng số bài tập về hàm số trong SGK	Tỷ lệ
		Biết dạng chính tắc của đồ thị	Không biết dạng của đồ thị	Sử dụng phép tịnh tiến		
Kiểu nhiệm vụ	T_{TTCHS} (Tìm tính chất hàm số)	3 (6,5%)			46	6,5%
	T_{TGTHS} (Tính giá trị hàm số)	1 (2,2%)			46	2,2%
	T_{TBTHS} (Tìm biểu thức hàm số)	5 (10,9%)	2 (4,3%)	3 (6,5%)	46	21,7%

Tuy quá trình mô hình hóa có được tính đến trong giải các bài toán thực tiễn, nhưng qua bảng thống kê chúng ta nhận chỉ có 2 trong 46 bài có sử dụng quá trình mô hình hóa trong toán, tức vào khoảng 4,3%, đây là một tỷ lệ tương đối nhỏ điều đó cho thấy “mối quan tâm” của thể chế chưa đặt vào vấn đề mô hình hóa. Còn đối với vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số thì tỷ lệ này đã tăng hơn so với hai SGK toán 7 và 9 cụ thể là vào khoảng 10,9%. Nhưng xét trên tổng thể thì con số này còn khá khiêm tốn.

Ngoài ra cũng phải nói thêm rằng 46 bài tập được thống kê trong bảng trên đều là các bài tập trong SGK nâng cao. Chúng tôi không sử dụng SGK cơ bản là vì trong sách này chúng tôi không tìm thấy một bài tập nào có liên quan đến các kiểu nhiệm vụ nói trên, mặc dù trong phân tích chương trình chúng tôi cũng đã chỉ ra ở cả hai bản cơ bản và nâng cao đều có cùng các mục tiêu như :

+ Cho học sinh thấy được vai trò của toán học nói chung và của hàm số nói riêng trong thực tiễn.

+ Coi đồ thị là phương tiện chủ yếu để nghiên cứu hàm số.

Nhận xét trên cho thấy có một sự không cân đối trong việc cụ thể hóa các mục tiêu đã được đề ra ở hai SGK cơ bản và nâng cao.

3. Kết luận chương 2.

Qua việc phân tích chương trình và SGK đã cho phép chúng tôi làm rõ được các tổ chức toán học liên quan đến việc chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số được đặt ra trên hai đối tượng hàm số bậc nhất và bậc hai. Cụ thể có 3 kiểu nhiệm vụ (KNV) liên quan đến việc chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số xuất hiện trong SGK là :

- KNV T_1 : Nghiên cứu các tính chất bằng đồ thị.
- KNV T_2 : Tìm biểu thức xác định hàm số.
- KNV T_3 : Tính giá trị của hàm số.

Có một sự khác biệt trong nghiên cứu khoa học luận là ở kiểu nhiệm vụ tính giá trị hàm số, thể chế cho phép sử dụng đồ thị để suy ra giá trị hàm số tại một giá trị x bất kì và ngược lại mà không cần thông qua biểu thức xác định hàm số. Do đó chúng tôi xem như đây là một kiểu nhiệm vụ riêng biệt và đặt là KNV T_3 .

Trong ba kiểu nhiệm vụ trên chúng tôi đặc biệt quan tâm đến KNV T_2 vì việc giải quyết kiểu nhiệm vụ này sẽ dẫn đến hai vấn đề sau :

- ↳ Vấn đề mô hình hóa trong dạy học toán.
- ↳ Vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số.

Qua phân tích chương trình và SGK, chúng tôi nhận thấy vấn đề mô hình hóa có xuất hiện trong việc giải một số bài toán có nội dung thực tiễn, nhưng qua số liệu thống kê đã chỉ ra ở trên thì đây không phải là vấn đề được thể chế quan tâm. Còn đối với vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số, vấn đề này có mặt trong các sách Toán 7, Toán 9 và Toán 10 nâng cao nhưng chiếm một tỷ lệ không lớn, đặc biệt trong sách Toán 10 cơ bản thì vấn đề này hoàn toàn vắng mặt.

Những nhận định trên dẫn chúng tôi đến giả thiết nghiên cứu sau:

“Kỹ năng chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số chưa thực sự được hình thành ở học sinh”

Để kiểm chứng được tính thích đáng của giả thiết nghiên cứu, đòi hỏi phải tiến hành một thực nghiệm mà ở đó học sinh được tiếp cận với kiểu nhiệm vụ nói trên. Điều này sẽ được chúng tôi thực hiện ở chương 3 “Nghiên cứu thực nghiệm”.

Chương 3. NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM

1. Mục tiêu thực nghiệm.

Trong khuôn khổ của luận văn, chúng tôi tiến hành thực nghiệm này như là một tiểu đồ án didactic nhằm mục đích:

 Thứ nhất : Kiểm chứng giả thuyết

“Kỹ năng chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số chưa thực sự được hình thành ở học sinh”

Cần nói thêm rằng, chúng tôi đặt học sinh trong hai tình huống và xem xét kỹ năng chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số của họ. Cụ thể:

1) Tình huống cho biết trước dạng chính tắc của đồ thị hay chỉ là xấp xỉ với chúng và đòi hỏi phải thực hiện việc chuyển đổi.

2) Tình huống không biết chính xác hàm số $f(x)$ mà chỉ biết một tập rời rạc hữu hạn của đồ thị của nó và một vài nét rất khái quát về hàm số $f(x)$.

Chúng tôi thiết nghĩ việc xem xét kỹ năng chuyển đổi của học sinh trong hai tình huống trên sẽ giúp chúng tôi khẳng định hay bác bỏ phần nào giả thiết nghiên cứu nói trên.

 Thứ hai : Tạo tình huống cho học sinh làm việc với kiểu nhiệm vụ mà trong kỹ thuật giải quyết đòi hỏi việc thực hiện các bước mô hình hóa một bài toán thực tế. Một mặt làm rõ cho học sinh một số ứng dụng của hàm số trong thực tế, mặt khác qua việc giải quyết các những kiểu nhiệm vụ này học sinh tiếp xúc với những kỹ thuật chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số.

Thực nghiệm tiến hành trên đối tượng lớp 10. Sau khi đã học xong chương hàm số bậc hai.

2. Nội dung của thực nghiệm.

2.1. Giới thiệu tình huống thực nghiệm.

Thông báo các bài toán:

 **Bài toán 1.**

Một đường hầm nhân tạo có hình dáng và kích thước được cho biết như hình bên và chỉ cho phép lưu thông một chiều. Một xe tải chở hàng với chiều cao được tính từ mặt đường đến nóc thùng xe là 4,8m và bề ngang thùng xe là 3,9m.



Bài toán 2.

Trong trận bóng đá, một cầu thủ đá một trái banh từ mặt đất lên độ cao H mét trong thời gian t giây.
Các số liệu được thống kê trong bảng sau:

Tại thời điểm t (giây)	0,25	0,5
Chiều cao của quả bóng đạt được H (m)	1,2	2,2



Phiếu số 1:

Bài toán 1.

Liệu xe tải có được phép qua đường hầm? Giải thích vì sao?

Bài toán 2.

Giả sử thủ thành chụp được bóng tại thời điểm $t = 0,5$ giây. Xem chiều cao h là hàm số của thời gian t . Xác định hàm số mô tả đường đi của quả bóng từ sau khi cầu thủ sút bóng đến khi thủ thành chụp được?

Phiếu số 2:

Bài toán 1.

Với bề ngang của thùng xe như trên, hỏi xe tải có chiều cao tối đa là bao nhiêu vẫn có thể qua đường hầm?

Bài toán 2.

- 1) Tính chiều cao quả bóng đạt được tại thời điểm 0,3 giây sau cú đá của cầu thủ.
- 2) Hãy phác thảo đồ thị của hàm số mô tả đường đi của quả bóng, từ lúc được cầu thủ đá cho đến khi thủ thành chụp được bóng, lên mặt phẳng tọa độ.

Phiếu số 3:

1) Nhóm hãy thảo luận để thống nhất với nhau về câu trả lời cho câu hỏi 1 của *bài toán 2*.

2) Nhóm hãy nêu lại các bước để tìm biểu thức hàm số trong *bài toán 1* và *bài toán 2*.

2.2. Dàn dựng kịch bản:

Thực nghiệm được tiến hành trong thời gian 90 phút, bao gồm các hoạt động được chia thành 5 pha sau đây.

- **Pha 1.** (Làm việc cá nhân - 30 phút)

Giáo viên phát thông báo bài toán và phiếu số 1. Học sinh làm việc cá nhân để nghiên cứu nội dung bài toán và trả lời phiếu số 1.

- **Pha 2.** (Làm việc theo nhóm - 25 phút)

Giáo viên phát cho mỗi nhóm phiếu số 2, một số giấy nháp và một tờ giấy croquis. Các nhóm thảo luận và trình bày lời giải chung của cả nhóm vào tờ giấy croquis đã có.

- **Pha 3.** (Làm việc tập thể cả lớp - 20 phút)

Giáo viên điều khiển cho cả lớp tranh luận và đánh giá lời giải của các nhóm ở pha 2.

- **Pha 4.** (Làm việc theo nhóm - 10 phút)

Giáo viên phát cho mỗi nhóm phiếu số 3. Học sinh thảo luận nhanh và viết câu trả lời cũng như cử người đại diện trình bày câu trả lời của nhóm mình.

- **Pha 5.** (Hợp thức hóa - 5 phút)

Giáo viên tổng kết lời giải của các bài toán. Chốt lại các bước thực hiện của các bài toán và các bước chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số.

3. Phân tích a priori hệ thống câu hỏi các bài toán trong các pha.

3.1. Chiến lược và cái có thể quan sát.

3.1.1. Pha 1.

Mục đích của pha này (phiếu số 1) là xem xét kỹ thuật chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số. Do đó các câu hỏi tương ứng với các bài toán trong pha này xoay quanh kiểu nhiệm vụ T_1 : “Xác định biểu thức hàm số”

Đối với kiểu nhiệm vụ này, chúng tôi dự đoán có thể có các chiến lược tương ứng với các bài toán như sau.



Bài toán 1.

Hình dạng của đường hàm được chọn trong bài toán 1 xấp xỉ với đường cong đồ thị của một hàm bậc hai, nên mục đích của việc đưa ra bài toán này là để học sinh tiếp xúc với kiểu nhiệm vụ “xác định biểu thức hàm số khi biết dạng đồ thị của nó”. Các chiến lược có thể:

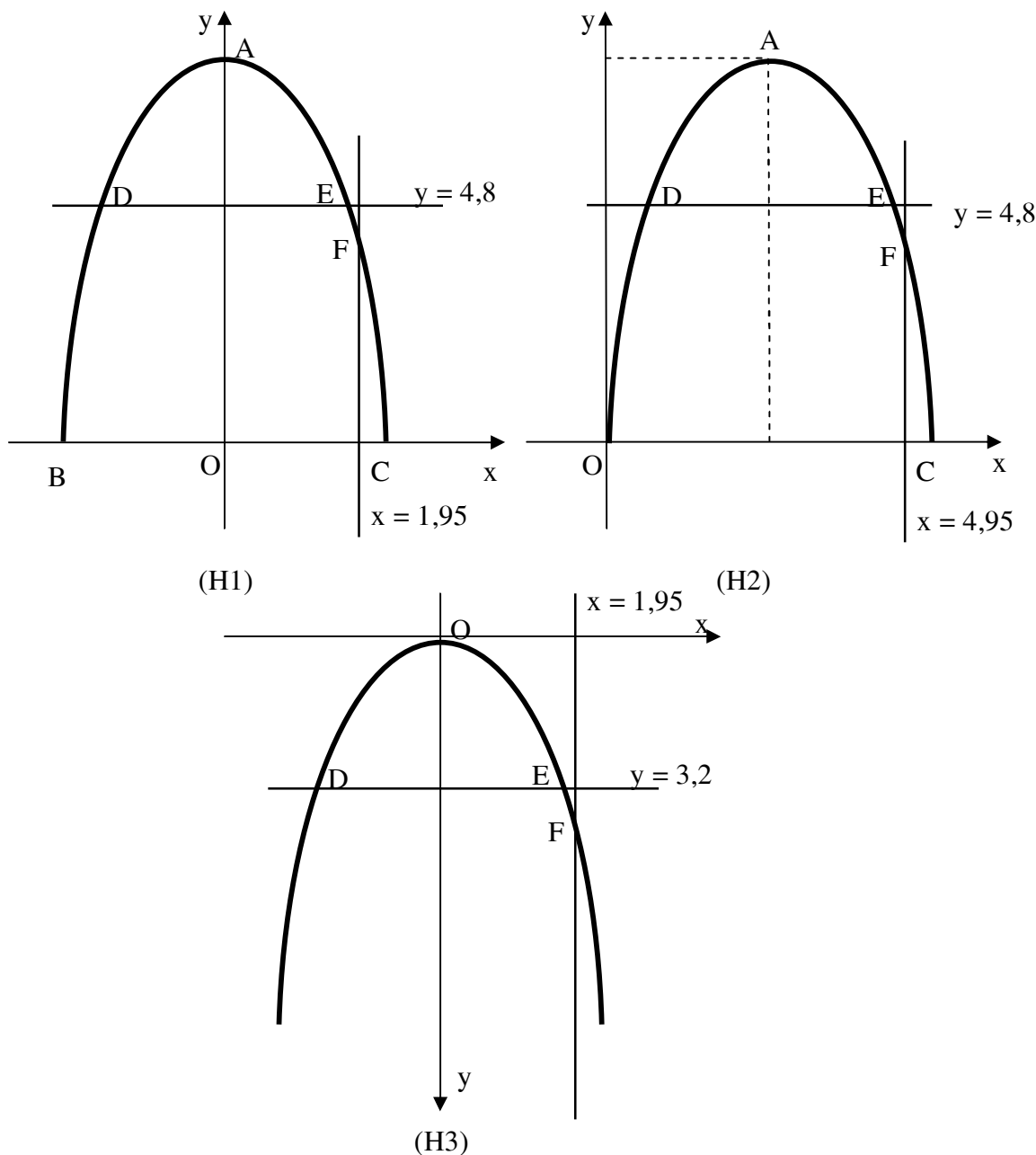
➤ Chiến lược S_{1BT1} : Chọn hệ trục tọa độ lập phương trình.

Sử dụng chiến lược này học sinh sẽ :

- Chọn một hệ trục tọa độ rồi tìm biểu thức hàm mô tả đường viền của đường hầm và trả lời cho các yêu cầu của bài toán.

👉 Lời giải có thể quan sát tương ứng với chiến lược:

Trên hình vẽ (hay trong phiếu làm bài) có xuất hiện mặt phẳng tọa độ với gốc tọa độ hoặc trùng với tim đường (là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm chân của đường hầm) hoặc gốc tọa độ trùng với một trong hai điểm là chân của đường hầm hoặc gốc tọa độ trùng với điểm chính giữa của đường viền cổng đường hầm như trong hình (H1), (H2) và (H3) bên dưới.



- Viết biểu thức hàm số của đồ thị mô tả đường bao của đường hầm. Những cách làm sau có thể nhận được:



Với hình (H1).

- Chọn ba điểm A(0;8), B(-3;0), C(3;0) và thay vào phương trình $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Khi đó giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn và nhận được biểu thức hàm số có dạng (P): $y = -\frac{8}{9}x^2 + 8$

- Áp dụng các công thức của tọa độ đỉnh và phương trình trục đối xứng :
 $-\frac{b}{2a} = 0 \& \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 8$ có được $b = 0, c = 8$. Chọn thêm điểm C(3;0) thay vào phương trình $y = ax^2 + bx + c$ và nhận được biểu thức hàm số có dạng
(P): $y = -\frac{8}{9}x^2 + 8$

☀ Với hình (H2).

- Chọn hai điểm A(3;8), C(6;0) và thay vào phương trình $y = ax^2 + bx$ với $a \neq 0$. Khi đó giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn và nhận được biểu thức hàm số có dạng (P): $y = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{3}x$

- Áp dụng các công thức của độ đỉnh và phương trình trục đối xứng: $-\frac{b}{2a} = 3 \& \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 8$ có được $a = -\frac{8}{9}, b = \frac{16}{3}$ thay vào phương trình $y = ax^2 + bx$ và nhận được biểu thức hàm số có dạng (P):
 $y = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{3}x$

☀ Với hình (H3).

- Chọn gốc tọa độ là đỉnh của cổng đường hầm. Khi đó công thức tổng quát của cổng đường hầm có dạng $y = ax^2, (a \neq 0)$. Chọn điểm (3;8) thuộc hàm số và thay vào công thức trên ta được hàm số có dạng (P): $y = \frac{8}{9}x^2$

- Tính toán để trả lời câu hỏi liệu xe tải có được phép qua đường hầm. Có thể nhận được những cách làm sau.

☀ Cho cả hai hình (H1) và (H2).

- Tìm giao điểm D, E của đường thẳng (d): $y = 4,8$ và (P): $y = -\frac{8}{9}x^2 + 8$ trong hình (H1) hay của đường thẳng (d): $y = 4,8$ và (P): $y = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{3}x$ trong hình (H2). Khi đó khoảng cách giữa hai điểm $DE \approx 3,8$ nhỏ hơn bề ngang của xe tải, do đó câu trả lời là xe tải không qua được đường hầm.

- Tìm giao điểm F của đường thẳng (d_1): $x = 1,95$ và (P): $y = -\frac{8}{9}x^2 + 8$ trong hình (H1) hay của đường thẳng (d_1): $x = 4,95$ và (P): $y = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{3}x$ trong hình (H2). Khi đó khoảng cách từ F đến Ox bằng 4,62m. Dem so sánh khoảng cách này với chiều cao của xe tải ta nhận thấy xe tải không qua được đường hầm.

☀ Cho hình (H3).

- Tìm giao điểm D, E của đường thẳng (d): $y = 3,2$ và (P): $y = \frac{8}{9}x^2$ trong hình (H3). Khi đó khoảng cách giữa hai điểm $DE \approx 3,8$ nhỏ hơn bề ngang của xe tải, do đó câu trả lời là xe tải không qua được đường hầm.

- Tìm giao điểm F của đường thẳng (d_1): $x = 1,95$ và (P): $y = \frac{8}{9}x^2$ trong hình (H). Khi đó khoảng cách từ F đến Ox bằng 3,38m nên khoảng cách từ F đến mặt đất là 4,62m. Dem so sánh khoảng cách này với chiều cao của xe tải ta nhận thấy xe tải không qua được đường hầm.

➤ Chiến lược S_{2BT1} : Tính diện tích

Sử dụng chiến lược này học sinh sẽ:

- Tính “xấp xỉ” diện tích mặt cắt đường hầm bằng cách: tính diện tích của tam giác có cạnh đáy là 6m, chiều cao là 8m (ba đỉnh của tam giác này có được bằng việc chọn hai điểm chân và điểm chính giữa của đường viền cong của đường hầm).

- Tính diện tích mặt cắt ngang của xe tải và xem diện tích này chính là diện tích hình chữ nhật có chiều dài là 4,8m, còn chiều rộng là 3,9m.

- Sau đó tiến hành so sánh hai diện tích này và rút ra kết luận.

🔗 Lời giải có thể quan sát tương ứng với chiến lược:

Xét tam giác có ba đỉnh là hai điểm chân và điểm chính giữa của đường viền cong, ta có:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24m^2$$

Mặt cắt ngang của xe tải là một hình chữ nhật, nên ta tính được $S = 3,9 \cdot 4,8 = 18,72m^2$

Ta thấy diện tích hình chữ nhật nhỏ hơn diện tích tam giác.

Mà diện tam giác được chọn nhỏ hơn diện tích mặt cắt của đường hầm.

Nên xe tải có thể qua đường hầm.

➤ Chiến lược S_{3BT1} : Chiến lược khác.

Chúng tôi nhóm vào đây các chiến lược khác với chiến lược kể trên.

Chẳng hạn như học sinh có thể phỏng đoán xe tải đi qua được mà không giải thích gì thêm.



Bài toán 2.

Bài toán này cũng được đặt ra nhằm xem xét kỹ năng chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số. Tuy nhiên đối với bài toán này học sinh được đặt trong tình huống mà ở đó họ chỉ biết một số điểm hữu hạn thuộc hàm số tức là họ không biết dạng chính tắc của đồ thị. Các chiến lược có thể có:

➤ Chiến lược S_{1BT2} : Chọn đa thức tuyến tính làm biểu thức hàm số.

Với chiến lược này học sinh sẽ chọn biểu thức của hàm số cần xác định là một đa thức tuyến tính để có sử dụng hai điểm đã cho.

↳ Lời giải có thể quan sát tương ứng với chiến lược:

Đồ thị của hàm số cần tìm đi qua hai điểm nên biểu thức xác định hàm số là một đa thức tuyến tính dạng:

$$h(t) = at + b, (a \neq 0).$$

Thay tọa độ hai điểm này vào biểu thức trên và giải hệ phương trình ta được:

$$a = 4, b = 0,2$$

Do đó biểu thức hàm chiều cao h của thời gian t đi qua hai điểm có dạng:

$$h(t) = 4t + 0,2$$

➤ Chiến lược S_{2BT2} : Chọn đa thức bậc hai làm biểu thức của hàm số.

Trong chiến lược này học sinh sẽ chọn thêm một điểm là thời điểm bắt đầu sút bóng, điểm này có tọa độ $(0;0)$.

Do đồ thị hàm số đi qua 3 điểm nên chọn biểu thức của hàm số cần tìm là một đa thức bậc hai.

↳ Lời giải có thể quan sát tương ứng với chiến lược:

- Đồ thị của hàm số cần tìm đi qua ba điểm trong đó có điểm $(0;0)$ là thời điểm bắt đầu sút bóng nên biểu thức xác định hàm số là một đa thức bậc hai dạng:

$$H(t) = at^2 + bt + c, (a \neq 0).$$

- Thay tọa độ các điểm này vào biểu thức trên và giải hệ phương trình ta được

$$a = -1,6, b = 5,2, c = 0$$

- Do đó biểu thức hàm chiều cao h của thời gian t đi qua hai điểm có dạng:

$$h(t) = -1,6t^2 + 5,2t$$

3.1.2. Pha 2.

Các câu hỏi trong pha này (phiếu số 2) xoay quanh việc tính giá trị của hàm số khi biết giá trị của biến. Do đó mục đích của pha này là để học sinh làm quen với kiểu nhiệm vụ “Tính giá trị y của hàm số tại bất kì giá trị nào của x trong $[a, b]$ ”

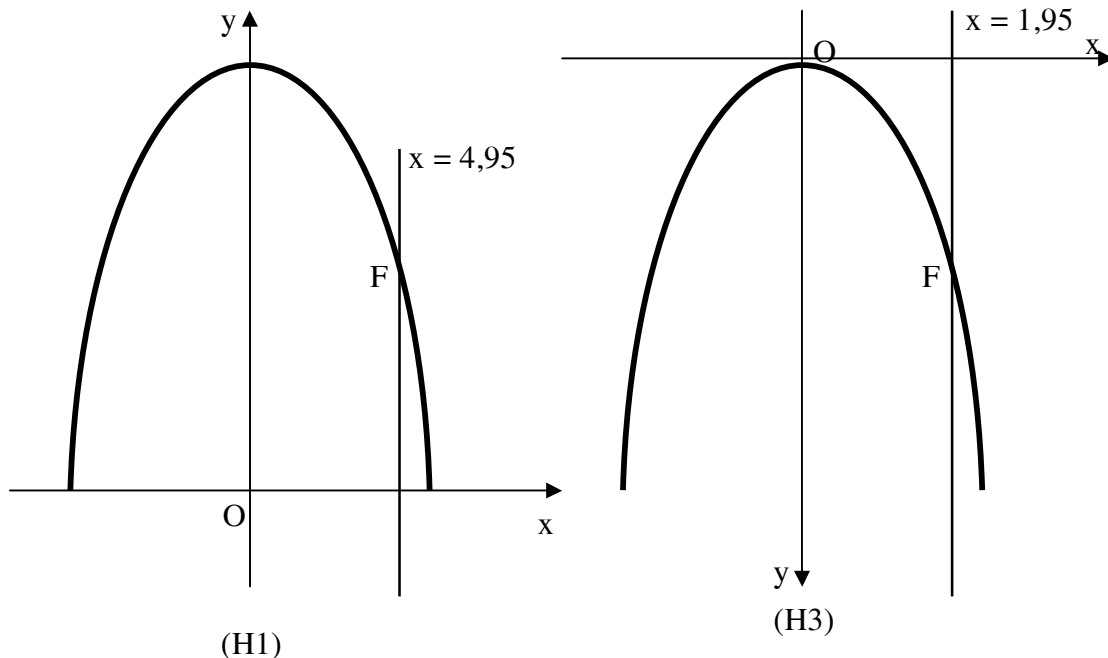
Đối với kiểu nhiệm vụ này, chúng tôi dự đoán sẽ xảy ra chiến lược “Thay giá trị vào biểu thức hàm số”. Tuy nhiên vì mỗi bài toán đều có những câu hỏi riêng để trả lời cho các yêu cầu khác nhau nên kĩ thuật thực hiện chiến lược ứng với mỗi bài toán này sẽ khác nhau. Do đó chúng tôi gọi chiến lược này dưới một số tên gọi khác nhau như:

➤ Chiến lược $S_{BI-TGTVBT}$: Thay giá trị vào biểu thức hàm số.

Sử dụng chiến lược này học sinh sẽ thay $x = 1,95$ vào biểu thức hàm số tìm được trong hình (H1) và hình (H3) hay thay $x = 4,95$ vào biểu thức hàm số $y = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{3}x$ tìm được trong hình (H2).

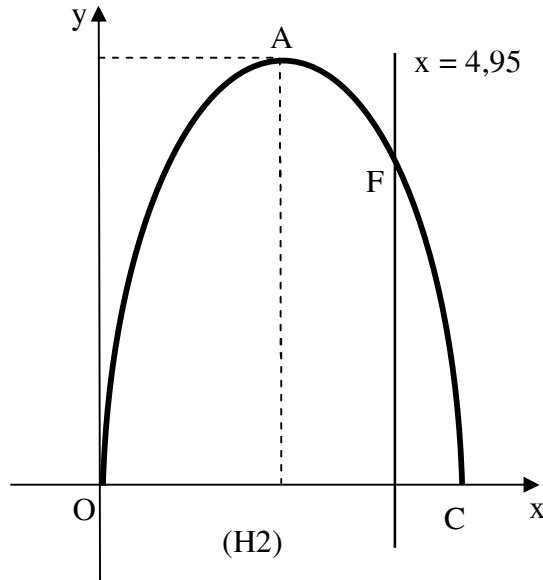
🔗 Lời giải có thể quan sát tương ứng với chiến lược:

🌟 Trong hình (H1) và (H3).



- Vì bề ngang của xe tải là 3,9m nên ta chọn điểm $(1,95;0)$ trên trục hoành Ox (điểm này có khoảng cách đến trục tung bằng nửa bề ngang của xe tải).
- Qua điểm này kẻ đường thẳng song song với trục tung cắt hàm số (P) tại F.
- Khi đó khoảng cách từ F đến Ox trong hình (H1) bằng 4,62m, Khoảng cách từ F đến trục hoành Ox bằng 3,38m nên khoảng cách từ F đến mặt đường bằng 4,62m.
- Dem so sánh khoảng cách này với chiều cao của xe tải ta nhận thấy xe tải không qua được đường hầm.

☀ Trong hình (H2).



Gọi F là giao điểm đường thẳng $x = 4,95$ với (P): $y = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{3}x$ (đường thẳng $x = 4,95$ có

khoảng cách đến trục Oy bằng 4,95m. Khoảng cách này đảm bảo được xe tải đi vào giữa đường hầm)

Khi đó khoảng cách từ F đến Ox bằng 4,62m.

Dem so sánh khoảng cách này với chiều cao của xe tải ta nhận thấy xe tải không qua được đường hầm.

➤ Chiến lược $S_{B2-TVBT1}$: Thay giá trị vào biểu thức hàm tuyến tính.

Sử dụng chiến lược này học sinh sẽ thay giá trị $t = 0,3$ vào biểu thức hàm tuyến tính tìm được.

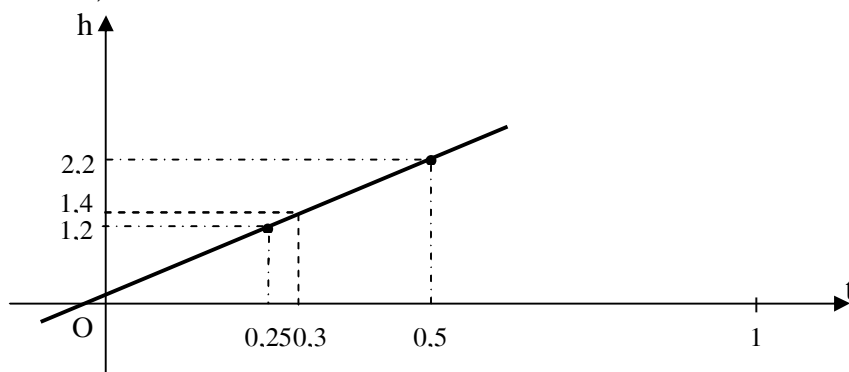
☞ Lời giải có thể quan sát tương ứng với chiến lược:

Câu 1. Với $t = 0,3$. Thay vào biểu thức $h(t) = 4t + 0,2$

Ta có $h(0,3) = 1,4m$

Do đó chiều cao đạt được của quả bóng tại thời điểm $t = 0,3$ giây là 1,4m

Câu 2. Đồ thị hàm số từ khi cầu thủ sút bóng đến khi thủ thành chụp được bóng đi qua hai điểm $(0,25;1,2)$ & $(0,5;2,2)$ nên có dạng như hình (H4):



Hình (H4): Đồ thị hàm tuyến tính

➤ Chiến lược $S_{B2-TVBT2}$: Thay giá trị vào biểu thức hàm bậc 2 trong bài toán 2.

Sử dụng chiến lược này học sinh sẽ thay giá trị $t = 0,3$ vào biểu thức hàm bậc hai tìm được.

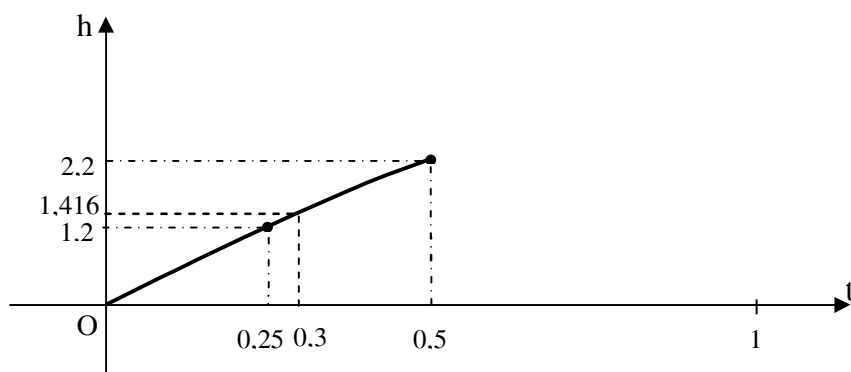
☞ Lời giải có thể quan sát tương ứng với chiến lược:

Câu 1. Với $t = 0,3$. Thay vào biểu thức $h(t) = -1,6t^2 + 5,2t$

Ta có $h(0,3) = 1,416m$

Do đó chiều cao đạt được của quả bóng tại thời điểm $t = 0,3$ giây là 1,416m

Câu 2. Đồ thị hàm số từ khi cầu thủ sút bóng đến khi thủ thành chụp được bóng đi qua hai điểm $(0,25;1,2)$ & $(0,5;2,2)$ và điểm $(0;0)$ là thời thời bắt đầu sút bóng nên có dạng như hình (H5):



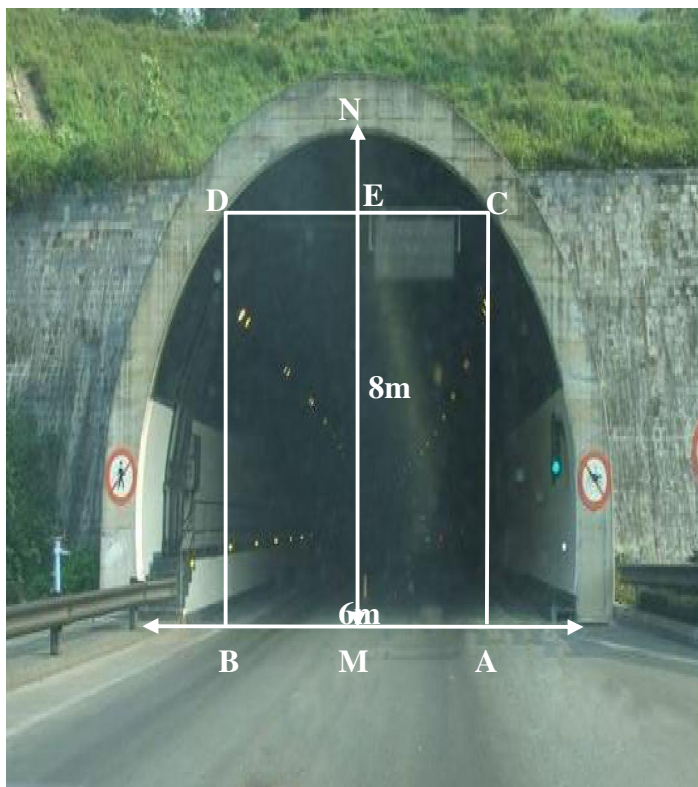
Hình (H5): Đồ thị hàm bậc hai

Đối với bài toán 1 chúng tôi dự đoán còn có thể xảy ra các chiến lược sau:

➤ Chiến lược S_{BI-TLX} : Tìm tỉ lệ xích

Sử dụng chiến lược này học sinh sẽ đi tìm tỉ lệ của hình vẽ so với thực tế. Lời giải có thể quan sát tương ứng với chiến lược:

↳ Lời giải có thể quan sát tương ứng với chiến lược:



Khoảng cách đo được trên hình vẽ giữa hai điểm chân của cổng đường hầm bằng 9,5cm và khoảng cách thực tế là 6m.

Nên ta có tỉ lệ xích : 1 : 63

Để chiều cao đạt được tối đa thì xe tải phải đi vào chính giữa đường hầm. Khi đó khoảng cách thực từ tim đường đến bánh xe tải phải bằng 1,95m.

Với khoảng cách này ta tìm được khoảng cách trên hình vẽ tính từ tim đường sang hai bên trái và phải là: 3,1cm

Trên hình vẽ, đánh dấu hai điểm có khoảng cách đến tim đường bằng 3,1cm là A và B.

Dựng các đường vuông góc đi qua hai điểm A, B lần lượt cắt đường viền của công đường hầm tại C và D.

Gọi E là giao điểm của CD với đường trung trực MN của đoạn thẳng nối hai điểm chân của công đường hầm (với M trùng với tim đường và N là điểm đỉnh của công đường hầm).

Đo khoảng cách MN và ME trên hình vẽ ta được: $MN = 10,6\text{cm}$ và $ME = 8,4\text{cm}$.

Gọi $h_{\max}$ là chiều cao tối đa của xe tải.

Khi đó tính tỉ lệ của hình vẽ và tỉ lệ thực tế ta có: $\frac{10,6\text{cm}}{8,4\text{cm}} = \frac{8\text{m}}{h_{\max}}$

Suy ra : $h_{\max} \approx 6,3\text{m}$

Do đó chiều cao tối đa của xe tải là 6,4m.

➤ *Chiến lược S_{BI-TSB} : Thiết lập dãy tỉ số bằng nhau.*

Sử dụng chiến lược này học sinh thiết lập dãy các tỉ số bằng nhau giữa chiều cao và chiều rộng, để tìm ra chiều cao của xe tải.

↪ Lời giải có thể quan sát tương ứng với chiến lược:

Gọi x là chiều cao của xe tải.

Do đường hầm có chiều cao 8m và bề ngang 6m (chiều cao được hiểu là khoảng cách từ tim đường đến điểm chính giữa của công đường hầm, bề ngang được hiểu bằng khoảng cách hai điểm chân của công đường hầm). Còn xe tải có chiều cao x mét và bề ngang là 3,9m

Nên ta có: $\frac{8}{6} = \frac{x}{3,9}$

Suy ra : $x = 5,2\text{m}$

Vậy chiều cao tối đa của xe tải phải nhỏ hơn 5,2m.

3.1.2. Pha 4 (phiếu số 3).

Có thể nhận được những cách trả lời từ các nhóm học sinh như sau:

↪ *Câu 1.*

- Chiều cao đạt được của quả bóng tại thời điểm $t = 0,3$ giây là 1,416m. Vì đồ thị của hàm số là một phần đường cong nên biểu thức của hàm số phải là một đa thức bậc hai.

- Chiều cao đạt được của quả bóng tại thời điểm $t = 0,3$ giây là 1,4m. Vì nghiên xem xét tại một khoảng thời gian nhỏ nên đồ thị của hàm số có thể được xem như một đường thẳng do đó biểu thức hàm số là hàm tuyến tính.

👉 *Câu 2.*

✚ *Khi biết dạng chính tắc của đồ thị (Bài toán 1).*

- Chọn mặt tọa độ.
- Gọi biểu thức dạng tổng quát của đồ thị.
- Tìm một số điểm thuộc đồ thị thay vào biểu thức tổng quát tìm các hệ số chưa biết.

✚ *Khi chưa biết dạng chính tắc của đồ thị (Bài toán 2).*

- Dự đoán đồ thị hàm số cần tìm và gọi biểu thức tổng quát của đồ thị.
- Tìm một số điểm thuộc đồ thị thay vào biểu thức tổng quát tìm các hệ số chưa biết.

3.2. Phân tích biến.

3.2.1. Biến tình huống và giá trị của chúng.

V₁. Phương thức làm việc: cá nhân, theo nhóm, cả lớp.

- Làm việc cá nhân: cho phép học sinh tạo ra sản phẩm cá nhân, từ đó làm thuận lợi và phong phú hơn cho công việc của nhóm.

- Làm việc theo nhóm: tăng cường sự trao đổi, thảo luận, tạo ra sự được thua trong học tập.

- Làm việc tập thể, cả lớp: tạo ra sự tranh luận, cho phép thực hiện pha hợp thức hóa.

V₂. Bản chất của hình và các kích thước đã cho.

Hình đã cho chỉ mang tính tượng trưng, làm phong phú và sinh động hơn cho tình huống cần diễn đạt.

Các kích thước đã cho có mục đích làm dễ dàng cho tính toán các kết quả, ngoài ra các số liệu này cũng giúp phản ánh được một tình huống khá thực tế.

V₃: Cách thức đá của cầu thủ

Khi cầu thủ đá mũi bàn chân hay lòng bàn chân sẽ ảnh hưởng đến đường đi của quả bóng.

3.2.2. Biến didactic và giá trị của chúng.

V₄: Hình dáng của đường hầm.

Biến này có hai giá trị

- V_{2,1}: Xấp xỉ với đồ thị của đường cong bậc hai.
- V_{2,2}: Không xấp xỉ và cũng không là đồ thị của đường cong bậc hai.

Trong bài toán này chúng tôi chọn giá trị $V_{1,1}$ của biến V_1 và giá trị $V_{2,1}$ của biến V_2 , chúng tôi thiết nghĩ chiến lược chọn hệ trục tọa độ và lập phương trình trở nên đắt giá.

V_5 : Tọa độ các điểm

Tọa độ các điểm được chọn để xem xét đường bay của quả bóng sẽ ảnh hưởng đến chiến lược được chọn.

Biến này có hai giá trị

- $V_{1,1}$: Khi các điểm được chọn gần nhau hay khảo sát tại những thời điểm có khoảng cách gần nhau.
- $V_{1,2}$: Khi các điểm được chọn xa nhau hay khảo sát tại những thời điểm cách xa nhau.

Trong bài toán trên thì biến V_1 nhận giá trị $V_{1,1}$. Với giá trị này của biến thì chiến lược S_{HBI} sẽ có điều kiện thuận lợi để xuất hiện.

V_6 : Số lượng các điểm được khảo sát

Biến này có ba giá trị

- $V_{2,1}$: Số lượng các điểm được khảo sát không quá hai điểm.
- $V_{2,2}$: Số lượng các điểm được khảo sát chỉ từ hai đến ba điểm.
- $V_{2,3}$: Số lượng các điểm được khảo sát nhiều hơn ba điểm.

Khi biến V_2 này nhận giá trị $V_{2,1}$ thì chiến lược xây dựng hàm tuyến tính bậc nhất chiếm ưu thế, còn khi biến V_2 nhận giá trị $V_{2,3}$ thì chiến lược xây dựng hàm tuyến tính không có khả năng xuất hiện mà ngược lại chiến lược xây dựng hàm bậc hai lại chiếm ưu thế. Do đó trong bài toán 2 chúng tôi chọn giá trị $V_{2,2}$.

V_7 : Quỹ đạo của trái banh.

Biến này có hai giá trị

- $V_{3,1}$: Quỹ đạo của trái banh được giới hạn lại. Cụ thể là chỉ xét quỹ đạo của trái banh từ lúc được sút đi khỏi mặt đất cho đến khi quả banh chạm đất.
- $V_{3,1}$: Xét hết quỹ đạo của trái banh.

Trong bài toán này chúng tôi chọn giá trị $V_{3,1}$ của biến V_3 vì trong khuôn khổ của luận văn này chúng tôi chỉ nghiên cứu đồ thị của những hàm bậc hai.

V_8 : Số câu hỏi được phát ra

Biến này có hai giá trị.

- $V_{4,1}$: Phát một số câu.
- $V_{4,2}$: Phát hết các câu cùng một lúc.

Trong bài toán này chúng tôi chọn giá trị $V_{4,1}$ của biến V_4 , chúng tôi thiết nghĩ cách này cách làm này sẽ làm cho chiến lược lập phương trình tuyến tính của hàm bậc nhất có nhiều khả năng xuất hiện.

4. Phân tích a posteriori các bài toán thực nghiệm.

Thực nghiệm được tiến hành trên 45 học sinh của lớp 10A1 trường Trung Học Thực Hành ĐHSP Thành Phố Hồ Chí Minh khi đã học xong chương hàm số bậc nhất và bậc hai.

Dữ liệu thu được thông qua thực nghiệm bao gồm: Bài làm cá nhân của học sinh trên phiếu số 1, lời giải phiếu số 2 của 8 nhóm trên giấy croquis, cùng một số giấy nháp của học sinh.

4.1. Ghi nhận tổng quát.

- Trong pha 1(pha làm việc cá nhân của học sinh), chúng tôi ghi nhận được những kết quả đáng chú ý như sau:

Bài toán 1:

Kết quả thống kê lời giải của học sinh đối với bài toán 1 được thể hiện trong bảng 4.1 như sau:

	Số bài thu được	Tỷ lệ
Chiến lược S_{1BT1} (Chọn hệ trục tọa độ và lập phương trình)	13	28,9%
Chiến lược S_{2BT1} (Tính diện tích)	1	2,2%
Chiến lược S_{3BT1} (Chiến lược khác)	25	55,6%
Không làm	6	13,3%
Tổng cộng	45	100%

Bảng 4.1. Bảng thống kê các lời giải Bài toán 1 trong pha 1

Bài toán 2:

Kết quả thống kê lời giải của học sinh đối với bài toán 2 được thể hiện trong bảng 4.2 như sau:

	Số bài thu được	Tỷ lệ
Chiến lược S_{1BT2} (Chọn đa thức tuyến tính)	7	15,6%
Chiến lược S_{2BT2} (Chọn đa thức bậc hai)	12	26,7%

Không xác định được công thức hàm số và không làm	26	57,7%
Tổng cộng	45	100%

Bảng 4.2. Bảng thống kê các lời giải Bài toán 2 trong pha 1

Các câu trả lời của học sinh trong pha 1 đều theo các chiến lược dự kiến. Nhưng qua bảng 4.1 và 4.2 chúng tôi nhận thấy tỉ lệ học sinh không tìm được biểu thức xác định hàm số chiếm tỉ lệ rất cao, khoảng 71,1% đối với bài toán 1 và khoảng 5,7% đối với bài toán 2.

- Trong pha 2 và pha 3, các nhóm làm việc rất sôi nổi để giải quyết các câu hỏi và bảo vệ ý kiến của nhóm mình. Chúng tôi thống kê lại chiến lược của các nhóm sử dụng để giải quyết các bài toán được phát ra trong phiếu số 2 trong bảng 4.3 dưới đây:

	Bài toán 1	Bài toán 2
Nhóm 1	S_{B1-TSB} (Chiến lược tỉ số bằng)	Không trả lời
Nhóm 2	S_{B1-TBT} (Chiến lược tìm biểu thức)	S_{B2-TBTB2} (Chiến lược tìm biểu thức bậc 2)
Nhóm 3	S_{B1-TBT} (Chiến lược tìm biểu thức)	S_{B1-TBT TT} (Tìm biểu thức tuyến tính)
Nhóm 4	S_{B1-TBT} (Chiến lược tìm biểu thức)	S_{B2-TBTB2} (Chiến lược tìm biểu thức bậc 2)
Nhóm 5	S_{B1-TLX} (Chiến lược tỉ lệ xích)	Không trả lời
Nhóm 6	S_{B1-TBT} (Chiến lược tìm biểu thức)	S_{B2-TBTB2} (Chiến lược tìm biểu thức bậc 2)
Nhóm 7	S_{B1-TBT} (Chiến lược tìm biểu thức)	Không trả lời
Nhóm 8	S_{B1-TBT} (Chiến lược tìm biểu thức)	S_{B2-TBTB2} (Chiến lược tìm biểu thức bậc 2)

Bảng 4.3. Bảng thống kê lời giải các nhóm trong pha 2

Trong pha 2 câu trả lời của các nhóm cũng đều theo các chiến lược đã dự kiến. Trong bảng 4.3, chúng tôi nhận thấy cả 8 nhóm đều có câu trả lời cho bài toán 1 và trong đó có đến 6/8 nhóm chọn chiến lược

xây dựng biểu thức hàm số. Đối với bài toán 2 có ba nhóm không đưa ra câu trả lời, còn 5 nhóm còn lại thì có đến 4 nhóm chọn biểu thức hàm số là một đa thức bậc 2, chỉ có duy nhất nhóm 3 là chọn biểu thức xác định hàm số là một đa thức tuyến tính.

- Trong pha 4, học sinh đã nêu ra được các bước để tìm được biểu thức xác định hàm số.

Thông qua các pha thực nghiệm đa số các em đã tiếp cận được với kỹ thuật chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số và thấy được phần nào ứng dụng của hàm số trong thực tiễn.

4.2. Phân tích chi tiết kết quả thực nghiệm.

☀ Sự xuất hiện và tiếp cận kỹ thuật tìm biểu thức xác định hàm số.

Trong pha 1, bài toán 1 có 13 học sinh chọn hệ trục tọa độ và xác định biểu thức hàm số và bài toán 2 có 19 học sinh đi dự đoán đồ thị và tìm biểu thức xác định hàm số, còn hầu hết các học sinh còn lại sử dụng các chiến lược khác mà chúng tôi đã chỉ ra trong phân tích tiên nghiệm.

Cụ thể trong bài toán 1:

Có đến 25 học sinh sử dụng chiến lược S_{3BT1} (chiến lược khác), xem xét lời giải của các học sinh này chúng tôi nhận thấy đa phần các lời giải của học sinh đều chỉ là phỏng đoán xe tải có thể qua hay không qua được đường hầm. Chẳng hạn như:

HS1: Xe tải được phép qua đường hầm vì đây là đường một chiều nên xe có thể đi vào. Hơn nữa chiều cao của xe là 4,8m dưới đỉnh đường hầm cao 8m; bề ngang của xe là 3,9m nhỏ hơn bề ngang của đường hầm là 6m.

Nên nếu xe đi giữa đường thì xe qua đường hầm dễ dàng.

HS2: Xe tải không được phép qua đường hầm, vì chiều cao của xe chỉ khoảng $\frac{1}{2}$ chiều cao của đường hầm nhưng bề ngang của thùng xe gần 4m khi qua hầm có thể đụng vào hai vách vì xe không chạy một đường thẳng mãi mà sẽ có những lúc quẹo. Nếu người lái xe bất cẩn có thể dẫn đến tai nạn. Tại nạn xảy ra cũng khó có thể đem xe ra khỏi hầm lúc đó sẽ gây ùn tắc giao thông. Hầm có dạng một parabol nên bề rộng sẽ không đều, đó cũng là nguyên nhân gây nguy hiểm. Tóm lại, để phòng tránh sự cố Chính phủ cần ban lệnh cấm xe tải có kích cỡ này và lớn hơn không được phép qua đường hầm.

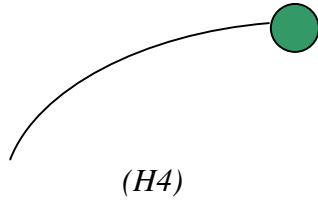
Có duy nhất một học sinh sử dụng chiến lược S_{2BT1} (chiến lược tính diện tích). Xem xét lời giải của học sinh này, chúng tôi thấy sau khi tính diện tích của tam giác có ba đỉnh là hai điểm chân và điểm còn lại là đỉnh của cổng đường hầm, học sinh này quay qua tính diện tích tam giác và lập tỉ số, nhưng sau đó thì không cho được kết quả. Có thể là do học sinh này đã nhìn thấy sự không hợp lý trong quá trình suy luận.

Trong bài toán 2, có 26 học sinh không tìm được biểu thức xác định hàm số. Tuy nhiên xem xét bài làm của họ, chúng tôi thấy đa phần các học sinh đều nêu ra được nét khái quát về hàm số hoặc phác thảo được đồ thị của hàm số mô tả đường đi của quả banh. Ví dụ như:

HS3: Hàm số mô tả đường đi của quả bóng từ sau khi cầu thủ sút bóng đến khi thủ thành chụp được là một hàm số bậc hai theo t .

HS4: Cầu thủ đá trái banh phải dùng một lực khá lớn nên banh phải đi theo đường thẳng.

HS5: Đồ thị hàm số phải có dạng sau



Nhưng trong pha 2, ở bài toán 1 tất cả các nhóm đã đưa ra được lời giải một cách nhanh chóng, 6 trong 8 nhóm sử dụng chiến lược S_{BI-TBT} “Chọn hệ trục tọa độ và tìm biểu thức xác định hàm số”. Có lẽ do ở pha 1 làm việc cá nhân, họ đã hình dung được chiến lược tối ưu là phải tìm biểu thức xác định hàm số. Xem xét giấy nháp của các nhóm, chúng tôi nhận thấy cách thức chọn hệ trục tọa độ của họ chỉ rơi vào hai trong ba trường hợp mà chúng tôi đã chỉ ra trong phần phân tích tiên nghiệm. Cụ thể là trường hợp 1 (hình H1) và trường hợp 3 (hình H3), với các nhóm chọn hệ tọa độ như hình H3 thì đây cũng là điều chúng tôi lấy làm lạ, vì trong chương trình toán ở bậc phổ thông chúng tôi không thấy kiểu nhiệm vụ nào mà trong kĩ thuật thực hiện đòi hỏi việc chọn hệ trục tọa độ với chiều dương của trục Ox hướng xuống. Học sinh làm được điều này có thể là do họ đã được làm quen kĩ thuật trên trong Vật lí.

Ở trong bài toán thứ 2 thì đã có đến 5 trong 8 nhóm đã đi tìm được biểu thức xác định hàm số. Trong đó 5 nhóm này thì chỉ có nhóm 3 chọn biểu thức tuyến tính làm biểu thức xác định hàm số. Như vậy, qua đến pha thứ hai thì hầu hết học sinh đã tiếp cận được với các kĩ thuật để tìm được biểu thức xác định hàm số.

☀ Sự vận dụng và tiến triển của kĩ thuật tìm biểu thức xác định hàm số.

Sự tiếp cận và vận dụng kĩ thuật tìm biểu thức xác định hàm số theo các nhóm được tóm tắt trong các bảng sau:

Bài toán 1.

	Nhóm 1	Nhóm 2	Nhóm 3	Nhóm 4	Nhóm 5	Nhóm 6	Nhóm 7	Nhóm 8
Tiếp cận		x	x	x		x	x	x
Vận dụng		x	x	x		x	x	x

Bảng 4.4. Sự tiếp cận và vận dụng của các nhóm trong Bài toán 1

Bài toán 2.

	Nhóm 1	Nhóm 2	Nhóm 3	Nhóm 4	Nhóm 5	Nhóm 6	Nhóm 7	Nhóm 8
--	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

Tiếp cận		x	x	x		x		x
Vận dụng		x	x	x		x		x

Trong bảng 4.4 có 6/8 nhóm học sinh đã tiếp cận và vận dụng được kĩ thuật tìm biểu thức xác định hàm số và cùng cho một đáp số về chiều cao tối đa của xe tải.

Bảng 4.5. Sự tiếp cận và vận dụng của các nhóm trong Bài toán 2

Phân tích chiến lược sử dụng của các nhóm 1 và 5:

+ Nhóm 1 sử dụng chiến S_{BI-TSB} (chiến lược tỉ số bằng) và phân trình bày của họ như sau:

“ Để đạt được chiều cao tối đa thì xe phải đi ở giữa

Gọi : r_1 là chiều rộng của đường hầm

$$= 6m$$

h_1 là chiều cao của đườn hầm

$$= 8m$$

r_2 là chiều rộng của thùng xe

$$= 3,9m$$

h_2 là chiều cao của thùng xe

$$= ? (m)$$

$$\text{Xét } \frac{h_1}{r_1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow h_1 = \frac{4r_1}{3}$$

h_2 sẽ tính được theo h_1

r_2 sẽ tính được theo r_1

$$\text{suy ra : } h_2 = \frac{4r_2}{3} = \frac{4.3,9}{3} = 5,2(m)$$

suy ra $h_2 \max < 5,2(m)$.”

Trong pha 3 (pha tranh luận và đóng góp ý kiến), một học sinh đã chỉ ra sai lầm của nhóm 1 như sau:

- HS6: Không thể so sánh các tỉ số này vì đây là những hình có hình dáng khác nhau

Thông qua tranh luận và đóng góp ý kiến ở pha 3 cùng với những kết quả đã thu được của các nhóm khác, ta đã có cơ sở để bác bỏ chiến lược này.

+ Nhóm 3 sử dụng chiến lược S_{BI-TLX} (chiến lược tỉ lệ xích). Một trong các thành viên của nhóm 3 đã khẳng định như sau:

“Mọi hình được vẽ lại hay được chụp lại từ một hình thực tế đều theo một tỉ lệ nào đó.

Do đó bằng cách tìm tỉ lệ xích của hình vẽ với hình thực tế, nhóm 3 tìm được kết quả :

Chiều cao tối đa của xe tải là 6,415m.”

Khẳng định này dường như được các học sinh khác thừa nhận vì trong pha tranh luận chúng tôi không thấy phản ứng nào từ học trò. Tuy nhiên có thể thấy ngay sự nhầm lẫn của học trò là ở chỗ hình được cho trong bài toán 1 không phải là hình chụp hay hình vẽ lại mà chỉ là hình mang tính chất minh

họa, nên các kích thước trong hình không phản ánh chính xác các kích thước của hình được chụp lại. Chúng ta có thể thấy khi thay đổi một trong hai kích thước của hình vẽ thì tỷ lệ xích mà các học sinh tính được sẽ thay đổi theo và một điều dễ thấy là chiều cao cần tính của xe tải cũng thay đổi theo. Do đó ta có thể thấy sai lầm trong chiến lược của học sinh.

Ở bảng 4.5 trong các nhóm học sinh tìm được biểu thức xác định hàm số, có duy nhất nhóm 3 sử dụng chiến lược $S_{B2-TBTTT}$ (chiến lược tìm biểu thức tuyến tính) và một thành viên trong nhóm đã giải thích như sau:

“Vì chỉ xét trong một khoảng thời gian rất ngắn đồ thị của hàm số mô tả đường đi của quả bóng sẽ là một đường thẳng và do đó đây là hàm bậc nhất”

Lời giải thích trên ngay lập tức không được tán thành vì có một số ý kiến đưa ra như sau:

HS6: *Vậy chẳng lẽ bóng bay lên trời hoài sao?*

HS7: *Đồ thị không thể là đường thẳng vì nó ba điểm kia không thẳng hàng*

Rõ ràng với lời nhận xét của HS7 đã giúp ta có cơ sở để khẳng định chiến lược tối ưu là S_{B2-TB2} -chiến lược chọn biểu thức bậc hai. Điều này được khẳng định thêm lần nữa khi kết quả thu được từ pha 4 tất cả các nhóm đều thống nhất với chiến lược S_{B2-TB2} -chiến lược chọn biểu thức bậc hai, đồng thời chúng tôi cũng nhận thấy hầu như các nhóm đều nêu lên được phương pháp tìm biểu thức hàm số cho các bài toán 1 và bài toán 2.

Tóm lại, qua các pha thực nghiệm học sinh đã tiếp cận được với kỹ thuật tìm biểu của các hàm số đã cho trong bài toán trên và phần nào thấy được vai trò của hàm số trong thực tiễn.

Giải thích việc không trả lời bài toán 2 của các nhóm 1, 5 và 7.

Quan sát giấy nháp và thông qua phỏng vấn một số học sinh trong các nhóm này cho thấy:

- Các nhóm mất quá nhiều thời gian cho bài toán thứ 1.
- Các tính toán trong giấy nháp chứng tỏ họ thất bại trong việc sử dụng các công cụ của vật lí. Ví dụ như trong giấy nháp của nhóm 7:

$$\text{“Ta có: } t_1^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow g = \frac{2h}{t^2} = \frac{2.1,2}{0,25^2} = 38,4m/s^2$$

$$t_2^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow g = \frac{2h}{t_2^2} = \frac{2.2,2}{0,5^2} = 17,6m/s^2$$

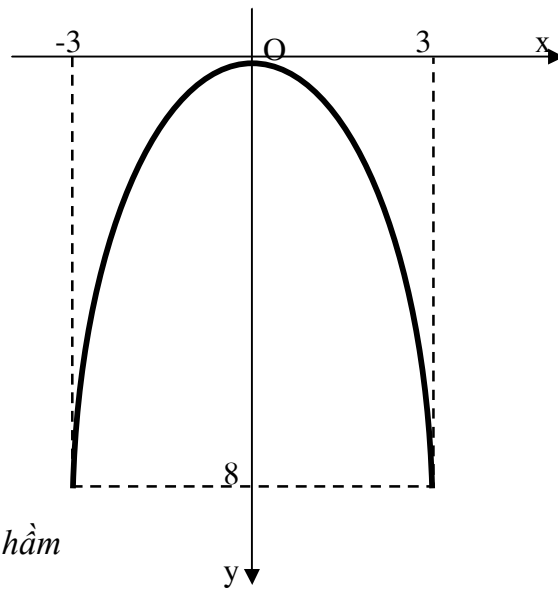
$$\text{Nên } v_1 = g_1 t_1 = 3,84.0,25 = 9,6m/s$$

$$v_2 = g_2 t_2 = 17,6.0,2 = 8,8m/s \dots\dots\dots”$$

Sự có mặt của vấn đề mô hình hóa.

Trong pha 2, ở các nhóm sử dụng chiến lược “tìm biểu thức hàm số” thì trong kỹ thuật của họ đã có mặt vấn đề mô hình hóa. Cụ thể như:

- + Lời giải bài toán 1 của nhóm 4:



Chọn gốc tọa độ O là đỉnh của hàm

Ta có $(P): y = ax^2$

$$\Leftrightarrow 8 = 9a$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow (P): y = \frac{8}{9}x^2$$

Bề ngang xe tải : $3,9m$

$$\Rightarrow x = \frac{3,9}{2} = 1,95$$

$$\Rightarrow y = \frac{8}{9}x^2 = \frac{8}{9} \times (1,95)^2 = 3,38$$

$$\Rightarrow h_{\max} = 8 - 3,38 = 4,62m$$

$\Rightarrow$ Đường hầm chỉ cho phép xe có độ cao lớn nhất là $4,62m$ đi qua

$\Rightarrow$ Xe tải đó không được phép qua đường hầm.

+ Lời giải bài toán 2 của nhóm 6:

$$(P): y = ax^2 + bx + c$$

$$(0;0) \in (P) \Rightarrow c = 0$$

$$(0,25;1,2) \in (P) \Rightarrow 1,2 = 0,0625a + 0,25b \quad (1)$$

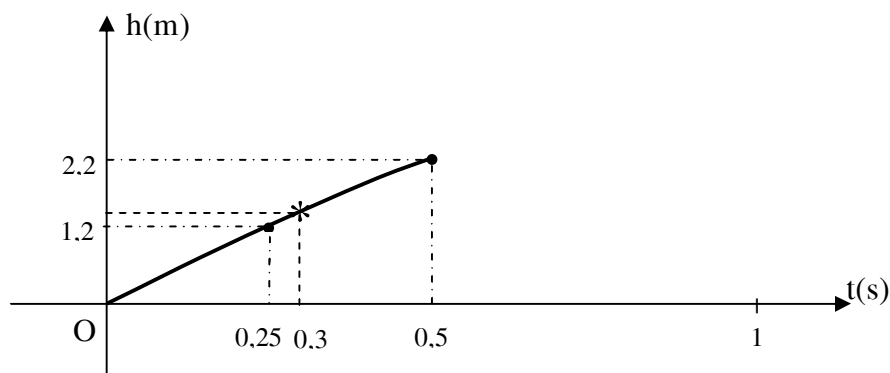
$$(0,5;2,2) \in (P) \Rightarrow 2,2 = 0,25a + 0,5b \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } a = -\frac{3}{5}; b = \frac{26}{5}$$

$$(P): h = -\frac{8}{5}t^2 + \frac{26}{5}t$$

$$\text{Với } t = 0,3 \Rightarrow h = 1,416m$$

Đồ thị của hàm số có dạng :



Qua các lời giải trên, chúng ta nhận thấy học sinh đã thực hiện hai bước sau:

Bước 1: Chọn biểu thức xác định hàm số.

Bước 2: Sử dụng các công cụ toán học để tìm ra biểu thức đã chọn trong bước đầu.

Tuy nhiên, trước khi đi đến quyết định sẽ chọn chiến lược “tìm biểu thức xác định hàm số” để giải quyết các bài toán trên thì rõ ràng họ phải đã phải xây dựng được mô hình định tính của vấn đề đang xét. Đặc biệt trong bài toán 2, học sinh còn phải kiểm định lại các kết quả đã tìm được thông qua việc biểu diễn đồ thị của hàm số đó lên mặt phẳng tọa độ.

Dem so sánh các bước làm này với các bước trong quá trình mô hình hóa, ta có bảng thống kê sau:

Các bước trong quá trình mô hình hóa	Bước 1	Bước 2	Bước 3	Bước 4
Bài toán 1	Ngầm ẩn	Tường minh	Tường minh	
Bài toán 2	Ngầm ẩn	Tường minh	Tường minh	Tường minh

Bảng 4.6. Bảng so sánh các bước trong kỹ thuật giải với các bước của việc mô hình hóa

Như vậy, vấn đề mô hình hóa đã xuất hiện trong việc giải quyết hai bài toán nói trên.

4.3. Kết luận.

Kết quả thực nghiệm đã cho phép hợp thức hóa giả thiết nghiên cứu ở trên. Bên cạnh đó việc thực hiện theo các pha của thực nghiệm, phân tích trên cho thấy đã có sự tiến triển trong việc tiếp cận và vận dụng các kỹ thuật của vấn đề tìm biểu thức mô tả hàm số.

Ngoài ra, thực nghiệm trên cũng đã tạo được tình huống trong đó học sinh tiếp xúc với dạng toán đòi hỏi phải thực hiện việc mô hình hóa trong toán.

KẾT LUẬN.

Nghiên cứu quá trình chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số đồng thời ở cấp độ tri thức khoa học và cấp độ tri thức cần giảng dạy cũng như các kết quả thu được từ thực nghiệm cho phép chúng tôi có câu trả lời thỏa đáng cho những câu hỏi đặt ra từ đầu luận văn và khẳng định giả thiết nghiên cứu đã đặt ra. Sau đây là một số kết quả chính của nghiên cứu.

1. Trong chương 1, qua việc tìm hiểu vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số trong một số lĩnh vực Toán học, Địa chất và Vật lý, chúng tôi đã làm rõ được các mục đích cũng như các kỹ thuật của việc chuyển đổi nói trên.

- Việc chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số nhằm vào hai mục đích:
 - Nghiên cứu được các tính chất của hàm số bằng đồ thị.
 - Tìm được biểu thức mô tả hàm số và từ đó giải quyết được các vấn đề trong thực tiễn.
- Kỹ thuật chuyển đổi thường được sử dụng trong lĩnh vực Toán học và Địa chất là chọn các đa thức bậc n có dạng :

$$P_n(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_n \neq 0$$

với $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, sao cho $P_n(x)$ trùng với $f(x)$ tại các nút x_i , $i = \overline{0, n}$, nghĩa là

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i$$

làm biểu thức xác định hàm số. Đa thức này tìm được bằng các phương pháp nội suy theo kiểu Lagrange, nội suy theo kiểu Newton hay nội suy ghép tron.

- Kỹ thuật trong Vật lý mà cụ thể là trong Cơ học chất điểm thì thường được gắn với quá trình mô hình hóa.

2. Trong chương 2, chúng tôi đã làm rõ được các ràng buộc của thể chế dạy học ở trường phổ thông với vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số đặt ra trên hai đối tượng hàm số bậc nhất và bậc hai.

- Trong thể chế dạy học toán ở Việt Nam, vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số và vấn đề mô hình hóa trong toán có xuất hiện. Nhưng xét về “mức độ quan tâm” thì đây không phải là các vấn đề được thể chế coi là trọng tâm nhất.

- Kết quả của việc phân tích mối quan hệ thể chế dẫn đến việc tồn tại giả thiết nghiên cứu:

“Kỹ năng chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số chưa thực sự được hình thành ở học sinh”

3. Nghiên cứu thực nghiệm ở chương 3 trên đối tượng học sinh lớp 10 sau khi đã học xong các kiến thức về hàm bậc nhất và bậc hai, đã cho phép chúng tôi làm rõ quan hệ của cá nhân với vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang hàm số và vấn đề mô hình hóa.

Thực nghiệm bao gồm việc xây dựng và triển khai một tiêu đề án didactic cho phép học sinh lớp 10 tiếp cận với vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số và vấn đề mô hình hóa trong toán. Kết quả thu được chứng tỏ tính hợp thức của giả thiết nghiên cứu.

Để xây dựng được một tình huống dạy học vấn đề chuyển đổi từ đồ thị sang biểu thức hàm số thỏa mãn được tất cả các hàm số đã được đưa vào trong chương trình phổ thông thì cần phải tiến hành một nghiên cứu sâu và rộng hơn nữa. Tuy nhiên do khuôn khổ giới hạn của một luận văn thạc sĩ, chúng tôi chưa nghiên cứu được vấn đề này. Đây là hướng nghiên cứu có thể gợi ra từ luận văn này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Viết Đông, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Anh Tuấn, Lê Anh Vũ (2009), *“Toán Cao Cấp tập 1”*, Nhà Xuất Bản Giáo Dục.
2. Lương Duyên Bình (2009), *“Vật Lí Đại Cương”*, Nhà Xuất Bản Giáo Dục.
3. Nguyễn Hữu Thọ (2009), *“Bài Tập Vật Lí”*, Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia TP HCM.
4. Nguyễn Đình Chí (2009), *“Toán Cao Cấp tập 2”*, Nhà Xuất Bản Giáo Dục.
5. Lê Văn Tiến (2005), *“Phương pháp dạy học môn Toán ở trường phổ thông”*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP HCM
6. Hoàng Quý, Nguyễn Văn Ba, Hoàng Chúng, Trần Văn Hạo, Lê Thiên Hương (người dịch), *“Từ điển bách khoa phổ thông Toán học tập 1, 2”*, Nhà xuất bản Giáo dục – 1999.
7. Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn (2006), *“Đại số 10”*, Nhà xuất bản Giáo dục.
8. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan (2006), *“Đại số 10 nâng cao”*, Nhà xuất bản Giáo dục.
9. Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn (2006), *“Đại số 10 – sách giáo viên”*, Nhà xuất bản Giáo dục.
10. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan (2006), *“Đại số 10 nâng cao – sách giáo viên”*, Nhà xuất bản Giáo dục.
11. Phan Đức Chính (2008), *“Toán 9 – Sách giáo viên – tập 1,2”*, Nhà xuất bản giáo dục.
12. Phan Đức Chính (2008), *“Sách giáo khoa toán 9 – tập 1,2”*, Nhà xuất bản giáo dục.
13. Phan Đức Chính (2008), *“Toán 7 – Sách giáo viên – tập 1”*, Nhà xuất bản giáo dục.
14. Phan Đức Chính (2008), *“Sách giáo khoa toán 7 – tập 1”*, Nhà xuất bản giáo dục.
15. *“Chương trình giáo dục phổ thông môn toán”*, Bộ giáo dục và đào tạo.