

B GIÁO D C VÀ ĐÀO T O
TR NG Đ I H C S PH M TP.H CHÍ MINH

Tr n Ph ng An

HÀM T EXT TRONG PH M TRÙ CÁC KHÔNG GIAN L I Đ A PH NG

Chuyên ngành: Đ i s và lý thuy t s

Mã s : 60 46 05

LU N VẤN TH C S Đ I S VÀ LÝ THUY T S

NG I H NG D N KHOA H C:
TS. TR N HUYÊN

Thành ph H Chí Minh – 2010

L I C M N

Đ u tiên, tôi xin g i đ n TS. Tr n Huyền, Khoa Toán, Tr ng Đ i H c S Ph m Tp. H Chí Minh – ng i đã t n tình h ng đ n tôi trong su t quá trình hoàn thành lu n văn này lòng bi t n chân thành và sâu s c nh t.

Tôi cũng xin chân thành c m n các th y cô trong tr ng Đ i H c S Ph m Tp. H Chí Minh đã t n tình gi ng d y và giúp đ tôi trong su t quá trình h c t p cũng nh tìm tòi các tài li u cho vi c nghiên c u.

Vì ki n th c còn h n ch nên lu n văn không tránh kh i nh ng thi u sót, r t mong đ c s ch b o chân thành c a các th y, các cô và các b n.

MỞ ĐẦU

Có những cách khác nhau để xây dựng hàm t mở rộng Ext trong phạm trù mô đun và m trong các cách đó là xây dựng bằng phép gộp x y z . Hơn nữa, ta biết m không gian i địa phương có thể xem là m mô đun t do mà trên đó định cấu trúc b m tập i địa phương nào đó. Bây giờ nếu ta thay phạm trù mô đun bằng phạm trù các không gian i địa phương, mà ta sẽ kí hiệu là phạm trù $\mathcal{L}$, thì liệu r ng có thể xây dựng định cấu trúc hàm t Ext trong đó hay không? Theo đuổi ý tưởng này, chúng tôi đã xây dựng định cấu trúc hàm t mở rộng Ext trên phạm trù $\mathcal{L}$ và đó cũng là mục đích chính của cuốn luận văn này.

Bộ phận luận văn được chia làm hai chương:

➤ **Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.**

Trong chương này chúng tôi trình bày một cách khái quát con đường xây dựng hàm t Ext trong phạm trù mô đun. Đồng thời chúng tôi cũng giới thiệu một số khái niệm và tính chất cơ bản liên quan đến không gian i địa phương. Qua đó trình bày về phạm trù các không gian i địa phương $\mathcal{L}$ nhằm làm cơ sở cho việc xây dựng hàm t Ext trong chính $\mathcal{L}$ sau này.

➤ **Chương 2: Xây dựng hàm t Ext trong phạm trù các không gian i địa phương.**

Mục đích của cuốn luận văn này là xây dựng hàm t Ext trên $\mathcal{L}$ và đồng thời trình bày rõ trong chương hai này. Ở chương này chúng tôi sẽ giới thiệu một số khái niệm và tính chất về không gian tôpô thuần nhất, với x z ng đồng thời đó đưa ra cách xây dựng hàm t Ext bằng phép gộp x z ng đồng thời.

Chương I

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Mục đích của chương này gồm hai phần chính: trình bày cách xây dựng hàm tử môđun Ext^n trong phạm trù môđun bằng phép giới xạ và một số khái niệm, tính chất liên quan phạm trù các không gian liên địa phương. Các chương mình đã được làm rõ trong [1], [2], [3] nên việc trình bày chương này mục đích chủ yếu không đi sâu vào chi tiết.

Trong suốt quyển luận văn này khi ta nói không gian tôpô X thì ký hiệu $\mathcal{T}_X$ là nói không gian tôpô trên X , và nói không gian vectơ thì ta hiểu là không gian vectơ trên trường số thực $\mathbb{R}$.

Ta xác định R là vành hãm cho các môđun được nói đến trong bài viết này. Để tiện起见 ta sẽ gọi các R -môđun trái là các môđun, các R -đồng cấu là các đồng cấu.

§1. PHẠM TRÙ VÀ ĐỒNG ĐIỀU

1.1.1 Phạm trù các phạm

Định nghĩa 1.1.1.1

Một **phạm** **hệ** **dây** **chuyển các môđun** là hệ $\{X_n, \partial_n\}$ gồm các môđun X_n và các đồng cấu $\partial_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$, được cho theo một tập các số nguyên n , hạn chế $\partial_n \cdot \partial_{n+1} = 0$. Như vậy, phạm hệ X là một dãy vô tận với hai điều:
$$X : \dots \leftarrow X_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} X_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} X_{n+1} \leftarrow \dots,$$
 trong đó tích hai đồng cấu liên tiếp nhau bằng 0.

Định nghĩa 1.1.1.2

Cho $X = \{X_n, \partial_n\}$ và $X' = \{X'_n, \partial'_n\}$ là các phức. Một **biến đổi dây chuyền**

$f: X \rightarrow X'$ là hớp các đồng cấu $\{f_n: X_n \rightarrow X'_n\}$ sao cho $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ đối với mọi n .

Điều kiện sau cùng tương đương với điều kiện biểu thức (1.1) sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccccccc} X : \dots & \leftarrow & X_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n} & X_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}} & X_{n+1} \leftarrow \dots \\ & & f_{n-1} \downarrow & & f_n \downarrow & & f_{n+1} \downarrow \\ X' : \dots & \leftarrow & X'_{n-1} & \xleftarrow{\partial'_n} & X'_n & \xleftarrow{\partial'_{n+1}} & X'_{n+1} \leftarrow \dots \end{array} \quad (1.1)$$

Vì sau này, đôi khi để tiện chúng ta không viết các chữ các đồng cấu, như vậy các $\partial_n, \partial'_n, f_n$ có thể hiểu là viết tắt cách đơn giản là ∂, ∂', f . Tuy nhiên trong một số trường hợp đặc biệt, chúng ta phải nghiêm chỉnh là chúng phải được đánh số theo các chữ số nào.

Đồ thị rõ ràng tích hai biến đổi dây chuyền là một biến đổi dây chuyền và tích các biến đổi dây chuyền có tính chất kết hợp.

Để ý thêm rằng, với mọi phức $X = \{X_n, \partial_n\}$, hớp các đồng cấu đồng nhất

$1_X = \{1_{X_n}: X_n \rightarrow X_n\}$ là một biến đổi dây chuyền có tính chất $1_X \cdot f = f$ và $g \cdot 1_X = g$

nhưng các tích $1_X \cdot f, g \cdot 1_X$ là xác định. Từ những điều trên ta thấy lớp tất cả các phức lập thành một phạm trù với các cấu xạ là các biến đổi dây chuyền.

1.1.2 Đồng luân dây chuyền

Định nghĩa 1.1.2.1

Cho các biến đổi dây chuyền $f, g: X \rightarrow X'$ từ phức $X = \{X_n, \partial_n\}$ tới phức

$X' = \{X'_n, \partial'_n\}$. Hớp các đồng cấu $s = \{s_n: X_n \rightarrow X'_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ được gọi là một **đồng luân**

dây chuyền giữa hai biến đổi dây chuyền f, g sao cho $\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - g_n$ đối với mọi n . Khi đó ta viết: $s: f \simeq g$.

Định lý 1.1.2.2

Nếu $s: f \simeq g$ là một đồng luân dây chuyền giữa các biến đổi dây chuyền $f, g: X \rightarrow X'$ và $s': f' \simeq g'$ là đồng luân dây chuyền giữa các biến đổi dây chuyền $f', g': X' \rightarrow X''$, thì đồng cấu $f's + s'g: ff \simeq g'g$ là đồng luân dây chuyền giữa $ff, g'g: X \rightarrow X''$.

Có thể thấy rằng quan hệ đồng luân dây chuyền giữa các biến đổi dây chuyền trên phức X và phức X' là một quan hệ tương đương.

Định nghĩa 1.1.2.3

Cho X, X' là các phức, biến đổi dây chuyền $f: X \rightarrow X'$ được gọi là một **đồng luân dây chuyền** nếu tồn tại biến đổi dây chuyền $h: X' \rightarrow X$ và các đồng luân dây chuyền $s: hf \simeq 1_X$ và $t: fh \simeq 1_{X'}$.

Hai phức X và X' mà có một đồng luân dây chuyền giữa chúng $f: X \rightarrow X'$ thì được gọi là hai phức **tương đương đồng luân** với nhau và ta viết: $X \simeq X'$.

Hiển nhiên rằng, quan hệ tương đương đồng luân giữa các phức là một quan hệ tương đương. Nó thực hiện sự phân hoạch lớp các phức thành lớp các bộ phận, mỗi bộ phận gồm những phức tương đương đồng luân.

1.1.3 Các hàm tử đồng điều

Định nghĩa 1.1.3.1

Cho phức $X = \{X_n, \partial_n\}$, **đồng điều $H(X)$** là họ các mô đun:

$$H_n(X) = \frac{\text{Ker} \partial_n}{\partial_{n+1} X_{n+1}} \quad (1.2)$$

Mô đun tương ứng $H_n(X)$ được gọi là **mô đun đồng điều thứ n** của phức X .

Các phần tử của mô đun con $\text{Ker} \partial_n$ được gọi là các **chu trình n -chiều**, còn các phần tử của mô đun con $\partial_{n+1} X_{n+1}$ được gọi là các **bồ n -chiều**. Khi đó $H_n(X)$ là mô đun tương ứng của mô đun các chu trình theo mô đun con các bồ. Lớp ghép của chu trình c

trong $H_n(X)$ đồng c vi t là $clsc$ hay $\{c\}$.

Ta nói r ng các chu trình n – chi u c và c' thu c cùng m t l p đ ng đi u ($clsc = clsc'$) là **đ ng đi u** v i nhau ($c \sim c'$); đi u này x y ra khi và ch khi $c - c' \in \partial X_{n+1}$.

Cho các ph c $X = \{X_n, \partial_n\}$, $X' = \{X'_n, \partial'_n\}$ và $f: X \rightarrow X'$ là m t bi n đ i dây chuy n. T đó v i m i s nguyên n , ánh x $H_n(f): H_n(X) \rightarrow H_n(X')$, mà $H_n(f)(c + \partial X_{n+1}) = f(c) + \partial' X'_{n+1}$ hay $H_n(f)(clsc) = cls(f(c))$, là m t đ ng c u đ c c m sinh b i bi n đ i dây chuy n f . D dàng ki m tra đ th y r ng, các đ ng c u c m sinh này th a các h th c: $H_n(1_X) = 1_{H_n}$ và $H_n(gf) = H_n(g).H_n(f)$. Do v y, v i m i $n \in \mathbb{Z}$, H_n tr thành m t hàm t hi p bi n t ph m tr c các ph c và các bi n đ i dây chuy n t i ph m tr c các mô đun, t ng ng m i ph c X v i mô đun đ ng đi u $H_n(X)$ và t ng ng v i m i bi n đ i dây chuy n $f: X \rightarrow X'$ v i đ ng c u $H_n(f): H_n(X) \rightarrow H_n(X')$.

Ta g i chúng là các hàm t đ ng đi u. Liên quan t i các hàm t đ ng đi u H_n ta có:

Đ nh lí 1.1.3.2

N u $f, g: X \rightarrow X'$ là các bi n đ i đ ng luân dây chuy n t ph c X t i ph c X' thì v i m i $n \in \mathbb{Z}$ ta có: $H_n(f) = H_n(g): H_n(X) \rightarrow H_n(X')$.

H qu 1.1.3.3

N u $f: X \rightarrow X'$ là m t t ng đ ng dây chuy n thì v i m i $n \in \mathbb{Z}$, đ ng c u $H_n(f): H_n(X) \rightarrow H_n(X')$ là đ ng c u.

1.1.4 Đ i đ ng đi u

Cho ph c $X = \{X_n, \partial_n\}$ các mô đun và G là m t mô đun. Ta xây đ ng nhóm aben $Hom(X_n, G)$ mà các ph n t c a nó là các đ ng c u mô đun $f: X_n \rightarrow G$; s đ c g i

là các đồng tử dây chuyền n – chiều của phức X . Đồng tử chiều của đồng cấu f đó là đồng tử dây chuyền $(n + 1) –$ chiều:

$$\delta^n(f) = (-1)^{n+1} f \cdot \partial_{n+1} : X_{n+1} \rightarrow G$$

Do thay $\delta^n \cdot \delta^{n-1} = 0$ nên dãy

$$\dots \rightarrow \text{Hom}(X_{n-1}, G) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \text{Hom}(X_n, G) \xrightarrow{\delta^n} \text{Hom}(X_{n+1}, G) \rightarrow \dots$$

là phức hợp các nhóm aben, đồng tử chiều là $\text{Hom}(X, G)$; hàm biến theo nhóm thông lệ mỗi nhóm sẽ đồng tử chiều vi tế theo chuỗi trên: $\text{Hom}^n(X, G) = \text{Hom}(X_n, G)$. Nếu phức X là đồng tử chiều theo chuỗi đồng tử chiều thì phức $\text{Hom}(X, G)$ là đồng tử chiều theo chuỗi trên.

Định nghĩa 1.1.4.1

Đồng tử chiều của phức $\text{Hom}(X, G)$ đồng tử chiều là **đồng tử chiều của phức X với hàm biến trong G** . Đó là hàm các nhóm aben đồng tử chiều đánh số theo chuỗi trên:

$$H^n(X, G) = H^n(\text{Hom}(X, G)) = \text{Ker} \delta^n / \delta \text{Hom}(X_{n-1}, G) \quad (1.3).$$

Các phần tử của $\text{Ker} \delta^n$ đồng tử chiều là đồng tử chiều chu trình $n –$ chiều, còn các phần tử của $\delta \text{Hom}(X_{n-1}, G)$ đồng tử chiều là đồng tử chiều $n –$ chiều. Nếu vậy mỗi đồng tử chiều chu trình $n –$ chiều là một đồng tử chiều $h : X_n \rightarrow G$ sao cho $h\partial = 0$.

Mỗi biến đồng tử chiều dây chuyền $f : X \rightarrow X'$ cảm sinh biến đồng tử chiều dây chuyền $\text{Hom}(f, 1) : \text{Hom}(X', G) \rightarrow \text{Hom}(X, G)$ mà với mỗi số nguyên n ta có:

$$\text{Hom}^n(f, 1) : \text{Hom}^n(X', G) \rightarrow \text{Hom}^n(X, G) : \alpha \mapsto \alpha f_n.$$

Đề ý thêm rằng, biến đồng tử chiều dây chuyền $\text{Hom}(f, 1)$ sẽ cảm sinh, với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, đồng tử chiều $f^* : H^n(X', G) \rightarrow H^n(X, G)$ mà:

$$f^*(c + \delta' \text{Hom}(X'_{n-1}, G)) = cf + \delta \text{Hom}(X_{n-1}, G) \text{ hay } f^*(clsc) = cls(cf) \quad (1.4).$$

Hàm biến, với bất kỳ phức X thì mỗi đồng tử chiều $h : G \rightarrow G'$ cảm sinh biến đồng tử chiều

chuyển $Hom(1, h): Hom(X, G) \rightarrow Hom(X, G')$ mà với mọi n nguyên ta có:

$$Hom^n(1, h): Hom(X, G) \rightarrow Hom(X, G'): \alpha \mapsto h\alpha.$$

Tổng quát, biến đổi dây chuyển $Hom(1, h)$ sẽ cảm sinh, với mọi $n \in \mathbb{Z}$, đồng cấu $h_*: H^n(X, G) \rightarrow H^n(X, G')$ mà:

$$h_*(c + \delta Hom(X_{n-1}, G)) = hc + \delta' Hom(X_{n-1}, G') \text{ hay } h_*(clsc) = cls(hc) \quad (1.5).$$

Vì với $Hom(X, G)$ và $H^n(X, G)$ là các song hàm tuyến tính, biến đổi theo G và phụ thuộc theo X .

Mệnh đề 1.1.4.2

Nếu $s: f \simeq g$ là đồng luân thì bằng cách đặt $t^{n+1} = (-1)^{n+1} s_n^*$ ta có đồng luân $t: f^* \simeq g^*$.

Mệnh đề 1.1.4.3

Nếu X, X' là hai phức tuyến tính đồng luân thì các phức nhóm abel $Hom(X, G), Hom(X', G)$ cũng tuyến tính đồng luân.

Mệnh đề 1.1.4.4

Nếu X, X' là hai phức tuyến tính đồng luân thì với mọi $n \in \mathbb{Z}$ ta có đồng cấu nhóm giữa các nhóm đối đồng cấu: $H^n(X, G) \cong H^n(X', G)$.

§2. XÂY DỰNG HÀM TỈ EXT TRONG PHẠM TRÙ MÔ ĐUN

Có nhiều cách khác nhau để xây dựng hàm tỉ Ext^n (mà t trong hai trường có thể là hàm số đồng điệu), tuy nhiên ở đây ta chỉ trình bày phép dựng hàm tỉ này bằng phép gộp xoắn. Vì vậy, chúng ta sẽ bắt đầu bằng các khái niệm và tính chất về phép gộp xoắn.

1.2.1 Phép gộp xoắn xoắn

Định nghĩa 1.2.1.1

Cho A là mô đun tùy ý, ta gọi **phép gộp xoắn xoắn** của A là một dãy khớp các mô đun xoắn xoắn và các đồng cấu:

$$\dots \rightarrow X_n \xrightarrow{\partial} X_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

Nói riêng, nếu X_n là mô đun tự do (t.đ. mô đun xoắn xoắn) với mọi $n \geq 0$ thì (1.6) được gọi là một phép gộp xoắn xoắn tự do (t.đ. phép gộp xoắn xoắn) của mô đun A .

Từ “tính đồng điệu của các mô đun tự do”, nghĩa là “mọi mô đun X đồng cấu với mô đun thương của một mô đun tự do nào đó”, ta có định lý sau khẳng định sự tồn tại của phép gộp xoắn xoắn.

Định lý 1.2.1.2

Mọi mô đun A đều có một phép gộp xoắn xoắn tự do.

Theo định lý 2.1.3 ta đã chứng minh được sự tồn tại phép gộp xoắn xoắn của mô đun A . Sau đây chúng ta sẽ chứng minh tính duy nhất của phép gộp xoắn xoắn, theo nghĩa hai phép gộp xoắn xoắn bất kỳ của cùng một mô đun A đều tương đương đồng luân. Ta có được điều này nhờ các mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.2.1.3

Cho $h: A \rightarrow B$ là đồng cấu của mô đun A vào mô đun B bất kỳ và

$$\dots \rightarrow X_n \xrightarrow{\partial} X_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

là một phép gộp xoắn xoắn bất kỳ của A ,

$$\dots \rightarrow Y_n \xrightarrow{\partial'} Y_{n-1} \xrightarrow{\partial'} \dots \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_0 \rightarrow B \rightarrow 0$$

là một phép giải xạ ảnh bất kỳ của B .

Khi đó, tồn tại các đồng cấu $f_n : X_n \rightarrow Y_n$, $n \geq 0$ sao cho biểu đồ sau đây là giao hoán:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & X_n & \xrightarrow{\partial} & X_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0 \\ & & f_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & f_1 \downarrow & f_0 \downarrow & h \downarrow \\ \dots & \rightarrow & Y_n & \xrightarrow{\partial'} & Y_{n-1} & \xrightarrow{\partial'} & \dots \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_0 \rightarrow B \rightarrow 0 \end{array}$$

Các đồng cấu f_n , $n \geq 0$ và h lập thành phép biến đổi dây chuyền $X \rightarrow Y$.

Mệnh đề 1.2.1.4

Cho X, Y là các phép giải xạ ảnh của các mô đun A, B như trong mệnh đề 2.1.4

và $f = \{f_n, h \mid n \geq 0\}$, $g = \{g_n, h \mid n \geq 0\}$ là các phép biến đổi dây chuyền $X \rightarrow Y$. Khi đó f đồng luân với g .

Từ hai mệnh đề trên ta thu được các định lý sau:

Định lý 1.2.1.5

Hai phép giải xạ ảnh bất kỳ của cùng một mô đun A đều đồng luân.

1.2.2 Xây dựng hàm tử mô rỗng Ext^n

Định nghĩa 1.2.2.1

Cho A và B là các mô đun và

$$\dots \rightarrow X_n \xrightarrow{\partial} X_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

là phép giải xạ ảnh của A .

Xét dãy: $\text{Hom}(X, B) : \dots \rightarrow \text{Hom}(X_n, B) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}(X_{n+1}, B) \rightarrow \dots$

Khi đó với mọi số nguyên dương n , đồng cấu $H^n(\text{Hom}(X, B))$ gọi là **tích**

mô rỗng n – chiều của các mô đun A và B đã cho và được kí hiệu là $\text{Ext}^n(A, B)$.

Với $n = 1$, ta dùng kí hiệu $\text{Ext}(A, B)$ và gọi nó là tích mô rỗng của các mô đun A và B . Ngoài ra, ta cũng định nghĩa $\text{Ext}^0(A, B) = \text{Hom}(A, B)$.

Theo mnh đ 1.1.4.4 và đnh lí 1.2.1.5 ta chng minh đ đ c rng các nhóm đ i đng điu $H^n(\text{Hom}(X, B))$ không ph thu c vào cách ch n phép gi i x nh c a mô đun A . Nghĩa là n u X' cũng là phép gi i x nh c a A thì ta có:

$$H^n(\text{Hom}(X, B)) \cong H^n(\text{Hom}(X', B)).$$

Do đó đnh nghĩa tích m rng nh trên là h p lí.

Đnh nghĩa 1.2.2.2

Cho A là m t mô đun c đnh, hàm t $\text{Ext}^n(A, -)$ là hàm t t ph m trừ mô đun đ n ph m trừ các nhóm aben đ đ c xây dng bng cách cho t ng ng:

- M i mô đun B v i m t nhóm $\text{Ext}^n(A, B)$.
- M i đng c u $\alpha : B \rightarrow B'$ v i m t đng c u $\alpha_* : \text{Ext}^n(A, B) \rightarrow \text{Ext}^n(A, B')$ mà $\alpha_*(clsc) = cl(\alpha c)$ v i m i $clsc \in \text{Ext}^n(A, B)$.

Mnh đ 1.2.2.3

Hàm t $\text{Ext}^n(A, -)$ là hàm t hi p bi n, t c là nó th a hai tính ch t:

- $(1_B)_* = 1_{\text{Ext}^n(A, B)}$
- $(\alpha_2 \cdot \alpha_1)_* = (\alpha_2)_* (\alpha_1)_*$.

Đnh nghĩa 1.2.2.4

Cho B là mô đun c đnh, hàm t $\text{Ext}^n(-, B)$ là hàm t t ph m trừ mô đun đ n ph m trừ các nhóm aben đ đ c xây dng bng cách cho t ng ng:

- M i mô đun A v i m t nhóm $\text{Ext}^n(A, B)$.
- M i đng c u $\gamma : A' \rightarrow A$ v i m t đng c u $\gamma^* : \text{Ext}^n(A, B) \rightarrow \text{Ext}^n(A', B)$ mà

$$\gamma^*(clsc) = clsc(c\gamma) \quad \forall i \text{ mà } clsc \in Ext^n(A, B).$$

Mệnh đề 1.2.2.5

Hàm $Ext^n(-, B)$ là hàm n biến, tức là nó thỏa mãn hai tính chất:

- i) $(1_A)^* = 1_{Ext^n(A, B)}$
- ii) $(\gamma_2 \cdot \gamma_1)^* = (\gamma_1)^* (\gamma_2)^*$.

§3. KHÔNG GIAN LƯỚI ĐA PHƯƠNG

Trong số các không gian vectơ tôpô, một lớp không gian đặc biệt quan trọng là các không gian lưới đa phương. Do đó trước khi trình bày khái niệm về không gian lưới đa phương, chúng ta sẽ xem lại khái niệm và các tính chất về không gian vectơ tôpô và về các tập hợp lưới, cân, hút.

1.3.1 Tập hợp lưới, tập hợp cân và tập hợp hút

Định nghĩa 1.3.1.1

Tập hợp con A của một không gian vectơ E được gọi là **lưới** nếu với mọi x, y thuộc A ta có $\lambda x + \mu y \in A$ với $\lambda, \mu \geq 0$ và $\lambda + \mu = 1$. Nó được gọi là **cân** nếu với mọi x thuộc A thì ta có $\lambda x \in A$ khi $|\lambda| \leq 1$. Tập hợp A được gọi là **tuyệt đối lưới** nếu nó đồng thời là lưới và cân, điều này thường được viết dưới dạng: với mọi x, y thuộc A ta có $\lambda x + \mu y \in A$ khi $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ (1.7).

Mũi giao của nhiều tập hợp lưới là lưới. Cho một tập hợp con tùy ý A của một không gian vectơ E , tập hợp tất cả các tập hợp tuyến tính hull của $\sum_i \lambda_i x_i$, với $\lambda_i \geq 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$, $x_i \in A$, là một tập hợp lưới chứa A , và được gọi là **bao lưới** của A . Nó là giao của tất cả các tập hợp con lưới của E chứa A , do đó nó là tập hợp con nhỏ nhất trong các

tập hợp con y. **Bao tuyế t đ i l i** c a A là tập hợp p t t c các t h p tuy n tính h u h n $\sum_i \lambda_i x_i$ v i $\sum_i |\lambda_i| \leq 1$ và m i $x_i \in A$ (1.8), nó là tập hợp tuyế t đ i l i nh nh t ch a A .

Ta cũng suy ra t đ nh nghĩa: n u A là l i thì $x + \lambda A$ là l i v i m i $x \in E$; và n u A và B đ u là tuyế t đ i l i thì $A + B$ và λA , v i m i s λ , cũng là tuyế t đ i l i.

Tập hợp con A c a m t không gian vect E đ c g i là **hút** n u: v i m i $x \in E$ thì có $\lambda > 0$ sao cho: $x \in \mu A$ v i m i μ th a $|\mu| \geq \lambda$. Rõ ràng giao c a m t s h u h n nh ng tập hợp hút là tập hợp hút.

Các m nh đ sau nêu lên vài tính ch t th ng đ c s đ ng c a các tập l i, cân và hút:

M nh đ 1.3.1.2

Cho ánh x tuy n tính $f : X \rightarrow Y$. Ta có:

- i) nh c a m t t p l i (cân) là m t t p l i (cân).
- ii) N u f là toàn ánh thì nh c a m t t p hút là m t t p hút.
- iii) nh ng c c a m t t p l i (cân ho c hút) là m t t p l i (cân ho c hút).

M nh đ 1.3.1.3

Gi s A là m t t p tuyế t đ i l i và không r ng. Th thì:

- i) $0 \in A$;
- ii) $\lambda A \subset \mu A$ n u $|\lambda| \leq |\mu|$;
- iii) $\sum_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i A) = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \right) A$ v i m i $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Mệnh đề 1.3.1.4

Một tập hợp tùy ý $\mathcal{A}$ là hút khi và chỉ khi nó gây nên E ; điều đó tương đương với $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\mathcal{A}$.

1.3.2 Không gian vectơ tôpô

Định nghĩa 1.3.2.1

Một tôpô trên không gian vectơ E tương đương với cấu trúc đối xứng của các phép toán đối xứng trong E là liên tục trên tôpô đó, tức là như:

P1: $x + y$ là một hàm liên tục của cặp biến x, y (nghĩa là với mọi lân cận V của điểm $x + y$ đều có một lân cận U_x của x và một lân cận U_y của y sao cho $U_x + U_y \subset V$).

P2: λx là một hàm liên tục theo λ, x (nghĩa là với mọi lân cận V của λx đều có một số $\varepsilon > 0$ và một lân cận U của x sao cho $\forall \lambda', |\lambda' - \lambda| < \varepsilon$ thì với mọi $x' \in U$ ta có $\lambda'x' \in V$ hay $\lambda'U \subset V$).

Một không gian vectơ E trên đó có một tôpô tương đương với cấu trúc đối xứng gọi là một **không gian vectơ tôpô**.

Mệnh đề 1.3.2.2

Với mọi $a \in E$, phép tịnh tiến $f: E \rightarrow E; x \mapsto f(x) = x + a$ là một phép đồng phôi của E lên chính nó. Do đó biết, nếu $\mathcal{U}$ là một cơ sở lân cận của điểm gốc thì $\mathcal{U} + a$ là một cơ sở lân cận của a .

Thành thử toàn bộ cấu trúc tôpô của E được xác định bởi một cơ sở lân cận của

điểm gốc. Như vậy, ta sẽ làm việc chủ yếu với các lân cận của điểm gốc, và nếu không xảy ra sự hiểu lầm, thì ta sẽ gọi lân cận của điểm gốc với tên tắt là “lân cận”.

Mệnh đề 1.3.2.3

Với mọi số khác không $\alpha \in \mathbb{R}$, ánh xạ $f: E \rightarrow E; x \mapsto f(x) = \alpha x$ là một phép đồng phôi của E lên chính nó. Để biết, nếu U là một lân cận thì với mọi $\alpha \neq 0$, αU cũng là một lân cận.

Mệnh đề 1.3.2.4

Nếu U là một tập lân cận của điểm gốc thì ta có với mọi $U \in \mathcal{U}$:

- i) U là hút;
- ii) Tồn tại $V \in \mathcal{U}$ sao cho $V + V \subset U$;
- iii) Tồn tại một lân cận cân $W \subset U$.

Từ mệnh đề 1.3.2.4, ta suy ra rằng mọi không gian vectơ tôpô đều có một tập số gần như lân cận cân. Trong các không gian vectơ tôpô quan trọng nhất và thông dụng nhất, thì còn có một tập số gần như lân cận lân cận liên của điểm gốc.

1.3.3 Không gian liên địa phương

Định nghĩa 1.3.3.1

Một không gian vectơ tôpô E được gọi là **không gian liên địa phương** (và tôpô của nó được gọi là **tôpô liên địa phương**) nếu trong E có một tập số lân cận (của điểm gốc) gần toàn tập liên.

Mệnh đề 1.3.3.2

Một không gian liên địa phương E có một tập số U như lân cận của điểm gốc,

với các tính chất sau:

$C1$: Nếu $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{U}$, thì tồn tại $W \in \mathcal{U}$ với $W \subset U \cap V$;

$C2$: Nếu $U \in \mathcal{U}$ thì $\alpha U \in \mathcal{U}$ với mọi $\alpha \neq 0$.

$C3$: Mọi $U \in \mathcal{U}$ đều là tuyến tính đối với $\mathbb{K}$ và hút.

Ngược lại, nếu cho một tập hợp không rỗng U nhúng tập hợp con của một không gian vectơ E với các tính chất $C1 - C3$, thì tồn tại một tôpô làm cho E trở thành một không gian $\mathbb{K}$ -địa phương với U là một cơ sở lân cận của điểm gốc.

Hệ quả 1.3.3.3

Một không gian $\mathbb{K}$ -địa phương có một cơ sở lân cận đóng với các tính chất $C1 - C3$.

§4. PHẪM TRÙ CÁC KHÔNG GIAN LỜI ĐỀ A PHẪM NG

Tập hợp tất cả các không gian lời đề A phẪm ng và các ánh xạ tuyến tính liên tục giữa các không gian này hình thành nên một phẪm trừ – phẪm trừ các không gian lời đề A phẪm ng. Trong đó, tập các véc-tơ là các không gian lời đề A phẪm ng, các cấu xạ là các ánh xạ tuyến tính liên tục và luật hợp thành là phép lấy tích hai ánh xạ. PhẪm trừ các không gian lời đề A phẪm ng được kí hiệu là $\mathcal{L}$.

1.4.1 Phân loại cấu xạ

Với việc phân loại các cấu xạ trong phẪm trừ $\mathcal{L}$, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.4.1.1

Cho cấu xạ $f : A \rightarrow B$. Khi đó ta có:

- i) Cấu xạ f là đơn xạ khi và chỉ khi nó đơn ánh.
- ii) Cấu xạ f là toàn xạ khi và chỉ khi nó toàn ánh.

Chứng minh:

- i) Giả sử f là đơn xạ và f không đơn ánh. Khi đó, có $a_1, a_2 \in A$ sao cho

$a_1 \neq a_2$ và $f(a_1) = f(a_2)$. Gọi C là không gian vectơ sinh bởi một phần tử $c \neq 0$. Khi đó ta xây dựng hai ánh xạ như sau: $\alpha : C \rightarrow A : c \mapsto a_1$ và $\beta : C \rightarrow A : c \mapsto a_2$. Trên C được trang bị tôpô thô trở thành không gian lời đề A phẪm ng. Khi đó α và β là các ánh xạ tuyến tính liên tục nên đều là xạ. Nhận thấy $\alpha \neq \beta$. Mặt khác, ta có $f\alpha = f\beta$ và vì f là đơn xạ nên $\alpha = \beta$ (vô lý). Vậy f là đơn ánh.

Ngược lại, giả sử f là đồng ánh. Ta dễ kiểm tra được f là đồng x.

ii) Giả sử f toàn x nhưng không toàn ánh. Khi đó có $b \in B$ sao cho $b \notin f(A)$,

hình nhiên $b \neq 0$. Và $\langle b \rangle$ là không gian vectơ con của B sinh bởi b . Gọi C là không gian vectơ sinh bởi một phần tử $c \neq 0$. Khi đó ta xây dựng hai ánh xạ như sau: $\alpha: B \rightarrow C: x \mapsto 0$ và $\beta: B \rightarrow C: b \mapsto c$ và $(x \notin \langle b \rangle) \quad x \mapsto 0$.

Trang bị trên C tôpô thô thì α và β là các ánh xạ tuyến tính liên tục nên đều là đồng x. Nhưng thấy $\alpha \neq \beta$. Mặt khác ta có $\alpha f = \beta f$ mà f toàn x nên suy ra $\alpha = \beta$ (vô lý). Vậy f là toàn ánh.

Ngược lại giả sử f là toàn ánh. Ta dễ kiểm tra được f là toàn x. ■

Phép trừ $\mathcal{L}$ phân biệt hai khái niệm song x và đồng x. Song x là ánh xạ tuyến tính liên tục và đồng ánh và toàn ánh; còn đồng x là một đồng phi. Ví dụ sau sẽ cho ta thấy tồn tại một song x mà không là đồng x.

Ví dụ 1.4.1.2

Trên tập số thực $\mathbb{R}$ là một không gian lồi địa phương với tôpô thô $\mathcal{T}_1$ mà cũng là một không gian lồi địa phương với tôpô thông thường $\mathcal{T}_2$ trên $\mathbb{R}$. Ta có đồng x $i: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1): r \mapsto r$. Dễ thấy i là song ánh, liên tục nên có duy nhất ánh xạ ngược $i^{-1}: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2): r \mapsto r$. Nhưng i^{-1} không liên tục nên i chỉ là song x mà không là đồng x. Do đó phép trừ các không gian lồi địa phương không có tính aben.

Trước khi nói về các đồng x nhúng và đồng x thông, ta nhận thấy rằng không gian con và không gian thông của một không gian lồi địa phương là không gian lồi địa phương.

Mệnh đề 1.4.1.3

Cho B là một không gian tôpô địa phương và A là không gian con của B . Khi đó ta có:

- i) A là không gian tôpô địa phương với tôpô cảm sinh $\mathcal{T}_A$.
- ii) B/A là không gian tôpô địa phương với tôpô $\mathcal{T}_{B/A}$.
- iii) Các ánh xạ tuyến tính $i: A \rightarrow B$, $\pi: B \rightarrow B/A$ đều liên tục.

Chứng minh:

A là không gian con của B nên ta có B/A cũng là không gian thặng dư của B . Vì B là không gian tôpô địa phương nên có một cơ sở lân cận $\mathcal{U}$ thỏa C1 – C3 của mệnh đề 1.3.3.2.

- i) Dễ dàng chứng minh được A với tôpô cảm sinh $\mathcal{T}_A$ là không gian tôpô địa phương.
- ii) Xét ánh xạ tuyến tính $\pi: B \rightarrow B/A$. Đặt $\overline{\mathcal{U}} = \{\pi(G): G \in \mathcal{U}\}$. Do ánh xạ tuyến tính π là toàn ánh nên theo mệnh đề 1.3.1.3 thì $\overline{\mathcal{U}}$ cũng thỏa các điều kiện C1 – C3 của mệnh đề 1.3.3.2. Do đó cũng theo mệnh đề 1.3.3.2 thì có một tôpô $\mathcal{T}_{B/A}$ trên B/A làm cho B/A trở thành không gian tôpô địa phương và họ $\overline{\mathcal{U}}$ làm một cơ sở lân cận của điểm gốc.
- iii) Ta chỉ cần chứng minh ánh xạ tuyến tính $i: A \rightarrow B$ liên tục. Thay vậy, lấy bất kỳ tập mở $G \in \mathcal{T}_B$, ta có $i^{-1}G = G \cap A \in \mathcal{T}_A$ nên i liên tục.

Ta chỉ cần chứng minh ánh xạ tuyến tính $\pi: B \rightarrow B/A$ liên tục tại gốc. Thay vậy,

lấy bất kỳ lân cận V trong B/A . Khi đó theo cách xây dựng tôpô thông thường trên thì tồn tại lân cận $G \in \mathcal{U}$ sao cho $\pi(G) \subset V$. Vậy ánh xạ tuyến tính π liên tục thì điều mong muốn nên liên tục. ■

Định nghĩa 1.4.1.4

Xét ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}e: r \mapsto re$, trên $\mathbb{R}$ trang bị tôpô $\mathcal{T}$ (tôpô thô hoặc tôpô thông thường) thì nó trở thành một không gian liên địa phương. Trên không gian vectơ $\mathbb{R}e$ ta xây dựng một tôpô như sau: $\mathcal{T}_X = \{f(G) \mid G \in \mathcal{T}\}$, do f là song ánh nên đồng nhất ra $\mathbb{R}e$ cùng với $\mathcal{T}_X$ làm thành một không gian liên địa phương; và ta cũng dễ dàng minh chứng f là một đồng phôi. Không gian liên địa phương $\mathbb{R}e$ được xây dựng như vậy gọi là một **tích nhân sao cho a và h** t.

1.4.2 Phép trừ các không gian liên địa phương là phép trừ cộng tính

Muốn chứng tỏ phép trừ các không gian liên địa phương $\mathcal{L}$ là phép trừ cộng tính ta phải chỉ ra $\mathcal{L}$ thỏa các điều sau:

- i) Trong $\mathcal{L}$ có vế không
- ii) Trong $\mathcal{L}$ tồn tại tổng trực tiếp hai vế bất kỳ
- iii) Đối với mọi cặp vế A, B thuộc $\mathcal{L}$ thì tập $\text{Hom}(A, B)$ trang bị cấu trúc nhóm cộng abel, hàm nhân ánh xạ $\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$ cho bởi luật hợp thành các cấu xạ là song tuyến tính, nghĩa là: $\beta(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta\alpha_1 + \beta\alpha_2$ và $(\beta_1 + \beta_2)\alpha = \beta_1\alpha + \beta_2\alpha$.

Đầu tiên, ta dễ thấy vế không là không gian liên địa phương chỉ có một phần tử là phần tử gốc 0, tôpô trên đó là tôpô thô. Minh chứng sau khẳng định phép trừ $\mathcal{L}$ có tổng

trực tiếp và tích trực tiếp của hai vectơ bất kỳ.

Mệnh đề 1.4.2.1

Phép trừ các không gian lồi địa phương là phép trừ có tính trực tiếp và tích trực tiếp.

Chứng minh:

Cho A_1 và A_2 là hai không gian lồi địa phương tuyến tính với các tôpô $\mathcal{T}_1$ và $\mathcal{T}_2$. Khi đó A_1 và A_2 là hai không gian vectơ. Ta gọi i_1, i_2 là hai đồng cấu nhúng; π_1, π_2 là hai đồng cấu chiếu xác định không gian vectơ tuyến tính $A_1 \oplus A_2$. Gọi β_1, β_2 liên tiếp là hai chuỗi lân cận thỏa các điều kiện C1 – C3 của mệnh đề 1.3.3.2.

Đặt $\beta = \{U \times V : U \in \beta_1, V \in \beta_2\}$. Nhận thấy rằng mỗi tập hợp $U \times V$ thuộc V của mỗi β đều là tập hợp lồi, cân và hút. Thuyết minh, lấy bất kỳ hai phần tử $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ thuộc $U \times V$, với các số λ, μ thỏa $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ thì :

$$\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \in U \times V$$

Vì $U \times V$ là tập tùy ý đối lồi. Ta lấy bất kỳ phần tử $(x, y) \in A_1 \oplus A_2$. Vì U, V là tập hút nên tồn tại $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ sao cho với mỗi α, γ thỏa $|\alpha| \geq \lambda_1$ và $|\gamma| \geq \lambda_2$ thì $x \in \alpha U, y \in \gamma V$. Đặt $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, khi đó với mỗi μ thỏa $|\mu| \geq \lambda$ ta có $(x, y) \in \mu(U \times V)$. Do đó $U \times V$ là tập hút.

Ta dễ dàng kiểm tra β thỏa các điều kiện C1 – C3 của mệnh đề 1.3.3.2. Nên cũng theo mệnh đề 1.3.3.2 tồn tại một tôpô tuyến tính $\mathcal{T}_t$ làm cho $A_1 \oplus A_2$ trở thành một không gian lồi địa phương với β là một chuỗi lân cận địa phương.

Xét đồng cấu chiếu $\pi_1 : A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_1$. Lấy U là lân cận bất kì trong không gian A_1 , do β_1 là cơ sở lân cận trong không gian A_1 nên có lân cận $U_1 \in \beta_1$ sao cho $0 \in U_1 \subset U$. Ta có $U_1 \times A_2$ là lân cận trong $A_1 \oplus A_2$ và $\pi(U_1 \times A_2) = U_1 \subset U$. Điều này cho thấy π_1 liên tục tại điểm gốc 0 nên liên tục. Tương tự ta cũng chứng minh được π_2 liên tục. Suy ra π_1, π_2 là các cấu xạ trong phạm trù $\mathcal{L}$.

Xét đồng cấu nhúng $i_1 : A_1 \rightarrow A_1 \oplus A_2$. Lấy W là lân cận bất kì trong $A_1 \oplus A_2$. Theo chứng minh trên ta có β là cơ sở lân cận trong $A_1 \oplus A_2$ nên có lân cận $U \times V \in \beta$ sao cho $(0;0) \in U \times V \subset W$, với $U \in \beta_1, V \in \beta_2$. Với U là lân cận trong A_1 . Ta có $i_1(U) = U \times \{0\} \subset U \times V \subset W$. Do đó i_1 liên tục tại điểm gốc 0 nên liên tục. Tương tự ta cũng chứng minh được i_2 liên tục. Suy ra i_1, i_2 là các cấu xạ trong phạm trù $\mathcal{L}$.

Giả sử có hai cấu xạ $f_1 : A_1 \rightarrow X$ và $f_2 : A_2 \rightarrow X$. Khi đó ta chứng minh có cấu xạ $\gamma : A_1 \oplus A_2 \rightarrow X$ làm cho biểu thức (1.9) sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & A_1 \oplus A_2 & \xleftarrow{i_2} & A_2 \\ f_1 \searrow & & \downarrow \gamma & & \swarrow f_2 \\ & & X & & \end{array} \quad (1.9)$$

Xây dựng ánh xạ: $\gamma : A_1 \oplus A_2 \rightarrow X : (x_1; x_2) \mapsto f_1(x_1) + f_2(x_2)$.

Ta thấy γ là ánh xạ mà f_1, f_2 là ánh xạ tuyến tính nên γ cũng là ánh xạ tuyến tính. Theo cách xây dựng γ ta có $f_1 = \gamma i_1$ và $f_2 = \gamma i_2$.

Ta có $\gamma(0;0) = 0$. Lấy W là một lân cận bất kì trong X . Khi đó theo mệnh đề 1.3.2.4, có W_0 là lân cận của điểm gốc sao cho $W_0 + W_0 \subset W$. Mà f_1, f_2 liên tục nên

$f_1^{-1}(W_0)$ và $f_2^{-1}(W_0)$ là lân cận trong A_1 và A_2 . Suy ra $f_1^{-1}(W_0) \times f_2^{-1}(W_0)$ là lân cận của $(0;0)$. Để chứng minh γ liên tục ta phải chứng minh $\gamma(f_1^{-1}(W_0) \times f_2^{-1}(W_0)) \subset W$.
Thật vậy, lấy bất kì phần tử $(x, y) \in f_1^{-1}(W_0) \times f_2^{-1}(W_0)$; suy ra $f_1(x), f_2(x) \in W_0$, ta có: $\gamma(x; y) = f_1(x) + f_2(x) \in W_0 + W_0 \subset W$.

Mọi $\gamma(f_1^{-1}(W_0) \times f_2^{-1}(W_0)) \subset W$ như vậy γ liên tục tại điểm gốc nên liên tục nên nó là liên tục. Từ đó ta chứng tỏ được không gian tích trực tiếp của hai không gian A_1 và A_2 .

Chứng minh $A_1 \oplus A_2$ là tích trực tiếp của A_1 và A_2 :

Giả sử có hai cấu xạ $f_1: X \rightarrow A_1$ và $f_2: X \rightarrow A_2$. Khi đó ta chứng minh có cấu xạ $\gamma: X \rightarrow A_1 \oplus A_2$ làm cho biểu thức (1.10) sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xleftarrow{\pi_1} & A_1 \oplus A_2 & \xrightarrow{\pi_2} & A_2 \\ & \nwarrow f_1 & \uparrow \gamma & \nearrow f_2 & \\ & & X & & \end{array} \quad (1.10)$$

Xây dựng ánh xạ $\gamma: X \rightarrow A_1 \oplus A_2: x \mapsto (f_1(x); f_2(x))$.

Ta có γ là ánh xạ mà f_1, f_2 là ánh xạ tuyến tính nên γ cũng là ánh xạ tuyến tính. Theo cách xây dựng γ thì $f_1 = \pi_1 \gamma$ và $f_2 = \pi_2 \gamma$.

Lấy W là một lân cận bất kì trong $A_1 \oplus A_2$. Do β là cấu lân cận trong $A_1 \oplus A_2$ nên ta có $U \times V \in \beta$ sao cho $(0;0) \in U \times V \subset W$, với $U \in \beta_1, V \in \beta_2$. Mà f_1, f_2 liên tục nên $f_1^{-1}(U), f_2^{-1}(V)$ là các lân cận trong X , nhất là $f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$ cũng là lân cận trong X . Vì $f_1 = \pi_1 \gamma$ và $f_2 = \pi_2 \gamma$ nên ta suy ra $\gamma^{-1} \pi_1^{-1}(U) = f_1^{-1}(U)$ và

$\gamma^{-1}\pi_2^{-1}(V) = f_2^{-1}(V)$. Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V) &= \gamma^{-1}\pi_1^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}\pi_2^{-1}(V) = \gamma^{-1}(\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)) \\ &= \gamma^{-1}(U \times V) \subset \gamma^{-1}(W) \end{aligned}$$

Suy ra $\gamma^{-1}(W)$ là một lân cận trong X nên γ liên tục tại điểm gốc, do đó γ liên tục nên cũng là cấu xạ. Từ đó ta chứng tỏ rằng không gian tích đôi của hai không gian $A_1 \oplus A_2$ cũng là tích trực tiếp của hai không gian A_1 và A_2 . ■

Mệnh đề 1.4.2.2

Đôi với mọi cặp vật A, B thuộc $\mathcal{L}$ thì tập $\text{Hom}(A, B)$ trang bị cấu trúc nhóm cộng aben.

Chứng minh mệnh đề này ta cần các bước sau:

Bổ đề 1.4.2.3

Cho hai cấu xạ $\alpha_1: A_1 \rightarrow B_1$ và $\alpha_2: A_2 \rightarrow B_2$. Khi đó ta có ánh xạ tuyến tính $\alpha_1 \oplus \alpha_2: A_1 \oplus A_2 \rightarrow B_1 \oplus B_2$ là cấu xạ.

Chứng minh:

Tính đúng đắn của bổ đề này có thể chứng minh bằng tôpô học mà ta định nghĩa ở mệnh đề 1.4.2.1. ■

Bổ đề 1.4.2.4

Trong phạm trù các không gian tích đôi của hai không gian, ta có:

i) Ánh xạ tuyến tính $\Delta: A \rightarrow A \oplus A: a \mapsto (a; a)$ là cấu xạ và đẳng cấu gọi là **cấu xạ chéo**.

ii) Ánh xạ tuyến tính $\nabla: A \oplus A \rightarrow A: (a_1; a_2) \mapsto a_1 + a_2$ là cấu xạ và đồng cấu là cấu xạ tầm thường.

Chứng minh:

i) Dễ dàng kiểm tra $\Delta: A \rightarrow A \oplus A: a \mapsto (a; a)$ là ánh xạ tuyến tính. Gọi β_A là cấu xạ lân cận của A và β là cấu xạ lân cận của $A \oplus A$. Lấy W là một lân cận bất kỳ trong $A \oplus A$. Do β là cấu xạ lân cận trong $A \oplus A$ nên ta có $U \times V \in \beta$ sao cho $(0; 0) \in U \times V \subset W$, với $U, V \in \beta_A$. Như vậy $U \cap V$ cũng là một lân cận trong A và ta có $\Delta(U \cap V) \subset (U \cap V) \times (U \cap V) \subset U \times V \subset W$. Vậy Δ liên tục nên nó là cấu xạ.

ii) Dễ nhận thấy ∇ là ánh xạ tuyến tính. Ta có $\nabla(0; 0) = 0$. Lấy W là lân cận của 0 trong A . Vì A là không gian địa phương nên theo mệnh đề 1.3.2.4 thì tồn tại W_1 là lân cận của 0 sao cho $W_1 + W_1 \subset W$. Khi đó $W_1 \times W_1$ là lân cận của $(0; 0)$ trong $A \oplus A$ và $\nabla(W_1 \times W_1) \subset W_1 + W_1 \subset W$. Vậy ∇ liên tục tại $(0; 0)$ nên liên tục. ■

Bổ đề 1.4.2.5

Cho hai cấu xạ f, g đều đi từ không gian địa phương A đến không gian địa phương B thì cấu xạ $f + g$ có sự phân tích như sau:

$$f + g: A \xrightarrow{\Delta_A} A \oplus A \xrightarrow{f \oplus g} B \oplus B \xrightarrow{\nabla_B} B \quad (1.11)$$

Chứng minh:

Dễ dàng kiểm tra đồng cấu ánh xạ $f + g$ có sự phân tích như trong (1.11). Vì tích các cấu xạ là một cấu xạ nên ta có $f + g$ là một cấu xạ. Điều này có nghĩa là tổng hai cấu xạ là một cấu xạ. ■

Ta quay lại chứng minh mệnh đề 1.4.2.2:

Xét $\text{Hom}(A, B)$ ta có đồng cấu 0 là phần tử trung lập, phần tử đối của f là $(-1_B)f$ hay đơn giản là $(-f)$. Lấy bất kỳ hai cấu xạ $f, g \in \text{Hom}(A, B)$ thì do bổ đề 1.4.2.5 nên ta cũng có $f + g \in \text{Hom}(A, B)$. Vậy $\text{Hom}(A, B)$ là một nhóm aben. ■

Ta dễ kiểm chứng đồng cấu ánh xạ $\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$ cho bởi luật hợp thành các cấu xạ là song tuyến tính, nghĩa là: $\beta(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta\alpha_1 + \beta\alpha_2$ và $(\beta_1 + \beta_2)\alpha = \beta_1\alpha + \beta_2\alpha$. ■

Như vậy phạm trù các không gian lineaire phạm trù là phạm trù cộng tính.

1.4.3 Phạm trù các không gian lineaire phạm trù là phạm trù tiến aben

Muốn chứng tỏ phạm trù các không gian lineaire phạm trù $\mathcal{L}$ là phạm trù tiến aben ta phải chỉ ra mọi cấu xạ trong $\mathcal{L}$ đều có hốt nhân và đối hốt nhân. Điều này được khẳng định bởi mệnh đề 1.4.3.1 và 1.4.3.2 được trình bày sau đây:

Mệnh đề 1.4.3.1

Phạm trù các không gian lineaire phạm trù là phạm trù có hốt nhân.

Chứng minh:

Lấy bất kỳ cấu xạ $f: A \rightarrow B$. Do $K = f^{-1}(0)$ là không gian con của A nên theo mệnh đề 1.4.1.3, K trở thành không gian lineaire phạm trù với tôpô cảm sinh $\mathcal{T}^c$ và có cấu xạ nhúng $i: K \rightarrow A$. Dễ nhận thấy $fi = 0$ và i là đơn xạ. Ta sẽ chứng minh i là hốt nhân của f . Thật vậy, giả sử có cấu xạ $u: X \rightarrow A$ sao cho $fu = 0$.

Xây đồng cấu ánh xạ: $\gamma: X \rightarrow K: x \mapsto u(x)$

Với mọi $x \in X$, ta có $fu(x) = 0$, suy ra $u(x) \in f^{-1}(0) = K$ nên cách xây đồng cấu

γ trên là h

lí. Mà u là ánh xạ tuyến tính nên γ cũng là ánh xạ tuyến tính. Dễ kiểm tra $i\gamma = u$. Ta lấy một lân cận bất kì V trong K , do tôpô trên K là tôpô cảm sinh nên tồn tại một lân cận V_1 trong A sao cho $V = V_1 \cap K$. Vì ánh xạ u liên tục nên $u^{-1}(V_1)$ là một lân cận trong X . Một khác vì $i\gamma = u$ nên:

$$u^{-1}(V_1) = \gamma^{-1}i^{-1}(V_1) = \gamma^{-1}(V_1 \cap K) = \gamma^{-1}(V)$$

Suy ra $\gamma^{-1}(V)$ là mọt lân cận trong X đn đn γ liên tục; tục là γ là mọt cux.
 Vy ta có hnt nhân cạ f là i , hay $Kerf = i: K \rightarrow A$ ■

Mình đi 1.4.3.2

Nota: Se f è un'isomorfia, allora $\text{Ker} f = \{0\}$ e $\text{Im} f = V$.

Mình đi 1.4.3.3

Phép trừ các không gian $\mathbb{R}$ i địa phương là phép trừ có đối hất nhân.

Chàng minh:

Lấy bất kỳ $x \in \ker f : A \rightarrow B$. Do $\ker f$ là không gian con và $B/\ker f(A)$ là không gian thương của B , vì thế theo mệnh đề 1.4.1.3 thì $B/\ker f(A)$ là không gian con của B .
 Lấy bất kỳ $x \in \ker f$ và có $x \in \ker \pi : B \rightarrow B/\ker f(A)$, do vậy suy ra rằng $\pi f = 0$. Ta sẽ chứng minh π là đồng cấu nhân của f . Thật vậy, giả sử có $x \in \ker u : B \rightarrow X$ sao cho $uf = 0$.

Ta xây dựng ánh xạ: $\gamma: B/f(A) \rightarrow X: \bar{b} \mapsto u(b)$

Nếu có $\overline{b_1} = \overline{b_2}$ thì $b_1 - b_2 \in f(A)$, do đó tồn tại phần tử $a \in A$ sao cho $f(a) = b_1 - b_2$; vậy $u(b_1) - u(b_2) = uf(a) = 0$ kéo theo $u(b_1) = u(b_2)$. Vậy cách xây dựng γ như trên là hợp lý. Mà u là ánh xạ tuyến tính nên γ là ánh xạ tuyến tính. Theo cách xây dựng γ thì ta được $u = \gamma\pi$.

Lấy một lân cận bất kỳ V trong X do u liên tục nên $u^{-1}(V)$ là lân cận trong B ; theo cách xây dựng tôpô thì ta có $\pi(u^{-1}(V))$ là lân cận trong $B/f(A)$. Hơn nữa:

$$\pi(u^{-1}(V)) = \pi\pi^{-1}\gamma^{-1}(V) = \gamma^{-1}(V) \text{ (do } \pi \text{ toàn xạ)}.$$

Vậy $\gamma^{-1}(V)$ là lân cận trong $B/f(A)$ nên γ liên tục tại điểm gốc; do đó cũng liên tục; tức là γ là một cấu xạ. Và ta có đồng nhất nhân của cấu xạ f là π , hay $\text{Coker } f = \pi: B \rightarrow B/f(A)$. ■

Tức là ta có phạm trù các không gian lồi địa phương là phạm trù tiên aben. Do đó nó mang các tính chất của một phạm trù tiên aben sau:

Mệnh đề 1.4.3.4

Cho cấu xạ $\alpha: A \rightarrow B$. Khi đó ta có:

i) $\text{Coker}(Ker\alpha) = (A/Ker\alpha, \pi)$ và $Ker(\text{Coker}\alpha) = (\text{Im}\alpha, i)$.

ii) α đồng nhất $\Leftrightarrow Ker\alpha = 0 \Leftrightarrow \text{Coker}(Ker\alpha) = (A, 1_A)$.

iii) α toàn xạ $\Leftrightarrow \text{Coker}\alpha = 0 \Leftrightarrow Ker(\text{Coker}\alpha) = (B, 1_B)$.

Hệ quả 1.4.3.5

Mọi cấu trúc $\alpha : A \rightarrow B$ đều được phân tích như sau: $\alpha : A \xrightarrow{\pi} A/\alpha^{-1}(0) \xrightarrow{\bar{\alpha}} \alpha(A) \xrightarrow{i} B$ trong đó i là đơn ánh, π là toàn ánh và $\bar{\alpha}$ là song ánh.

Trong phạm trù các không gian liên địa phương, song ánh $A/\alpha^{-1}(0) \xrightarrow{\bar{\alpha}} \alpha(A)$ có thể không là đồng ánh.

Trước khi kết thúc phần này ta sẽ chứng minh phạm trù các không gian liên địa phương là phạm trù có tính. Để tiện đó ta đưa ra khái niệm dãy khớp cùng một số tính chất liên quan phục vụ cho việc xây dựng hàm tử mở rộng sau này.

Mệnh đề 1.4.3.6

Phạm trù các không gian liên địa phương là phạm trù có tính.

Chứng minh:

Lấy bất kỳ cấu trúc $f : A \rightarrow B$. Xây dựng hai ánh xạ: $\bar{f} : A \rightarrow f(A) : a \mapsto f(a)$ và $i : f(A) \rightarrow B : y \mapsto y$. Dễ kiểm tra $\bar{f}, i$ là các ánh xạ tuyến tính và $f = i \circ \bar{f}$, đồng thời $\bar{f}$ là toàn ánh, i là đơn ánh.

Sau đây ta sẽ xây dựng tôpô trên $f(A)$ để các ánh xạ $\bar{f}, i$ liên tục. Gọi β là tập lân cận của A thỏa các điều kiện của mệnh đề 1.3.3.2. Khi đó vì $\bar{f}$ là toàn ánh nên theo mệnh đề 1.3.1.2 ta có $\bar{f}(\beta) = \{\bar{f}(U) \mid U \in \beta\}$ thỏa các điều kiện C1 – C3 của mệnh đề 1.3.3.2 nên là tập lân cận của một tôpô liên địa phương $\mathcal{T}_{f(A)}$ trên $f(A)$. Ta cũng dễ thấy rằng tập lân cận bất kỳ qua $\bar{f}$ đều là lân cận trong $f(A)$.

Cho G là một lân cận bất kỳ trong $f(A)$. Vì $\overline{f}(\beta)$ là tập lân cận trong $f(A)$ nên tồn tại một lân cận $U \in \beta$ sao cho $\overline{f}(U) \subset G$ nên ta được $\overline{f}$ liên tục.

Hơn nữa, lấy bất kỳ lân cận V trong B , nhờ ánh xạ f liên tục nên $f^{-1}(V)$ là một lân cận trong A . Theo trên ta có $f = i \cdot \overline{f}$ do đó $f^{-1}(V) = \overline{f}^{-1}i^{-1}(V)$. Vì ảnh của một lân cận bất kỳ qua $\overline{f}$ đều là lân cận trong $f(A)$; mà $\overline{f}$ toàn ánh nên ta có $i^{-1}(V) = \overline{f} \cdot \overline{f}^{-1}i^{-1}(V)$ là một lân cận trong $f(A)$. Vậy ánh xạ i liên tục. Ta đã chứng minh được $\overline{f}$, i liên tục là toàn xạ và đơn xạ.

Nếu f có sự phân tích như sau: $f: A \xrightarrow{v} X \xrightarrow{u} B$, trong đó u là đơn xạ.

Xây dựng ánh xạ: $\gamma: f(A) \rightarrow X: y \mapsto v(x)$ với $f(x) = y, x \in A$.

Với mọi y thuộc $f(A)$, tồn tại $x \in A$ sao cho $y = f(x) = uv(x)$. Nếu có $x_1, x_2 \in A$ sao cho $y = uv(x_1) = uv(x_2)$ thì do tính đơn ánh của u ta được $v(x_1) = v(x_2)$. Điều này có nghĩa là cách xây dựng γ như trên là hợp lý. Ta cũng dễ kiểm tra được rằng ánh xạ γ là ánh xạ tùy thuộc tính như tính tùy thuộc của u ; đồng thời kiểm tra được $i = u\gamma$. Từ đó ta suy ra $uv = f = i\overline{f} = u\gamma\overline{f}$; do tính đơn ánh của u ta chứng minh được $v = \gamma\overline{f}$.

Ta chứng minh γ là ánh xạ liên tục. Xét mọi y , với bất kỳ lân cận U của X , vì ánh xạ v liên tục nên $v^{-1}(U)$ là một lân cận trong A . Mà $v = \gamma\overline{f}$ nên $\overline{f}^{-1}\gamma^{-1}(U) = v^{-1}(U)$; nghĩa là $\overline{f}^{-1}\gamma^{-1}(U)$ là một lân cận trong A . Vì ảnh của một lân cận bất kỳ qua $\overline{f}$ đều là lân cận trong $f(A)$; mà $\overline{f}$ toàn ánh nên ta có $\gamma^{-1}(U) = \overline{f} \cdot \overline{f}^{-1}\gamma^{-1}(U)$ là một lân cận trong $f(A)$. Tức là γ là ánh xạ liên tục và vì thế nó cũng là cấu xạ. Vậy ảnh của f là

$\text{Im } f = i: f(A) \rightarrow B$. Theo đó phép m-trừ các không gian l-i đ-a ph- ng là phép m-trừ có nh. ■

Và ta nh-c l-i m-nh đ- liên quan đ-n nh-c a m-t c-u x- nh- sau:

M-nh đ- 1.4.3.7

Cho c-u x- $f: A \rightarrow B$. Khi đó n-u f là đ-n x- thì $\text{Im } f = f$.

Đ-nh nghĩa 1.4.3.8

Trong phạm trù $\mathcal{L}$, m-t dãy c-u x- liên ti-p:

$$\dots \rightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_{n+2} \rightarrow \dots (1.12)$$

đ- c g-i là dãy kh-p n-u h-t nhân m-i c-u x- là nh-c a c-u x- đ-ng tr- c, t-c là:

$$\text{Ker } f_{n+1} = \text{Im } f_i, \forall i.$$

Chương II

XÂY DỰNG HÀM TẠO EXT TRONG PHẠM TRÙ CÁC KHÔNG GIAN LỜI ĐẠA PHẠM

Ở chương trước ta đã trình bày cách xây dựng hàm tạo Ext^n trong phạm trù các mô đun bằng phép giới hạn. Để xây dựng hàm tạo Ext^n trong phạm trù các không gian lời địa phạm theo một cách tổng quát, ta cần một số khái niệm sau. Đó là khái niệm về không gian tôpô thuần nhất, khái niệm toán tử chính quy, vết giới hạn tổng đối, ..., và một số khái niệm về phạm trù và đồng điều trong phạm trù $\mathcal{L}$.

§1. PHẠM TRÙ VÀ ĐỒNG ĐIỀU

2.1.1 Phạm trù các phạm trù

Định nghĩa 2.1.1.1

Một phạm trù hợp dãy chuyển các không gian lời địa phạm là họ $\{X_n, \partial_n\}$ gồm các không gian lời địa phạm X_n và các ánh xạ tuyến tính liên tiếp $\partial_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$, đồng thời cho theo tất cả các số nguyên n , họ liên hệ $\partial_n \cdot \partial_{n+1} = 0$.

Như vậy, phạm trù hợp X là một dãy vô tận với hai điều:

$$X : \dots \leftarrow X_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} X_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} X_{n+1} \leftarrow \dots \quad (2.1)$$

trong đó tích hai ánh xạ tuyến tính liên tiếp nối tiếp nhau bằng 0.

Định nghĩa 2.1.1.2

Cho $X = \{X_n, \partial_n\}$ và $X' = \{X'_n, \partial'_n\}$ là các phức. Một **biến đổi dây chuyền**

$f : X \rightarrow X'$ là họ các ánh xạ tuyến tính liên tiếp $\{f_n : X_n \rightarrow X'_n\}$ sao cho $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ đối với mọi n . Điều kiện sau cùng tương đương với điều kiện biến đổi (2.2) giao hoán:

$$\begin{array}{ccccccc} X : \dots & \leftarrow & X_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n} & X_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}} & X_{n+1} \leftarrow \dots \\ & & f_{n-1} \downarrow & & f_n \downarrow & & f_{n+1} \downarrow \\ X' : \dots & \leftarrow & X'_{n-1} & \xleftarrow{\partial'_n} & X'_n & \xleftarrow{\partial'_{n+1}} & X'_{n+1} \leftarrow \dots \end{array} \quad (2.2)$$

Định lý rằng tích hai biến đổi dây chuyền là một biến đổi dây chuyền và tích các biến đổi dây chuyền có tính chất kết hợp.

Để ý thêm rằng, với mọi phức $X = \{X_n, \partial_n\}$, họ các ánh xạ tuyến tính liên tiếp $1_X = \{1_{X_n} : X_n \rightarrow X_n\}$ là một biến đổi dây chuyền có tính chất $1_X \cdot f = f$ và $g \cdot 1_X = g$ nếu các tích $1_X \cdot f$, $g \cdot 1_X$ là xác định. Tương tự trên ta thấy lớp tất cả các phức lập thành một phạm trù với các cấu xạ là các biến đổi dây chuyền.

2.1.2 Đồng luân dây chuyền

Định nghĩa 2.1.2.1

Cho các biến đổi dây chuyền $f, g : X \rightarrow X'$ từ phức $X = \{X_n, \partial_n\}$ tới phức $X' = \{X'_n, \partial'_n\}$. Họ các ánh xạ tuyến tính liên tiếp $s = \{s_n : X_n \rightarrow X'_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ được gọi là một **đồng luân dây chuyền** giữa hai biến đổi dây chuyền f, g sao cho:

$$\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - g_n \quad \text{đối với mọi } n.$$

Khi đó ta viết: $s : f \simeq g$.

Định lý 2.1.2.2

Nếu $s : f \simeq g$ là một đồng luân dây chuyền giữa các biến đổi dây chuyền

$f, g: X \rightarrow X'$ và $s': f' \simeq g'$ là đồng luân dây chuyền giữa các biến đổi dây chuyền $f', g': X' \rightarrow X''$, thì hợp các ánh xạ tuyến tính liên tiếp $f's + s'g: ff' \simeq g'g$ là đồng luân dây chuyền giữa $ff', g'g: X \rightarrow X''$.

Chứng minh:

Theo định lý 1.1.2.2 và do tích hai ánh xạ tuyến tính liên tiếp là một ánh xạ tuyến tính liên tiếp, tổng hai ánh xạ tuyến tính liên tiếp là một ánh xạ tuyến tính liên tiếp nên khẳng định trên là đúng đắn.

Có thể thấy rằng quan hệ đồng luân dây chuyền giữa các biến đổi dây chuyền trên phức X và phức X' là một quan hệ tương đương.

Định nghĩa 2.1.2.3

Cho X, X' là các phức, biến đổi dây chuyền $f: X \rightarrow X'$ được gọi là một **đồng đẳng dây chuyền** nếu tồn tại biến đổi dây chuyền $h: X' \rightarrow X$ và các đồng luân dây chuyền $s: hf \simeq 1_X$ và $t: fh \simeq 1_{X'}$.

Hai phức X và X' mà có một đồng đẳng dây chuyền giữa chúng $f: X \rightarrow X'$ thì được gọi là hai phức **tương đương đồng luân** với nhau và ta viết: $X \simeq X'$.

Hiển nhiên rằng, quan hệ tương đương đồng đẳng dây chuyền giữa các phức là một quan hệ tương đương. Nó thực hiện sự phân hoạch tập các phức thành tập các bộ phận, mỗi bộ phận gồm những phức tương đương đồng luân.

2.1.3 Đồng đẳng đối

Cho phức $X = \{X_n, \partial_n\}$ các không gian địa phương và G là một không gian địa phương. Ta xây dựng nhóm abel $\text{Hom}(X_n, G)$ mà các phần tử của nó là các ánh xạ tuyến tính liên tiếp $f: X_n \rightarrow G$; số được gọi là các **đồng đẳng dây chuyền** n -chiều của phức X . Đồng bộ của ánh xạ tuyến tính liên tiếp f đó là đồng đẳng dây chuyền $(n+1)$ -chiều:

$$\delta^n(f) = (-1)^{n+1} f \cdot \partial_{n+1}: X_{n+1} \rightarrow G$$

Do thấy $\delta^n \cdot \delta^{n-1} = 0$ nên dãy

$$... \rightarrow \text{Hom}(X_{n-1}, G) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \text{Hom}(X_n, G) \xrightarrow{\delta^n} \text{Hom}(X_{n+1}, G) \rightarrow ... \quad (2.3)$$

là phức hợp các nhóm aben, đồng cấu δ^n là $\text{Hom}(X_n, G)$; hàm số n theo như thông lệ mỗi một nhóm sẽ đồng cấu với theo chuỗi trên: $\text{Hom}^n(X, G) = \text{Hom}(X_n, G)$. Nếu phức X là đồng đều theo chuỗi đồng thì phức $\text{Hom}(X, G)$ là đồng đều theo chuỗi trên.

Định nghĩa 2.1.3.1

Đồng đều của phức $\text{Hom}(X, G)$ đồng cấu δ^n là **đồng đều của phức X với h số trong G** . Đó là hợp các nhóm aben đồng cấu đánh số theo chuỗi trên:

$$H^n(X, G) = H^n(\text{Hom}(X, G)) = \text{Ker} \delta^n / \delta \text{Hom}(X_{n-1}, G) \quad (2.4).$$

Các phần tử của $\text{Ker} \delta^n$ đồng cấu δ^n là **đồng chu trình n - chi**, còn các phần tử của $\delta \text{Hom}(X_{n-1}, G)$ đồng cấu δ^n là **đồng biên n - chi**. Như vậy một đồng chu trình n - chi là một đồng cấu $h: X_n \rightarrow G$ sao cho $h\partial = 0$.

Mỗi biến đổi dây chuyền $f: X \rightarrow X'$ cảm sinh biến đổi dây chuyền $\text{Hom}(f, 1): \text{Hom}(X', G) \rightarrow \text{Hom}(X, G)$ mà với mỗi số nguyên n ta có:

$$\text{Hom}^n(f, 1): \text{Hom}(X', G) \rightarrow \text{Hom}(X, G): \alpha \mapsto \alpha f_n.$$

Để ý thêm rằng, biến đổi dây chuyền $\text{Hom}(f, 1)$ sẽ cảm sinh, với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, đồng cấu $f^*: H^n(X', G) \rightarrow H^n(X, G)$ mà:

$$f^*(c + \delta' \text{Hom}(X'_{n-1}, G)) = cf + \delta \text{Hom}(X_{n-1}, G) \text{ hay } f^*(clsc) = cls(cf) \quad (2.5).$$

Hàm số n , với bất kỳ phức X thì mỗi đồng cấu $h: G \rightarrow G'$ cảm sinh biến đổi dây chuyền $\text{Hom}(1, h): \text{Hom}(X, G) \rightarrow \text{Hom}(X, G')$ mà với mỗi số nguyên n ta có:

$$\text{Hom}^n(1, h): \text{Hom}(X, G) \rightarrow \text{Hom}(X, G'): \alpha \mapsto h\alpha.$$

Tổng hợp, biến đổi dây chuyền $\text{Hom}(1, h)$ sẽ cảm sinh, với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, đồng cấu $h_*: H^n(X, G) \rightarrow H^n(X, G')$ mà:

$$h_*(c + \delta \text{Hom}(X_{n-1}, G)) = hc + \delta' \text{Hom}(X_{n-1}, G') \text{ hay } h_*(clsc) = cls(hc) \quad (2.6).$$

Vì vậy $\text{Hom}(X, G)$ và $H^n(X, G)$ là các song hàm tđ, hiđp biđn theo G và phđn biđn theo X .

Mệnh đề 2.1.3.2

Nếu $s : f \simeq g$ là đđng luân thì bđng cách đđt $t^{n+1} = (-1)^{n+1} s_n^*$ ta có đđng luân $t : f^* \simeq g^*$.

Chđng minh:

Theo giđ thiđt mđnh đđ, tđn tđi $s : f \approx g$ là mđt đđng luân dây chuyđn giđ a hai biđn đđi dây chuyđn $f, g : X \rightarrow X'$. Khi đó ta có $\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - g_n$. Tác đđng $\text{Hom}(-, G)$ vào đđng thđc trên ta đđ đđc:

$$s_n^* \partial'_{n+1} + \partial_n^* s_{n-1}^* = f_n^* - g_n^* \Rightarrow (-1)^{n+1} s_n^* \delta'^n + (-1)^n \delta^{n-1} s_{n-1}^* = f_n^* - g_n^*$$

Đđt $t^n = (-1)^n s_{n-1}^*$ thì hđ $t = \{t^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ là đđng luân dây chuyđn giđ a các biđn đđi dây chuyđn $f^*, g^* : \text{Hom}(X', G) \rightarrow \text{Hom}(X, G)$, tđc $t : f^* \approx g^*$.

Mệnh đề 2.1.3.3

Nếu X, X' là hai phđc tđ đđng đđng luân thì các phđc nhóm aben $\text{Hom}(X, G), \text{Hom}(X', G)$ cũng tđ đđng đđng luân.

Chđng minh:

Giđ sđ $X \approx X'$ thì khi đó có các biđn đđi dây chuyđn $f : X \rightarrow X'$ và $g : X' \rightarrow X$ và các đđng luân dây chuyđn $s : gf \approx 1_X$ và $t : fg \approx 1_{X'}$. Dđ đđi sđ tác đđng cđ a hàm tđ phđn biđn $\text{Hom}(-, G)$ thì các biđn đđi dây chuyđn f, g cđm sinh các biđn đđi dây chuyđn $f^* : \text{Hom}(X', G) \rightarrow \text{Hom}(X, G)$ và $g^* : \text{Hom}(X, G) \rightarrow \text{Hom}(X', G)$; và theo mđnh đđ 2.1.3.2 ta có các đđng luân dây chuyđn $u : (gf)^* \approx (1_X)^*$ và $t : (fg)^* \approx (1_{X'})^*$.

Do $\text{Hom}(-, G)$ là hàm tử phản biến nên ta có $(1_X)^* = 1_{\text{Hom}(X, G)}$; $(1_{X'})^* = 1_{\text{Hom}(X', G)}$;

$(gf)^* = f^*g^*$; $(fg)^* = g^*f^*$. Như vậy $\text{Hom}(X, G) \approx \text{Hom}(X', G)$.

Mệnh đề 2.1.3.4

Nếu X, X' là hai phức tạp đồng đẳng luân thì với mọi $n \in \mathbb{Z}$ ta có đẳng cấu nhóm giữa các nhóm đối đồng đẳng: $H^n(X, G) \cong H^n(X', G)$.

Chứng minh:

Theo giả thiết X, X' là hai phức tạp đồng đẳng luân thì theo mệnh đề 2.1.3.3 $\text{Hom}(X, G), \text{Hom}(X', G)$ cũng đồng đẳng luân. Nên theo mệnh đề 1.1.3.3 với mọi $n \in \mathbb{Z}$ ta có đẳng cấu nhóm giữa các nhóm đối đồng đẳng: $H^n(X, G) \cong H^n(X', G)$.

§2. KHÔNG GIAN THUẬN NHẤT VÀ TOÁN TỬ

CHÍNH QUY

2.2.1 Không gian tôpô thuận nhất

Định nghĩa 2.2.1.1

Một tập hợp X khác rỗng, trong đó có định luật điểm giữa là điểm gốc và kí hiệu là 0, đồng thời là một **không gian thuận nhất** nếu có một phép nhân ngoài tử tự nhiên của $\mathbb{R}$ vào X như sau: $\mathbb{R} \times X \rightarrow X : (r, x) \mapsto rx$ thỏa:

Với mọi $x \in X$ và mọi số thực r, s ta có:

- i) $0x = 0$
- ii) $(r.s)x = r(sx)$
- iii) $1x = x$.

Theo định nghĩa trên thì không gian vectơ là một không gian thuận nhất.

Trên không gian thuận nhất X ta định nghĩa một **quan hệ** $\sim$ như sau:

Với mọi $x_1, x_2 \in X$ thì $x_1 \sim x_2$ nếu có số $r \neq 0$ sao cho $x_1 = rx_2$.

Mệnh đề 2.2.1.2

Quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương.

Chứng minh:

- Tính phản xạ: Ta có $x = 1x \Rightarrow x \sim x$.
- Tính đối xứng: Nếu $x_1 \sim x_2$ thì có số $r \neq 0$ sao cho $x_1 = rx_2$.

Khi đó: $x_2 = r^{-1}x_1 \Rightarrow x_2 \sim x_1$.

- Tính bắc cầu: Nếu $x_1 \sim x_2$ và $x_2 \sim x_3$ thì có các số $r, s \neq 0$ sao cho $x_1 = rx_2$ và $x_2 = sx_3$. Suy ra $x_1 = rsx_3 \Rightarrow x_1 \sim x_3$. Vậy $\sim$ là một quan hệ tương đương. ■

Khi đó quan hệ $\sim$ thể hiện một sự phân lớp trên không gian tuyến tính X . Nhận thấy mọi một lớp x , kí hiệu là $\bar{x}$ có dạng sau:

$$\bar{x} = \{y \in X / y \sim x\} = \{y \in X / \exists r \in \mathbb{R}^* : y = rx\} = \mathbb{R}^* x \text{ và } \bar{0} = \{0\}.$$

Với mọi lớp x_i khác lớp 0 , ta chọn một đại diện là e_i . Với $X = \bigcup_{i \in J} \mathbb{R}^* e_i \bigcup 0$ và

$\mathbb{R}^* e_i \cap \mathbb{R}^* e_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$. Ta gọi $(e_i)_{i \in J}$ là các số **thuộc nhất** của X . Và theo cách

chứng minh trên thì mọi không gian tuyến tính đều có một cơ sở thuộc nhất. Ta cũng

có thể viết $X = \bigcup_{i \in J} \mathbb{R} e_i$ và với mọi $i \in J$ ta gọi tập hợp $\mathbb{R} e_i$ là một **đồng đẳng** đi qua

điểm gốc 0. Từ đó ta có thể hình dung không gian tuyến tính X gồm một họ các đồng đẳng

đồng đẳng quy tại điểm gốc. Ta cũng gọi hai điểm λe_i và $(-\lambda)e_i = -\lambda e_i$ với $\lambda \neq 0$ là

hai điểm đối xứng qua điểm gốc.

Định nghĩa 2.2.1.3

Cho X và Y là hai không gian tuyến tính. Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là **ánh xạ thuộc nhất** nếu với mọi số thực r và với mọi $x \in X$ thì $f(rx) = rf(x)$.

Rõ ràng ánh xạ thuộc nhất là xác định nếu xác định đồng nhất của các số thuộc nhất.

Hình nhiên rỗng theo định nghĩa 2.2.1.3 ánh xạ tuyến tính là ánh xạ thuần nhất. Ta dễ kiểm tra được hợp thành của hai ánh xạ thuần nhất là ánh xạ thuần nhất.

Định nghĩa 2.2.1.4

Tập hợp con A của một không gian thuần nhất X được gọi là **cân** nếu với mọi x thuộc A thì ta có $\lambda x \in A$ khi $|\lambda| \leq 1$. Nó được gọi là **hút** nếu: với mọi $x \in X$ thì có $\lambda > 0$ sao cho: $x \in \mu A$ với mọi μ thỏa $|\mu| \geq \lambda$. Rõ ràng giao của một số hữu hạn không tập hợp hút là tập hợp hút. Nếu với mọi $n \in \mathbb{N}$ A là một tập hợp chứa 0 thì $A \cap -A$ là một tập cân.

Định nghĩa 2.2.1.5

Nếu có một tập hợp $\mathcal{U}$ không rỗng không tập hợp con chứa điểm gốc 0 của không gian thuần nhất X thỏa các tính chất sau:

T1: Nếu $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{U}$, thì tồn tại $W \in \mathcal{U}$ với $W \subset U \cap V$;

T2: Nếu $U \in \mathcal{U}$ thì $\alpha U \in \mathcal{U}$ với mọi $\alpha \neq 0$;

T3: Mọi $U \in \mathcal{U}$ đều là hút và cân.

thì khi đó X được gọi là **không gian tôpô thuần nhất**, tập hợp $\mathcal{U}$ nào với được gọi là **cơ sở lân cận cân của điểm gốc** trong X , và kí hiệu là $\mathcal{U}_X$. Tập hợp U của $\mathcal{U}_X$ gọi là một **lân cận cân của gốc** trong X hay đơn giản chỉ gọi là **lân cận** trong X .

Một ánh xạ thuần nhất $f: X \rightarrow Y$ từ không gian tôpô thuần nhất X đến không gian tôpô thuần nhất Y được gọi là **ánh xạ thuần nhất liên tục** nếu với mọi lân cận $V \in \mathcal{U}_Y$ thì tồn tại một lân cận $U \in \mathcal{U}_X$ sao cho $f(U) \subset V$.

Nếu với theo định nghĩa 2.2.1.5 trên thì không gian tôpô thuần nhất chứa hàm là một không gian tôpô không gian vectơ tôpô là một không gian tôpô thuần nhất. Dự rỗng ánh xạ thuần nhất liên tục cũng không có nghĩa là liên tục tại điểm gốc.

Nhưng ánh xạ tuyến tính liên tục là ánh xạ thu hẹp nhất liên tục và đồng thời tích các ánh xạ thu hẹp nhất liên tục là một ánh xạ thu hẹp nhất liên tục.

Tại đây khi xét không gian liên địa phương X thì kí hiệu $\mathcal{U}_X$ là họ các lân cận trong X thỏa các điều kiện C1 – C3 của mệnh đề 1.3.3.2; do đó $\mathcal{U}_X$ cũng thỏa các điều kiện

của định nghĩa 2.2.1.5 nên X cùng với $\mathcal{U}_X$ làm thành không gian tôpô thu hẹp nhất.

Mệnh đề 2.2.1.6

Mọi dãy ng thẳng đi qua gốc luôn cắt tất cả các lân cận V của không gian tôpô thu hẹp nhất X .

Chứng minh:

Trong không gian tôpô thu hẹp nhất X , ta gọi $(e_i)_{i \in J}$ là họ thu hẹp nhất của X .

Như vậy với mọi $i \in J$ thì ta có một dãy ng thẳng $\mathbb{R}e_i$. Gọi V là một lân cận bất kì thuộc $\mathcal{U}_X$. Theo điều kiện T3 của định nghĩa 2.2.1.5 thì V là tập cân và hút. Nên với mọi $i \in J$ có $\lambda > 0$ sao cho: $e_i \in \mu V$ với mọi μ thỏa $|\mu| \geq \lambda$.

Đặt $A = \{\lambda > 0 \mid \lambda e_i \in V\}$ và đặt $p(e_i) = \inf A$. Khi đó có các trường hợp sau:

- Nếu $p(e_i) = 0$ thì V chứa trục dãy ng thẳng $\mathbb{R}e_i$.
- Nếu $p(e_i) \in A$ thì tập V chứa tập hợp $\left[\frac{1}{-p(e_i)}; \frac{1}{p(e_i)} \right] e_i$ của dãy ng thẳng $\mathbb{R}e_i$.
- Nếu $p(e_i) \notin A$ và $p(e_i) \neq 0$ thì tập V chứa tập hợp $\left(\frac{1}{-p(e_i)}; \frac{1}{p(e_i)} \right) e_i$ của dãy ng thẳng $\mathbb{R}e_i$.

Do đó V cắt mọi dãy ng thẳng đi qua gốc. ■

Tại đây, ta gọi $V_i = V \cap \mathbb{R}e_i$ là vế trái của V đối với trên đồng thức $\mathbb{R}e_i$. Như vậy V là tổng trực tiếp các vế trái V_i .

2.2.2 Toán tử chính quy

Định nghĩa 2.2.2.1

Cho X, Y là hai không gian đối ngẫu phân phối. Ta gọi ánh xạ tuyến tính liên tục $f : X \rightarrow Y$ là một **toán tử chính quy** nếu có ánh xạ thu hẹp nhất liên tục $f' : Y \rightarrow X$ sao cho $ff'f = f$ (2.7).

Tại đây khi nói toán tử chính quy f thì ký hiệu f' là chập ánh xạ thu hẹp nhất của (2.7).

Ví dụ 2.2.2.2

Với X, Y là hai không gian đối ngẫu phân phối, ta có $1_X : X \rightarrow X$ và $0 : X \rightarrow Y$ là các toán tử chính quy.

Mệnh đề 2.2.2.3

Cho toán tử chính quy $f : X \rightarrow Y$, khi đó:

- i) Nếu f là đơn ánh thì $ff' = 1_X$
- ii) Nếu f là toàn ánh thì $ff' = 1_Y$

Chứng minh:

- i) Giả sử f là đơn ánh. Khi đó với mọi $x \in X$ ta có: $ff'f(x) = f(x)$; mà f là đơn ánh nên $ff'(x) = x$. Suy ra $ff' = 1_X$.
- ii) Giả sử f là toàn ánh. Khi đó với mọi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Ta có: $ff'(y) = ff'f(x) = f(x) = y$. Suy ra $ff' = 1_Y$. ■

Mệnh đề 2.2.2.4

Cho X, Y là các không gian đối ngẫu phân phối. Nếu ánh xạ tuyến tính liên tục $h : X \rightarrow Y$ là ánh xạ thu hẹp nhất liên tục thì h liên tục.

Chứng minh:

Vì h là ánh xạ tuyến tính nên ta chỉ cần chứng minh h liên tục tại điểm gốc. Thật vậy, lấy V là một lân cận bất kỳ trên Y . Khi đó do $\mathcal{U}_Y$ là cơ sở lân cận của gốc nên tồn tại $V' \in \mathcal{U}_Y$ sao cho $V' \subset V$. Theo định nghĩa ánh xạ tuyến tính thì có $U' \in \mathcal{U}_X$ sao cho $h(U') \subset V' \subset V$; đây là điều cần phải chứng minh. ■

Mệnh đề 2.2.2.5

Cho B là không gian n chiều thực và A là không gian con của B . Khi đó ánh xạ nhúng liên tục $i: A \rightarrow B$ là toán tử chính quy.

Chứng minh:

Gọi $(e_i)_{i \in J}$ là cơ sở tuyến tính của A , ta có thể bổ sung thêm các $(e_i)_{i \in J'}$ để được cơ sở tuyến tính của B . Khi đó với mỗi $i \in J$, đặt $i'(e_i) = e_i$; với mỗi $i \in J'$, đặt $i'(e_i) = 0$. Do đã xác định được mỗi cơ sở tuyến tính nên ta xác định được ánh xạ tuyến tính $i': B \rightarrow A$. Với mỗi $x \in A$ thì $i(x) = x \in A$ nên tồn tại $i \in J$ và có số thực r_i sao cho $i(x) = r_i e_i$, ta có: $ii'(x) = ii'(r_i e_i) = i(r_i e_i) = r_i e_i = i(x)$. Vậy $ii' = i$.

Ta chứng minh $i': B \rightarrow A$ là ánh xạ tuyến tính liên tục, nghĩa là lấy bất kỳ lân cận của gốc $V \in \mathcal{U}_A$ ta phải chứng minh tồn tại lân cận của gốc $U \in \mathcal{U}_B$ sao cho $i'(U) \subset V$. Thật vậy, do tôpô trên A là tôpô cảm sinh nên có một lân cận U trên B sao cho $V = U \cap A$ và lân cận $U' \in \mathcal{U}_B$ thì $U' \subset U$. Mà với mỗi $x \in U' \setminus A$ thì $i'(x) = 0 \in V$ nên ta có $i'(U) \subset V$ suy ra $i'(U') \subset i'(U) \subset V$. Đây là điều phải chứng minh. Ngoài ra, do i liên ánh nên theo mệnh đề 2.2.2.3 ta còn có $i'i = 1_A$. ■

Mệnh đề 2.2.2.6

Nếu $f: A \rightarrow B$ là một toán tử chính quy, f có dạng phân tích qua i nh là:

$$f: A \xrightarrow{\bar{f}} f(A) \xrightarrow{i} B \quad (2.8)$$

thì $\bar{f}$ và i là các toán tử chính quy, h và n của $\bar{f}$ là toàn ánh và i là đơn ánh.

Chứng minh:

Thật vậy, theo mệnh đề 1.4.3.6 f có sự phân tích qua ảnh nhúng (2.8), $\bar{f}$ là toàn ánh và i là đơn ánh. Khi đó ta định ánh xạ $g = f' \circ i : f(A) \rightarrow A$ thì g là ánh xạ thu hẹp nhất liên tục. Với mọi $a \in A$, ta có:

$$\bar{f} g \bar{f}(a) = (\bar{f} f' i \bar{f})(a) = (\bar{f} f' f)(a) = \bar{f}[f' f(a)] = f[f' f(a)] = f(a) = \bar{f}(a)$$

Theo đó $\bar{f}$ là một toán tử chính quy. Hơn nữa, định ánh xạ $j = \bar{f} f' : B \rightarrow f(A)$ thì j là ánh xạ thu hẹp nhất liên tục. Khi đó với mọi $y \in f(A)$, luôn tồn tại $a \in A$ sao cho

$$y = f(a). \text{ Ta có: } j i(y) = [(i \bar{f}) f' i](y) = f f'(y) = f f'[f(a)] = f(a) = y = i(y).$$

Vậy i là toán tử chính quy. ■

Mệnh đề 2.2.2.7

Cho các ánh xạ tuyến tính liên tục $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ và $\partial = g f : A \rightarrow C$. Nếu f là toán tử chính quy và f toàn ánh thì $\text{Im } \partial = \text{Im } g f = \text{Im } g$.

Chứng minh:

Theo mệnh đề 1.4.3.6, $\partial = g f$ và g được viết dưới dạng phân tích qua ảnh nhúng là:

$$\partial = g f : A \xrightarrow{\bar{\partial}} X_1 \xrightarrow{j} C \text{ nghĩa là } \partial = g f = j \bar{\partial}$$

$$g : B \xrightarrow{\bar{g}} X_2 \xrightarrow{i} C \text{ nghĩa là } g = i \bar{g}$$

Ta có ảnh của $g f$ là đơn ánh tuyến tính liên tục $\text{Im } g f = (j : g f(A) \rightarrow C)$ và ảnh của g là đơn ánh tuyến tính liên tục $\text{Im } g = (i : g(B) \rightarrow C)$, trong đó i, j là các ánh xạ nhúng, liên tục. Vì f là toàn ánh nên theo nghĩa tập hợp thì $g f(A) = g(B) = X$; nhưng có thể trên X tồn tại trang bị hai tôpô khác nhau nên chúng khác nhau. Để không nhầm lẫn ta sẽ gọi không gian tôpô địa phương $g f(A)$ là X_1 , tôpô trên đó là $\mathcal{T}_1$; không gian tôpô địa phương $g(B)$ là X_2 , tôpô trên đó là $\mathcal{T}_2$.

$\forall y \partial = gf = i\bar{g}f$ nên theo tính chất đồng cấu $\text{Im } \partial$ thì có cấu xạ $\gamma: X_1 \rightarrow X_2$ sao cho $i\gamma = j$. Nhờ vậy, với mọi $y \in X_1 = gf(A)$, ta có $y = j(y) = i\gamma(y) = \gamma(y)$; tức là γ là một cấu xạ nhúng từ X_1 đến X_2 ; đồng thời γ là một song xạ. Vì thế với mọi tập mở $G \in \mathcal{T}_2$ thì $G = \gamma^{-1}(G) \in \mathcal{T}_1$; mọi tập mở trong X_2 đều là mở trong X_1 .

Mặt khác, do f toàn ánh nên với mọi phần tử $b \in B$, tồn tại phần tử $a \in A$ sao cho $b = f(a)$; nếu có $a_1, a_2 \in A$ sao cho $b = f(a_1) = f(a_2)$, ta suy ra:

$$gf(a_1) = gf(a_2) \Rightarrow j\bar{\partial}(a_1) = j\bar{\partial}(a_2) \Rightarrow \bar{\partial}(a_1) = \bar{\partial}(a_2) \in X_1$$

Khi đó ánh xạ $h: B \rightarrow X_1: b \rightarrow \bar{\partial}(a)$, trong đó $b = f(a)$, là đồng cấu xây dựng hợp lý. Tập $\bar{\partial}$ là ánh xạ tuyến tính nên h là ánh xạ tuyến tính. Theo cách xây dựng h thì dễ kiểm tra $hf = \bar{\partial}$ (2.9). Ta nhân ánh xạ f' vào bên phải đồng thức (2.9), nhờ tính toàn ánh và chính quy của f nên theo mệnh đề 2.2.2.3 ta có: $h = hff' = \bar{\partial}f'$. Điều này cho thấy h là ánh xạ thu hẹp nhất liên tục nên theo mệnh đề 2.2.2.4 ta có h là ánh xạ liên tục trên B .

Ta có $gf = \partial = j\bar{\partial} = jhf$ mà f toàn xạ nên $g = jh$. Theo tính chất đồng cấu $\text{Im } g$, ta có cấu xạ $\mu: X_2 \rightarrow X_1$ sao cho $i = j\mu$. Dễ kiểm tra đồng cấu μ là ánh xạ nhúng từ X_2 đến X_1 ; đồng thời μ là một song xạ. Vì thế với mọi tập mở $G \in \mathcal{T}_1$ thì $G = \mu^{-1}(G) \in \mathcal{T}_2$; mọi tập mở trong X_1 đều là mở trong X_2 . Nhờ vậy hai tôpô $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ là bằng nhau, từ đó hai không gian X_1, X_2 là bằng nhau; đồng thời hai cấu xạ $\text{Im } g = (i: X_2 \rightarrow C)$, $\text{Im } gf = (j: X_1 \rightarrow C)$ cũng bằng nhau. Vậy $\text{Im } gf = \text{Im } g$. ■

§3. VẬT XỬ DỤNG TRONG ĐỒ THỊ DO TÍNH NG ĐỒỊ

2.3.1 Vật xử dụng đồ

Định nghĩa 2.3.1.1

Trong phạm trù $\mathcal{L}$, không gian liên địa phương P được gọi là **vật xử dụng đồ** nếu với mọi toàn xử $\sigma: X \rightarrow Y$, mọi xử $f: P \rightarrow Y$ thì tồn tại một xử $\varphi: P \rightarrow X$ sao cho $f = \sigma\varphi$.

Định nghĩa 2.3.1.2

Trong phạm trù $\mathcal{L}$, không gian liên địa phương P được gọi là **vật xử dụng đồ** nếu với mọi toàn xử chính quy $\sigma: X \rightarrow Y$, mọi xử $f: P \rightarrow Y$ thì tồn tại một xử $\varphi: P \rightarrow X$ sao cho $f = \sigma\varphi$.

Ví dụ 2.3.1.3

Bên sao các vành hệt là vật xử dụng đồ.

Chứng minh:

Thật vậy, lấy bất kỳ toàn xử chính quy $\sigma: X \rightarrow Y$ và bất kỳ xử $f: \mathbb{R}e \rightarrow Y$. Khi đó, đặt $\varphi = \sigma' f$ thì φ là ánh xử thu nhận nhét liên tục từ $\mathbb{R}e$ đến X . Mà $\mathbb{R}e$ là không gian một chiều nên φ có thể coi như là ánh xử tuyến tính từ $\mathbb{R}e$ đến X nên theo mệnh đề 2.2.2.4 ta có φ là ánh xử tuyến tính liên tục. Ta có $\varphi = \sigma' f$, do σ là toàn xử chính quy nên theo mệnh đề 2.2.2.3 ta có: $\sigma\varphi = (\sigma\sigma') f = 1_Y f = f$.

Vậy $\mathbb{R}e$ là vật xử dụng đồ. ■

Ví dụ 2.3.1.4

Tổng trực tiếp bên sao các trường hệt $\mathbb{R}$ là vật xử dụng đồ.

Chứng minh:

Ta chỉ cần chứng minh $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ là vñt xñ nh tñ ng đñi.

Thñt vñy, lñy bñt kỳ toàn xñ chính quy $\sigma : X \rightarrow Y$ và bñt kì cñu xñ $f : \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \rightarrow Y$. Khi đó ta có các cñu xñ $f_1 = f|_{\mathbb{R}e_1} : \mathbb{R}e_1 \rightarrow Y$ và $f_2 = f|_{\mathbb{R}e_2} : \mathbb{R}e_2 \rightarrow Y$ nên theo ví dñ 2.3.1.3 chúng cñm sinh các đñ ng cñu $\varphi_1 : \mathbb{R}e_1 \rightarrow X$ và $\varphi_2 : \mathbb{R}e_2 \rightarrow X$ sao cho $\sigma\varphi_1 = f_1$ và $\sigma\varphi_2 = f_2$. Theo tính chñt cñ a tñ ng trñ c tñ p thì tñ n tñ i đñ ng cñu φ sao cho $\varphi_1 = \varphi i_1$ và $\varphi_2 = \varphi i_2$. Suy ra:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi(i_1\pi_1 + i_2\pi_2) = (\varphi i_1)\pi_1 + (\varphi i_2)\pi_2 = \varphi_1\pi_1 + \varphi_2\pi_2 \\ \Rightarrow \sigma\varphi &= (\sigma\varphi_1)\pi_1 + (\sigma\varphi_2)\pi_2 = f_1\pi_1 + f_2\pi_2 = f i_1\pi_1 + f i_2\pi_2 = f(i_1\pi_1 + i_2\pi_2) = f\end{aligned}$$

Đñu này có nghĩa là $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ là vñt xñ nh tñ ng đñi. ■

2.3.2 Vñt tñ do tñ ng đñi sinh bñ i mñ t không gian tôpô thuñ n nhñt

Đñnh nghĩa 2.3.2.1

Cho X là mñ t không gian tôpô thuñ n nhñt. Không gian lñ i đñ a phñ ng đñ c gñ i là vñt tñ do tñ ng đñi sinh bñ i X , kí hiñu $L(X)$, nñu có ánh xñ nhúng thuñ n nhñt liên tñ c $j_X : X \rightarrow L(X)$ có tính chñt phñ đñ ng đñi vñ i mñ i ánh xñ thuñ n nhñt liên tñ c $f : X \rightarrow Y$, trong đó Y là không gian lñ i đñ a phñ ng; nghĩa là mñ i ánh xñ thuñ n nhñt liên tñ c $f : X \rightarrow Y$ (vñ i Y là không gian lñ i đñ a phñ ng) đñu có thñ mñ rñ ng tñ i mñ t ánh xñ duy nhñt tuyñn tính liên tñ c $\varphi : L(X) \rightarrow Y$ sao cho $f = \varphi \cdot j_X$.

Mñnh đñ 2.3.2.2

Mñ i không gian tôpô thuñ n nhñt X đñu có vñt tñ do tñ ng đñi sinh bñ i nó.

Chñ ng minh:

Lñy mñ t không gian tôpô thuñ n nhñt X bñt kì và gñ i $(e_i)_{i \in J}$ là cñ sñ thuñ n nhñt cñ a X . Khi đó ta xây đñ ng không gian vectñ $L(X) = \bigoplus_{i \in J} \mathbb{R}e_i$ và vñ i mñ i $i \in J$, ta có $j_i : \mathbb{R}e_i \rightarrow L(X) = \bigoplus_{i \in J} \mathbb{R}e_i$ là ánh xñ nhúng thñ i. Ta xây đñ ng ánh xñ nhúng thuñ n nhñt

$j_X : X \rightarrow L(X)$, mà với mọi $i \in J$ thì $j_X(e_i) = j_i(1.e_i)$ nên $L(X)$ được định nghĩa như trên là một không gian vectơ có cơ sở là $(j_X(e_i))_{i \in J}$.

Với mọi lân cận $V \in \mathcal{U}_X$ thì theo mệnh đề 2.2.1.6 mọi dãy tăng $\mathbb{R}e_i$, với $i \in J$, đều chứa một vệt V_i trên lân cận V . Khi đó ta gọi U là bao lồi tuyến tính của $\bigcup_{i \in J} j_X(V_i)$. Và

$\mathcal{D}$ là tập hợp tất cả các U được xây dựng theo cách này. Với mọi $U \in \mathcal{D}$ thì tồn tại $V \in \mathcal{U}_X$ sao cho U là bao lồi tuyến tính của $\bigcup_{i \in J} j_X(V_i)$. Và ta sẽ chứng minh $\mathcal{D}$ này làm

thành cơ sở lân cận của một tôpô địa phương trên $L(X)$ nghĩa là chứng minh

$\mathcal{D}$ thỏa các tính chất C1 – C3 của mệnh đề 1.3.3.2.

- Với mọi $U \in \mathcal{D}$, ta phải chứng minh U là tập hút:

Theo cách xây dựng $\mathcal{D}$ thì có $V \in \mathcal{U}_X$ sao cho U là bao lồi tuyến tính của

$\bigcup_{i \in J} j_X(V_i)$. Với mọi $y \in L(X)$ do $(j_X(e_i))_{i \in J}$ là cơ sở của $L(X)$ nên tồn tại các số

$r_{i_1}, \dots, r_{i_n} \neq 0$ sao cho $y = r_{i_1} j_X(e_{i_1}) + \dots + r_{i_n} j_X(e_{i_n})$. Rõ ràng các phần tử $r_{i_1} e_{i_1}, \dots, r_{i_n} e_{i_n}$ là thuộc về không gian tôpô thu hẹp nhất X . Vì V là tập hút trong X nên với mọi số nguyên j , $1 \leq j \leq n$, tồn tại các số dương α_{i_j} mà với mọi μ , $|\mu| \geq \alpha_{i_j}$, thì $r_{i_j} e_{i_j} \in \mu V$. Đặt

$\alpha = \max \{ \alpha_{i_j} \mid j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n \}$ thì $r_{i_j} e_{i_j} \in \alpha V$, với mọi j ; nên $r_{i_j} e_{i_j} \in \alpha V_{i_j}$ với mọi j . Suy

ra $r_{i_j} j_X(e_{i_j}) \in j_X(\alpha V_{i_j})$ với mọi j do đó:

$$r_{i_j} j_X(e_{i_j}) \in \bigcup_{i \in J} j_X(\alpha V_i) = \alpha \left(\bigcup_{i \in J} j_X(V_i) \right) \subset \alpha U \text{ với mọi số nguyên } j, 1 \leq j \leq n.$$

Mà U là tập hút tuyến tính nên αU cũng tuyến tính, suy ra:

$$\frac{1}{n} y = \frac{1}{n} (r_{i_1} j_X(e_{i_1})) + \dots + \frac{1}{n} (r_{i_n} j_X(e_{i_n})) \in \alpha U \Rightarrow y \in n\alpha U.$$

Vậy U là tập hút nên suy ra $\mathcal{D}$ thỏa C3.

- Chứng minh $\mathcal{D}$ thỏa C1 nghĩa là nếu có $U^1, U^2 \in \mathcal{D}$ ta chứng minh có $U^3 \in \mathcal{D}$ sao cho $U^3 \subset U^1 \cap U^2$.

Theo cách xây dựng $\mathcal{D}$ thì có $V^1, V^2 \in \mathcal{U}_X$ sao cho U^1, U^2 lần lượt là bao tuyến tính của $\bigcup_{i \in J} j_X(V_i^1)$ và $\bigcup_{i \in J} j_X(V_i^2)$. Theo định nghĩa 2.2.1.5 thì có $V^3 \in \mathcal{U}_X$ sao cho

$V^3 \subset V^1 \cap V^2$; suy ra $V_i^3 \subset V_i^1 \cap V_i^2$, với mọi $i \in J$. Do đó U^3 là bao tuyến tính của $\bigcup_{i \in J} j_X(V_i^3)$, $U^3 \in \mathcal{D}$. Lấy bất kỳ phần tử $y \in U^3$, khi đó có các phần tử

$$r_{i_1} j_X(e_{i_1}), \dots, r_{i_n} j_X(e_{i_n}) \in \bigcup_{i \in J} j_X(V_i^3) \text{ và các số } \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}, \sum_{j=1}^n |\lambda_{i_j}| \leq 1, \text{ sao cho}$$

$$y = \lambda_{i_1} (r_{i_1} j_X(e_{i_1})) + \dots + \lambda_{i_n} (r_{i_n} j_X(e_{i_n})).$$

Mà $V_i^3 \subset V_i^1 \cap V_i^2$ nên $r_{i_1} j_X(e_{i_1}), \dots, r_{i_n} j_X(e_{i_n})$ đều thuộc vào $\bigcup_{i \in J} j_X(V_i^1)$ và

$\bigcup_{i \in J} j_X(V_i^2)$, hence nên $U^1 \cap U^2$ là tập tuyến tính nên:

$$y = \lambda_{i_1} (r_{i_1} j_X(e_{i_1})) + \dots + \lambda_{i_n} (r_{i_n} j_X(e_{i_n})) \in U^1 \cap U^2, \text{ nghĩa là } U^3 \subset U^1 \cap U^2.$$

- Chứng minh $\mathcal{D}$ thỏa C2, nghĩa là nếu có $U \in \mathcal{D}$ và mọi số $\alpha \neq 0$ ta sẽ chứng minh $\alpha U \in \mathcal{D}$.

Theo cách xây dựng $\mathcal{D}$ thì có $V \in \mathcal{U}_X$ sao cho U là bao tuyến tính của $\bigcup_{i \in J} j_X(V_i)$.

Mà theo T2 của định nghĩa 2.2.1.5 thì $\alpha V \in \mathcal{U}_X$, do đó thay vào $(\alpha V)_i = \alpha V_i$ nên

$$j_X[(\alpha V)_i] = \alpha j_X(V_i). \text{ Gọi } W \text{ là bao tuyến tính của } \bigcup_{i \in J} \alpha j_X(V_i). \text{ Vì:}$$

$$\bigcup_{i \in J} \alpha j_X(V_i) = \alpha \bigcup_{i \in J} j_X(V_i) \subset \alpha U$$

Ta có U là tập tuyến tính thì αU là tập tuyến tính, W là tập tuyến tính nên W là bao tuyến tính của $\bigcup_{i \in J} \alpha j_X(V_i)$ nên $W \subset \alpha U$. Mặt khác, lấy bất kỳ phần tử $y \in \alpha U$, tồn tại $x \in U$ sao cho

$y = \alpha x$. Khi đó có các phần tử $r_{i_1} j_X(e_{i_1}), \dots, r_{i_n} j_X(e_{i_n}) \in \bigcup_{i \in J} j_X(V_i)$ và các số $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$,

$\sum_{j=1}^n |\lambda_{i_j}| \leq 1$, sao cho $x = \lambda_{i_1} (r_{i_1} j_X(e_{i_1})) + \dots + \lambda_{i_n} (r_{i_n} j_X(e_{i_n}))$; suy

ra: $y = \alpha x = \lambda_{i_1} (\alpha r_{i_1} j_X(e_{i_1})) + \dots + \lambda_{i_n} (\alpha r_{i_n} j_X(e_{i_n}))$. Mà các

$\alpha r_{i_1} j_X(e_{i_1}), \dots, \alpha r_{i_n} j_X(e_{i_n}) \in \bigcup_{i \in J} \alpha j_X(V_i)$, trong đó W là bao tuyến tính của $\bigcup_{i \in J} \alpha j_X(V_i)$,

nên: $y = \alpha x = \lambda_{i_1} (\alpha r_{i_1} j_X(e_{i_1})) + \dots + \lambda_{i_n} (\alpha r_{i_n} j_X(e_{i_n})) \in W$.

Suy ra $\alpha U \subset W$. Vậy $\alpha U = W$ nên thuộc vào $\mathcal{D}$. Như vậy ta chứng minh được $\mathcal{D}$ thỏa C2.

Nên $\mathcal{D}$ làm thành cơ sở của một tôpô liên địa phương $\mathcal{T}_{L(X)}$ trên $L(X)$. Xét ánh xạ nhúng $j_X : X \rightarrow L(X)$, ta chứng minh j_X là ánh xạ thuôn nhót liên tục. Thật vậy, lấy bất kỳ lân cận $U \in \mathcal{D}$, khi đó có $V \in \mathcal{U}_X$ sao cho U là bao tuyến tính của $\bigcup_{i \in J} j_X(V_i)$.

Với mỗi $x \in V$, vì $(e_i)_{i \in J}$ là cơ sở thuôn nhót của X nên tồn tại $i \in J$ và số r_i sao cho $x = r_i e_i$, điều này có nghĩa là x thuộc vào vết V_i ; suy ra:

$$j_X(x) = r_i j_X(e_i) \in j_X(V_i) \subset \bigcup_{i \in J} j_X(V_i) \subset U$$

Vậy $j_X(V) \subset U$. Điều này chứng tỏ j_X là ánh xạ thuôn nhót liên tục.

Sau đây ta phải chứng minh $L(X)$ được xây dựng nhô trên là vết tự do tôpô sinh bởi không gian tôpô thuôn nhót X , nghĩa là với bất kỳ một không gian liên địa phương Y và bất kỳ ánh xạ thuôn nhót liên tục $f : X \rightarrow Y$, ta phải chứng minh tồn tại duy nhất φ làm biểu thức (2.14) sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_X} & L(X) \\ \downarrow f & & (2.14) \\ Y & & \end{array}$$

Vì $\{e_i\}_{i \in J}$ là cơ sở của X là cơ sở của $L(X)$ nên với mỗi $i \in J$, ta đặt $\varphi(j_X(e_i)) = f(e_i)$. Bởi vì $\{e_i\}_{i \in J}$ là cơ sở nên ta xác định duy nhất ánh xạ tuyến tính $\varphi: L(X) \rightarrow Y$. Dễ dàng $\varphi j_X = f$.

Ta chứng minh φ là liên tục tại gốc. Thật vậy, lấy bất kỳ lân cận tùy ý W của $0 \in Y$ vì f là ánh xạ tuyến tính liên tục nên có lân cận $V \in \mathcal{U}_X$ sao cho $f(V) \subset W$.

Ta gọi U là bao tùy ý của $\bigcup_{i \in J} j_X(V_i)$ và chứng minh $\varphi(U) \subset W$. Với mỗi

$y \in U$ thì có các phần tử $r_{i_1} j_X(e_{i_1}), \dots, r_{i_n} j_X(e_{i_n}) \in \bigcup_{i \in J} j_X(V_i)$ và các số $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$,

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_{i_j}| \leq 1, \text{ sao cho: } y = \lambda_{i_1} (r_{i_1} j_X(e_{i_1})) + \dots + \lambda_{i_n} (r_{i_n} j_X(e_{i_n})).$$

Ta có $r_{i_1} e_{i_1}, \dots, r_{i_n} e_{i_n}$ thuộc vào các vectơ V_i của V nên cũng thuộc vào V . Nhờ vậy với mỗi số nguyên j , $1 \leq j \leq n$, ta có $\varphi(r_{i_j} j_X(e_{i_j})) = f(r_{i_j} e_{i_j}) \in f(V) \subset W$. Mà H tùy ý tùy ý nên:

$$\varphi(y) = \lambda_{i_1} f(r_{i_1} e_{i_1}) + \dots + \lambda_{i_n} f(r_{i_n} e_{i_n}) \in W$$

Vậy $\varphi(U) \subset W$ nên φ là liên tục tại gốc, do vậy nó cũng liên tục.

Tóm lại ta đã chứng minh được $L(X)$ là vectơ topo do đó $L(X)$ là sinh bởi không gian tôpô tuyến tính X .

Hơn nữa, vectơ topo $L(X)$ là duy nhất theo nghĩa, nếu F là vectơ topo $L(X)$ thì hai sinh bởi X thì F và $L(X)$ đồng nhất với nhau. Thật vậy, F là vectơ topo

tổn vẹn đến sinh bởi X cùng với ánh xạ nhúng tuyến tính liên tục $j: X \rightarrow F$ có tính phổ dụng đến với ánh xạ tuyến tính liên tục $j_X: L(X) \rightarrow X$; nghĩa là có duy nhất ánh xạ tuyến tính liên tục $\varphi: F \rightarrow L(X)$ sao cho $\varphi j = j_X$ (2.15).

Ngược lại ta cũng có duy nhất ánh xạ tuyến tính liên tục $\psi: L(X) \rightarrow F$ sao cho $\psi j_X = j$ (2.16).

Từ (2.15) và (2.16) ta suy ra $\psi\varphi j = j$ mà $\psi\varphi: F \rightarrow F$ là ánh xạ tuyến tính liên tục. Hơn nữa, $1_F \cdot j = j$ nên theo tính phổ dụng của j đến với ánh xạ tuyến tính liên tục $j: X \rightarrow F$ thì chỉ có duy nhất một ánh xạ tuyến tính $F \rightarrow F$ làm cho biểu thức (2.17) giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & F \\ \downarrow j & & (2.17) \\ F & & \end{array}$$

Do vậy $\psi\varphi = 1_F$. Tương tự $\varphi\psi = 1_{L(X)}$. Vậy F và $L(X)$ đẳng cấu với nhau. Do đó có duy nhất một vectơ t do tổn vẹn đến sinh bởi X và nó nhúng vào S tuyến tính của X làm cần S . Ta cũng kí hiệu cần S lân cận của $L(X)$ là $\mathcal{D}_X$ mà $\mathcal{D}_X$ là $\mathcal{D}$ được xây dựng như trên. ■

Trước khi kết thúc phần này ta đưa ra một kết quả mà còn được gọi là “tính phổ nghiệm của các vectơ t do tổn vẹn đến” làm cần S cho việc xây dựng phép giới hạn do tổn vẹn đến sau này:

Mệnh đề 2.3.2.3

Mọi không gian l là ph X đẳng cấu với không gian th c a một vectơ t do tổn vẹn đến nào đó.

Chứng minh:

Xét vectơ t do tổn vẹn đến $L(X)$ sinh bởi X và $\mathcal{D}$ là cần lân cận của $L(X)$ thỏa các điều kiện của mệnh đề 1.3.3.2. Do tính phổ dụng của ánh xạ tuyến tính liên tục

$j_X : X \rightarrow L(X)$ đồng vị ánh xạ tuyến tính liên tục $1_X : X \rightarrow X$ nên tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục $p : L(X) \rightarrow X$ sao cho $pj_X = 1_X$ (2.18). Dễ kiểm tra j là đồng ánh và p là toàn ánh. Từ (2.18) suy ra p là toán tử chính quy từ $L(X)$ đến X . Theo hệ quả 1.4.3.5, p có thể được phân tích như sau:

$$p : L(X) \xrightarrow{\pi} L(X) / p^{-1}(0) \xrightarrow{\bar{p}} X \quad (2.19)$$

trong đó $\bar{p} : L(X) / p^{-1}(0) \rightarrow X : \bar{x} \mapsto p(x)$. Ta có $p = \bar{p}\pi$, vì p là toàn ánh nên $\bar{p}$ là toàn ánh; suy ra $\bar{p}$ là toàn xạ. Tôpô trên $L(X) / p^{-1}(0)$ là tôpô thông thường được xây dựng trong mệnh đề 1.4.1.3.

Xét ánh xạ $\bar{j}_X : X \rightarrow L(X) / p^{-1}(0) : x \mapsto \overline{j_X(x)}$, do $\bar{j}_X$. Ta chứng minh $\bar{j}_X$ liên tục đồng khả. Lấy bất kỳ lân cận $\pi(U)$ trong $L(X) / p^{-1}(0)$, với $U \in \mathcal{D}_X$, do j_X là ánh xạ thu nhận nhất liên tục nên có $V \in \mathcal{U}_X$ để $j_X(V) \subset U$. Suy ra $\bar{j}_X(V) = \pi[j_X(V)] \subset \pi(U)$. Vậy $\bar{j}_X$ liên tục đồng khả. Giờ ta sẽ chứng minh $\bar{j}_X$ là ánh xạ tuyến tính. Thật vậy với mọi $x, y \in X$ và mọi α, β , do (2.18) ta có:

$$\begin{aligned} pj_X(\alpha x + \beta y) &= 1_X(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = 1_X(\alpha x) + 1_X(\beta y) \\ &= pj_X(\alpha x) + pj_X(\beta y) = p[j_X(\alpha x) + j_X(\beta y)] \\ \Rightarrow j_X(\alpha x + \beta y) - [j_X(\alpha x) + j_X(\beta y)] &\in p^{-1}(0) \\ \Rightarrow \overline{j_X(\alpha x + \beta y)} &= \overline{j_X(\alpha x + \beta y)} = \overline{[j_X(\alpha x) + j_X(\beta y)]} = \overline{j_X(\alpha x)} + \overline{j_X(\beta y)} \end{aligned}$$

Vậy $\bar{j}_X$ là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Ngoài ra, với mọi $x \in X$ ta có $\overline{pj_x}(x) = \overline{p(j_x(x))} = p(j_x(x)) = 1_x(x)$. Với y
 $\overline{pj_x} = 1_x$. Và với mọi $\bar{y} \in L(X) \setminus p^{-1}(0)$ ta có $\overline{j_x p}(\bar{y}) = \overline{j_x(p(y))} = \overline{j_x p(y)}$. Hơn
nữa: $p(y - j_x p(y)) = p(y) - pj_x p(y) = p(y) - 1_x p(y) = 0$.
Suy ra $y - j_x p(y) \in p^{-1}(0)$ hay $\bar{y} = \overline{j_x p(y)}$. Với $\bar{y} \in L(X) \setminus p^{-1}(0)$.

Như thế ta đã chứng minh được X đồng đẳng với $L(X) \setminus p^{-1}(0)$. ■

Ví dụ với các vectơ x như trong ví dụ, ta có:

Mệnh đề 2.3.2.4

Vết t do t đồng đẳng sinh bởi không gian tuyến tính t là vectơ x như trong ví dụ.

Chứng minh:

Giả sử $L(X)$ là vectơ t do t đồng đẳng sinh bởi không gian tôpô tuyến tính X , giả sử
 $(e_i)_{i \in J}$ là cơ sở tuyến tính của X nên có $(j_x(e_i))_{i \in J}$ là cơ sở của $L(X)$.

Ta chứng minh $L(X)$ là vectơ x như trong ví dụ. Xét $\forall y$, lấy bất kỳ toàn x chính
quy $\sigma : A \rightarrow B$ và bất kỳ $f : L(X) \rightarrow B$.

Đặt $g = \sigma' f : X \xrightarrow{j_x} L(X) \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\sigma'} A$ thì g là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Nên theo tính chất đồng đẳng của ánh xạ $j_x : X \rightarrow L(X)$ để $\forall$ ánh xạ tuyến tính liên tục g
thì tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục $\varphi : L(X) \rightarrow A$ sao cho $\varphi j_x = g$. Suy ra
 $\varphi j_x = g = \sigma' f$; đồng đẳng $\sigma \varphi j_x = \sigma \sigma' f = f$ (do σ là toàn x). Vì $\sigma \varphi j_x = f$ nên
 $\sigma \varphi(j_x(e_i)) = \sigma \varphi j_x(e_i) = f(e_i) = f(j_x(e_i))$ với mọi $i \in J$. Như vậy $\sigma \varphi$ và f là
hai ánh xạ tuyến tính có ảnh bằng nhau trên cơ sở nên bằng nhau. Với $\sigma \varphi = f$, do đó
 $L(X)$ là vectơ x như trong ví dụ. ■

Từ kết quả của mệnh đề 2.3.2.4 và từ “tính đồng nhất của L p các vectơ do tính đồng nhất”, ta suy ra “tính đồng nhất của L p các vectơ x đồng nhất tính đồng nhất”.

Sau cùng ta trình bày hình thức liên hệ giữa không gian L và L p đồng nhất với dãy khớp ngắn “đồng nhất” sau:

Mệnh đề 2.3.2.5

Mọi không gian L và L p đồng nhất X có sinh một dãy khớp ngắn:

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} L(X) \xrightarrow{\pi} X \rightarrow 0$$

trong đó i và π còn là các toán tử chính quy.

Chứng minh:

Theo mệnh đề 2.3.2.3, không gian L và L p đồng nhất X đồng nhất với $L(X)/p^{-1}(0)$ và có toàn x chính quy $p: L(X) \rightarrow X$. Khi đó ta có hình thức nhân của p , $i: p^{-1}(0) \rightarrow L(X)$ là đồng nhất nên theo mệnh đề 2.2.2.5 ta có i là chính quy. Mặt khác, do i là đồng nhất nên theo mệnh đề 1.4.3.7 ta có $\text{Im } i = i$. Từ đó $\text{Im } i = i = \text{Ker } p$. Như vậy ta có dãy khớp ngắn sau: $0 \rightarrow p^{-1}(0) \xrightarrow{i} L(X) \xrightarrow{p} X \rightarrow 0$.

Đây là điều cần phải chứng minh. ■

Mệnh đề 2.3.2.6

Trong phạm vi các không gian L và L p đồng nhất, cho biểu thức giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f \downarrow & & \\ X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z & & \end{array} \quad (2.20)$$

trong đó dòng dọc là khớp, α, β là các toán tử chính quy và A là vectơ đồng nhất tính đồng nhất. Hơn nữa $\beta f = 0$. Khi đó tồn tại $g: A \rightarrow X$ sao cho biểu thức giao hoán; nghĩa là $\alpha g = f$

Chứng minh:

Giả sử α có thể phân tích qua i như là $\alpha : X \xrightarrow{\bar{\alpha}} \alpha(X) \xrightarrow{i} Y$. Do dòng đồng nhất trong biểu đồ (2.10) là khớp nên $i : \alpha(X) \rightarrow Y$ là hàm nhúng của β ; do đó $\alpha(X) = \beta^{-1}(0)$. Mà theo giả thiết $\beta f = 0$ nên ta suy ra $f(A) \subset \beta^{-1}(0) = \alpha(X)$. Do vậy ta xây dựng đồng cấu ánh xạ tuyến tính $\partial : A \rightarrow \alpha(X) : a \mapsto f(a)$.

Nhận thấy f có thể phân tích đồng nhất $f : A \xrightarrow{\partial} \alpha(X) \xrightarrow{i} Y$, $f = i\partial$ (2.21). Theo bổ đề 2.2.2.6 ta có đồng cấu i là toán tử chính quy và theo mệnh đề 2.2.2.3 tồn tại ánh xạ thu hẹp nhất liên tục i' sao cho $i'i = 1_{\alpha(X)}$. Từ đồng thức (2.21), suy ra:

$i'f = i'i\partial = \partial$ cho thấy ∂ là ánh xạ thu hẹp nhất liên tục nên theo mệnh đề 2.2.2.4 ta có ∂ liên tục. Khi đó ta có biểu đồ (2.22) các ánh xạ tuyến tính liên tục sau:

$$\begin{array}{c} A \\ \partial \downarrow \\ X \xrightarrow{\bar{\alpha}} \alpha(X) \end{array} \quad (2.22)$$

Mà $\bar{\alpha}$ là toàn ánh tuyến tính liên tục, chính quy (theo mệnh đề 2.2.2.6) và A là véc-tơ không gian tôpô nên do tính phổ dụng của véc-tơ không gian tôpô nên đồng cấu $g : A \rightarrow X$ sao cho biểu đồ (2.11) giao hoán, nghĩa là $\bar{\alpha}g = \partial$ do đó $\alpha g = i\bar{\alpha}g = i\partial = f$, và đây là điều cần phải chứng minh. ■

Mệnh đề 2.3.2.7

Trong phạm trù các không gian lồi địa phương, cho biểu đồ (2.23) giao hoán:

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Z_1 \\ & & f \downarrow & & g \downarrow \\ X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Z_2 \end{array} \quad (2.23)$$

trong đó dòng trên khớp, dòng đồng nhất là khớp với các α_2, β_2 là toán tử chính quy, X_1 là véc-tơ không gian tôpô. Khi đó tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục $h : X_1 \rightarrow X_2$ làm cho biểu đồ (2.23) giao hoán.

Chứng minh:

Do biểu thức (2.12) giao hoán và hai dòng khớp nên $\beta_2 f \alpha_1 = g(\beta_1 \alpha_1) = g.0 = 0$. Vì dòng đầu tiên trong biểu thức (2.12) là khớp, các α_2, β_2 là các toán tử chính quy, X_1 là véc-tơ xấp xỉ nhúng nên theo mệnh đề 2.3.2.6 tồn tại cặp $h: X_1 \rightarrow X_2$ sao cho $\alpha_2 h = f \alpha_1$. Và đó là điều ta cần phải chứng minh. ■

§4. XÂY DỰNG HÀM TỌA EXT TRONG PHẠM TRÙ CÁC KHÔNG GIAN LƯỚI ĐẠA PHẠM NG

2.4.1 Phép giãi xấp xỉ nhúng

Định nghĩa 2.4.1.1

Cho A là mô-tơ không gian lưới đa phạm ng tùy ý, ta gọi **phép giãi xấp xỉ nhúng** của A là mô-tơ dãy khớp các véc-tơ xấp xỉ nhúng và các toán tử chính quy:

$$\dots \rightarrow X_n \xrightarrow{\partial} X_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0 \quad (2.24)$$

Nói riêng, nếu X_n là véc-tơ do tđ ng đđi (t.đ. véc-tơ xấp xỉ nhúng đđi) với mọi $n \geq 0$ thì (2.24) được gọi là mô-tơ phép giãi tđ do tđ ng đđi (t.đ. phép giãi xấp xỉ nhúng đđi) của không gian lưới đa phạm ng A .

Từ “tính đủ nhiều của lớp các véc-tơ do tđ ng đđi”, ta có định lý sau sẽ khẳng định sự tồn tại của phép giãi xấp xỉ nhúng đđi.

Định lý 2.4.1.2

Mọi không gian lưới đa phạm ng A đều có mô-tơ phép giãi tđ do tđ ng đđi.

Chứng minh:

Theo mệnh đề 2.3.2.5 ta biết rằng với mọi không gian lưới đa phạm ng A thì tồn tại dãy khớp ngắn chính quy sau:

$$0 \rightarrow X_0 \xrightarrow{\alpha_0} L_0 \xrightarrow{\beta_0} A \rightarrow 0$$

với điều kiện α_0 , toàn β_0 là các toán tử chính quy; trong đó L_0 là vế phải do điều kiện.

Lại vì X_0 là không gian liên địa phương nên ta cũng có dãy khớp ngắn :

$$0 \rightarrow X_1 \xrightarrow{\alpha_1} L_1 \xrightarrow{\beta_1} X_0 \rightarrow 0$$

trong đó L_1 là vế phải do điều kiện và điều kiện α_1 , toàn β_1 là các toán tử chính quy.

Như vậy bằng phép quy nạp toán học ta thu được các dãy khớp ngắn :

$$0 \rightarrow X_n \xrightarrow{\alpha_n} L_n \xrightarrow{\beta_n} X_{n-1} \rightarrow 0$$

với mọi số nguyên $n > 0$, đó L_n là vế phải do điều kiện và điều kiện α_n , toàn β_n là các toán tử chính quy. Bây giờ ta lập dãy

$$\dots L_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} L_n \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow A \rightarrow 0 \quad (2.25)$$

trong đó L_n là các vế phải do điều kiện được xây dựng như trên, còn:

$$\partial_n = \begin{cases} \beta_0 & \text{khi } n = 0 \\ \alpha_{n-1}\beta_n & \text{khi } n \geq 1 \end{cases}$$

Định lý (2.25) là phép giải tích do điều kiện của A ta phải chứng minh nó là dãy khớp và các ∂ là các toán tử chính quy.

Với mọi $n > 0$, ta có α_n, β_n là các toán tử chính quy nên có các ánh xạ thu hẹp nhất liên tiếp α'_n, β'_n sao cho $\alpha'_n\alpha_n = 1_{X_n}$ và $\beta_n\beta'_n = 1_{X_{n-1}}$. Do đó với ánh xạ thu hẹp nhất liên tiếp $\partial_n = \alpha_{n-1}\beta_n : L_n \rightarrow L_{n-1}$, ta có ánh xạ thu hẹp nhất liên tiếp $\beta'_n\alpha'_{n-1} : L_{n-1} \rightarrow L_n$ mà:

$$\partial_n\beta'_n\alpha'_{n-1}\partial_n = \alpha_{n-1}(\beta_n\beta'_n)(\alpha'_{n-1}\alpha_{n-1})\beta_n = \alpha_{n-1}\beta_n. \text{ Với các } \partial \text{ là các toán tử chính quy.}$$

Do α_n là điều kiện, chính quy và β_n là toàn β_n , chính quy với mọi $n \geq 0$ nên theo mệnh đề 2.2.2.7 và mệnh đề 1.4.3.2 ta có:

$$\text{Im } \partial_{n+1} = \text{Im}(\alpha_n\beta_{n+1}) = \text{Im } \alpha_n = \text{Ker } \beta_n = \text{Ker}(\alpha_{n-1}\beta_n) = \text{Ker } \partial_n$$

tức là $\text{Im } \partial_{n+1} = \text{Ker } \partial_n$ với mọi $n \geq 0$. Đó là điều kiện phải chứng minh. ■

Theo định lý 2.4.1.2 ta đã chứng minh được các số hạng của phép giải tích liên tiếp do điều kiện của không gian liên địa phương A . Sau đây chúng ta sẽ chứng minh tính duy nhất của phép giải

x là một phức liên tục, theo nghĩa hai phép giới hạn của x tại bất kỳ a cùng một không gian là một phức liên tục A đều liên tục liên tục. Ta có điều kiện này như các mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.4.1.3

Cho $h: A \rightarrow B$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục của không gian liên tục A vào không gian liên tục B bất kỳ và

$$\dots \rightarrow X_n \xrightarrow{\partial} X_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

là một phức liên tục x tại bất kỳ a A ,

$$\dots \rightarrow Y_n \xrightarrow{\partial'} Y_{n-1} \xrightarrow{\partial'} \dots \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_0 \rightarrow B \rightarrow 0$$

là một phức liên tục y tại bất kỳ a B .

Khi đó, tồn tại các ánh xạ tuyến tính liên tục $f_n: X_n \rightarrow Y_n$, $n \geq 0$ sao cho biểu thức (2.26)

là giao hoán:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow X_n & \xrightarrow{\partial} & X_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots \rightarrow X_1 & \rightarrow & X_0 \rightarrow A \rightarrow 0 \\ f_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow & h \downarrow \\ \dots \rightarrow Y_n & \xrightarrow{\partial'} & Y_{n-1} & \xrightarrow{\partial'} & \dots \rightarrow Y_1 & \rightarrow & Y_0 \rightarrow B \rightarrow 0 \end{array} \quad (2.26)$$

Các ánh xạ tuyến tính liên tục f_n , $n \geq 0$ và h lập thành phép biến đổi dây chuyền $X \rightarrow Y$.

Chứng minh:

Vì X_0 là một phức liên tục và $\partial': Y_0 \rightarrow B$ là một phức liên tục, chính quy nên theo tính chất của một phức liên tục, tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục $f_0: X_0 \rightarrow Y_0$ sao cho biểu thức sau đây là giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\partial} & A \rightarrow 0 \\ f_0 \downarrow & & h \downarrow \\ Y_0 & \xrightarrow{\partial'} & B \rightarrow 0 \end{array}$$

thì $\partial' f_0 = h \partial$.

Giả sử với mọi $0 < m < n$ đã xây dựng được các ánh xạ tuyến tính liên tục

$f_m : X_m \rightarrow Y_m$ sao cho biểu đồ sau đây giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} X_m & \xrightarrow{\partial} & X_{m-1} \\ f_m \downarrow & & \downarrow f_{m-1} \\ Y_m & \xrightarrow{\partial'} & Y_{m-1} \end{array}$$

trong đó $f_{-1} = h$, $\forall m > 0, m < n$.

Xét biểu đồ giao hoán (2.27) sau:

$$\begin{array}{ccccc} X_n & \xrightarrow{\partial} & X_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & X_{n-2} \\ & & f_{n-1} \downarrow & & \downarrow f_{n-2} \\ Y_n & \xrightarrow{\partial'} & Y_{n-1} & \xrightarrow{\partial'} & Y_{n-2} \end{array} \quad (2.27)$$

trong đó do hai dòng là khớp với các ánh xạ ∂, ∂' là các toán tử chính quy và các không gian liên tiếp địa phương trên (2.27) là vật xạ khớp nên theo mệnh đề 2.3.2.7 thì tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ sao cho biểu đồ (2.27) là giao hoán. ■

Như thế, ta đã hoàn thành phép xây dựng các cấu xạ của phép biến đổi dây chuyền từ X đến Y . Hơn nữa, chúng ta còn có kết quả sau:

Mệnh đề 2.4.1.4

Cho X, Y là các phức xạ khớp liên tiếp của các không gian liên tiếp địa phương A, B như trong mệnh đề 2.1.4 và $f = \{f_n, h \mid n \geq 0\}$, $g = \{g_n, h \mid n \geq 0\}$ là các phép biến đổi dây chuyền $X \rightarrow Y$. Khi đó f đồng luân với g .

Chứng minh:

Ta phải xây dựng các cấu xạ: $k_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$ sao cho:

$$\partial' k_n + k_{n-1} \partial = f_n - g_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trước hết ta đặt $k_{-1} = 0 : A \rightarrow Y_0$.

Giả sử $n \geq 0$ và ta đã dựng được các ánh xạ tuyến tính liên tục $k_m : X_m \rightarrow Y_{m+1}$ với mọi $0 \leq m < n$ sao cho: $\partial' k_m + k_{m-1} \partial = f_m - g_m$.

Xét biểu đồ (2.28):

$$\begin{array}{c} X_n \\ j \downarrow \\ Y_{n+1} \xrightarrow{\partial'} Y_n \rightarrow Y_{n-1} \end{array} \quad (2.28)$$

trong đó j là ánh xạ tuyến tính liên tục: $j = f_n - g_n - k_{n-1}\partial$.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \partial'_n j &= \partial'_n f_n - \partial'_n g_n - \partial'_n k_{n-1} \partial_n \\ &= \partial'_n f_n - \partial'_n g_n - (f_{n-1} - g_{n-1} - k_{n-2} \partial_{n-1}) \partial_n \\ &= \partial'_n f_n - \partial'_n g_n - (f_{n-1} \partial_n - g_{n-1} \partial_n - k_{n-2} \partial_{n-1} \partial_n) \\ &= \partial'_n f_n - \partial'_n g_n - (\partial'_n f_n - \partial'_n g_n - 0) = 0 \end{aligned}$$

Do dòng biểu đồ (2.28) là khớp với các ánh xạ ∂ là các toán tử chính quy, X_n là vật thể xạ tuyến tính nên theo mệnh đề 2.3.2.6 tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục

$k_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$ sao cho: $\partial' k_n = j = f_n - g_n - k_{n-1} \partial$. Suy ra $\partial' k_n + k_{n-1} \partial = f_n - g_n$. Mệnh đề đã đề cập chứng minh. ■

Từ hai mệnh đề trên ta thu được định lý sau:

Định lý 2.4.1.5

Hai phép giới xạ tuyến tính đồng biến bất kỳ của cùng một không gian lồi địa phương A đều tuyến tính đồng biến luân.

Chứng minh:

$$\text{Giả sử } X : \dots X_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

$$\text{và } X' : \dots X'_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} X'_n \xrightarrow{\partial'_n} X'_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X'_1 \rightarrow X'_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

là hai phép giới xạ tuyến tính đồng biến bất kỳ của cùng một không gian lồi địa phương A .

Khi đó tồn tại phép biến đổi dây chuyền:

$$f = \{ f_n : X_n \rightarrow X'_n \mid n \geq -1 \}$$

$$g = \{ g_n : X_n \rightarrow X'_n \mid n \geq -1 \}$$

trong đó f_{-1}, g_{-1} là cấu xạ 1_A .

Khi đó theo mệnh đề 2.4.1.4 ta có gf đồng luân với t đồng cấu đồng nhất của X , fg đồng luân với t đồng cấu đồng nhất của X' . Vậy X và X' tương đương đồng luân với nhau. ■

Với với mỗi không gian n địa phương A ta đã chứng minh được luôn tồn tại duy nhất theo nghĩa tương đương đồng luân phép giãi xạ n nh t n $đ$ i c a A . Sau đây ta sẽ trình bày cách xây dựng hàm t Ext^n bằng phép giãi xạ n nh t n $đ$ i c a A trong phạm trù các không gian n địa phương.

2.4.2 Xây dựng hàm t m r ng Ext^n

Định nghĩa 2.4.2.1

Cho A và B là các không gian n địa phương và

$$\dots \rightarrow X_n \xrightarrow{\partial} X_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

là phép giãi xạ n nh t n $đ$ i c a A .

Xét dãy: $Hom(X, B) : \dots \rightarrow Hom(X_n, B) \xrightarrow{\delta} Hom(X_{n+1}, B) \rightarrow \dots$

Khi đó với mỗi số nguyên dương n , $đ$ i $đ$ ng $đ$ i u $H^n(Hom(X, B))$ gọi là **tích m r ng $n - chi$ u** của các không gian n địa phương A và B đã cho và $đ$ i c k i hi u là $Ext^n(A, B)$.

Với $n = 1$, ta dùng kí hiệu $Ext(A, B)$ và gọi nó là tích m r ng của các không gian n địa phương A và B . Ngoài ra, ta cũng định nghĩa $Ext^0(A, B) = Hom(A, B)$.

Theo mệnh đề 2.4.1.5 và định lý 2.1.3.4 ta chứng minh được rằng các nhóm $đ$ i $đ$ ng $đ$ i u $H^n(Hom(X, B))$ không phụ thuộc vào cách chọn phép giãi xạ n nh t n $đ$ i c a không gian n địa phương A . Nghĩa là nếu X' cũng là phép giãi xạ n nh của A thì ta có: $H^n(Hom(X, B)) \cong H^n(Hom(X', B))$.

Do đó định nghĩa tích m r ng nh $trên$ là hợp lý.

Định nghĩa 2.4.2.2

Cho A là môđun không gian n i địa phương cđnh, hàm tđ $Ext^n(A, -)$ là hàm tđ tđ phẩm trừ các không gian n i địa phương đđn phẩm trừ các nhóm aben đđc xây dđng bđng cách cho tđ tđ ng tđ ng:

- Môđun không gian n i địa phương B vđi môđun nhóm $Ext^n(A, B)$.
- Môđun ánh xạ tuyến tính liên tđc $\alpha: B \rightarrow B'$ vđi môđun đđng cđu $\alpha_*: Ext^n(A, B) \rightarrow Ext^n(A, B')$ mà $\alpha_*(clsc) = cl(\alpha c)$ vđi môđun $clsc \in Ext^n(A, B)$.

Mệnh đề 2.4.2.3

Hàm tđ $Ext^n(A, -)$ là hàm tđ hiđp biđn, tđc là nó thđa hai tính chđt:

- $(1_B)_* = 1_{Ext^n(A, B)}$
- $(\alpha_2 \cdot \alpha_1)_* = (\alpha_2)_* (\alpha_1)_*$.

Chđng minh:

Vđi môđun $clsc \in Ext^n(A, B)$ thì $(1_B)_*(clsc) = cl(1_B \cdot c) = clsc$ nên suy ra $(1_B)_* = 1_{Ext^n(A, B)}$.

Cho các ánh xạ tuyến tính liên tđc $B \xrightarrow{\alpha_1} B_1 \xrightarrow{\alpha_2} B_2$.

Khi đó vđi môđun $clsc \in Ext^n(A, B)$ thì:

$$(\alpha_2 \cdot \alpha_1)_*(clsc) = cl(\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot c) = (\alpha_2)_* [cl(\alpha_1 \cdot c)] = (\alpha_2)_* (\alpha_1)_*(clsc).$$

Do đó hàm tđ $Ext^n(A, -)$ là hàm tđ hiđp biđn. ■

Định nghĩa 2.4.2.4

Cho B là không gian n i địa phương cđnh, hàm tđ $Ext^n(-, B)$ là hàm tđ tđ phẩm trừ các không gian n i địa phương đđn phẩm trừ các nhóm aben đđc xây dđng bđng cách cho tđ tđ ng tđ ng:

- Mọi không gian lồi địa phương A với mọi nhóm $Ext^n(A, B)$.
- Mọi ánh xạ tuyến tính liên tục $\gamma: A' \rightarrow A$ với mọi đồng cấu $\gamma^*: Ext^n(A, B) \rightarrow Ext^n(A', B)$ mà $\gamma^*(clsc) = clsc(\gamma)$ với mọi $clsc \in Ext^n(A, B)$.

Mệnh đề 2.4.2.5

Hàm từ $Ext^n(-, B)$ là hàm từ phân bố, tức là nó thỏa mãn hai tính chất:

$$iii) \quad (1_A)^* = 1_{Ext^n(A, B)}$$

$$iv) \quad (\gamma_1 \cdot \gamma_2)^* = (\gamma_2)^* (\gamma_1)^*.$$

Chứng minh:

Với mọi $clsc \in Ext^n(A, B)$ thì $(1_A)^*(clsc) = clsc(c \cdot 1_A) = clsc$ nên suy ra $(1_B)_* = 1_{Ext^n(A, B)}$.

Cho các ánh xạ tuyến tính liên tục $A_2 \xrightarrow{\gamma_2} A_1 \xrightarrow{\gamma_1} A$.

Khi đó với mọi $clsc \in Ext^n(A, B)$ thì:

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)^*(clsc) = clsc(c \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2) = (\gamma_2)^*[clsc(c \cdot \gamma_1)] = (\gamma_2)^*(\gamma_1)^*(clsc).$$

Do đó hàm từ $Ext^n(-, B)$ là hàm từ phân bố. ■

KẾT LUẬN

Sau khi nghiên cứu phạm trù các không gian $\mathbb{R}$ -địa phương cho việc xây dựng hàm τ Ext, chúng tôi đã thu được một số kết quả sau đây:

1. Phạm trù các không gian $\mathbb{R}$ -địa phương là phạm trù tiên aben và chứng tỏ phạm trù các không gian $\mathbb{R}$ -địa phương không có tính aben.
2. Nếu A là không gian con của B mà B là không gian $\mathbb{R}$ -địa phương thì $\mathcal{L}(A)$ có tôpô cảm sinh trên A và tôpô $\mathcal{T}_{B/A}$ trên B/A trở thành không gian $\mathbb{R}$ -địa phương.
3. Kiểm chứng được phạm trù các không gian $\mathbb{R}$ -địa phương là phạm trù tiên aben.
4. Ngoài ra cũng cho thấy phạm trù các không gian $\mathbb{R}$ -địa phương là phạm trù có nghĩa nên đưa ra được khái niệm dãy khớp trong nó.
5. Đưa ra các khái niệm không gian thu gọn nhất, ánh xạ thu gọn nhất, không gian tôpô thu gọn nhất, toán tử chính quy.
6. Đưa ra khái niệm vật xấp xỉ nhúng đối, vật tự do nhúng đối sinh bởi không gian thu gọn nhất X . Qua đó ta xây dựng vật tự do nhúng đối sinh bởi không gian thu gọn nhất X ; cũng chứng minh được vật tự do nhúng đối là vật xấp xỉ nhúng đối.
7. Sau cùng ta chứng minh được “tính đối ngẫu của lớp các vật tự do nhúng đối”, từ đó cũng cho thấy “tính đối ngẫu của lớp các vật xấp xỉ nhúng đối”.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Nguyễn Việt Đông, Trần Huyền (2002), *Đôi mắt đang đi u*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia thành phố Hồ Chí Minh.
2. Hoàng Tụy (2005), *Hàm thực và giá trị tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội.

Tiếng Anh

3. A.P. Robertson và W.J. Robertson (1977), *Không gian vectơ tôpô*, Nhà xuất bản Đại học và trung học chuyên nghiệp.
4. Saunder MacLane (1975), *Homology*.