

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Phạm Văn Thái

HÀM ZETA CỦA RIEMANN VÀ ĐỊNH LÝ SỐ NGUYÊN TỐ

Chuyên ngành : Toán giải tích

LUẬN VĂN THẠC SĨ TÂM LÝ HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS.TS.ĐẬU THỂ CẤP**

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

MỤC LỤC

MỤC LỤC.....	2
MỞ ĐẦU.....	3
1. Lý do chọn đề tài	3
2. Mục đích nghiên cứu.....	3
3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu	3
4. Ý nghĩa khoa học, thực tiễn.....	3
CHƯƠNG 1: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ.....	4
1.1. Hàm số học	4
1.2. Chuỗi hàm phức.....	4
1.3. Một số tính chất của tích phân hàm biến phức.....	6
1.4. Chuỗi và thặng dư.....	9
1.5. Tích vô hạn	11
1.6. Hàm gamma.....	11
CHƯƠNG 2: HÀM ZETA CỦA RIEMANN.....	17
2.1. Hàm zeta.....	17
2.2. Thác triển của hàm zeta	17
2.3. Không điểm của hàm zeta	23
2.4. Giá trị của hàm zeta tại những điểm nguyên	26
2.5. Quan hệ giữa hàm zeta và chuỗi hàm Dirichlet.....	29
3.1. Giới thiệu định lý số nguyên tố	37
3.2. Dạng tương đương của định lý số nguyên tố	37
3.3. Định lý Tauberian	40
3.4. Chứng minh định lý số nguyên tố.....	47
KẾT LUẬN.....	49
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	50

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Định lý số nguyên tố là định lý hay và khá nổi tiếng. Việc chứng minh định lý này đã bộc lộ mối liên hệ khá thú vị giữa sự phân bố số nguyên tố và giải tích phức. Đóng vai trò quan trọng trong mối quan hệ này là hàm zeta của Riemann.

Sử dụng công cụ giải tích phức và hàm zeta làm cho chứng minh của định lý đơn giản hơn rất nhiều so với những chứng minh trước đó. Hơn nữa, trong quá trình tìm tòi chứng minh các nhà toán học đã tìm thấy mối liên hệ giữa sự phân bố số nguyên tố với giả định nổi tiếng của Riemann, đó là tất cả các không điểm không tầm thường của hàm zeta đều nằm trên đường thẳng $\text{Re} z = \frac{1}{2}$. Giả định này cho đến nay vẫn chưa được chứng minh.

Do đó, để có thể tìm hiểu sâu hơn về giả định của Riemann thì cần xem lại các tính chất của hàm zeta của Riemann và định lý số nguyên tố.

2. Mục đích nghiên cứu

Luận văn trình bày các tính chất của hàm zeta và chứng minh định lý số nguyên tố.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu là hàm zeta của Riemann và định lý số nguyên tố.

Phạm vi nghiên cứu gồm thác triển của hàm zeta, không điểm của hàm zeta, giá trị của hàm zeta tại những điểm nguyên, quan hệ giữa hàm zeta và chuỗi hàm Dirichlet và chứng minh định lý số nguyên tố.

4. Ý nghĩa khoa học, thực tiễn

Hệ thống lại các tính chất của hàm zeta và định lý số nguyên tố. Trên cơ sở đó, tìm tòi, phát hiện cái mới.

Vì khả năng và thời gian có hạn nên luận văn còn nhiều thiếu sót. Kính mong sự góp ý của quý thầy cô và bạn đọc.

CHƯƠNG 1: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm số học

Định nghĩa 1.1.1. Ta gọi hàm số học là các hàm số xác định trên $\mathbb{N}^*$.

Định nghĩa 1.1.2. Hàm σ_x là hàm số học xác định bởi

$$\sigma_x(n) = \sum_{d|n} d^x, x \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{N}^*.$$

Đặc biệt nếu $d(n)$ là số ước của n thì $d(n) = \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1$.

Hàm Euler φ là hàm số học được xác định như sau $\varphi(1) = 1$ và $\varphi(a)$ là số các số tự nhiên nhỏ hơn a , nguyên tố cùng nhau với a nếu $a > 1$.

Hàm Mobius μ là hàm số học xác định bởi $\mu(1) = 1, \mu(n) = (-1)^r$ nếu n là tích của r số nguyên tố phân biệt và $\mu(n) = 0$ trong các trường hợp còn lại.

Định nghĩa 1.1.3. Hàm số học f gọi là có tính chất nhân nếu f không đồng nhất bằng 0 và mọi $a, b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1$ đều có $f(ab) = f(a)f(b)$.

Định lý 1.1.1(Định lý cơ bản của số học).

Mọi số nguyên dương lớn hơn 1 đều biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng tích các số nguyên tố, trong đó các thừa số nguyên tố được viết theo thứ tự không giảm.

Để thuận tiện, ta thường nhóm các thừa số nguyên tố bằng nhau thành một lũy thừa của nó. Cách biểu diễn số nguyên như vậy ta gọi là phân tích tiêu chuẩn: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ trong đó $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ là số nguyên tố và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$.

Định lý 1.1.2. Các hàm σ_x, φ, μ là hàm có tính chất nhân.

Kí hiệu P là tập các số nguyên tố.

Định lý 1.1.3. Nếu f là hàm có tính chất nhân thì có chuỗi hàm Dirichlet

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z} = \prod_{p \in P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{kz}}.$$

1.2. Chuỗi hàm phức

Định nghĩa 1.2.1. Cho dãy hàm $\{f_n\}$ xác định trên $\Omega \subset \mathbb{C}$. Tổng hình thức

$$f_1 + f_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \quad (1.2.1)$$

được gọi là một chuỗi hàm trên Ω .

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ ta được một hàm xác định trên Ω , gọi là tổng riêng thứ n và dãy $\{S_n\}$ gọi là dãy tổng riêng thứ n của chuỗi (1.2.1).

Chuỗi (1.2.1) gọi là hội tụ trên Ω nếu dãy $\{S_n\}$ hội tụ đến một hàm f hữu hạn trên Ω . Khi đó f được gọi là tổng của chuỗi và viết $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$.

Chuỗi không hội tụ gọi là chuỗi phân kì.

Chuỗi (1.2.1) gọi là hội tụ đều trên Ω đến một hàm f nếu dãy $\{S_n\}$ hội tụ đều đến hàm f .

Giả sử chuỗi (1.2.1) hội tụ và f là tổng của nó. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $r_n(z) = f(z) - S_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$

ta được dãy hàm $\{r_n\}$ trên Ω , gọi là dãy các phần dư của (1.2.1).

Ta có:

Chuỗi (1.2.1) hội tụ trên Ω khi và chỉ khi dãy $\{r_n\}$ hội tụ đến 0 trên Ω .

Chuỗi (1.2.1) hội tụ đều trên Ω khi và chỉ khi dãy $\{r_n\}$ hội tụ đều đến 0 trên Ω .

Như vậy, chuỗi (1.2.1) hội tụ trên Ω khi và chỉ khi

$$(\forall \varepsilon > 0, \forall z \in \Omega, \exists N : \forall n > N \Rightarrow |r_n(z)| < \varepsilon).$$

Chuỗi (1.2.1) hội tụ đều trên Ω khi và chỉ khi

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n > N, \forall z \in \Omega \Rightarrow |r_n(z)| < \varepsilon).$$

Chuỗi (1.2.1) được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \tag{1.2.2}$$

hội tụ.

Nếu chuỗi (1.2.2) hội tụ thì chuỗi (1.2.1) hội tụ.

Định lý 1.2.1 (Tiêu chuẩn Cauchy).

Chuỗi (1.2.1) hội tụ đều trên Ω khi và chỉ khi

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n, \forall m > n > N, \forall z \in \Omega \Rightarrow \left| f_{n+1}(z) + \dots + f_m(z) \right| < \varepsilon \right).$$

Định lí 1.2.2 (Dấu hiệu Weierstrass).

Nếu chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và các số hạng của chuỗi (1.2.1) thỏa mãn

$$\left| f_n(z) \right| \leq a_n, \forall z \in \Omega, \forall n > n_0, n_0 \text{ là số nguyên dương nào đó}$$

thì chuỗi (1.2.1) hội tụ đều trên Ω .

1.3. Một số tính chất của tích phân hm biến phức

Định lí 1.3.1. *Cho f, g là hai hàm liên tục trên đường cong γ ; a, b là các hằng số phức. Khi đó*

$$\int_{\gamma} (af(z) + bg(z)) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz.$$

Định lí 1.3.2. *Cho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ là một đường cong. Kí hiệu γ^- là đường cong γ với chiều ngược lại. Với mọi*

$$\text{hàm } f \text{ liên tục trên } \gamma \text{ ta có } \int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma^-} f(z) dz.$$

Định lí 1.3.3. *Cho các đường cong $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ sao cho $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Khi đó tổng của γ_1 và γ_2 là đường cong $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ xác định bởi $\gamma(t) = \gamma_1(t), t \in [a, b]; \gamma(t) = \gamma_2(t), t \in [b, c]$. Với mọi f liên tục trên γ ta có*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Định lí 1.3.4. *Với mọi hàm f liên tục trên đường cong γ ta có*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq \sup_{z \in \gamma} |f(z)| l,$$

trong đó $\int_{\gamma} |f(z)| |dz|$ hiểu là tích phân đường loại 1 trên γ , l là độ dài của γ .

Định lí 1.3.5. *Cho $\{f_n\}$ là dãy các hàm liên tục trên miền D và có tổng là f . Khi đó với mọi đường cong tron từng khúc $\gamma \subset D$ đều có*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

Định lí 1.3.6 (Định lí Cauchy cho miền đơn liên).

Nếu $w = f(z)$ là hàm chỉnh hình trên miền đơn liên D thì với mọi chu tuyến trơn từng khúc γ nằm trong D , ta có $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Định lí 1.3.7. Giả sử D là một miền đơn liên và bị chặn với ∂D là một chu tuyến trơn từng khúc. Khi đó nếu f là hàm chỉnh hình trên D và liên tục trên $\overline{D} = D \cup \partial D$ thì $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$.

Định lí 1.3.8 (Định lí Cauchy cho miền đa liên).

Nếu D là một miền n – liên bị chặn, f là hàm chỉnh hình trên D , liên tục trên $\overline{D}$ thì $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$.

Định lí 1.3.9 (Công thức tích phân Cauchy).

Giả sử hàm f chỉnh hình trên miền D và $z_0 \in D$. Khi đó với mọi chu tuyến $\gamma \subset D_\gamma \subset D$, ta có công thức Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\eta)}{\eta - z_0} d\eta.$$

Nếu thêm vào đó f liên tục trên $\overline{D} = D \cup \partial D$ với ∂D là một chu tuyến thì với mọi $z \in D$ ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta.$$

Định nghĩa 1.3.1. Giả sử Γ là đường cong đơn, trơn từng khúc và f là hàm liên tục trên Γ . Với mọi $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$

có $\varphi(\eta) = \frac{f(\eta)}{\eta - z}$ là một hàm liên tục trên Γ .

$$\text{Đặt } F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta \quad (1.3.1)$$

ta được một hàm xác định trên $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Hàm $F(z)$ gọi là tích phân loại Cauchy.

Định lí 1.3.10 (Công thức tích phân loại Cauchy).

Giả sử Γ là đường cong đơn, trơn từng khúc và f là hàm liên tục trên Γ . Khi đó hàm F xác định bởi công thức (1.3.1) là hàm chỉnh hình trên $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Hơn nữa trong miền D , F có đạo hàm mọi cấp, chúng được tính theo công thức

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}} d\eta. \quad (1.3.2)$$

Định lí 1.3.11. Giả sử hàm f chỉnh hình trong miền D . Khi đó f có đạo hàm mọi cấp và các đạo hàm đó cũng là những hàm chỉnh hình trong miền D . Các đạo hàm của f tại điểm z được biểu diễn bởi công thức

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}} d\eta, n = 1, 2, \dots \text{ trong đó } \gamma \text{ là một chu tuyến tùy ý bao quanh } z \text{ sao cho } D_{\gamma} \subset D.$$

Định lý 1.3.12. Giả sử $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ và φ là hàm biến phức liên tục trên không gian tích $\Omega \times [a, b]$, với mỗi $t \in [a, b]$, hàm $z \rightarrow \varphi(z, t)$ chỉnh hình trên Ω . Hàm F xác định trên Ω được cho bởi công thức $F(z) = \int_a^b \varphi(z, t) dt, z \in \Omega$. Khi đó F chỉnh hình trên Ω và

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, t) dt, z \in \Omega.$$

Định nghĩa 1.3.2. Giả sử $\{f_n\}$ là dãy các hàm liên tục trên miền D . Ta nói $\{f_n\}$ hội tụ đều trên mọi tập compact (trong D) tới hàm f nếu với mọi tập compact $K \subset D$, với mọi $\varepsilon > 0$, có $N = N(K, \varepsilon)$ sao cho $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ với mọi $z \in K, n > N$.

Định lý 1.3.13 (Định lý Weierstrass).

Nếu f_n chỉnh hình trên D với mọi n và $\{f_n\}$ hội tụ đều trên mọi tập compact (trong D) tới hàm f thì f chỉnh hình trên D .

Định nghĩa 1.3.3. Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{C}$ và $A(\Omega)$ là không gian vector các hàm chỉnh hình trên Ω .

Họ hàm $F \subset A(\Omega)$ được gọi là bị chặn đều trên các tập compact nếu

$$\sup\{|f(z)| : z \in K, f \in F\} < \infty \text{ với mọi tập compact } K \subset \Omega.$$

Họ hàm $F \subset A(\Omega)$ gọi là đồng liên tục tại $z_0 \in \Omega$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $z \in \Omega$ thỏa $|z - z_0| < \delta$ thì $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, với mọi $f \in F$.

Họ hàm $F \subset A(\Omega)$ được gọi là đồng liên tục trên các tập compact nếu với mọi tập compact $K \subset \Omega$, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(K, \varepsilon)$ sao cho

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon, \text{ với mọi } z, z' \in K \text{ mà } |z - z'| < \delta.$$

Bổ đề 1.3.1. Mọi họ $F \subset A(\Omega)$ bị chặn đều trên các tập con compact của Ω thì đồng liên tục tại mọi điểm thuộc Ω .

Bổ đề 1.3.2. Giả sử F là tập đồng liên tục của $C(\Omega)$, nghĩa là mọi $f \in F$ đều liên tục trên Ω và F đồng liên tục tại mọi điểm của Ω , dãy $\{f_n\} \subset F$ sao cho f_n hội tụ từng điểm đến f trên Ω . Khi đó f liên tục trên Ω và $f_n \rightarrow f$ đều trên các tập con compact của Ω .

Tổng quát hơn, nếu f_n hội tụ từng điểm đến f trên tập con trù mật của Ω thì $f_n \rightarrow f$ đều trên các tập con compact của Ω .

Định lý 1.3.14 (Định lý Montel).

Cho $F \subset A(\Omega)$ bị chặn đều trên các tập compact. Khi đó mỗi dãy $\{f_n\} \subset F$ đều có dãy con hội tụ đều trên các tập con compact của Ω .

Định lý 1.3.15 (Định lý Vitali).

Cho $\{f_n\}$ là dãy bị chặn trong $A(\Omega)$, Ω là tập mở liên thông. Nếu dãy $\{f_n\}$ hội tụ điểm trên $S \subset \Omega$ với S là một tập con có điểm tụ của Ω thì $\{f_n\}$ hội tụ đều trên cc tập con compact của Ω đến một hàm $f \in A(\Omega)$.

1.4. Chuỗi và thặng dư

Định lí 1.4.1 (Định lí Taylor).

Nếu hàm f chỉnh hình trên $B(z_0, R)$ thì $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ với mọi $z \in B(z_0, R)$, trong đó các hệ số c_n là duy nhất được xác định bởi công thức

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta, n = 0, 1, \dots, \text{ với } 0 < r < R.$$

Định lí 1.4.2 (Định lí duy nhất).

Giả sử f và g là các hàm chỉnh hình trên miền D , $f(z_n) = g(z_n)$ trên một dãy điểm khác nhau $\{z_n\} \subset D$ và $\lim z_n = a \in D$. Khi đó $f(z) = g(z)$, với mọi $z \in D$.

Định nghĩa 1.4.1. Chuỗi hàm có dạng $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$ được gọi là chuỗi Laurent theo lũy thừa của $(z - z_0)$ hay chuỗi Laurent tại z_0 .

Định lí 1.4.3. Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong hình vành khăn $0 \leq r < |z - z_0| < R < +\infty$ thì $f(z)$ được biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (1.4.1)$$

Các hệ số của chuỗi (1.4.1) được xác định bởi công thức

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

trong đó γ_ρ là đường tròn bất kì $|z - z_0| = \rho, r < \rho < R$.

Định nghĩa 1.4.2. Giả sử hàm f chỉnh hình trong hình vành khăn $0 < |z - z_0| < r$. Khi đó chỉ có thể xảy ra một trong ba khả năng sau:

i) Tồn tại $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$, khi đó z_0 gọi là điểm thường.

ii) Tồn tại $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, khi đó z_0 gọi là cực điểm của hàm f .

iii) Không tồn tại $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, khi đó z_0 gọi là điểm bất thường cốt yếu của hàm f .

Ta xét khai triển Laurent của hàm $f(z)$ trong hình vành khăn $0 < |z - z_0| < r$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (1.4.2)$$

trong đó $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$

γ_ρ là đường tròn $|z - z_0| = \rho; 0 < \rho < r$.

Định lí 1.4.4. Nếu tồn tại $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$ thì f có thể thác triển chỉnh hình tới z_0 .

Định lí 1.4.5.i) Điểm z_0 là cực điểm của hàm $f(z)$ trên $0 < |z - z_0| < r$ nếu và chỉ nếu trong khai triển (1.4.2) tồn tại một số $m > 0$ sao cho $c_{-m} \neq 0$ và $c_k = 0$, với mọi $k < -m$. Số nguyên $m > 0$ gọi là bậc của cực điểm z_0 .

ii) Điểm z_0 là điểm bất thường cốt yếu nếu và chỉ nếu trong khai triển (1.4.2) tồn tại vô số $k > 0$ sao cho $c_{-k} \neq 0$.

Định nghĩa 1.4.3. Giả sử f là hàm chỉnh hình trên hình tròn thủng $0 < |z - z_0| < r$. Thặng dư của hàm f tại z_0 , kí hiệu $\text{res}[f, z_0]$, được xác định bởi

$$\text{res}[f, z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz,$$

với γ là đường tròn $|z - z_0| = \rho; 0 < \rho < r$.

Định lí 1.4.6. Giả sử hàm f có khai triển Laurent tại lân cận điểm z_0 là

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Khi đó $\text{res}[f, z_0] = c_{-1}$.

Định lí 1.4.7. Nếu z_0 là cực điểm đơn của hàm f thì

$$\text{res}[f, z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Định lí 1.4.8. Nếu $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ trong đó $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0$ và $\psi'(z_0) \neq 0$ thì $\text{res}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Định lí 1.4.9 (Định lí cơ bản về thặng dư).

Giả sử f là hàm chỉnh hình trong miền D trừ một số hữu hạn điểm $z_1, z_2, \dots, z_n$ nằm trong D . Khi đó với mọi chu tuyến γ trong D sao cho $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset D_\gamma \subset D$ đều có

$$\int_{\gamma} f(\eta) d\eta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z), z_k].$$

1.5. Tích vô hạn

Định nghĩa 1.5.1. Giả sử $\{u_n\}$ là dãy số phức và $p_n = \prod_{k=1}^n (1+u_k)$. Nếu tồn tại $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ thì ta viết

$p = \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$. Các số p_n gọi là tích riêng của tích vô hạn.

Sau này ta sẽ nói tích vô hạn $p = \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ hội tụ nếu dãy $\{p_n\}$ hội tụ.

Bổ đề 1.5.1. Nếu $u_1, u_2, \dots, u_n$ là các số phức và đặt

$$p_N = \prod_{n=1}^N (1+u_n), p_N^* = \prod_{n=1}^N (1+|u_n|)$$

thì

$$p_N^* \leq \exp(|u_1| + |u_2| + \dots + |u_N|), |p_N - 1| \leq p_N^* - 1.$$

Định lý 1.5.1. Giả sử $\{u_n\}$ là dãy các hàm bị chặn trên tập S sao cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)|$ hội tụ đều trên S . Khi

đó tích

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n(s))$$

hội tụ đều trên S và $f(s_0) \neq 0$ với s_0 nào đó thuộc S khi và chỉ khi tồn tại n để $1+u_n(s_0) \neq 0$.

Ngoài ra nếu $\{n_1, n_2, \dots\}$ là một hoán vị nào đó của $\{1, 2, \dots\}$ thì

$$f(s) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+u_{n_k}(s)).$$

Định lý 1.5.2. Cho $f_1, f_2, \dots$ là dãy các hàm chỉnh hình trong Ω . Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - 1|$ hội tụ đều trên các tập con

compact của Ω thì $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ hội tụ đến hàm f thuộc $A(\Omega)$. Hơn nữa $f(z_0) \neq 0$ với z_0 nào đó thuộc Ω khi và

chỉ khi $f_n(z_0) \neq 0$ với n nào đó.

1.6. Hàm gamma

Để thuận lợi cho việc tìm hiểu một số tính chất của hàm gamma sau này, trước hết ta đi chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 1.6.1. i) $G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$ chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ và $G(z) \neq 0$ tại $z = -1, -2, \dots$

ii)
$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

$$\text{iii)} \quad \cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n\pi} + \frac{1}{z-n\pi} \right).$$

Chứng minh.

i) Lấy K là tập compact bất kì, $z \in K$ và k đủ lớn ta có

$$\begin{aligned} L \log \left[\left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{-\frac{z}{k}} \right] &= L \log \left(1 + \frac{z}{k} \right) + L \log e^{-\frac{z}{k}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{k} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{k} \right)^3 + \dots \\ &= \frac{z^2}{k^2} g \left(\frac{z}{k} \right) \end{aligned}$$

ở đây $g(w) \rightarrow \frac{1}{2}$ khi $w \rightarrow 0$.

Vì K bị chặn nên tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\left| L \log \left[\left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{-\frac{z}{k}} \right] \right| \leq \frac{M}{k^2}, \text{ với mọi } z \in K, k \geq k_0 \text{ nào đó}$$

Suy ra $\sum_{k=1}^{\infty} L \log \left[\left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{-\frac{z}{k}} \right]$ hội tụ đều trên K . Từ đó

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{-\frac{z}{k}} = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} L \log \left[\left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{-\frac{z}{k}} \right] \right\}$$

hội tụ đều trên K .

Do K là tập con compact bất kì nên theo định lý Weierstrass ta suy ra $G(z)$ chỉnh hình trên $\mathbb{C}$.

Theo định lý 1.5.2 ta có $G(z)=0$ chỉ tại những điểm $z=-1, -2, \dots$

Vì các vế trong ii) là các hàm chỉnh hình, trong iii) là các hàm phân hình nên áp dụng định lý duy nhất ta chỉ cần chứng minh ii) và iii) đúng với $z = x$ là số thực là đủ.

$$\text{ii) Ta có } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\text{Đặt } P(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \text{ Vì}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ nên } \frac{\sin x}{x} = 0 \text{ khi và chỉ khi } x = n\pi \text{ với } n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

và $P(x)$ là đa thức bậc vô cùng nên ta có

$$\frac{\sin x}{x} = P(x) = P(0) \left(1 - \frac{x}{\pi} \right) \left(1 + \frac{x}{\pi} \right) \left(1 - \frac{x}{2\pi} \right) \left(1 + \frac{x}{2\pi} \right) \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

$$\text{Vậy } \sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

$$\text{iii) Do } \sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \quad \text{suy ra}$$

$$\ln \sin x = \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 \pi^2 \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)}.$$

Suy ra

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x + n\pi} + \frac{1}{x - n\pi} \right). \quad \square$$

Tiếp theo ta định nghĩa hàm gamma.

Định nghĩa 1.6.1. Hàm gamma Γ là hàm được xác định bởi

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \operatorname{Re} z > 0.$$

Từ định nghĩa trên, ta suy ra một số tính chất của hàm Γ như sau.

Định lí 1.6.1. Hàm Γ chỉnh hình trên miền $\operatorname{Re} z > 0$.

Chứng minh.

$$\text{Đặt } f_k(z) = \int_0^k e^{-t} t^{z-1} dt. \text{ Theo định lí 1.3.12, ta thấy } f_k \text{ chỉnh hình trên } \operatorname{Re} z > 0.$$

Mặt khác

$$\left| f_k(x + iy) \right| \leq \int_0^k e^{-t} t^{x-1} dt \leq \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, x > 0.$$

và ta đã biết $\Gamma(x)$ hội tụ. Từ đó suy ra $\{f_k\}$ hội tụ tuyệt đối và $\{f_k\}$ bị chặn trên các tập con compact của $\operatorname{Re} z > 0$. Theo định lí 1.3.15 (định lí Vitali), suy ra $\{f_k\}$ hội tụ đều trên các tập con compact của $\operatorname{Re} z > 0$ đến hàm Γ và do đó Γ chỉnh hình trên $\operatorname{Re} z > 0$. $\square$

Định lí 1.6.2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\operatorname{Re} z > 0$.

Chứng minh.

Ta có

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = - \int_0^{+\infty} t^z d(e^{-t})$$

$$= t^z e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$= z \Gamma(z). \quad \square$$

Đặc biệt $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. Từ đó dễ dàng suy ra công thức

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Định lí 1.6.3. Hàm Γ có thể thác triển đến một hàm phân hình trên toàn mặt phẳng phức và nó có các cực điểm đơn tại $z=0, -1, -2, \dots$

Chứng minh.

Với m là số nguyên dương, áp dụng định lí 1.6.2 ta có

$$\Gamma(z+m) = (z+m-1)\dots(z+1)z\Gamma(z).$$

Từ đó suy ra

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\dots(z+m-1)}.$$

Ta thấy vế phải là hàm phân hình trên $\operatorname{Re} z > -m$, có các cực điểm đơn là $0, -1, -2, \dots, -m+1$. Vì vậy $\Gamma(z)$ có thể thác triển phân hình đến miền $\operatorname{Re} z > -m$.

Cho $m \rightarrow +\infty$, ta thu được kết quả Γ có thể thác triển phân hình trên toàn mặt phẳng phức và có các cực điểm đơn là $0, -1, -2, \dots$ $\square$

Định lí 1.6.4. $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}, z \in \mathbb{C}$, trong đó γ là hằng số Euler, tức γ là giới hạn của dãy

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Từ đó suy ra $\Gamma(z)$ không có không điểm.

Chứng minh.

Trước hết ta định nghĩa

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt, \operatorname{Re} z > 0, n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\forall \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \text{ suy ra } \left|t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right| \leq t^{x-1} e^{-t}, x = \operatorname{Re} z$$

và $t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \rightarrow t^{z-1} e^{-t}$ khi $n \rightarrow \infty$. Mặt khác $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x)$ hội tụ, do đó theo định lí Lebesgue về hội tụ

chặn ta có

$$\lim \Gamma_n(z) = \Gamma(z).$$

Đổi biến $s = \frac{t}{n}$ trong biểu thức định nghĩa $\Gamma_n(z)$ ta được

$$\Gamma_n(z) = n^z \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^n ds, \operatorname{Re} s > 0, n \in \mathbb{N}^*.$$

Vì vậy

$$\Gamma_1(z) = \int_0^1 s^{z-1} (1-s) ds = \left(\frac{s^z}{z} - \frac{s^{z+1}}{z+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(z+1)}.$$

Sử dụng tích phân từng phần ta lại có

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= n^z \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^n ds = \frac{n^z}{z} \int_0^1 (1-s)^n d(s^z) \\ &= -\frac{n^z}{z} \int_0^1 s^z d(1-s)^n = \frac{n^{z+1}}{z} \int_0^1 s^z (1-s)^{n-1} ds \\ &= \left(\frac{n}{n-1} \right)^{z+1} \cdot \frac{1}{z} \Gamma_{n-1}(z+1). \end{aligned}$$

Lặp lại bước này n-1 lần và sử dụng Γ_1 ta được

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n-2)} \Gamma_1(z+n-1) \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_n(z)} &= \frac{1}{n^z} z(1+z) \left(1 + \frac{z}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{z}{n}\right) \\ &= ze^{\gamma_n z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}. \end{aligned}$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ ta được

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}, \operatorname{Re} z > 0.$$

Do $G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$ chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ và $\frac{1}{\Gamma(z)}$ là hàm chỉnh hình nên áp dụng định lý duy nhất ta

suy ra đẳng thức trên đúng trên $\mathbb{C}$. $\square$

Định lý 1.6.5. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, z \in \mathbb{C}.$

Chứng minh.

Từ bổ đề 1.6.1.ii) ta suy ra

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2} \right).$$

Do đó

$$\sin \pi z = \pi z G(z) G(-z).$$

Mặt khác

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2 G(z) G(-z) = -\frac{z \sin \pi z}{\pi}.$$

Ta lại có $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ nên thay vào biểu thức trên ta được

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

Vì vậy $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, z \in \mathbb{C}. \quad \square$

CHƯƠNG 2: HÀM ZETA CỦA RIEMANN

2.1. Hàm zeta

Định nghĩa 2.1.1. Hàm zeta của Riemann là hàm được xác định bởi

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad (2.1.1)$$

trong đó $n^z = e^{z \ln n}$.

Nhận xét:

Đặt $z = x + iy$, ta có $n^z = n^{x+iy} = n^x \cdot n^{iy}$. Suy ra $|n^z| = n^x = n^{\operatorname{Re} z}$.

$$\text{Do đó } \zeta^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}. \quad (2.1.2)$$

Ta thấy chuỗi (2.1.2) hội tụ trên $\operatorname{Re} z > 1$ nên chuỗi (2.1.1) hội tụ tuyệt đối trên $\operatorname{Re} z > 1$. Mặt khác với $\delta > 0$, ta có $\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, mọi $z \in \{z : \operatorname{Re} z \geq 1 + \delta\}$.

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ hội tụ nên theo định lý 1.2.2 (dấu hiệu Weierstrass), chuỗi (2.1.1) hội tụ đều trên $\{z : \operatorname{Re} z \geq 1 + \delta\}$.

2.2. Thác triển của hàm zeta

Định lý 2.2.1 (Công thức tích Euler).

Kí hiệu P là tập hợp tất cả các số nguyên tố. Với $\operatorname{Re} z > 1$, hàm $\zeta(z)$ được xác định bởi

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \in P} \left(\frac{1}{1 - p^{-z}} \right)$$

gọi là công thức tích Euler.

Công thức trên còn có thể viết dưới dạng $\zeta(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_i^{-z}} \right)$ với $p_1, p_2, p_3, \dots$ là dãy các số nguyên tố

2, 3, 5...

Chứng minh.

Với số nguyên tố p và $\operatorname{Re} z > 1$, ta có

$$\frac{1}{1 - p^{-z}} = 1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots + \frac{1}{p^{kz}} + \dots$$

nên chuỗi này hội tụ tuyệt đối trên $\operatorname{Re} z > 1$.

Do đó với q là số nguyên tố nào đó thì tích $\prod_{p \leq q} \left(\frac{1}{1 - p^{-z}} \right)$ cũng hội tụ tuyệt đối trên $\operatorname{Re} z > 1$.

Khai triển tích $\prod_{p \leq q} \left(\frac{1}{1-p^{-z}} \right)$ thành tổng của những số hạng có dạng $\frac{1}{n^z}$ trong đó n là tích lũy thừa các số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng q . (2.2.1)

Mặt khác, theo định lý cơ bản của số học, mọi số tự nhiên n mà $n \leq q$ đều có thể phân tích thành tích lũy thừa các số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng q . Do đó với mọi $n \leq q$, ta có $\frac{1}{n^z}$ đều là phần tử của tổng trong (2.2.1). Suy ra

$$\left| \zeta(z) - \prod_{p \leq q} \left(\frac{1}{1-p^{-z}} \right) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \prod_{p \leq q} \left(\frac{1}{1-p^{-z}} \right) \right| \leq \sum_{n=q+1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}.$$

Do trên $\operatorname{Re} z > 1$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$ hội tụ nên $\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} = 0$. Vì vậy

$$\zeta(z) = \lim_{q \rightarrow \infty} \prod_{p \leq q} \left(\frac{1}{1-p^{-z}} \right) = \prod_{p \in P} \left(\frac{1}{1-p^{-z}} \right). \quad \square$$

Định lý 2.2.2. Hàm ζ chỉnh hình trên $\operatorname{Re} z > 1$.

Chứng minh.

$$\text{Đặt } f_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^z}.$$

Ta thấy f_n chỉnh hình trên $\operatorname{Re} z > 1$ với mọi n và $\{f_n\}$ hội tụ đều trên mọi tập compact trong $\operatorname{Re} z > 1$ đến hàm ζ . Do đó, theo định lý 1.3.13 (định lý Weierstrass), suy ra ζ là hàm chỉnh hình trên $\operatorname{Re} z > 1$. $\square$

Định lý 2.2.3 (Thức triển chỉnh hình của hàm zeta).

Hàm $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ có thể thức triển chỉnh hình tới nửa mặt phẳng phải $\operatorname{Re} z > 0$. Từ đó suy ra hàm ζ có thể thức triển chỉnh hình tới $\{z : \operatorname{Re} z > 0, z \neq 1\}$, hơn nữa $z=1$ là cực điểm đơn của ζ và $\operatorname{res}[\zeta, 1] = 1$.

Chứng minh.

Trước hết, ta chứng minh công thức sau gọi là công thức tổng từng phần.

Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy số phức. Đặt $\Delta b_k = b_{k+1} - b_k$. Khi đó

$$\sum_{k=r}^s a_k \Delta b_k = a_{s+1} b_{s+1} - a_r b_r - \sum_{k=r}^s b_{k+1} \Delta a_k. \quad (2.2.2)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} VT &= \sum_{k=r}^s a_k \Delta b_k = a_r (b_{r+1} - b_r) + \dots + a_s (b_{s+1} - b_s) \\ &= -a_r b_r + b_{r+1} (a_r - a_{r+1}) + \dots + b_s (a_{s-1} - a_s) + a_s b_{s+1} - a_{s+1} b_{s+1} + a_{s+1} b_{s+1} \\ &= a_{s+1} b_{s+1} - a_r b_r - \sum_{k=r}^s b_{k+1} \Delta a_k = VP. \end{aligned}$$

Áp dụng công thức tổng từng phần (2.2.2) với $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n^z}$ ta có

$$\sum_{n=1}^{k-1} n \left[\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z} \right] = \frac{1}{k^{z-1}} - 1 - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{(n+1)^z}$$

Suy ra

$$1 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{(n+1)^z} = \frac{1}{k^{z-1}} - \sum_{n=1}^{k-1} n \left[\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z} \right].$$

Mặt khác

$$n \left[\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z} \right] = -nz \int_n^{n+1} t^{-z-1} dt = -z \int_n^{n+1} [t] t^{-z-1} dt$$

trong đó $[t]$ là phần nguyên của t . Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^z} &= 1 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{(n+1)^z} \\ &= \frac{1}{k^{z-1}} + z \sum_{n=1}^{k-1} \int_n^{n+1} [t] t^{-z-1} dt \\ &= \frac{1}{k^{z-1}} + z \int_1^k [t] t^{-z-1} dt. \end{aligned}$$

Với $\text{Re} z > 1$, do $\text{Re} z > 1$ thì $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^{z-1}} = 0$ nên cho $k \rightarrow \infty$ ta được

$$\zeta(z) = z \int_1^{\infty} [t] t^{-z-1} dt. \quad (2.2.3)$$

Vì vậy với $\text{Re} z > 1$, ta có

$$\begin{aligned} z \int_1^{\infty} t t^{-z-1} dt &= z \int_1^{\infty} t^{-z} dt = z \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x t^{-z} dt \\ &= \frac{z}{1-z} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^{z-1}} - 1 \right) \\ &= \frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1} \text{ (do với } \text{Re} z > 1, \text{ thì } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{z-1}} = 0). \end{aligned}$$

Kết hợp với (2.2.3) ta được

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = z \int_1^{\infty} ([t] - t) t^{-z-1} dt \text{ với } \text{Re} z > 1. \quad (2.2.4)$$

Cố định $k > 1$, đặt $\varphi(z, t) = ([t] - t) t^{-z-1}$. Ta thấy $\varphi(z, t)$ liên tục trên $\mathbb{C} \times [1, k]$ với mọi $t \in [1, k]$, $\varphi(z, t)$

chỉnh hình trên $\mathbb{C}$. Do đó, theo định lý 1.3.12, ta có $\int_1^k \varphi(z, t) dt = \int_1^k ([t] - t) t^{-z-1} dt$ chỉnh hình trên $\mathbb{C}$. Hơn nữa,

nếu $\text{Re} z > 0$ thì

$$\left| \int_1^k ([t] - t) t^{-z-1} dt \right| \leq \int_1^k |([t] - t) t^{-z-1}| dt \leq \int_1^k t^{-\text{Re}(z+1)} dt \leq \int_1^{\infty} t^{-\text{Re} z - 1} dt = \frac{1}{\text{Re} z}. \quad (2.2.5)$$

Ta thấy dãy $h_k(z) = \int_1^k t^{-\operatorname{Re} z - 1} dt$ hội tụ điểm tới $\frac{1}{\operatorname{Re} z}$. Suy ra dãy $g_k(z) = \int_1^k |([t] - t)t^{-z-1}| dt$ hội tụ điểm. Từ

đó $f_k(z) = \int_1^k ([t] - t)t^{-z-1} dt$ hội tụ điểm trên $\operatorname{Re} z > 0$. Mặt khác cũng theo (2.2.5) dãy $f_k(z)$ bị chặn đều trên mỗi

tập con compact của $\operatorname{Re} z > 0$ nên theo định lí 1.3.15 (định lí Vitali), ta có dãy $\{f_k\}$ hội tụ đều trên mỗi tập con compact của $\operatorname{Re} z > 0$ tới hàm f và f chỉnh hình trên $\operatorname{Re} z > 0$. Ta có

$$f(z) = \int_1^\infty ([t] - t)t^{-z-1} dt.$$

Vì vậy $1 + z \int_1^\infty ([t] - t)t^{-z-1} dt$ cũng là hàm chỉnh hình trên $\operatorname{Re} z > 0$.

Kết hợp với (2.2.4) ta suy ra $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ có thể thc triển chỉnh hình tới

$\operatorname{Re} z > 0$.

Từ (2.2.4) ta suy ra

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + 1 + z \int_1^\infty ([t] - t)t^{-z-1} dt \quad \text{với } \operatorname{Re} z > 1.$$

Mà $\frac{1}{z-1} + 1 + z \int_1^\infty ([t] - t)t^{-z-1} dt$ chỉnh hình trên $\{z : \operatorname{Re} z > 0, z \neq 1\}$ nên ta suy ra $\zeta(z)$ có thể thc triển chỉnh

hình tới $\{z : \operatorname{Re} z > 0, z \neq 1\}$.

Vì vậy, ta có thể coi

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + 1 + z \int_1^\infty ([t] - t)t^{-z-1} dt \quad \text{với } z \in \{z : \operatorname{Re} z > 0, z \neq 1\}. \quad (2.2.6)$$

Mặt khác do $1 + z \int_1^\infty ([t] - t)t^{-z-1} dt$ chỉnh hình trên $\operatorname{Re} z > 0$ nên với $r > 0$ sao cho $B(1, r) \subset \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ ta

có khai triển Taylor

$$1 + z \int_1^\infty ([t] - t)t^{-z-1} dt = \sum_{n=0}^\infty c_n (z-1)^n \quad \text{với } z \in B(1, r).$$

Thế vào (2.2.6) ta được

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^\infty c_n (z-1)^n \quad \text{với } z \in B(1, r) \setminus \{1\}.$$

Điều này chứng tỏ $z = 1$ là cực điểm đơn của ζ và $\operatorname{res}[\zeta, 1] = 1$. $\square$

Định lí 2.2.4. Hàm ζ được biểu diễn dưới dạng tích phân như sau

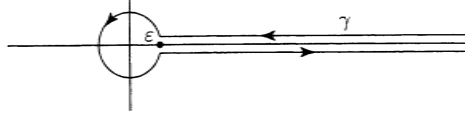
$$\zeta(z) = \frac{-\Gamma(1-z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} ds, \operatorname{Re} z > 1 \quad (2.2.7)$$

trong đó Γ là hàm gamma,

$$(-s)^{z-1} = e^{(z-1)\text{Log}(-s)}, s \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

γ là chu tuyến được xây dựng như sau: Rạch một đường theo chiều dương của trục thực. γ là đường đi từ $+\infty$ theo bờ trên của đường rạch đến ε , vòng theo đường tròn tâm $s = 0$, bán kính ε rồi từ ε đi theo bờ dưới của đường rạch đến $+\infty$.

Chứng minh.



Hình 1.

Ta thấy $(-s)^{z-1}$ chỉnh hình theo biến s và tham số z . Xét hàm

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} ds.$$

Ta có thể biểu diễn

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{\varepsilon} \frac{e^{(z-1)(\ln x - i\pi)}}{e^x - 1} dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=\varepsilon} \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{(z-1)(\ln x + i\pi)}}{e^x - 1} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(e^{i\pi(z-1)} - e^{-i\pi(z-1)} \right) \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=\varepsilon} \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} ds. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Theo định lí 1.3.12, ta thấy $\int_{|s|=\varepsilon} \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} ds$ chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ và do $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx$ hội tụ

tuyệt đối nên theo định lí 1.3.15 (định lí Vitali), ta có $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx$ chỉnh hình trên $\mathbb{C}$. Do vậy, $\phi(z)$ chỉnh hình trên $\mathbb{C}$.

Bây giờ ta đi đánh giá $\phi(z)$. Trước hết, ta giả sử $\text{Re } z > 1$.

Do $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{e^s - 1} = 1$, suy ra $\left| \frac{s}{e^s - 1} \right| \leq C_1$ trên $|s| = \varepsilon$ với ε đủ nhỏ.

Từ đó suy ra

$$\left| \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} \right| \leq C_1 \left| (-s)^{z-2} \right| = C_1 e^{\text{Re}[(z-2)\text{Log}(-s)]} = C e^{\text{Re}(z-2)\ln|s|} = C \varepsilon^{\text{Re } z - 2}$$

trên $|s| = \varepsilon$.

Vì vậy

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=\varepsilon} \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} C\varepsilon^{\operatorname{Re} z - 2} 2\pi\varepsilon = C\varepsilon^{\operatorname{Re} z - 1} \rightarrow 0 \text{ khi } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Do đó cho $\varepsilon \rightarrow 0$ trong (2.2.8) ta được

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(e^{i\pi(z-1)} - e^{-i\pi(z-1)} \right) \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx \\ &= -\frac{\sin(\pi z)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Mặt khác $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ nên

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \right) x^{z-1} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-nx} x^{z-1} dx \right) \quad (\text{do } \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \text{ hội tụ đều}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^z} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \right] \quad (\text{đặt } t = nx) \\ &= \Gamma(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \\ &= \Gamma(z) \zeta(z), \operatorname{Re} z > 1. \end{aligned}$$

Thay vào (2.2.9) và sử dụng $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ (theo định lý 1.6.5), ta được

$$\phi(z) = -\frac{\sin(\pi z)}{\pi} \Gamma(z) \zeta(z) = -\frac{\zeta(z)}{\Gamma(1-z)}.$$

Từ đó suy ra

$$\zeta(z) = -\Gamma(1-z)\phi(z) = -\frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} ds, \operatorname{Re} z > 1. \quad \square$$

Nhận xét:

Do $\phi(z)$ là hàm nguyên, $\Gamma(1-z)$ là hàm phân hình chỉ có các cực điểm đơn tại $z = 1, 2, 3, \dots$ và $\zeta(z)$ chỉnh hình trên $\operatorname{Re} z > 1$, có cực điểm đơn tại $z = 1$ nên ta có định lý sau

Định lý 2.2.5. *Hàm ζ có thể thác triển phân hình trên toàn mặt phẳng và $z = 1$ là cực điểm đơn duy nhất của nó.*

Định lý 2.2.6. *Hàm $\frac{\zeta'}{\zeta}$ có cực điểm đơn tại $z = 1$ và $\operatorname{res} \left[\frac{\zeta'}{\zeta}, 1 \right] = -1$.*

Chứng minh.

Do $z = 1$ là cực điểm đơn của ζ nên ta có

$$\zeta(z) = (z-1)^{-1} g(z) \quad \text{với } g(1) \neq 0.$$

Do g chỉnh hình nên tồn tại $r > 0$ sao cho $g(z) \neq 0$, với mọi $z \in B(1, r)$.

$$\zeta'(z) = -(z-1)^{-2} g(z) + (z-1)^{-1} g'(z).$$

Do đó ta có

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad \text{với } 0 < |z-1| < r.$$

Điều này chứng tỏ $z = 1$ là cực điểm đơn của $\frac{\zeta'}{\zeta}$ và $\operatorname{res}\left[\frac{\zeta'}{\zeta}, 1\right] = -1$. $\square$

2.3. Không điểm của hàm zeta

Định lí 2.3.1. *Hàm ζ không có không điểm trên $\operatorname{Re} z > 1$.*

Chứng minh.

Với $\operatorname{Re} z > 1$, xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{1-p_n^{-z}} - 1 \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|p_n^z - 1|}$. Dễ thấy

$$p_n \geq n+1, \forall n.$$

$$\Rightarrow p_n^{\operatorname{Re} z} \geq (n+1)^{\operatorname{Re} z} \geq n^{\operatorname{Re} z} + 1.$$

$$\Rightarrow p_n^{\operatorname{Re} z} - 1 \geq n^{\operatorname{Re} z}.$$

Do đó

$$\frac{1}{|p_n^z - 1|} \leq \frac{1}{p_n^{\operatorname{Re} z} - 1} \leq \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$ hội tụ đều trên $\operatorname{Re} z > 1$, suy ra chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{1-p_n^{-z}} - 1 \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|p_n^z - 1|}$$

hội tụ đều trên $\operatorname{Re} z > 1$. Mặt khác, theo công thức tích Euler ta có

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-p_n^{-z}} \right).$$

Từ đó, do $\frac{1}{1-p_n^{-z}} \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, nên theo định lí 1.5.2, ta suy ra $\zeta(z) \neq 0$, với mọi $z \in \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$. $\square$

Theo định lí 2.3.1, hàm ζ không có không điểm trên $\operatorname{Re} z > 1$. Nhưng sau khi thc triển hàm ζ , định lí sau đây khẳng định hàm ζ cũng không có không điểm trên đường thẳng $\operatorname{Re} z = 1$.

Định lí 2.3.2. *Hàm ζ không có không điểm trên $\operatorname{Re} z = 1$. Vì vậy, hàm $(z-1)\zeta(z)$ chỉnh hình và không có không điểm trong một lân cận của $\operatorname{Re} z \geq 1$.*

Chứng minh.

Cố định số thực $y \neq 0$ và xét hàm

$$h(x) = \zeta^3(x) \zeta^4(x+iy) \zeta(x+2iy) \text{ với } x \in \mathbb{R} \text{ và } x > 1.$$

Theo công thức tích Euler, nếu $\text{Re } z > 1$ thì ta có

$$\ln |\zeta(z)| = - \sum_{j=1}^{\infty} \ln |1 - p_j^{-z}| = - \text{Re} \sum_{j=1}^{\infty} \text{Log}(1 - p_j^{-z}) = \text{Re} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_j^{-nz} \text{ (ở đây ta sử dụng khai triển}$$

$$-\text{Log}(1-w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n}, \text{ với } |w| < 1). \text{ Do đó}$$

$$\begin{aligned} \ln |h(x)| &= 3 \ln |\zeta(x)| + 4 \ln |\zeta(x+iy)| + \ln |\zeta(x+2iy)| \\ &= 3 \text{Re} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_j^{-nx} + 4 \text{Re} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_j^{-nx-iny} + \text{Re} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_j^{-nx-i2ny} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_j^{-nx} \text{Re}(3 + 4p_j^{-iny} + p_j^{-i2ny}). \end{aligned}$$

$$\text{Vì } p_j^{-iny} = e^{-iny \ln p_j} \text{ và } p_j^{-i2ny} = e^{-i2ny \ln p_j} \text{ nên}$$

$$\text{Re}(3 + 4p_j^{-iny} + p_j^{-i2ny}) = 3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta \text{ (với } \theta = -ny \ln p_j)$$

$$= 3 + 4 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$= 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0.$$

Suy ra $\ln |h(x)| \geq 0$ v $|h(x)| = |\zeta^3(x)| |\zeta^4(x+iy)| |\zeta(x+2iy)| \geq 1$. Và từ đó suy ra

$$\frac{|h(x)|}{x-1} = |(x-1)\zeta(x)|^3 \left| \frac{\zeta(x+iy)}{x-1} \right|^4 |\zeta(x+2iy)| \geq \frac{1}{x-1}.$$

Giả sử $\zeta(1+iy) = 0$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} |(x-1)\zeta(x)| = 1 \text{ (do } z=1 \text{ là cực điểm đơn của } \zeta \text{ v } \text{res}[\zeta, 1] = 1);$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\zeta(x+iy)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\zeta(x+iy) - \zeta(1+iy)}{x-1} = \zeta'(1+iy).$$

Do đó

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} |(x-1)\zeta(x)|^3 \left| \frac{\zeta(x+iy)}{x-1} \right|^4 |\zeta(x+2iy)| = |\zeta'(1+iy)|^4 |\zeta(1+2iy)|.$$

Trong khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$ (mâu thuẫn). Vậy $\zeta(1+iy) \neq 0$.

Vì $y \neq 0$ tùy ý nên ta suy ra $\zeta(z) \neq 0$ trên $\text{Re } z = 1$. Hơn nữa, cũng do

$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\zeta(z) = 1$ nên theo định lí 1.4.4, $(z-1)\zeta(z)$ dĩ thể thc triển chỉnh hình tại $z = 1$. Từ đó $(z-1)\zeta(z)$

chỉnh hình trên $\text{Re } z > 0$. Mặt khác do $(z-1)\zeta(z) \neq 0$ trên $\text{Re } z \geq 1$ nên $(z-1)\zeta(z) \neq 0$ trên một lân cận nào

đó của $\text{Re } z \geq 1$.

Định lí 2.3.3. Hàm $\zeta(z)$ thỏa mãn phương trình hàm

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z).$$

Chứng minh.

Để chứng minh tính chất này ta phải cải biến đường cong γ dùng trong định nghĩa hàm $\phi(z)$ trong định lí 2.2.4.

Cố định số thực âm z . Lấy γ_n là đường cong đi từ $+\infty$ theo bờ trên của đường rạch đến n , rồi vòng qua điểm $s = 0$ theo chiều ngược chiều quay kim đồng hồ bằng một hình chữ nhật có các đỉnh là $\pm n \pm \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$, trở lại n và theo bờ dưới của đường rạch đến $+\infty$.



Hình 2.

Ta định nghĩa

$$\phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} ds.$$

Dễ dàng chứng minh được $|e^s - 1| > \frac{1}{2}$ trên các cạnh của hình chữ nhật. Do đó suy ra

$$\left| \frac{(-z)^{z-1}}{e^s - 1} \right| < 2n^{z-1} \text{ trên các cạnh của hình chữ nhật. Suy ra tích phân lấy trên hình chữ nhật bị chặn bởi } Cn^z. \text{ Vì } z$$

< 0 nên $Cn^z \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Do đó

$$\phi_n(z) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty \text{ (do } \int_{+\infty}^n \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} ds + \int_n^{+\infty} \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} ds = 0).$$

Ta thấy $\int_{\gamma_n} - \int_{\gamma} = \int_{\gamma'_n}$ với γ'_n là đường cong đóng đi từ n theo bờ dưới đường rạch đến ε rồi đi vòng

qua $s = 0$ cùng chiều kim đồng hồ theo đường tròn bán kính ε rồi đến ε . Đi theo bờ trên đến n . Sau đó đi ngược chiều kim đồng hồ theo hình chữ nhật về lại n .

Mặt khác ta thấy trong $\bar{D}_{\gamma'_n}$ chỉ chứa các cực điểm đơn $s = \pm k2\pi i, 0 < k \leq n$. Thặng dư của hàm dưới dấu tích phân bằng

$$\left. \frac{(-s)^{z-1}}{e^s} \right|_{s=\pm k2\pi i} = (2\pi)^{z-1} k^{z-1} e^{\pm i\frac{\pi}{2}(z-1)}.$$

Theo định lí 1.4.9 (định lí cơ bản về thặng dư), ta có

$$\phi_n(z) - \phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'_n} \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} ds = (2\pi)^{z-1} \left(e^{(z-1)i\frac{\pi}{2}} + e^{-(z-1)i\frac{\pi}{2}} \right) \sum_{k=1}^n k^{z-1}$$

Thay $e^{(z-1)i\frac{\pi}{2}} + e^{-(z-1)i\frac{\pi}{2}} = 2 \cos \left[(z-1)\frac{\pi}{2} \right] = 2 \sin \left(\frac{\pi z}{2} \right)$ và cho $n \rightarrow \infty$. Vì $\phi_n(z) \rightarrow 0$ nên từ đẳng thức trên ta có

$$-\phi(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin \left(\frac{\pi z}{2} \right) \zeta(1-z).$$

Sau khi thác triển phân hình, (2.2.7) vẫn đúng với $z < 0$ nên kết hợp với (2.2.7) ta được

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin \left(\frac{\pi z}{2} \right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \text{ với } z < 0.$$

Vì cả hai vế đều là hàm phân hình nên phương trình hàm trên cũng đúng với mọi z . $\square$

Nhận xét:

Phương trình hàm trên cho ta biết thông tin về các không điểm của hàm zeta.

Như đã biết hàm $\zeta(z)$ không có không điểm trên $\text{Re } z > 1$ và hàm $\Gamma(z)$ không có không điểm. Cho nên từ phương trình hàm trên ta suy ra không điểm của $\zeta(z)$ trên $\text{Re } z < 0$ chính là không điểm của $\sin \left(\frac{\pi z}{2} \right)$. Đó là các không điểm đơn tại $z = -2, -4, -6, \dots$ gọi là không điểm tầm thường. Còn những không điểm còn lại chỉ tập trung trên dải $0 \leq \text{Re } z < 1$, gọi là không điểm không tầm thường. Riemann đã đưa ra giả định rằng tất cả không điểm không tầm thường đều nằm trên đường $\text{Re } z = \frac{1}{2}$.

2.4. Giá trị của hàm zeta tại những điểm nguyên

Định nghĩa 2.4.1. Các số Bernoulli B_n là các số thỏa mãn biểu thức

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!}.$$

Từ định nghĩa trên ta suy ra các kết quả sau.

Định lí 2.4.1. $B_0 = 1$ và $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0$ với $n \geq 2$.

Chứng minh.

Từ $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!}$ suy ra

$$\begin{aligned} z &= (e^z - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} \\ &= B_0 z + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!} \frac{B_k}{k!} z^n. \end{aligned}$$

Đồng nhất hai vế ta được

$$B_0 = 1$$

và

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = 0 \text{ với } n \geq 2.$$

Suy ra $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n! B_k}{k!(n-k)!} = 0$, tức là

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0 \text{ với } n \geq 2.$$

Từ hệ thức này ta có thể tính $B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \dots \square$

Định lí 2.4.2. Các số $B_{2k+1} = 0$ với k lớn hơn hoặc bằng 1.

Chứng minh.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{z}{e^z-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} \\ &= -\frac{z}{2} + \sum_{n \neq 1} \frac{B_n z^n}{n!}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \sum_{n \neq 1} \frac{B_n z^n}{n!}$$

hay

$$z \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \sum_{n \neq 1} \frac{B_n z^n}{n!}.$$

Thay z bởi $-z$ ta thấy vế trái không thay đổi. Do đó vế phải cũng vậy. Từ đó

$$B_{2k+1} = 0 \text{ với } k \geq 1. \quad \square$$

Định lí 2.4.3. Với n là số nguyên dương, ta có

$$\varsigma(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n} \quad (2.4.1)$$

và

$$\varsigma(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n} \quad (2.4.2)$$

trong đó B_{2n} là các số Bernoulli.

Chứng minh.

Để chứng minh các công thức trên ta sử dụng khai triển Laurent của $\cot z$.

Ta có

$$\begin{aligned} z \cot z &= z \frac{\cos z}{\sin z} = iz \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = iz \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} \\ &= iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} = iz + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n (2iz)^n}{n!} \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad (\text{do } B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_{2k+1} = 0 \text{ với } k \geq 1). \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Mặt khác theo bổ đề 1.6.1.iii), $\cot z$ còn được phân tích dưới dạng

$$\begin{aligned} \cot z &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z + n\pi} + \frac{1}{z - n\pi} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left(\frac{1}{1 + \frac{z}{n\pi}} - \frac{1}{1 - \frac{z}{n\pi}} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z}{n\pi} \right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{n\pi} \right)^k \right) \quad \text{với } |z| < \pi \\ &= \frac{1}{z} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n\pi} \right)^{2j-1}. \end{aligned}$$

Thay đổi thứ tự lấy tổng, ta được

$$\begin{aligned} \cot z &= \frac{1}{z} - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{2j-1}}{\pi^{2j}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2j}} \\ &= \frac{1}{z} - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{2j-1}}{\pi^{2j}} \varsigma(2j). \end{aligned}$$

Suy ra

$$z \cot z = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\pi^{2n}} \varsigma(2n) \quad \text{với } |z| < \pi. \quad (2.4.4)$$

Từ (2.4.3) và (2.4.4), ta có

$$z \cot z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\pi^{2n}} \zeta(2n).$$

Bằng cách so sánh hệ số của z^{2n} ta được

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy (2.4.1) được chứng minh.

Mặt khác, theo định lý 2.3.3, ta có

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z).$$

Thay $z = 1 - 2n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ ta được

$$\zeta(1-2n) = 2^{1-2n} \pi^{-2n} \sin\left(\frac{\pi(1-2n)}{2}\right) \Gamma(2n) \zeta(2n).$$

$$\text{Do } \Gamma(2n) = (2n-1)! \text{ , } \sin\left[\frac{\pi(1-2n)}{2}\right] = \cos n\pi = (-1)^n$$

nên ta được

$$\zeta(1-2n) = 2^{1-2n} \pi^{-2n} (-1)^n (2n-1)! \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}$$

$$= (-1)^{2n-1} \frac{B_{2n}}{2n}$$

$$= -\frac{B_{2n}}{2n}, \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy ta có (2.4.2). $\square$

2.5. Quan hệ giữa hàm zeta và chuỗi hàm Dirichlet

Định nghĩa 2.5.1. Hm Λ v ψ là các hàm được định nghĩa như sau

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{nếu } n = p^m \text{ với } p \text{ là số nguyên tố và } m \text{ là số nguyên dương} \\ 0 & \text{trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n), x \geq 0.$$

Nhận xt:

ψ còn được viết dưới dạng

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} m_p(x) \ln p$$

trong đó $m_p(x)$ là số nguyên lớn nhất thoả $p^{m_p(x)} \leq x$.

Ta thấy

$$\begin{aligned} p^{m_p(x)} &\leq x \\ \Leftrightarrow m_p(x) \ln p &\leq \ln x \\ \Leftrightarrow m_p(x) &\leq \frac{\ln x}{\ln p}. \end{aligned}$$

Vì vậy $m_p(x) = \left[\frac{\ln x}{\ln p} \right]$ trong đó $[.]$ là hàm phần nguyên.

Do đó ψ còn có thể được viết dưới dạng

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\ln x}{\ln p} \right] \ln p.$$

Định lí 2.5.1.
$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}, \operatorname{Re} z > 1. \quad (2.5.1)$$

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = z \int_1^{\infty} \psi(t) t^{-z-1} dt. \quad (2.5.2)$$

Chứng minh.

Nếu $\operatorname{Re} z > 1$ thì theo công thức tích Euler ta có

$$\zeta(z) = \prod_p (1 - p^{-z})^{-1}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \zeta'(z) &= \sum_p \left(\frac{-p^{-z} \ln p}{(1 - p^{-z})^2} \prod_{q \neq p} \frac{1}{1 - q^{-z}} \right) \quad (p, q \text{ dùng để chỉ các số nguyên tố}) \\ &= \zeta(z) \sum_p \frac{-p^{-z} \ln p}{(1 - p^{-z})^2} (1 - p^{-z}) \\ &= -\zeta(z) \sum_p \frac{p^{-z} \ln p}{1 - p^{-z}}. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} &= \sum_p \frac{p^{-z}}{1 - p^{-z}} \ln p \\ &= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} p^{-nz} \ln p \end{aligned}$$

(ở đây ta sử dụng $\frac{1}{1 - p^{-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} p^{-nz}$).

Do chuỗi trên hội tụ tuyệt đối trên $\operatorname{Re} z > 1$ nên ta có thể viết

$$\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} p^{-nz} \ln p = \sum_{(p,n), n \geq 1} (p^n)^{-z} \ln p$$

$$= \sum_k k^{-z} \ln p \quad (\text{ở đây } k = p^n).$$

Như vậy ta có

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z} \Lambda(k).$$

Vậy (2.5.1) được chứng minh.

Ta lại cần

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z} \Lambda(k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z} (\psi(k) - \psi(k-1)). \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Sử dụng công thức tổng từng phần (2.2.2) với $a_k = k^{-z}$, $b_{k+1} = \psi(k)$ và $b_1 = \psi(0) = 0$ ta được

$$\sum_{k=1}^M k^{-z} (\psi(k) - \psi(k-1)) = \psi(M)(M+1)^{-z} + \sum_{k=1}^M \psi(k) (k^{-z} - (k+1)^{-z}) \quad (2.5.4)$$

Mặt khác do

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \leq \sum_{n \leq x} \ln n \leq x \ln x$$

nên với $\text{Re } z > 1$, ta có

$$\left| \psi(M)(M+1)^{-z} \right| \leq \frac{M \ln M}{(M+1)^{\text{Re } z}}.$$

Do đó $\psi(M)(M+1)^{-z} \rightarrow 0$ khi $M \rightarrow \infty$.

Hơn nữa, ta còn có thể viết

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \psi(k) (k^{-z} - (k+1)^{-z}) &= \sum_{k=1}^M \psi(k) z \int_k^{k+1} t^{-z-1} dt \\ &= \sum_{k=1}^M z \int_k^{k+1} \psi(t) t^{-z-1} dt \quad (\text{do } \psi \text{ là hằng số trên } [k, k+1]) \\ &= z \int_1^M \psi(t) t^{-z-1} dt. \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Cho $M \rightarrow \infty$, từ (2.5.3), (2.5.4) và (2.5.5), ta suy ra

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = z \int_1^{\infty} \psi(t) t^{-z-1} dt, \quad \text{Re } z > 1.$$

Vậy (2.5.2) được chứng minh. $\square$

Định lý 2.5.2. $\frac{\zeta(z-1)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^z}$, $\text{Re } z > 2$, trong đó φ là hàm Euler.

Chứng minh.

Như đã biết φ là hàm có tính chất nhân nên theo định lí 1.1.3, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^z} &= \prod_{p \in P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(p^k)}{p^{kz}} \\ &= \prod_{p \in P} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{k-1}(p-1)}{p^{kz}} \right]\end{aligned}$$

(do $\varphi(1)=1, \varphi(p^k)=p^{k-1}(p-1)$ với $k \geq 1$).

Ta thấy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{k-1}(p-1)}{p^{kz}} &= (p-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{k-1}}{p^{kz}} = \frac{p-1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} (p^{1-z})^k \\ &= \frac{p-1}{p} \frac{p^{1-z}}{1-p^{1-z}} \quad (\text{do } \operatorname{Re} z > 2 \text{ nên } |p^{1-z}| < 1) \\ &= (p-1) \frac{p^{-z}}{1-p^{1-z}} = \frac{p-1}{p^z - p}.\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{k-1}(p-1)}{p^{kz}} &= 1 + \frac{p-1}{p^z - p} = \frac{p^z - 1}{p^z - p} \\ &= \frac{1 - p^{-z}}{1 - p^{1-z}}.\end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^z} &= \prod_{p \in P} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{k-1}(p-1)}{p^{kz}} \right] \\ &= \prod_{p \in P} \frac{1 - p^{-z}}{1 - p^{1-z}} = \frac{\prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{1-z}}}{\prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-z}}} \\ &= \frac{\zeta(z-1)}{\zeta(z)} \quad (\text{theo công thức tích Euler}). \quad \square\end{aligned}$$

Định lí 2.5.3. $\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}, \operatorname{Re} z > 1$, trong đó μ là hàm Mobius.

Chứng minh.

Do μ là hàm có tính chất nhân nên theo định lí 1.1.3, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} &= \prod_{p \in P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(p^k)}{p^{kz}} = \prod_{p \in P} (1 - p^{-z}) \\ &= \left[\prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-z}} \right]^{-1}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\zeta(z)} \text{ (theo công thức tích Euler, định lí 2.2.1).}$$

Tương tự ta cũng có

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^z} &= \prod_{p \in P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mu(p^k)|}{p^{kz}} = \prod_{p \in P} (1 + p^{-z}) \\ &= \prod_{p \in P} \frac{1 - p^{-2z}}{1 - p^{-z}} = \frac{\prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-z}}}{\prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-2z}}} \\ &= \frac{\zeta(z)}{\zeta(2z)}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{\zeta(z)}{\zeta(2z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^z}, \operatorname{Re} z > 1. \quad \square$$

Định lí 2.5.4. $\zeta(z)\zeta(z-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_x(n)}{n^z}, \operatorname{Re} z > 1, \operatorname{Re} z > x+1$

trong đó σ_x là hàm trong định nghĩa 1.1.2.

Chứng minh.

Trước hết ta có kết quả đơn giản sau

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

trong đó $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}, k = 0, 1, 2, \dots$ Do đó cho $a_k = 1, b_k = b^k$ ta được

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b^k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + b + \dots + b^k) x^k.$$

Bây giờ ta chứng minh định lí. Do σ_x là hàm có tính chất nhân nên theo định lí 1.1.3, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_x(n)}{n^z} = \prod_{p \in P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_x(p^k)}{p^{kz}}.$$

Ta thấy

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_x(p^k)}{p^{kz}} &= \sum_{k=0}^{\infty} (1 + p^x + \dots + p^{kx}) p^{-kz} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} (p^{-z})^k \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} (p^x)^k (p^{-z})^k \right] \text{ (cho } b = p^x, x = p^{-z}) \\ &= \frac{1}{1 - p^{-z}} \frac{1}{1 - p^{x-z}}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_x(n)}{n^z} &= \prod_{p \in P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_x(p^k)}{p^{kz}} = \prod_{p \in P} \frac{1}{(1-p^{-z})(1-p^{x-z})} \\
&= \prod_{p \in P} \frac{1}{1-p^{-z}} \prod_{p \in P} \frac{1}{1-p^{x-z}} \\
&= \zeta(z) \zeta(z-x). \quad \square
\end{aligned}$$

Nhận xét:

Từ tính chất trên ta suy ra

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^z} &= \zeta^2(z). \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^z} &= \zeta(z) \zeta(z-1).
\end{aligned}$$

Định lí 2.5.5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n) \sigma_b(n)}{n^z} = \frac{\zeta(z) \zeta(z-a) \zeta(z-b) \zeta(z-a-b)}{\zeta(2z-a-b)}$$

với $\operatorname{Re} z > 1, \operatorname{Re} z > a+1, \operatorname{Re} z > b+1, \operatorname{Re} z > a+b+1$.

Chứng minh.

Trước hết, ta xét

$$\begin{aligned}
\zeta(p) \zeta(q) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \right] \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^q} \right] \\
&= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p m^q}.
\end{aligned}$$

Gọi $l = (m,n)$ là ước số chung lớn nhất của m và n. Khi đó $n^p m^q = l^{p+q} u^p v^q$ với $(u,v)=1$. Do đó, ta có thể viết

$$\begin{aligned}
\zeta(p) \zeta(q) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p m^q} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{(m,n)=1} \frac{1}{l^{p+q} n^p m^q} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{p+q}} \sum_{(m,n)=1} \frac{1}{n^p m^q} = \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{p+q}} \right] \left[\sum_{(m,n)=1} \frac{1}{n^p m^q} \right] \\
&= \zeta(p+q) \sum_{(m,n)=1} \frac{1}{n^p m^q}.
\end{aligned}$$

Đặt $f_d(p,q) = \sum_{(m,n)=d} \frac{1}{n^p m^q}$. Khi đó

$$f_d(p,q) = \frac{1}{d^{p+q}} f_1(p,q).$$

Mặt khác, theo trên ta suy ra

$$f_1(p,q) = \frac{\zeta(p) \zeta(q)}{\zeta(p+q)}.$$

Vì vậy

$$f_d(p, q) = \frac{\zeta(p)\zeta(q)}{d^{p+q}\zeta(p+q)}. \quad (2.5.6)$$

Tiếp theo, ta có $\sigma_x(n) = \sum_{d|n} d^x = \sum_{d|n} \frac{n^x}{d^x}$ (do d là ước của n thì $\frac{n}{d}$ cũng là ước của n). Vì vậy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^z} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \left[\sum_{d_1|n} \frac{n^a}{d_1^a} \right] \left[\sum_{d_2|n} \frac{n^b}{d_2^b} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \sum_{d_1|n} \frac{n^a}{d_1^a} \sum_{d_2|n} \frac{n^b}{d_2^b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{z-a-b}} \sum_{d_1|n} \frac{1}{d_1^a} \sum_{d_2|n} \frac{1}{d_2^b}. \end{aligned}$$

Do $d_1|n, d_2|n$ nên bội chung nhỏ nhất của d_1 và d_2 là $[d_1, d_2]$ cũng là ước của n nên $n = [d_1, d_2]m$ với m nguyên dương. Kết hợp với việc sắp xếp lại tổng trên, ta được

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^z} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{z-a-b}} \sum_{d_1|n} \frac{1}{d_1^a} \sum_{d_2|n} \frac{1}{d_2^b} = \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^a} \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{1}{d_2^b} \sum_{[d_1, d_2]|n} \frac{1}{n^{z-a-b}} \\ &= \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^a} \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{1}{d_2^b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{([d_1, d_2]m)^{z-a-b}} \\ &= \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^a} \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{1}{d_2^b [d_1, d_2]^{z-a-b}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{z-a-b}} \\ &= \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^a} \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{1}{d_2^b [d_1, d_2]^{z-a-b}} \zeta(z-a-b) \\ &= \zeta(z-a-b) \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^a} \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{1}{d_2^b [d_1, d_2]^{z-a-b}} \\ &= \zeta(z-a-b) \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^a} \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{(d_1, d_2)^{z-a-b}}{d_2^b d_1^{z-a-b} d_2^{z-a-b}} \text{ (do } (d_1, d_2)[d_1, d_2] = d_1 d_2) \\ &= \zeta(z-a-b) \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^{z-b}} \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{(d_1, d_2)^{z-a-b}}{d_2^{z-a}} \\ &= \zeta(z-a-b) \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^{z-b}} \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{d^{z-a-b}}{d_1^{z-b} d_2^{z-a}} \text{ (với } d = (d_1, d_2)) \\ &= \zeta(z-a-b) \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{(d_1, d_2)=d} \frac{d^{z-a-b}}{d_1^{z-b} d_2^{z-a}} \\ &= \zeta(z-a-b) \sum_{d=1}^{\infty} d^{z-a-b} \sum_{(d_1, d_2)=d} \frac{1}{d_1^{z-b} d_2^{z-a}} \\ &= \zeta(z-a-b) \sum_{d=1}^{\infty} d^{z-a-b} f_d(z-b, z-a). \end{aligned}$$

Theo (2.5.6), ta có

$$f_d(z-b, z-a) = \frac{\zeta(z-b)\zeta(z-a)}{d^{2z-a-b}\zeta(2z-a-b)}$$

nên ta được

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^z} &= \zeta(z-a-b) \sum_{d=1}^{\infty} d^{z-a-b} f_d(z-b, z-a) \\ &= \zeta(z-a-b) \sum_{d=1}^{\infty} d^{z-a-b} \frac{\zeta(z-b)\zeta(z-a)}{d^{2z-a-b}\zeta(2z-a-b)} \\ &= \frac{\zeta(z-a)\zeta(z-b)\zeta(z-a-b)}{\zeta(2z-a-b)} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^z} \\ &= \frac{\zeta(z)\zeta(z-a)\zeta(z-b)\zeta(z-a-b)}{\zeta(2z-a-b)}. \quad \square \end{aligned}$$

Nhận xét:

Cho $a = b = 0$, ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d(n))^2}{n^z} = \frac{\zeta^4(z)}{\zeta(2z)}.$$

Cho $a = b$, ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma_a(n))^2}{n^z} = \frac{\zeta(z)\zeta^2(z-a)\zeta(z-2a)}{\zeta(2(z-a))}.$$

CHƯƠNG 3: ĐỊNH LÝ SỐ NGUYÊN TỐ

3.1. Giới thiệu định lý số nguyên tố

Định lý số nguyên tố được phát biểu như sau.

Định lý số nguyên tố. Nếu $\pi(x)$ là số các số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng x thì

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} \pi(x) \ln x = 1.$$

Đây là định lý khá nổi tiếng. Việc phát hiện và chứng minh nó là cả một quá trình làm việc lâu dài của các thế hệ các nhà toán học.

Có lẽ kết quả được biết đầu tiên là $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi(x) = +\infty$. Hay nói cách khác, tập các số nguyên tố là vô hạn.

Điều này được phát hiện bởi Euclide. Đến năm 1737, Euler đã đưa ra một kết quả tổng quát hơn, đó là chuỗi các nghịch đảo của các số nguyên tố

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$$

là chuỗi phân kì.

Đến cuối thế kỉ 18, nhiều nhà toán học nổi tiếng trong đó có Gauss và Legendre đã đưa ra những phỏng đoán tương đương với định lý trên. Gần 100 năm sau, vào năm 1896, sau rất nhiều cố gắng của các nhà toán học, định lý số nguyên tố cuối cùng cũng được chứng minh một cách độc lập bởi Hadamard và de la Vallée Poussin. Nhưng những chứng minh của họ là rất khó. Lúc bấy giờ, các nhà toán học không thấy có mối liên hệ giữa giải tích phức và sự phân bố các số nguyên tố. Cho đến năm 1949, P.Erdos và A.Sellberg đã tìm ra cách chứng minh “sơ cấp” của định lý số nguyên tố dựa vào công cụ giải tích phức.

Năm 1980, D.J.Newman đã công bố một chứng minh mới của định lý số nguyên tố. Chứng minh này vẫn sử dụng giải tích phức. Tuy nhiên, nó đơn giản hơn đáng kể.

Trong luận văn này, định lý số nguyên tố được chứng minh dựa theo cách tiếp cận của D.J.Newman. Cũng như hầu hết các chứng minh khác, ta phải chứng minh hai phần căn bản:

Thứ nhất, chỉ ra hàm zeta không có không điểm trên $\text{Re } s = 1$.

Thứ hai, chỉ ra liên hệ giữa hàm zeta và sự phân bố số nguyên tố trong “định lý Tauberian”.

3.2. Dạng tương đương của định lý số nguyên tố

Định lý 3.2.1. Định lý số nguyên tố là đúng, nghĩa là

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} \pi(x) \ln x = 1$$

khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$ trong đó ψ là hàm trong định nghĩa 2.5.1.

Chứng minh.

Ta viết lại hàm ψ

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{p \leq x} \left[\frac{\ln x}{\ln p} \right] \ln p \leq \sum_{p \leq x} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p \\ &= \ln x \sum_{p \leq x} 1 = \ln x \pi(x).\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

Mặt khác, với $1 < y < x$, ta có

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \pi(y) + \sum_{y < p \leq x} 1 \leq \pi(y) + \sum_{y < p \leq x} \frac{\ln p}{\ln y} < y + \frac{1}{\ln y} \sum_{y < p \leq x} \ln p \\ &\leq y + \frac{1}{\ln y} \psi(x).\end{aligned}\quad (3.2.2)$$

Lấy $y = \frac{x}{(\ln x)^2}$. Với $x \geq e$, dễ dàng chứng minh được

$$1 < y = \frac{x}{(\ln x)^2} < x$$

Thay $y = \frac{x}{(\ln x)^2}$ vào (3.2.2) ta được

$$\pi(x) \leq \frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{1}{\ln x - 2 \ln \ln x} \psi(x).$$

Từ đó suy ra

$$\pi(x) \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x - 2 \ln \ln x} \frac{\psi(x)}{x}.\quad (3.2.3)$$

Theo (3.2.1) và (3.2.3) ta có

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \ln x}{x} \leq \frac{1}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x - 2 \ln \ln x} \frac{\psi(x)}{x}.\quad (3.2.4)$$

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 2 \ln \ln x} = 1$. Do đó nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$ thì từ (3.2.4), suy ra

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} \leq 1.$$

Vì vậy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1.$$

Ngược lại, nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi(x) \frac{\ln x}{x} = 1$ thì cũng từ (3.2.4) ta suy ra

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq 1 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$

Từ đó

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Vì vậy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} \pi(x) \ln x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} \psi(x) = 1. \quad \square$$

Định lí 3.2.2. *Tồn tại số $C > 0$ sao cho $\psi(x) \leq Cx$, với mọi $x > 0$.*

Nói cách khác $\psi(x) = O(x)$.

Chứng minh.

Ta viết lại

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\ln x}{\ln p} \right] \ln p, \quad x > 0.$$

Cố định $x > 0$ và gọi m là số nguyên thoả $2^m < x \leq 2^{m+1}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(2^m) + \psi(x) - \psi(2^m) \leq \psi(2^m) + \psi(2^{m+1}) - \psi(2^m) \\ &= \sum_{p \leq 2^m} \left[\frac{\ln 2^m}{\ln p} \right] \ln p + \sum_{2^m < p \leq 2^{m+1}} \left[\frac{\ln 2^{m+1}}{\ln p} \right] \ln p \quad \left(\text{do } \left[\frac{\ln 2^{m+1}}{\ln p} \right] = \left[\frac{\ln 2^m}{\ln p} \right] \right). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Với mọi số nguyên dương n và nguyên tố p thoả $n < p \leq 2n$, ta có p là ước của $(2n)!(n)! = n!C_{2n}^n$ mà p không là ước của $n!$ nên p là ước của C_{2n}^n . Do đó

$$\begin{aligned} \prod_{n < p \leq 2n} p &\leq C_{2n}^n < (1+1)^{2n} = 2^{2n} \Rightarrow \ln \prod_{n < p \leq 2n} p < \ln 2^{2n} \\ &\Rightarrow \sum_{n < p \leq 2n} \ln p < 2n \ln 2. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$\sum_{p \leq 2^m} \ln p = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{2^{k-1} < p \leq 2^k} \ln p \right) < \sum_{k=1}^m 2^k \ln 2 < 2^{m+1} \ln 2$$

và

$$\sum_{2^m < p \leq 2^{m+1}} \ln p < 2^{m+1} \ln 2.$$

Mặt khác, ta thấy

$$\left[\frac{\ln x}{\ln p} \right] > 1 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln p} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq p^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq p$$

và

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} \left[\frac{\ln x}{\ln p} \right] \ln p \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p = \pi(\sqrt{x}) \ln x.$$

Do đó nếu $2^m < x \leq 2^{m+1}$ thì theo (3.2.5) ta có

$$\psi(x) \leq \sum_{p \leq 2^m} \left[\frac{\ln 2^m}{\ln p} \right] \ln p + \sum_{2^m < p \leq 2^{m+1}} \left[\frac{\ln 2^{m+1}}{\ln p} \right] \ln p$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p \leq \sqrt{2^m}} \left[\frac{\ln 2^m}{\ln p} \right] \ln p + \sum_{\sqrt{2^m} < p \leq 2^m} \left[\frac{\ln 2^m}{\ln p} \right] \ln p + \sum_{2^m < p \leq 2^{m+1}} \ln p \quad (\text{do} \\
&\left[\frac{\ln 2^{m+1}}{\ln p} \right] = 1 \text{ với } 2^m < p \leq 2^{m+1}) \\
&\leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \left[\frac{\ln x}{\ln p} \right] \ln p + \sum_{p \leq 2^m} \ln p + \sum_{2^m < p \leq 2^{m+1}} \ln p \\
&\leq \pi(\sqrt{x}) \ln x + 2^{m+1} \ln 2 + 2^{m+1} \ln 2 \\
&= \pi(\sqrt{x}) \ln x + 2^{m+2} \ln 2 \\
&< \pi(\sqrt{x}) \ln x + 4x \ln 2 \leq \sqrt{x} \ln x + 4x \ln 2 \\
&= \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 4 \ln 2 \right) x.
\end{aligned}$$

Vì $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ nên ta được

$$\psi(x) = O(x). \quad \square$$

3.3. Định lí Tauberian

Định lí 3.3.1 (Định lí Tauberian). Cho F là hàm bị chặn và trơn từng khúc trên $[0; +\infty)$. Khi đó biến đổi Laplace của nó là

$$G(z) = \int_0^{+\infty} F(t) e^{-zt} dt$$

tồn tại và chỉnh hình trên miền $\text{Re } z > 0$. Nếu G có thc triển chỉnh hình tới một lân cận của $\text{Re } z = 0$ thì

$$\int_0^{+\infty} F(t) dt \text{ tồn tại và bằng } G(0).$$

Chứng minh.

Chứng minh G tồn tại và chỉnh hình trên $\text{Re } z > 0$.

Theo định lí 1.3.12, ta có $g_k(z) = \int_0^k F(t) e^{-zt} dt$ chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Mặt khác với $z \in \{z : \text{Re } z > 0\}$, ta có

$$\left| \int_0^k F(t) e^{-zt} dt \right| \leq \int_0^k |F(t)| |e^{-zt}| dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-\text{Re } z t} dt = \frac{M}{\text{Re } z} \quad (3.3.1)$$

(M thỏa $|F(t)| \leq M$, với mọi $t \in [0; +\infty)$).

Theo (3.3.1), dãy $h_k(z) = M \int_0^k e^{-\text{Re } z t} dt$ hội tụ đến $\frac{M}{\text{Re } z}$.

Suy ra $f_k(z) = \int_0^k F(t)e^{-zt} dt$ hội tụ điểm trên $\text{Re} z > 0$. Từ đó, ta được $g_k(k) = \int_0^k F(t)e^{-zt} dt$ hội tụ điểm

trên $\text{Re} z > 0$.

Cũng theo (3.3.1), g_k bị chặn đều trên mỗi tập con compact của $\text{Re} z > 0$. Do đó theo định lí 1.3.15 (định lí Vitali), $\{g_k\}$ hội tụ đều trên mỗi tập con compact của $\text{Re} z > 0$ đến hàm G và G chỉnh hình trên $\text{Re} z > 0$.

Vậy $G(z) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{-zt} dt$ tồn tại và chỉnh hình trên $\text{Re} z > 0$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\int_0^{+\infty} F(t) dt$ tồn tại và $\int_0^{+\infty} F(t) dt = G(0)$.

Vì F bị chặn trên $[0; +\infty)$ nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử

$$|F(t)| \leq 1, \text{ với mọi } t \in [0; +\infty).$$

Với $\lambda > 0$ ta định nghĩa

$$G_\lambda(z) = \int_0^\lambda F(t)e^{-zt} dt.$$

Theo định lí 1.3.12, G_λ chỉnh hình trên $\mathbb{C}$. Điều phải chứng minh tương đương với

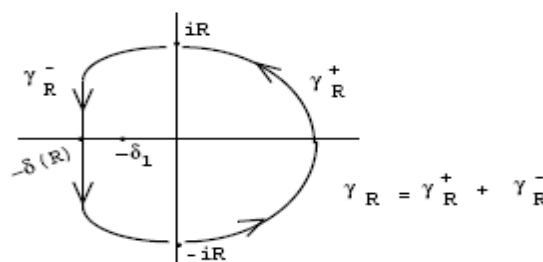
$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G_\lambda(0) = G(0)$$

nghĩa là $\int_0^{+\infty} F(t) dt$ tồn tại và hội tụ đến $G(0)$.

Bây giờ ta sẽ đi đánh giá $|G_\lambda(0) - G(0)|$.

Do G chỉnh hình trên một tập mở chứa $\text{Re} z \geq 0$ nên với mỗi $R > 0$, tồn tại $\delta(R) > 0$ đủ nhỏ sao cho G chỉnh hình trên và trong đường cong đóng γ_R trong đó γ_R được giới hạn bởi

$$\{z : z = Re^{i\theta}, -\varphi - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \varphi + \frac{\pi}{2}\} \text{ v } \{z : \text{Re } z = \delta(R)\} \text{ với } \varphi = \arcsin \frac{\delta(R)}{R}.$$



Hình 3.

Kí hiệu γ_R^+ là phần đường cong của γ_R nằm trong $\text{Re } z > 0$ và γ_R^- là phần đường cong của γ_R nằm trong $\text{Re } z < 0$.

Theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{G(z) - G_\lambda(z)}{z} dz.$$

Đặt $G'(z) = G(z)e^{\lambda z}$, $G'_\lambda(z) = G_\lambda(z)e^{\lambda z}$. Ta có

$$\begin{aligned} G(0) - G_\lambda(0) &= G'(0) - G'_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{G'(z) - G'_\lambda(z)}{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{G(z) - G_\lambda(z)}{z} e^{\lambda z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{G(z) - G_\lambda(z)}{z} e^{\lambda z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \frac{z}{R^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

(do $\int_{\gamma_R^-} (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \frac{z}{R^2} dz = 0$).

Ch ý rằng $|z| = R$ thì $\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + \frac{z}{R^2} = \frac{2 \text{Re } z}{R^2}$. Vì vậy với $z \in \gamma_R^+$ ta có

$$\begin{aligned} \left| (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| &\leq |G(z) - G_\lambda(z)| e^{\lambda \text{Re } z} \frac{2 \text{Re } z}{R^2} \\ &= \left| \int_{\lambda}^{+\infty} F(t) e^{-zt} dt \right| e^{\lambda \text{Re } z} \frac{2 \text{Re } z}{R^2} \\ &\leq \left(\int_{\lambda}^{+\infty} |F(t)| e^{-\text{Re } z t} dt \right) e^{\lambda \text{Re } z} \frac{2 \text{Re } z}{R^2} \\ &\leq \left(\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-\text{Re } z t} dt \right) e^{\lambda \text{Re } z} \frac{2 \text{Re } z}{R^2} \\ &= \frac{1}{\text{Re } z} e^{-\lambda \text{Re } z} e^{\lambda \text{Re } z} 2 \frac{\text{Re } z}{R^2} = \frac{2}{R^2}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^+} (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_R^+} \left| (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| |dz| \quad (\text{áp dụng định lí 1.3.4}) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2}{R^2} \int_{\gamma_R^+} |dz| = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{R^2} \pi R = \frac{1}{R}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Bây giờ ta đánh giá tích phân (3.3.2) trên γ_R^- .

Sử dụng bất đẳng thức tam giác ta có

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| + \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} G_\lambda(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| \\ & = |I_1(R)| + |I_2(R)| \end{aligned}$$

$$\text{với } I_1(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz, \quad I_2(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} G_\lambda(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz.$$

Trước tiên ta xét $I_2(R)$. Do $G_\lambda(z)$ chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ nên ta có thể thay đường cong lấy tích phân bằng nửa đường tròn từ $-iR$ đến iR nằm trong nửa mặt phẳng trái. Với z thuộc nửa đường tròn này, $z \neq \pm iR$ ta có

$$\begin{aligned} \left| G_\lambda(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| &= \left| \left(\int_0^\lambda F(t) e^{-zt} dt \right) e^{\lambda t} \frac{2 \operatorname{Re} z}{R^2} \right| \\ &\leq \left(\int_0^\lambda e^{-\operatorname{Re} z t} dt \right) e^{\lambda \operatorname{Re} z} \frac{2 |\operatorname{Re} z|}{R^2} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{Re} z} (e^{-\lambda \operatorname{Re} z} - 1) e^{\lambda \operatorname{Re} z} \frac{2 |\operatorname{Re} z|}{R^2} \\ &= \frac{1}{|\operatorname{Re} z|} (1 - e^{\lambda \operatorname{Re} z}) \frac{2 |\operatorname{Re} z|}{R^2} \\ &\leq \frac{2}{R^2} \quad (\text{do } e^{\lambda \operatorname{Re} z} < 1). \end{aligned}$$

Ta thấy bất đẳng thức trên vẫn đúng với $\operatorname{Re} z = 0$ (cho $z \rightarrow iy$). Do đó lại áp dụng định lí 1.3.4, ta có

$$|I_2(R)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2}{R^2} \pi R = \frac{1}{R}. \quad (3.3.4)$$

Cuối cùng ta đi đánh giá $|I_1(R)|$. Trước hết ta có nhận xét như sau:

Nếu $z \in \gamma_R$ thì

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| &= \frac{2 |\operatorname{Re} z|}{R^2} = \frac{|\operatorname{Re} z|}{R^2} + \frac{|\operatorname{Re} z|}{R^2} \\ &\leq \frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R} \quad (\text{do chọn } \delta(R) < R \text{ và } |\operatorname{Re} z| \leq R). \end{aligned}$$

Như vậy với $z \in \gamma_R^-$, ta luôn có $\left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| \leq \frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R}$.

Tiếp theo, do G chỉnh hình trên γ_R^- nên tồn tại $M(R) > 0$ sao cho

$$|G(z)| \leq M(R), \text{ với mọi } z \in \gamma_R^-.$$

Chọn δ_1 sao cho $0 < \delta_1 < \delta$ và ta tách tích phân $I_1(R)$ thành tổng hai tích phân sau

$$I_1(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{z \in \gamma_R^- \\ \operatorname{Re} z < -\delta_1}} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{z \in \gamma_R^- \\ \operatorname{Re} z \geq -\delta_1}} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz.$$

Ta thấy

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{z \in \gamma_R^- \\ \operatorname{Re} z < -\delta_1}} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| &\leq \frac{1}{2\pi} M(R) e^{-\lambda \delta_1} \left(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R} \right) \pi R \\ &= \frac{1}{2} RM(R) \left(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R} \right) e^{-\lambda \delta_1}. \end{aligned}$$

Và

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{z \in \gamma_R^- \\ \operatorname{Re} z \geq -\delta_1}} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} M(R) \left(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R} \right) 2R \arcsin \frac{\delta_1}{R}$$

(do $e^{\lambda \operatorname{Re} z} \leq 1$ và $R \arcsin \frac{\delta_1}{R}$ là độ dài cung).

Do đó

$$|I_1(R)| \leq \frac{1}{2} RM(R) \left(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R} \right) e^{-\lambda \delta_1} + \frac{1}{2\pi} M(R) \left(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R} \right) 2R \arcsin \frac{\delta_1}{R}$$

Lấy $\varepsilon > 0$ tùy ý, chọn $R = \frac{4}{\varepsilon}$. Cố định $\delta(R)$ sao cho $0 < \delta(R) < R$ thỏa G chỉnh hình trên và trong

đường cong γ_R . Theo (3.3.3) và (3.3.4), với mọi $\lambda > 0$ ta có

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^+} (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| &\leq \frac{1}{R} = \frac{\varepsilon}{4}; \\ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} G_\lambda(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| &\leq \frac{1}{R} = \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Bây giờ ta chọn δ_1 sao cho $0 < \delta_1 < \delta(R)$ và thỏa mãn

$$\frac{1}{2\pi} M(R) \left(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R} \right) 2R \arcsin \frac{\delta_1}{R} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Khi đó

$$\frac{1}{2}RM(R)\left(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R}\right)e^{-\lambda\delta_1} < \frac{\varepsilon}{4} \text{ với } \lambda \text{ đủ lớn } (\lambda \geq \lambda_0).$$

Vì vậy

$$|G(0) - G_\lambda(0)| < \varepsilon \text{ với mọi } \lambda \geq \lambda_0. \quad \square$$

Định lí 3.3.2. Cho f là hàm trơn từng khúc, không âm, không giảm trên $[1; +\infty)$ sao cho $f(x) = O(x)$. Khi đó biến đổi Mellin của nó là

$$g(z) = z \int_1^{+\infty} f(x) x^{-z-1} dx$$

tồn tại và chỉnh hình trên miền $\operatorname{Re} z > 1$. Nếu với số $c \in \mathbb{R}$ nào đó $g(z) - \frac{c}{z-1}$ có thể triển chỉnh hình tới một lân cận của $\operatorname{Re} z = 1$ thì

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = c.$$

Chứng minh.

Ta định nghĩa hàm F trên $[0; +\infty)$ như sau

$$F(t) = e^{-t} f(e^t) - c.$$

Do f trơn từng khúc trên $[1; +\infty)$ nên F trơn từng khúc trên $[0; +\infty)$. Do f không giảm và $f(e^t) = O(e^t)$ nên $e^{-t} f(e^t)$ bị chặn trên $[0; +\infty)$. Suy ra F bị chặn trên $[0; +\infty)$.

Ta thấy hàm F thỏa mãn giả thiết của định lí Tauberian nên biến đổi Laplace của nó là

$$G(z) = \int_0^{+\infty} (e^{-t} f(e^t) - c) e^{-zt} dt$$

tồn tại và chỉnh hình trên $\operatorname{Re} z > 0$.

Đặt $x = e^t$, ta được

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} f(x) - c \right) x^{-z} \frac{dx}{x} = \int_1^{+\infty} f(x) x^{-z-2} dx - c \int_1^{+\infty} x^{-z-1} dx \\ &= \frac{1}{z+1} \left[(z+1) \int_1^{+\infty} f(x) x^{-z-2} dx \right] - \frac{c}{z} = \frac{g(z+1)}{z+1} - \frac{c}{z} \\ &= \frac{1}{z+1} \left(g(z+1) - \frac{c}{z} - c \right). \end{aligned}$$

Do G tồn tại và chỉnh hình trên $\operatorname{Re} z > 0$ nên g tồn tại và chỉnh hình trên $\operatorname{Re} z > 1$.

Mặt khác do $g(z) - \frac{c}{z-1}$ có thể triển chỉnh hình đến lân cận của $\operatorname{Re} z = 1$ nên $g(z+1) - \frac{c}{z}$ có thể triển chỉnh hình tới một lân cận của $\operatorname{Re} z = 0$. Do đó G có thể triển chỉnh hình tới một lân cận của $\operatorname{Re} z = 0$.

Cũng theo định lí Tauberian $\int_0^{+\infty} F(t)dt$ tồn tại và hội tụ đến $G(0)$ hay $\int_0^{+\infty} (e^{-t} f(e^t) - c)dt$ tồn tại. Đổi biến

$x = e^t$ ta suy ra $\int_1^{+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - c \right) \frac{dx}{x}$ tồn tại.

Sử dụng giả thiết f không giảm, ta sẽ chứng minh $\frac{f(x)}{x} \rightarrow c$ khi $x \rightarrow +\infty$. Thật vậy lấy $\varepsilon > 0$, giả sử có

$x_0 > 0$ sao cho $\frac{f(x_0)}{x_0} - c \geq 2\varepsilon$.

Ta có

$$f(x) \geq f(x_0) \geq x_0(c + 2\varepsilon) \geq x(c + \varepsilon) \text{ với } x_0 \leq x \leq x_0 \frac{c + 2\varepsilon}{c + \varepsilon}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} - c \geq \varepsilon &\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} - c \right) \frac{1}{x} \geq \frac{\varepsilon}{x} \\ &\Rightarrow \int_{x_0}^{\frac{c+2\varepsilon}{c+\varepsilon}x_0} \left(\frac{f(x)}{x} - c \right) \frac{dx}{x} \geq \int_{x_0}^{\frac{c+2\varepsilon}{c+\varepsilon}x_0} \frac{\varepsilon}{x} dx = \varepsilon \ln \frac{c+2\varepsilon}{c+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Do $\int_1^{+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - c \right) \frac{dx}{x}$ hội tụ nên $\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{f(x)}{x} - c \right) \frac{dx}{x} \rightarrow 0$ khi $x_1, x_2 \rightarrow +\infty$.

Từ đó với x_0 đủ lớn, $\int_{x_0}^{\frac{c+2\varepsilon}{c+\varepsilon}x_0} \left(\frac{f(x)}{x} - c \right) \frac{dx}{x} < \varepsilon \ln \frac{c+2\varepsilon}{c+\varepsilon}$ (mâu thuẫn). Vì vậy với x_0 đủ lớn ta có

$$\frac{f(x_0)}{x_0} - c < 2\varepsilon. \quad (3.3.5)$$

Tương tự, ta giả sử có $x_0 > 0$ sao cho $\frac{f(x_0)}{x_0} - c \leq -2\varepsilon$. Khi đó

$$f(x) \leq f(x_0) \leq x_0(c - 2\varepsilon) \leq x(c - \varepsilon) \text{ với } \frac{c-2\varepsilon}{c-\varepsilon}x_0 \leq x \leq x_0.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} - c \leq -\varepsilon &\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} - c \right) \frac{1}{x} \leq -\frac{\varepsilon}{x} \\ &\Rightarrow \int_{\frac{c-2\varepsilon}{c-\varepsilon}x_0}^{x_0} \left(\frac{f(x)}{x} - c \right) \frac{dx}{x} \leq \int_{\frac{c-2\varepsilon}{c-\varepsilon}x_0}^{x_0} -\frac{\varepsilon}{x} dx = -\varepsilon \ln \frac{c-\varepsilon}{c-2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Nhưng với x_0 đủ lớn ta có

$$\int_{\frac{c-2\varepsilon}{c-\varepsilon}x_0}^{x_0} \left(\frac{f(x)}{x} - c \right) \frac{dx}{x} > -\varepsilon \ln \frac{c-\varepsilon}{c-2\varepsilon} \quad (\text{mâu thuẫn}).$$

Vậy với x_0 đủ lớn ta có

$$\frac{f(x_0)}{x_0} - c > -2\varepsilon. \quad (3.3.6)$$

Từ (3.3.5) và (3.3.6) ta suy ra

$$\left| \frac{f(x)}{x} - c \right| < 2\varepsilon \quad \text{với } x \text{ đủ lớn.}$$

Hay

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = c. \quad \square$$

3.4. Chứng minh định lý số nguyên tố

Ta nhớ lại hàm ψ trong định nghĩa 2.5.1

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\ln x}{\ln p} \right] \ln p.$$

Rõ ràng ψ là hàm không âm, trơn từng khúc, không giảm trên $[1; +\infty)$. Hơn nữa theo định lý 3.2.2, ta chỉ

$$\psi(x) = O(x).$$

Do đó theo định lý 3.3.2, thay $f = \psi$ ta có biến đổi Mellin

$$g(z) = z \int_1^{+\infty} \psi(x) x^{-z-1} dx$$

tồn tại và chỉnh hình trên miền $\operatorname{Re} z > 1$.

Mặt khác, theo định lý 2.5.1, ta có

$$g(z) = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}.$$

Nhưng do $\zeta(z) \neq 0$ trên $\operatorname{Re} z = 1$ (theo định lý 2.3.2) và $\operatorname{res} \left[\frac{\zeta'}{\zeta}, 1 \right] = -1$ (theo định lý 2.2.6) nên tồn tại $r > 0$ để

$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ có khai triển Laurent như sau

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{-1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n \quad \text{với } 0 < |z-1| < r.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n \quad \text{với } 0 < |z-1| < r.$$

Do đó $\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{1}{z-1}$ có thể thc triển chỉnh hình tới $z=1$ nên $\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{1}{z-1}$ cũng có thể thc triển chỉnh hình tới một lân cận của $\text{Re } z = 1$. Vì thế $g(z) - \frac{1}{z-1}$ cũng có một thc triển chỉnh hình đến một lân cận của $\text{Re } z = 1$. Nên theo định lí 3.3.2, ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Vì vậy theo định lí 3.2.1, ta cĩ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} \pi(x) \ln x = 1.$$

Định lí số nguyên tố được chứng minh. $\square$

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, chúng tôi đã trình bày các tính chất của hàm zeta và chứng minh định lý số nguyên tố dựa theo cách tiếp cận của D.J.Newman.

Trong quá trình thực hiện luận văn, tôi nhận thấy mình hiểu những kiến thức đã học một cách sâu sắc hơn, đặc biệt là bộ môn giải tích phức. Tôi hy vọng sẽ tìm hiểu sâu hơn về đề tài cũng như về bộ môn này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Đâu Thế Cấp (2009), *Số học và hình học*, NXB Đại học Quốc gia TP.Hồ Chí Minh.
2. Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải (2006), *Hàm biến phức*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Tiếng Anh

3. M.Andersson(1997), *Topics in Complex Analysis*, Springer-Verlag New York.
4. R.B.Ash, W.P.Novinger(1971), *Complex Variables*, ebook.moet.gov.vn.
5. Theodore W.Gamelin(2001), *Complex Analysis*, Springer- Verlag New York.
6. R.Nevanlinna, V.Paatero(1969), *Introduction to Complex Analysis*, Addison – Wesley Publishing Company.