

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

ĐẶNG NHẬT TÂN

HẠNG CỦA NỬA NHÓM
CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI ĐẦY ĐỦ

Chuyên ngành: Phương Pháp Toán Sơ cấp
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng, Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Nguyễn Gia Định

Phản biện 1: TS. LÊ HẢI TRUNG

Phản biện 2: PGS.TS. TRẦN ĐẠO DŨNG

Luận văn đã được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học, chuyên ngành ***Phương pháp toán sơ cấp*** họp tại Đại Học Đà Nẵng vào ngày 29 tháng 05 năm 2011.

** Có thể tìm hiểu luận văn tại:*

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết nửa nhóm là một phần tương đối trẻ của toán học. Như một hướng tách biệt của đại số với mục tiêu riêng của nó, việc xác định rõ các bài toán và phương pháp nghiên cứu của lý thuyết nửa nhóm được hình thành khoảng cách đây 70 năm. Một trong các động cơ chính đối với sự tồn tại một lý thuyết toán học nào đó là những ví dụ thú vị và tự nhiên. Đối với lý thuyết nửa nhóm, sự lựa chọn rõ ràng nhất cho những ví dụ như thế là nửa nhóm các phép biến đổi. Nhiều phép biến đổi khác nhau của những tập khác nhau xuất hiện ở mọi lúc mọi nơi trong toán học. Do hợp thành thông thường của phép biến đổi có tính kết hợp, mỗi tập các phép biến đổi đóng đối với phép hợp thành và tạo thành một nửa nhóm. Trong số tất cả các nửa nhóm các phép biến đổi, nửa nhóm các phép biến đổi đầy đủ $T_X = \{\alpha | \alpha : X \rightarrow X\}$ của tập X là quan trọng nhất. Một đối tượng phổ dụng tương tự trong lý thuyết nửa nhóm là nhóm đối xứng S_X gồm tất cả các phép biến đổi song ánh của X .

Khi nghiên cứu về lý thuyết nửa nhóm, nó sẽ giúp chúng ta tìm hiểu được thông tin cần thiết về các tính chất của những nhóm chứa trong nửa nhóm đó. Ngày nay, lý thuyết nửa nhóm có vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu một số ngành khoa học cơ bản như: toán học, vật lý,... Đặc biệt, nó được ứng dụng rộng rãi trong lĩnh vực công nghệ thông tin như: lý thuyết ngôn ngữ, Automata, lý thuyết điều khiển, trí tuệ nhân tạo. Công trình đầu tiên về lý thuyết nửa nhóm là bài báo của Dickson vào năm 1905, từ đó đến nay có rất nhiều công trình nghiên cứu về lý thuyết nửa nhóm

và ứng dụng của nó, đã thu hút được nhiều kết quả có ý nghĩa lớn. Đặc biệt, những kết quả gần đây của J. M. Howie(1995); P. M. Higgins, J. M. Howie(2004); P. M. Higgins, J. M. Howie, N. Ruskuc, J. D. Matchell(1998-2003); Martin J. Evans, Youngmi Kim(2004); P. M. Higgins, J. M. Howie, N. Ruskuc(2006)...

Xuất phát từ nhu cầu phát triển của lý thuyết nửa nhóm và những ứng dụng của nó, chúng tôi quyết định chọn đề tài với tên: ***Hạng của nửa nhóm các phép biến đổi đầy đủ*** để tiến hành nghiên cứu.

2. Mục đích nghiên cứu

Nhằm tạo một tài liệu tham khảo tốt cho những ai bắt đầu tìm hiểu về *Lý thuyết nửa nhóm* và đưa ra được một số ví dụ minh hoạ đặc sắc nhằm góp phần làm phong phú thêm các kết quả trong lĩnh vực này.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Trong luận văn này chúng tôi trình bày hạng của nửa nhóm các phép biến đổi đầy đủ của T_X thông qua hạng tương đối của T_X modulo $S_X, E_X, \mathcal{O}_X$.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Thu thập các bài báo khoa học của các tác giả nghiên cứu liên quan đến *Lý thuyết nửa nhóm* và *Hạng của nửa nhóm các phép biến đổi đầy đủ*.

- Tham gia các buổi seminar hằng tuần để trao đổi các kết quả đang nghiên cứu.

5. Ý nghĩa khoa học thực tiễn của đề tài:

Xây dựng được một tài liệu tham khảo bổ ích cho những ai muốn nghiên cứu về hạng của nửa nhóm nói chung và hạng của nửa nhóm các phép biến đổi đầy đủ nói riêng.

6. Cấu trúc luận văn

Toàn bộ nội dung của luận văn được chia làm ba chương:

Chương 1. Nửa nhóm phép biến đổi đầy đủ

Chúng tôi trình bày các kiến thức cơ sở sẽ dùng cho các chương sau, như là khái niệm nửa nhóm, các quan hệ Green và mối quan hệ nửa nhóm các phép biến đổi đầy đủ và các quan hệ Green.

Chương 2. Hạng tương đối của nửa nhóm T_X modulo S_X và E_X

Chúng tôi trình bày tổng quan các kết quả về hạng tương đối của nửa nhóm các phép biến đổi đầy đủ T_X modulo S_X (nhóm đối xứng trên X) và modulo E_X (nửa nhóm các ánh xạ lũy đẳng). Từ đó tìm cách đặc trưng cặp phần tử sinh của T_X modulo S_X và E_X trong trường hợp X vô hạn.

Chương 3. Hạng tương đối của nửa nhóm T_X modulo $\mathcal{O}_X$

Dành riêng cho việc nghiên cứu về hạng tương đối của nửa nhóm các phép biến đổi đầy đủ T_X modulo $\mathcal{O}_X$ (nửa nhóm các ánh xạ bảo toàn thứ tự trên X) khi X là tập sắp thứ tự tuyến tính đếm được hoặc tập sắp thứ tự tốt.

Chương 1

NỬA NHÓM PHÉP BIẾN ĐỔI ĐẦY ĐỦ

1.1 Một số kiến thức cơ sở về nửa nhóm

1.1.1 Một số định nghĩa

Định nghĩa 1.1.1. Cho S là một tập khác rỗng và

$$\begin{aligned} \circ : S \times S &\rightarrow S \\ (x, y) &\mapsto \circ(x, y) = x \circ y. \end{aligned} \tag{1.1}$$

là một phép toán hai ngôi trên S . Cặp $(S, \circ)$ được gọi là một *nửa nhóm* nếu phép toán $\circ$ có tính chất kết hợp. Nghĩa là với mọi $x, y, z \in S$ thì $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$.

Để cho thuận tiện ta viết xy thay cho $x \circ y$ và gọi là tích của x và y trong S .

Chú ý 1.1.2. Với $x \in S : x^n = \underbrace{x.x \cdots x}_n; \quad x^1 = x; \quad x^2 = x.x; \quad x^{n+1} = x^n.x$ với mọi số nguyên dương n .

Ví dụ 1.1.3.

1) $(\mathbb{N}, +); (\mathbb{Z}, +); (\mathbb{Q}, +); (\mathbb{R}, +); (\mathbb{C}, +)$ là các nửa nhóm (đối với phép nhân cũng vậy).

2) Xét ma trận tam giác trên với hệ số nguyên, $S = \{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \geq 1 \}$ thì S là nửa nhóm với phép nhân ma trận thông thường.

3) Cho tập gồm 3 phần tử $S = \{ a, b, c \}$ và định nghĩa tích trong bảng sau:

.	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	c

Khi đó S là một nửa nhóm hữu hạn.

Bổ đề 1.1.4. *Một nửa nhóm S có nhiều nhất một phần tử đơn vị.*

Định nghĩa 1.1.5. Cho nửa nhóm S và một tập con khác rỗng $A \subseteq S$. Cặp $(A, \circ)$ được gọi là *nửa nhóm con* của S nếu nó đóng với phép nhân, nghĩa là với mọi $x, y \in A : x.y \in A$, kí hiệu $A \leq S$.

Chú ý 1.1.6. *Một nửa nhóm con bao giờ cũng sử dụng phép toán của nửa nhóm mẹ của nó. Do đó nếu A là nửa nhóm con của S thì chắc chắn phép toán của A là kết hợp.*

Ví dụ 1.1.7. Xét nửa nhóm cộng $S = (\mathbb{Q}, +)$ thì $(\mathbb{N}, +)$ là nửa nhóm con của S nhưng nửa nhóm $(\mathbb{N}, \cdot)$ thì không phải vì phép toán " $\cdot$ " không là phép toán của S .

Bổ đề 1.1.8. *Nếu $A_i, i \in I$ là họ khác rỗng các nửa nhóm con của S và $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ thì $\bigcap_{i \in I} A_i$ là một nửa nhóm con của S .*

Định nghĩa 1.1.9. Cho một tập con khác rỗng $X \subseteq S$, khi đó giao của tất cả các nửa nhóm con A của S chứa X , kí hiệu $[X]_S = \bigcap \{A | X \subseteq A, A \leq S\}$ được gọi là *nửa nhóm con sinh bởi X* , còn viết là $\langle X \rangle$. Nửa nhóm con $\langle X \rangle$ là tập hợp tất cả các phần tử của S được biểu diễn như tích hữu hạn các phần tử của X . Nếu $\langle X \rangle = S$ thì ta nói X là *tập sinh* của S .

Khi X có một phần tử, $[X] = \{x\}$ thì ta viết $\{x\}_S$ thay vì $[\{x\}]_S$. Tổng quát hơn, nếu $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ là vô hạn hoặc hữu hạn thì ta viết $[x_1, x_2, \dots]_S$ thay cho $X = [\{x_1, x_2, \dots\}]_S$.

Mệnh đề 1.1.10. Cho $X \neq \emptyset, X \subseteq S$, khi đó,

$$[X]_S = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^n = \{x_1 x_2 \dots x_n | n \geq 1, x_i \in X\}.$$

Ví dụ 1.1.11. Xét nửa nhóm nhân $S = \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ các ma trận vuông cấp 2 hệ số nguyên và cho $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ta có:

$$\begin{aligned} M^2 = M.M &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; & M^3 = M^2.M &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ M^4 = M^3.M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; & M^5 = M^4.M &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vậy $[M]_S = \{I, M, M^2, M^3\}$ là nửa nhóm con hữu hạn của S .

Định nghĩa 1.1.12. Cho S là một nửa nhóm, phần tử $e \in S$ được gọi là *lũy đẳng* nếu $e.e = e$. Gọi E_X là tập các phần tử lũy đẳng của nửa nhóm S .

Với $e, f \in E_X$, đặt $e \leq f$ khi và chỉ khi $ef = fe = e$. Khi đó quan hệ " $\leq$ " là một *thứ tự bộ phận* trên E_X . Nếu S chứa phần tử 0 thì $0 \leq e$ với mọi $e \in E_X$.

Định nghĩa 1.1.13. Nửa nhóm S được gọi là *chính quy* nếu với mọi $a \in S$, tồn tại $x \in S$ sao cho $axa = a$.

Định nghĩa 1.1.14. Nửa nhóm S được gọi là nửa nhóm *nghịch đảo* nếu với mỗi $x \in X$, tồn tại duy nhất $x' \in X$ sao cho $xx'x = x$ và $x'xx' = x'$. Khi đó x' được gọi là nghịch đảo của x và ngược lại.

Mệnh đề 1.1.15. *Một nửa nhóm là một nửa nhóm nghịch đảo khi và chỉ khi nó là chính quy và các phần tử lũy đẳng giao hoán với nhau.*

Định nghĩa 1.1.16. Cho S_1, S_2 là các nửa nhóm. Một ánh xạ $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ được gọi là một *đồng cấu* nếu

$$\varphi(x.y) = \varphi(x)\varphi(y) \text{ với mọi } x, y \in S_1.$$

Một đồng cấu mà đơn ánh (toàn ánh, song ánh) được gọi là *đơn cấu* (toàn cấu, đẳng cấu).

1.1.2 Quan hệ Green trong nửa nhóm

Định nghĩa 1.1.17. Chúng ta định nghĩa quan hệ $\mathcal{L}$ trên nửa nhóm S bởi

$$a\mathcal{L}b \text{ nếu và chỉ nếu } a = b \text{ hoặc } (\exists x, y \in S) a = xb, b = ya.$$

Chúng ta cũng có thể định nghĩa đơn giản bởi $S^1 = S \cup \{1\}$ như sau:

$$a\mathcal{L}b \text{ nếu và chỉ nếu } (\exists x, y \in S^1) a = xb, b = ya;$$

điều này có nghĩa là $a\mathcal{L}b \Leftrightarrow S^1a = S^1b$.

Tương tự,

$$a\mathcal{R}b \text{ nếu và chỉ nếu } (\exists u, v \in S^1) a = bu, b = av;$$

điều này có nghĩa là $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1$; và

$$a\mathcal{J}b \text{ nếu và chỉ nếu } (\exists u, v, x, y \in S^1) a = xby, b = uav;$$

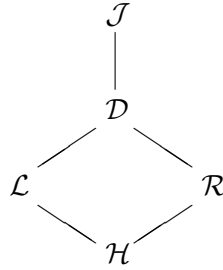
điều này có nghĩa là $a\mathcal{J}b \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1$.

Kí hiệu $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Khi đó dễ dàng có được $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}, \mathcal{H}$ là những quan hệ tương đương; trong đó $\mathcal{L}$ là tương đẳng phải còn $\mathcal{R}$ là tương đẳng trái, tức là nếu $a\mathcal{L}b$ và $c \in S$ thì $ac\mathcal{L}bc$, nếu $a\mathcal{R}b$ và $c \in S$ thì $ca\mathcal{R}cb$. Ngoài ra, chúng ta có quan hệ $\mathcal{D}$ sau trên S :

$$a\mathcal{D}b \text{ nếu và chỉ nếu } (\exists c \in S)a\mathcal{L}c \text{ và } c\mathcal{R}b.$$

điều này có nghĩa là $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$. Ta cũng có $\mathcal{D}$ là một quan hệ tương đương (Mệnh đề(1.1.19)).

Năm quan hệ tương đương trên được gọi là các *quan hệ Green* và ta có sơ đồ Hasse biểu diễn dưới dạng sau:



Ta kí hiệu các lớp tương đương tương ứng chứa x bởi $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ và $\mathcal{J}$:

$$L_x = \{y|x\mathcal{L}y\}; \quad R_x = \{y|x\mathcal{R}y\}; \quad J_x = \{y|x\mathcal{J}y\}.$$

Ví dụ 1.1.18. Xét nửa nhóm S được định nghĩa bởi bảng sau.

.	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	c

Khi đó $S^1a = \{a, b, c\}$; $S^1b = \{a, b\}$; $S^1c = \{c\}$; $aS^1 = \{a, b, c\}$; $bS^1 = \{a, b, c\}$; $cS^1 = \{b, c\}$. Do đó $a\mathcal{R}b$ đúng. Các lớp tương đương tương ứng với $\mathcal{L}$ là:

$$L_a = \{a\}; \quad L_b = \{b\}; \quad L_c = \{c\}.$$

và tương ứng với $\mathcal{R}$ là:

$$R_a = \{a, b\} = R_b; \quad R_c = \{c\}.$$

Mệnh đề 1.1.19.

- 1) Các quan hệ $\mathcal{L}$ và $\mathcal{R}$ là giao hoán, nghĩa là $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$
- 2) $\mathcal{D}$ là quan hệ tương đương.

Nửa nhóm S được gọi là tuần hoàn nếu mọi nửa nhóm con của S sinh bởi một phần tử; nghĩa là với mỗi $a \in S$ tồn tại $m, r > 0$ sao cho $a^{m+r} = a^m$. Mọi nhóm hữu hạn là tuần hoàn.

Mệnh đề 1.1.20. Nếu S là nửa nhóm tuần hoàn (đặc biệt, nếu S là hữu hạn) thì $\mathcal{J} = \mathcal{D}$.

1.2 Nửa nhóm phép biến đổi đầy đủ và các quan hệ Green

1.2.1 Một số định nghĩa

Định nghĩa 1.2.1. Cho X là một tập hợp. Một phép biến đổi của X là một ánh xạ từ X vào X . Đặc biệt, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ là tập hữu hạn, một phép biến đổi của X có thể biểu diễn dưới dạng bảng:

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

với mọi $k_i \in X$.

Định nghĩa 1.2.2. Cho X là một tập hợp, ta kí hiệu $T_X = \{\alpha : X \rightarrow X\}$. Khi đó T_X là một nửa nhóm với phép toán hợp thành ánh xạ gọi là *nửa nhóm phép biến đổi đầy đủ* trên X .

Ví dụ 1.2.3. Cho $X = \{1, 2, 3\}$. Ta có $3^3 = 27$ ánh xạ trong T_X , một ánh xạ $\alpha : X \rightarrow X$ được định nghĩa bởi $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 3$ có thể được biểu diễn thuận tiện theo hai cách khác nhau: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, hoặc $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$.

Cho

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

và $S = [\alpha, \beta]_{T_X}$ là nửa nhóm con của T_X được sinh bởi α và β . Khi đó ta có: $\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \alpha^2\beta$. Ta có thể kiểm tra không có phần tử khác trong nửa nhóm đó và do đó S có 7 phần tử $S = \{\alpha, \beta, \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta, \beta\alpha, \beta\alpha^2\}$.

Chú ý 1.2.4. Nếu $X = \{1, 2, \dots, n\}$ là một tập hữu hạn thì ta viết T_n thay cho T_{X_n} .

Định nghĩa 1.2.5. Với $\alpha \in T_X$, ta kí hiệu ảnh của nó bởi

$$\text{Im}\alpha = \{x\alpha : x \in X\}.$$

Độ lớn của ảnh $|\text{Im}\alpha|$ được gọi là hạng của α và kí hiệu bởi $\text{rank}(\alpha)$

Ví dụ 1.2.6. Cho

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

thì $\text{Im}\alpha = \{1, 3, 5\}$ suy ra $\text{rank}(\alpha) = 3$.

1.2.2 Một số tính chất

Mệnh đề 1.2.7. T_n chứa n^n phần tử.

Ví dụ 1.2.8.

Mệnh đề 1.2.9. Cho $\alpha \in T_n$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương

- (i). α là toàn ánh,
- (ii). α là đơn ánh,
- (iii). α là song ánh.

Mệnh đề 1.2.10. Cho S là một nửa nhóm, khi đó tồn tại một tập X với tính chất S nhúng được trong T_X .

Mệnh đề 1.2.11. Nửa nhóm T_X là chính quy.

Chú ý 1.2.12. Phát biểu T_X là chính quy với mọi tập X là tương đương với Tiên đề Chọn.

Định lý 1.2.13. (Quan hệ Green's trên T_X).

Với các phần tử $\alpha, \beta \in T_X$,

- (i) $\alpha \mathcal{L} \beta$ nếu và chỉ nếu $Im \alpha = Im \beta$;
- (ii) $\alpha \mathcal{R} \beta$ nếu và chỉ nếu $ker \alpha = ker \beta$;
- (iii) $\alpha \mathcal{D} \beta$ nếu và chỉ nếu $|Im \alpha| = |Im \beta|$;
- (iv) $\mathcal{J} = \mathcal{D}$.

Chương 2

HẠNG TƯƠNG ĐỐI CỦA NỬA NHÓM T_X MODULO S_X VÀ E_X

Cho S là một nửa nhóm. Hạng của S kí hiệu là $\text{rank}(S)$ được định nghĩa là số phần tử cực tiểu của một tập sinh S , tức là

$$\text{rank}(S) = \min\{|A|, \langle A \rangle = S\}.$$

2.1 Một vài khái niệm mở đầu

Định nghĩa 2.1.1. Cho S là một nửa nhóm, A là một tập con bất kì của S . Một tập $B \subseteq S$ sao cho $\langle A \cup B \rangle = S$ được gọi là tập sinh của S modulo A . Hạng tương đối của S modulo A , kí hiệu $\text{rank}(S : A)$, là lực lượng cực tiểu của một tập sinh modulo A , tức là

$$\text{rank}(S : A) = \min\{|B| : B \subseteq S, \langle A \cup B \rangle = S\}.$$

Từ định nghĩa ta có ngay:

$$\begin{aligned} \text{rank}(S : \emptyset) &= \text{rank}(S); & \text{rank}(S : A) &= \text{rank}(S : \langle A \rangle); \\ \text{rank}(S : S) &= 0; & \text{rank}(S : A) &= 0 \Leftrightarrow \langle A \rangle = S. \end{aligned}$$

Lưu ý rằng nếu G là một nhóm và N là một nhóm con chuẩn tắc của G thì $\text{rank}(G : N) = \text{rank}(G/N)$.

Kí hiệu hàm dấu

$$sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Mệnh đề 2.1.2. (Mệnh đề 1.2 [9]). Cho $X(|X| \geq 3)$ là một tập hữu hạn, A là một tập con bất kì của T_X và J là tập các ánh xạ có ảnh với độ lớn $|X| - 1$.

Khi đó

$$\text{rank}(T_X : A) = \text{rank}(S_X : S_X \cap A) + 1 - \text{sg}(|J \cap A|).$$

Đặc biệt,

$$\begin{aligned} \text{rank}(T_X : S_X) &= 1, & \text{rank}(T_X : E_X) &= 2, \\ \text{rank}(T_X : S_X \cup E_X) &= 0. \end{aligned}$$

Trường hợp nửa nhóm phép biến đổi đầy đủ vô hạn là hơi khác. Từ [9] có thể thấy rằng tập $S_X \cup E_X$ không sinh ra T_X . Tuy nhiên, nó được chứng minh rằng tồn tại hai ánh xạ μ, ν sao cho $\langle S_X, E_X, \mu, \nu \rangle = T_X$. Ngoài ra $S_X \cup E_X \cup \{\mu\}$ và $S_X \cup E_X \cup \{\nu\}$ không sinh ra T_X . Do đó

$$\text{rank}(T_X : S_X \cup E_X) = 2.$$

Định nghĩa 2.1.3. Ta gọi một lực lượng (bản số) κ là *suy biến* nếu tồn tại các tập Y và $Z_y (y \in Y)$ sao cho

$$|Y| \leq \kappa, \quad |Z_y| \leq \kappa (y \in Y),$$

nhưng

$$|\bigcup_{y \in Y} Z_y| = \kappa.$$

Một lực lượng được gọi là *chính quy* nếu nó không suy biến.

Định nghĩa 2.1.4. Ta gọi *số khuyết* (defect) của $\alpha \in T_X$ là độ lớn của phần bù của ảnh của α và kí hiệu bởi $d(\alpha) = |X \setminus \text{Im} \alpha|$. Hiển nhiên ta có $d(\alpha) = 0$ nếu và chỉ nếu α là toàn ánh.

Độ dịch chuyển (Shiff) của $\alpha \in T_X$ được định nghĩa là độ lớn của tập hợp các phần tử dịch chuyển bởi ánh xạ này:

$$S(\alpha) = |\{x \in X | x\alpha \neq x\}|.$$

Xét quan hệ tương đương trên X , $\ker\alpha = \{(x, y) \in X \times X : x\alpha = y\alpha\}$. Gọi T_α là một tập các đại biểu của lớp tương đương của quan hệ này; tức là, T_α là một tập sao cho mọi lớp tương đương C của $\ker\alpha$ đều có $|C \cap T_\alpha| = 1$. (Đôi khi ta còn gọi T_α như một *đường hoành* (transversal) của $\ker\alpha$). Khi đó *độ co* (collapse) của α được định nghĩa là

$$c(\alpha) = |X \setminus T_\alpha|.$$

Dễ thấy rằng

$$c(\alpha) = \sum_{y \in \text{Im}\alpha} (|y\alpha^{-1}| - 1),$$

và số lực lượng không phụ thuộc vào T_α .

Ta định nghĩa *chỉ số co rút vô hạn* là số các lớp của $\ker\alpha$ có độ lớn X , ngoài ra nếu ta cho

$$K(\alpha) = \{x \in X : |x\alpha^{-1}| = |X|\},$$

thì *chỉ số co rút vô hạn* là

$$k(\alpha) = |K(\alpha)|.$$

$$\begin{aligned} F_X = \langle E_X \rangle &= \{id\} \cup \{\alpha \in T_X | S(\alpha) < \aleph_0, d(\alpha) > 0\} \\ &\cup \{\alpha \in T_X | S(\alpha) = d(\alpha) = c(\alpha) \geq \aleph_0\}. \end{aligned}$$

2.2 Về hạng tương đối của T_X modulo S_X

2.2.1 Hạng tương đối của T_X modulo S_X

Bổ đề 2.2.1. (Bổ đề 2.1[9]). Cho $\alpha, \beta \in T_X$ là hai ánh xạ bất kì.

(i) $d(\alpha\beta) \leq d(\alpha) + d(\beta)$.

(ii) Nếu $|X|$ là một lực lượng chính quy thì $k(\alpha\beta) \leq k(\alpha) + k(\beta)$.

Bổ đề 2.2.2. (Bổ đề 3.1[9]). Cho X là một tập vô hạn và cho $\mu \in T_X$ là một ánh xạ bất kì. Khi đó $\langle S_X, \mu \rangle \neq T_X$. Đặc biệt $\text{rank}(T_X : S_X) > 1$.

Mệnh đề 2.2.3. (Mệnh đề 3.2[9]). Cho X là tập vô hạn và J_1 là $\mathcal{J}$ -lớp cao nhất của T_X , bao gồm tất cả các ánh xạ có hạng bằng $|X|$. Khi đó $\langle J_1 \rangle = T_X$ và vì vậy $\text{rank}(T_X : J_1) = 0$.

(Ở đây, $J_1 = \{\alpha \in T_X : |\text{Im}\alpha| = |X|\}$).

Định lý 2.2.4. (Định lý 3.3[9]). Cho X là một tập vô hạn, $\mu \in T_X$ là một đơn ánh có số khuyết bằng X và $\nu \in T_X$ là một toàn ánh có chỉ số co rút vô hạn bằng $|X|$. Khi đó $\langle S_X, \mu, \nu \rangle = T_X$. Đặc biệt $\text{rank}(T_X : S_X) = 2$.

2.2.2 Cặp phần tử sinh của T_X modulo S_X

Định nghĩa 2.2.5. Ta gọi một cặp các ánh xạ μ, ν là cặp phần tử sinh của T_X modulo S_X nếu $\langle S_X, \mu, \nu \rangle = T_X$.

Định lý 2.2.6. (Định lý 4.1[9]). Cho X là tập vô hạn có lực lượng chính quy và cho $\mu, \nu \in T_X$. Khi đó tập $S_X \cup \{\mu, \nu\}$ sinh ra T_X nếu và chỉ nếu một trong hai ánh xạ, chẳng hạn, μ là một đơn ánh có số khuyết bằng $|X|$ và ánh xạ còn lại là một toàn ánh có chỉ số co rút vô hạn bằng $|X|$.

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng trong định lý trên ta không thể bỏ đi điều kiện $|X|$ là chính quy.

Ví dụ 2.2.7. Cho k là một lực lượng suy biến. Điều đó nghĩa là tồn tại các tập Y và $Z_y, y \in Y$, sao cho

$$|Y| < k, \quad |Z_y| < k(y \in Y),$$

mà

$$\left| \bigcup_{y \in Y} Z_y \right| = k.$$

Gọi Λ là một tập chỉ số có lực lượng k . Với mỗi $\lambda \in \Lambda$ và mỗi $y \in Y$ gọi $Z_{\lambda,y}$ là một tập có lực lượng $|Z_y|$. Tiếp theo, định nghĩa

$$\begin{aligned} P &= \{(\lambda, y, z) : \lambda \in \Lambda, \quad y \in Y, \quad z \in Z_{\lambda,y}\}, \\ Q &= \Lambda \times Y, \\ X &= P \cup Q \cup \Lambda. \end{aligned}$$

Khi đó $|P| = |Q| = |X| = k$. Cho $\bar{\nu} : \Lambda \rightarrow P$ là một song ánh. Định nghĩa $\nu \in T_X$ bởi

$$\begin{aligned} (\lambda, y, z)\nu &= (\lambda, y) \quad (y \in Y, \lambda \in \Lambda, z \in Z_{\lambda,y}), \\ (\lambda, y)\nu &= \lambda \quad (\lambda \in \Lambda, y \in Y), \\ \lambda\nu &= \lambda\bar{\nu} \quad (\lambda \in \Lambda). \end{aligned}$$

Khi đó ν là một toàn ánh. Các khối của $\ker \alpha$ là $\{\lambda\} \times \{y\} \times Z_{\lambda,y}$, $\{\lambda\} \times Y$ và $\{\lambda\}$, ở đây $\lambda \in \Lambda, y \in Y$. Mỗi một trong các khối đó có lực lượng nhỏ hơn $|X|$ và do đó $k(\nu) = 0$.

Xét ánh xạ ν^2 . Từ

$$\lambda\nu^{-2} = \lambda\nu^{-1}\nu^{-1} = (\{\lambda\} \times Y)\nu^{-1} = \bigcup_{y \in Y} \{\lambda\} \times \{y\} \times Z_{\lambda,y},$$

suy ra

$$|\lambda\nu^{-2}| = \sum_{y \in Y} |Z_{\lambda,y}| = k \text{ với mọi } \lambda \in \Lambda.$$

Do $|\Lambda| = k$ ta có

$$k(\nu^2) = k = |X|.$$

Như một bình phương của một toàn ánh, ν^2 cũng là một toàn ánh. Vì thế, theo Định lý (2.2.4) ta có $\langle S_X, \mu, \nu^2 \rangle = T_X$ với bất kì một đơn ánh μ có số khuyết bằng $|X|$ và do đó $\langle S_X, \mu, \nu \rangle = T_X$.

2.3 Về hạng tương đối của T_X modulo E_X

2.3.1 Hạng tương đối của T_X modulo E_X

Định lý 2.3.1. (Định lý 5.1[9]). *Cho X là một tập vô hạn, μ là một đơn ánh có số khuyết bằng $|X|$ và ν là ánh xạ mở rộng bất kì của μ^{-1} . Khi đó, $\langle E_X, \mu, \nu \rangle = T_X$ và $\text{rank}(T_X : E_X) = 2$.*

Như được đề cập trong Phần 2.1, hạng tương đối có tính chất sau:

$$\text{rank}(S : A) = \text{rank}(S : \langle A \rangle).$$

Hệ quả 2.3.2. $\text{rank}(T_X : F_X) = 2$.

2.3.2 Cặp phần tử sinh của T_X modulo E_X

Định lý 2.3.3. (Định lý 6.1[9]). *Cho X là tập vô hạn và cho μ, ν là hai ánh xạ bất kì. Khi đó ta có $\langle E_X, \mu, \nu \rangle = T_X$ nếu và chỉ nếu một trong các ánh xạ này là một đơn ánh có số khuyết bằng $|X|$ và ánh xạ còn lại là một toàn ánh với độ co bằng $|X|$.*

Bổ đề 2.3.4. *Một trong hai ánh xạ μ và ν là đơn ánh thực sự, ánh xạ còn lại là toàn ánh thực sự.*

Không mất tính tổng quát, ta giả sử μ là một đơn ánh và ν là một toàn ánh.

Bổ đề 2.3.5. $d(\mu) = |X|$.

Bổ đề 2.3.6. $c(\nu) = |X|$

Bổ đề 2.3.7. *Tồn tại ánh xạ $\alpha \in \langle E_X \rangle$ sao cho α ánh xạ Y song ánh lên T'_ν .*

2.3.3 Hạng tương đối đếm được, không đếm được

Đầu tiên ta có một định lý rất quan trọng

Định lý 2.3.8. (Bổ đề 5.13[13], Bổ đề Sierpinski). *Cho X là một tập vô hạn. Khi đó một tập con đếm được S bất kì của T_X được chứa trong một nửa nhóm con sinh bởi 2 phần tử của T_X .*

Hệ quả 2.3.9. (Hệ quả 5.14[13]). *Hạng tương đối của T_X modulo một tập con S của T_X hoặc không đếm được hoặc nhiều nhất là 2, ở đây X là vô hạn.*

Mệnh đề 2.3.10. (Mệnh đề 5.19[13]). *Cho $S \subseteq T_X$ bất kì với X là tập vô hạn. Nếu tồn tại $Y, Z \subseteq X$ với $|X| = |Y| = |Z|$ và với mọi song ánh $\beta : Y \rightarrow Z$, tồn tại $\alpha \in S$ sao cho $\alpha|_Y = \beta$ thì $\text{rank}(T_X : S_X) \leq 2$.*

Chương 3

HẠNG TƯƠNG ĐỐI CỦA NỬA NHÓM T_X MODULO $\mathcal{O}_X$

Cho X là một tập được sắp thứ tự bởi quan hệ $\leq$. Một ánh xạ $\alpha \in T_X$ được gọi là bảo toàn thứ tự nếu $\forall i, j \in X, i \leq j$ kéo theo $i\alpha \leq j\alpha$. Tập hợp mọi ánh xạ bảo toàn thứ tự trên X tạo thành một nửa nhóm con của T_X , ký hiệu là $\mathcal{O}_X$.

3.1 Đối với tập sắp thứ tự tuyến tính đếm được

Trước hết khi cho $X = \mathbb{N}$ là một tập số tự nhiên, ta có được kết quả:

Mệnh đề 3.1.1. (Định lý 5.21[13]). $rank(T_{\mathbb{N}} : \mathcal{O}_{\mathbb{N}}) = 1$.

Chú ý 3.1.2. *Nửa nhóm con gồm tất cả các ánh xạ bảo toàn thứ tự $\mathcal{O}_{\mathbb{N}}$ không thoả mãn điều kiện trong Mệnh đề (2.3.10). Điều này có thể được thấy bằng cách lưu ý rằng với bất kì $Y, Z \subseteq \mathbb{N}, |Y| = |Z| = |\mathbb{N}|$ có duy nhất một song ánh bảo toàn thứ tự từ Y đến Z .*

Mệnh đề 3.1.3. (Mệnh đề 5.23[13]). *Nếu S là một tập con của T_X có hạng tương đối đếm được thì tập của các hạn chế:*

$$S_1 = \{\alpha|_T : \alpha \in S \cap J, T \text{ là một đường hoành của } \ker(\alpha)\}$$

có cùng lực lượng như T_X .

Ví dụ 3.1.4. Cho X là một tập vô hạn đếm được và cho Y, Z là hai tập rời nhau sao cho $X = Y \cup Z$ và $|X| = |Y| = |Z|$. Gọi S là nửa nhóm con của T_X :

$$S = \{\alpha \in T_X : \alpha|_Z = 1|_Z, Y\alpha \subseteq Y, |Y\alpha| \text{ là hữu hạn}\},$$

ở đây 1 là ánh xạ đồng nhất. Khi đó $S \subseteq J$ và $|S| = 2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = |T_X|$.

Định lý 3.1.5. (Định lý 2.1[14]). *Cho X là tập được sắp thứ tự tuyến tính đếm được. Khi đó hạng tương đối của T_X modulo $\mathcal{O}_X$ là 1.*

Định nghĩa 3.1.6. Với X là một tập sắp thứ tự tuyến tính vô hạn đếm được cố định và $x, y \in X, x < y$ ta định nghĩa

$$\begin{aligned} [x, y] &= \{z \in X : x \leq z \leq y\}; & (x, y) &= \{z \in X : x < z < y\}, \\ (x, y] &= \{z \in X : x < z \leq y\}; & [x, y) &= \{z \in X : x \leq z < y\}. \end{aligned}$$

Ta gọi các tập này là các đoạn, khoảng, được phân định bởi x và y . Chú ý (x, y) có thể rỗng.

Một phần tử $d \in X$ được gọi là *rời rạc* nếu tồn tại $x, y \in X$, với $d \in (x, y)$ sao cho $(x, d) = (d, y) = \emptyset$.

Ta gọi một phần tử $r \in X$ là *cô lập phải* nếu với mọi $x \in X$ sao cho $x < r$ ta có $(x, r) \neq \emptyset$ nhưng tồn tại $y \in X$ với $y > r$ sao cho $(y, r) = \emptyset$. Lưu ý rằng nếu r là cô lập phải thì $|(x, r)| = |X|$ với mọi $x < r$. Phần tử cô lập trái được định nghĩa tương tự. Lưu ý rằng nếu X có một phần tử nhỏ nhất hoặc lớn nhất thì phần tử đó không là cô lập phải hoặc trái hoặc rời rạc. Để hoàn chỉnh các định nghĩa trên ta bổ sung như sau: nếu $x_0 \in X$ là phần tử nhỏ nhất của X và tồn tại $y \in X : y > x_0$ và $(x_0, y) = \emptyset$ thì ta gọi x_0 là rời rạc, trong trường hợp khác ta gọi x_0 là cô lập trái.

Tương tự nếu X có phần tử lớn nhất thì hoặc nó là rời rạc hoặc cô lập phải.

Cuối cùng, một phần tử $t \in X$ (không là phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất của X) được gọi là *điểm giới hạn* nếu $(x, t) \neq \emptyset$ và $(t, y) \neq \emptyset$ với mọi $y > t$ và mọi $x < t$.

Bây giờ là một dãy các bổ đề dẫn đến chứng minh Định lý (3.1.5).

Bổ đề 3.1.7. (Bổ đề 6.2[13]). *Cho X là một tập được sắp thứ tự tuyến tính đếm được chứa toàn bộ các điểm giới hạn và cho $\lambda : X \rightarrow \mathbb{N}$ là hàm bất kì. Khi đó tồn tại $Y \subseteq X$ với $|Y| = |X \setminus Y| = |X|$ và một song ánh bảo toàn thứ tự $\alpha : X \rightarrow X \setminus Y$ thỏa mãn $x\alpha\lambda \geq x\lambda (x \in X)$.*

Bổ đề 3.1.8. (Bổ đề 6.3[13]). *Cho X là tập sắp thứ tự tuyến tính đếm được. Khi đó tồn tại $Y \subset X$ với $|Y| = |X \setminus Y|$ và một song ánh bảo toàn thứ tự $\alpha : X \rightarrow X$ sao cho $|X \setminus Y| = |X| = |Y|$.*

Bổ đề 3.1.9. (Bổ đề 2.4[14]). *Cho Y là một tập sắp thứ tự tuyến tính đếm được. Khi đó tồn tại $Z \subseteq Y$ sao cho $Z \cong \mathbb{Z}^+$ hoặc $Z \cong \mathbb{Z}^-$.*

Bổ đề 3.1.10. (Bổ đề 2.5.[14]). *Cho X là tập vô hạn sắp thứ tự tuyến tính đếm được. Cho $Z \subseteq X$ sao cho $Z \cong \mathbb{Z}^+$ hoặc $Z \cong \mathbb{Z}^-$ và $\alpha : Z \rightarrow Z$ là ánh xạ bảo toàn thứ tự. Khi đó tồn tại $\beta \in \mathcal{O}_X$ sao cho $\beta|_Z = \alpha$.*

3.2 Đối với tập sắp thứ tự tốt

Trong phần này chúng tôi mở rộng kết quả của phần trước đến các tập sắp thứ tự tốt có lực lượng bất kì. Nhắc lại rằng một

tập được sắp thứ tự $(X, \leq)$ là thứ tự tốt nếu mọi tập con khác rỗng của X đều có phần tử nhỏ nhất.

Với bất kì $x \in X$ ta gọi tập $s(x) = \{y \in X : y < x\}$ là *đoạn đầu* của x và ta định nghĩa *đoạn cuối* của x là tập $t(x) = \{y \in X : y > x\}$.

Mệnh đề 3.2.1. *Mỗi tập con của một tập sắp thứ tự tốt X hoặc đẳng cấu với X hoặc đẳng cấu với đoạn đầu của X .*

Mệnh đề 3.2.2. (Bổ đề 2.2[12]). *Không một tập sắp thứ tự tốt nào đẳng cấu với đoạn đầu của chính nó.*

Bổ đề 3.2.3. (Bổ đề 6.10[13]). *Cho X là một tập vô hạn bất kì và ký hiệu Ω là tập sắp thứ tự tốt nhỏ nhất có lực lượng bằng $|X|$. Khi đó $\text{rank}(T_\Omega : \mathcal{O}_\Omega) = 1$.*

Định lý 3.2.4. (Định lý 3.9[13]). *Cho X là tập sắp thứ tự tốt bất kì. Khi đó $\text{rank}(T_X : \mathcal{O}_X) = 1$.*

Bổ đề 3.2.5. (Bổ đề 4.10[14]). *Cho X là một tập vô hạn sắp thứ tự tuyến tính sao cho tồn tại một tập con $Y \subseteq X$, $|Y| = |X|$ và ở đó bất kì ánh xạ bảo toàn thứ tự từ $Y \rightarrow Y$ có thể mở rộng đến một ánh xạ bảo toàn thứ tự từ $X \rightarrow X$. Khi đó $\text{rank}(T_Y : \mathcal{O}_Y) \leq 2$ kéo theo $\text{rank}(T_X : \mathcal{O}_X) \leq 2$.*

Hệ quả 3.2.6. (Hệ quả 4.11[14]). *Nếu X là một tập sắp thứ tự tuyến tính bất kì, sao cho tồn tại một tập con sắp thứ tốt $Y \subseteq X$, với $|Y| = |X|$, thì $\text{rank}(T_X : \mathcal{O}_X) \leq 2$.*

Ví dụ 3.2.7. (Ví dụ 4.12[14]). *Hạng tương đối của $T_{\mathbb{R}}$ modulo $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ là không đếm được.*

KẾT LUẬN

1. Những kết quả đạt được trong luận văn

Qua một thời gian tìm hiểu, tiếp cận và nghiên cứu về hạng của nửa nhóm các phép biến đổi đầy đủ, luận văn đã hoàn thành và đạt được mục tiêu nghiên cứu của đề tài với những kết quả cụ thể sau:

- Khảo sát các tính chất về hạng tương đối của nửa nhóm các phép biến đổi đầy đủ T_X modulo S_X và E_X , từ đó tìm cách đặc trưng các cặp phần tử sinh của chúng trong trường hợp X là tập vô hạn và $|X|$ là một lực lượng chính quy và không chính quy.

- Khảo sát hạng tương đối của nửa nhóm T_X modulo $\mathcal{O}_X$ trong trường hợp X là tập sắp thứ tự tuyến tính đếm được hoặc một tập sắp thứ tự tốt.

- Chứng minh chi tiết một số kết quả về hạng tương đối của T_X đối với S_X, E_X và $\mathcal{O}_X$: Mệnh đề 1.1.15, Mệnh đề 1.1.19, Định lý 1.2.13, Định lý 2.2.4, Ví dụ 2.2.7, Định lý 2.3.1, Bổ đề 2.3.5, Bổ đề 3.1.7, Bổ đề 3.1.8.

2. Những vấn đề cần nghiên cứu và thực hiện

Từ những kết quả có được trong [14], trực tiếp là Bổ đề 4.10 và Hệ quả 4.11, các tác giả đã đưa ra hai vấn đề:

- Nếu $\text{rank}(T_X : \mathcal{O}_X) \leq 2$ với một tập sắp thứ tự tuyến tính X thì tồn tại $Y \subset X$ sao cho $|X| = |Y|$ và Y hoặc Y^R (tập Y với thứ tự ngược lại) còn đúng không khi X là tập sắp thứ tự tốt?

- Có tồn tại một tập sắp thứ tự tuyến tính vô hạn X sao cho $\text{rank}(T_X : \mathcal{O}_X) = 2$ hay không?

Hai vấn đề trên vẫn còn là bài toán mở, việc đi tìm lời giải vẫn đang được tiếp tục. Đây cũng chính là vấn đề quan trọng đối

với chúng tôi và những ai quan tâm đến việc nghiên cứu về hạng tương đối của nửa nhóm các phép biến đổi đầy đủ.