

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**



Nguyễn Anh Tuấn

K-LÝ THUYẾT CỦA ĐẠI SỐ BANACH VÀ MỘT VÀI ỨNG DỤNG

Chuyên ngành : Hình học và Tô pô

Mã số : 60 46 10

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC :

PGS. TS. LÊ ANH VŨ

Thành phố Hồ Chí Minh – 2009



LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. Lê Anh Vũ. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy, vì thầy đã tạo cơ hội cho tôi làm quen với K -lý thuyết, một lĩnh vực hiện đại của Toán học. Trong quá trình nghiên cứu, thầy đã trang bị cho tôi nhiều kiến thức, tài liệu, đã tận tình hướng dẫn về cả chuyên môn lẫn phương pháp nghiên cứu, giúp cho tôi hoàn thành được đề tài;

Tôi chân thành cảm ơn quý thầy trong tổ Hình học, khoa Toán–Tin Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh đã giúp đỡ tôi nâng cao trình độ chuyên môn và phương pháp học tập trong suốt quá trình học Cao học;

Chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Tổ chức hành chính, phòng Khoa học Công nghệ và Sau đại học, phòng Kế hoạch–Tài chính Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập cũng như khi làm luận văn;

Cuối cùng, xin chân thành cảm ơn sự động viên của các quý đồng nghiệp, bạn bè, gia đình và các anh chị trong các buổi xêmina đã có những góp ý xác đáng, giúp cho tôi hoàn chỉnh luận văn này.

Xin chân thành cảm ơn!

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này trình bày một cách sơ lược về các khái niệm chuẩn bị cần thiết có liên quan. Vì khối lượng kiến thức chuẩn bị tương đối lớn và do khuôn khổ luận văn có hạn nên chúng tôi chỉ trình bày những khái niệm cơ bản và cần thiết nhất. Độc giả nào quan tâm đến các khái niệm, tính chất khác hoặc phân chứng minh có thể tham khảo thêm trong các tài liệu [1], [2], [3], [4], [6], [7], [14], [15], [16], [17], [20], [24], [25].

1.1. Sơ lược về phạm trù và hàm tử

1.1.1. Phạm trù

Một phạm trù $\mathcal{P}$ bao gồm một lớp $\mathcal{P}$ các đối tượng nào đó, gọi là các vật, sao cho với mỗi cặp vật $X, Y \in \mathcal{P}$ có tập hợp $\text{Hom}(X, Y)$ các cấu xạ $f: X \rightarrow Y$ từ X tới Y ; đồng thời, với mỗi cấu xạ $f \in \text{Hom}(X, Y)$ và $g \in \text{Hom}(Y, Z)$, ta xác định được hợp thành $g \circ f \in \text{Hom}(X, Z)$ của f và g , sao cho các tiên đề sau thỏa mãn:

1. Nếu $X \neq X'$ và $Y \neq Y'$ thì $\text{Hom}(X, Y)$ và $\text{Hom}(X', Y')$ rời nhau;
2. Phép hợp thành thỏa mãn luật kết hợp; tức là, với mọi bộ ba các cấu xạ $(f, g, h) \in \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(Z, U)$ thì $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
3. Với mọi $X \in \mathcal{P}$, tồn tại cấu xạ đồng nhất $1_X \in \text{Hom}(X, X)$ sao cho với mọi $f \in \text{Hom}(X, Y)$ và $g \in \text{Hom}(Z, X)$ thì $f \circ 1_X = f$ và $1_X \circ g = g$.

Ví dụ:

- + Phạm trù tập hợp $\mathcal{Set}$: vật là tập hợp, cấu xạ là ánh xạ và phép hợp thành chính là phép hợp thành thông thường các ánh xạ.
- + Phạm trù các nhóm Abel $\mathcal{Ab}$: vật là nhóm Abel, cấu xạ là đồng cấu nhóm và phép hợp thành là phép hợp các ánh xạ.

1.1.2. Đơn xạ, toàn xạ, đẳng xạ

Cho phạm trù $\mathcal{P}$ và cấu xạ $f \in \text{Hom}(X, Y)$ trong $\mathcal{P}$. Ta gọi :

- f là *đơn xạ* nếu với mọi cặp cấu xạ $g, h \in \text{Hom}(Z, X)$ mà $f \circ g = f \circ h$ thì $g = h$ (tính giản ước trái).
- f là *toàn xạ* nếu với mọi cặp cấu xạ $g, h \in \text{Hom}(Y, Z)$ mà $g \circ f = h \circ f$ thì $g = h$ (tính giản ước phải).
- f là *đẳng xạ* nếu tồn tại cấu xạ $g : Y \rightarrow X$ sao cho $f \circ g = 1_Y$ và $g \circ f = 1_X$.

Khi đó, hai vật X, Y được gọi là *đẳng cấu* với nhau.

Ví dụ : trong phạm trù $\mathcal{Set}$, đơn xạ, toàn xạ, đẳng xạ tương ứng là đơn ánh, toàn ánh và song ánh; còn trong phạm trù $\mathcal{Ab}$, đơn xạ, toàn xạ, đẳng xạ tương ứng là đơn cấu, toàn cấu và đẳng cấu.

Chú ý : một cấu xạ vừa là đơn xạ vừa là toàn xạ được gọi là *song xạ*. Rõ ràng rằng, đẳng xạ là song xạ nhưng chiều ngược lại không đúng. Một phạm trù mà trong đó, song xạ là đẳng xạ được gọi là *phạm trù cân bằng*.

1.1.3. Vật phổ dụng của phạm trù

Cho phạm trù $\mathcal{P}$.

- Vật $X \in \mathcal{P}$ được gọi là *vật đầu* của $\mathcal{P}$ nếu với mọi vật $Y \in \mathcal{P}$ thì tập hợp $\text{Hom}(X, Y)$ chỉ có một phần tử.
- Vật $Y \in \mathcal{P}$ được gọi là *vật cuối* của $\mathcal{P}$ nếu với mọi vật $X \in \mathcal{P}$ thì tập hợp $\text{Hom}(X, Y)$ chỉ có một phần tử.
- Một vật vừa là vật đầu vừa là vật cuối gọi là *vật không*, ký hiệu là 0 .

Ví dụ : trong phạm trù $\mathcal{Set}$, vật đầu là $\emptyset$, vật cuối là tập hợp đơn điểm $\{*\}$; do đó, phạm trù $\mathcal{Set}$ không có vật không. Ngược lại, trong phạm trù $\mathcal{Ab}$, vật đầu và vật cuối (từ đó là vật không) là nhóm tầm thường chỉ gồm phần tử đơn vị.

Nhận xét : nếu một phạm trù có nhiều vật đầu thì các vật đầu đó đẳng cấu với nhau. Ta cũng có khẳng định tương tự đối với các vật cuối. Các vật đầu và vật cuối của một phạm trù được gọi chung là *vật phổ dụng*.

1.1.4. Hàm tử

Cho các phạm trù $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$. Một *hàm tử* $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ từ $\mathcal{P}$ đến $\mathcal{Q}$ là một quy tắc cho tương ứng mỗi vật $X \in \mathcal{P}$ với một vật $F(X) \in \mathcal{Q}$ và mỗi cấu xạ $f: X \rightarrow Y$ trong $\mathcal{P}$ với một cấu xạ $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$ trong $\mathcal{Q}$ thỏa mãn hai tiên đề sau :

1. Với mọi vật $X \in \mathcal{P}$ thì $F(1_X) = 1_{F(X)}$.
2. Với mỗi cặp cấu xạ $(f, g) \in \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z)$ trong $\mathcal{P}$ thì

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

Ví dụ :

- + *Hàm tử đồng nhất* $1_{\mathcal{P}}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ giữ bất động mọi vật và mọi cấu xạ.
- + *Hàm tử quên* (hay *hàm tử xóa*) $\text{For}: \mathcal{Ab} \rightarrow \mathcal{Set}$ biến mỗi nhóm Abel thành tập hợp nền của nhóm Abel đó (“quên” đi cấu trúc nhóm) và biến mỗi đồng cấu nhóm thành chính đồng cấu ấy nhưng chỉ xem như là ánh xạ tập hợp.

1.1.5. Đối hàm tử

Cho các phạm trù $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$. Một *đối hàm tử* $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ từ $\mathcal{P}$ đến $\mathcal{Q}$ là một quy tắc cho tương ứng mỗi vật $X \in \mathcal{P}$ với một vật $F(X) \in \mathcal{Q}$ và mỗi cấu xạ $f: X \rightarrow Y$ trong $\mathcal{P}$ với một cấu xạ $F(f): F(Y) \rightarrow F(X)$ trong $\mathcal{Q}$ thỏa mãn hai tiên đề sau :

1. Với mọi vật $X \in \mathcal{P}$ thì $F(1_X) = 1_{F(X)}$.
2. Với mỗi cặp cấu xạ $(f, g) \in \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z)$ trong $\mathcal{P}$ thì

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$

Ví dụ : cố định vật A trong phạm trù $\mathcal{P}$. Ta kiểm tra được quy tắc $\text{Hom}(\cdot, A): \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Set}$ là một đối hàm tử xác định như sau :

- + Mỗi vật $X \in \mathcal{P}$ tương ứng với tập hợp $\text{Hom}(X, A) \in \mathcal{Set}$.
- + Mỗi cấu xạ $\alpha: X \rightarrow Y$ trong $\mathcal{P}$ tương ứng với ánh xạ :

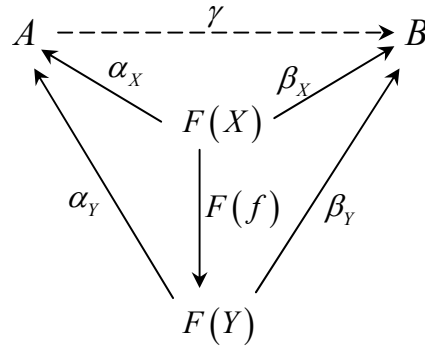
$$\begin{aligned} \text{Hom}(\alpha, A): \text{Hom}(Y, A) &\rightarrow \text{Hom}(X, A) \\ f &\mapsto f \circ \alpha \end{aligned}$$

1.1.6. Giới hạn quy nạp trong một phạm trù

1.1.6.1. Giới hạn quy nạp của hàm tử

Cho hàm tử $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$. Vật $A \in \mathcal{Q}$ cùng với họ cấu xạ $\{\alpha_X: F(X) \rightarrow A\}_{X \in \mathcal{P}}$ được gọi là *giới hạn quy nạp của hàm tử F* nếu thỏa mãn hai điều kiện sau :

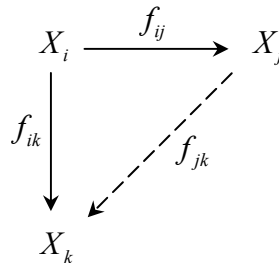
1. Với mọi cấu xạ $f: X \rightarrow Y$ trong $\mathcal{P}$ thì $\alpha_X = \alpha_Y \circ F(f)$.
2. Nếu có vật $B \in \mathcal{Q}$ cùng với họ cấu xạ $\{\beta_X: F(X) \rightarrow B\}_{X \in \mathcal{P}}$ thỏa mãn điều kiện (1) thì tồn tại cấu xạ $\gamma: A \rightarrow B$ sao cho $\beta_X = \gamma \circ \alpha_X$ với mọi $X \in \mathcal{P}$.



1.1.6.2. Hệ quy nạp

Cho I là tập hợp sắp thứ tự. Ta nói I có *lọc phải* nếu với mọi $i, j \in I$, tồn tại $k \in I$ mà $i, j \leq k$. Bây giờ, giả sử $\mathcal{P}$ là một phạm trù và I là tập hợp có lọc phải. Họ vật $\{X_i\}_{i \in I}$ cùng với họ cấu xạ $\{f_{ij}: X_i \rightarrow X_j\}_{i, j \in I, i \leq j}$ được gọi là *hệ quy nạp* trong $\mathcal{P}$ nếu thỏa mãn hai điều kiện sau :

1. $f_{ii} = 1_{X_i}$, $\forall i \in I$;
2. Với mọi $i < j < k$ thì $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$; tức là biểu đồ sau giao hoán :



1.1.6.3. Giới hạn quy nạp

Cho hệ quy nạp $\{X_i; f_{ij}\}_{i, j \in I}$ trong phạm trù $\mathcal{P}$. Ta xem I là một phạm trù xác định như sau :

- Vật là các phần tử $i \in I$;
- $\text{Hom}(i, j) = \begin{cases} \{(i, j)\} & , \quad i \leq j \\ \emptyset & , \quad j < i \end{cases}$.

Xét hàm tử $F : I \rightarrow \mathcal{P}$ định bởi :

$$F(i) = X_i \quad , \quad F(i, j) = f_{ij} \quad , \quad \forall i, j \in I$$

gọi $X \in \mathcal{P}$ là giới hạn quy nạp của hàm tử F . Khi đó, ta cũng gọi $X \in \mathcal{P}$ là *giới hạn quy nạp của hệ* $\{X_i; f_{ij}\}_{i, j \in I}$, ký hiệu là $\varinjlim_{i \in I} X_i = X$ hay đơn giản là $\varinjlim X_i = X$.

1.1.6.4. Ví dụ

Lấy $I = \mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên. Trong phạm trù $\mathcal{Set}$, xét hệ quy nạp $\{X_i; f_{ij}\}_{i, j \in \mathbb{N}}$, ở đó $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ là đơn ánh với mỗi $i \leq j$. Vì mỗi f_{ij} là đơn ánh nên bằng cách đồng nhất mỗi $x_i \in X_i$ với $x_j = f_{ij}(x_i) \in X_j$, ta có quyền xem như $X_i \subset X_j$ với $i \leq j$ và có dãy tăng dần các tập hợp $A_0 \subset A_1 \subset \dots$. Khi đó : $\varinjlim_{i \in \mathbb{N}} X_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$.

1.1.7. Phạm trù các không gian tôpô

1.1.7.1. Quan hệ đồng luân

Cho X và Y là các không gian tôpô.

- *Phép đồng luân* là một ánh xạ liên tục $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$. Khi đó, với mỗi $(x, t) \in X \times [0, 1]$, ta thường ký hiệu $F(x, t) = f_t(x)$ và đồng nhất $F = \{f_t\}_{t \in [0, 1]}$.

- Cho $f, g : X \rightarrow Y$ là các ánh xạ liên tục. Ta bảo f *đồng luân* với g , ký hiệu $f \simeq g$, nếu tồn tại phép đồng luân $F = \{f_t\}_{t \in [0, 1]}$ sao cho $f_0 = f$ và $f_1 = g$. Rõ ràng $\simeq$ là quan hệ tương đương trên tập $C(X, Y)$ các ánh xạ liên tục từ X tới Y .

- Ánh xạ liên tục $f : X \rightarrow Y$ được gọi là *tương đương đồng luân* từ X tới Y , ký hiệu $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$, nếu tồn tại ánh xạ liên tục $g : Y \rightarrow X$ sao cho $f \circ g \simeq id_Y$ và $g \circ f \simeq id_X$. Khi đó, X và Y được gọi là hai không gian *cùng kiểu đồng luân*, ký hiệu $X \simeq Y$. Dễ thấy rằng, quan hệ cùng kiểu đồng luân cũng là một quan hệ tương đương trên phạm trù các không gian tôpô.

1.1.7.2. Không gian co rút được

Không gian tôpô X được gọi là *co rút được* nếu thỏa mãn một trong hai điều kiện tương đương sau :

1. X cùng kiểu đồng luân với không gian đơn điểm $\{*\}$;
2. Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho id_X đồng luân với ánh xạ hằng c_{x_0} .

1.2. Đại cương về phân thớ và phân thớ véc-tơ

1.2.1. Phân thớ tầm thường địa phương

1.2.1.1. Định nghĩa

Cho E, F, B là các không gian tôpô và $p: E \rightarrow B$ là một toàn ánh liên tục. Bộ ba $\xi = (E, p, B)$ gọi là một *phân thớ tầm thường địa phương* với thớ mẫu F nếu thỏa mãn điều kiện tầm thường địa phương sau : với mọi $x \in B$, tồn tại lân cận mở $U \subset B$ của x và một đồng phôi $\varphi: U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ sao cho φ đồng phôi theo thớ, tức là $p \circ \varphi = r_U$; ở đó $r_U: U \times F \rightarrow U$ là phép chiếu tự nhiên lên thành phần đầu.

$$\begin{array}{ccc}
 & U \times F & \\
 \varphi \swarrow & \downarrow r_U & \\
 E \supset p^{-1}(U) & \xrightarrow{p} & U \subset B
 \end{array}$$

Ta gọi :

- E, B : không gian toàn thể và đáy của ξ (thường đồng nhất ξ với E);
- (U, φ) : bản đồ địa phương quanh $x \in B$;
- Với mọi $x \in B$ thì $p^{-1}(x) \approx F$ và gọi là thớ của ξ tại x .

1.2.1.2. Atlas – hàm dán

Cho phân thớ tầm thường địa phương $\xi = (E, p, B)$ thớ mẫu F . Khi đó, với mọi $x \in B$, tồn tại bản đồ (U_x, φ_x) quanh x . Atlas là một họ bản đồ $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ sao cho $\{U_\alpha\}_\alpha$ là phủ mở của B .

Cho $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in A, U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Đặt :

$$\varphi_{\beta\alpha} := \left(\varphi_\beta \Big|_{(U_\alpha \cap U_\beta) \times F} \right)^{-1} \circ \varphi_\alpha \Big|_{(U_\alpha \cap U_\beta) \times F}$$

tức là :

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta\alpha} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F &\rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \\ (x, f_1) &\mapsto (x, f_2) \end{aligned}$$

ta gọi $\varphi_{\beta\alpha}$ là *hàm chuyển từ* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *sang* (U_β, φ_β) hay *hàm dán*. Để đơn giản về mặt ký hiệu, ta viết $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$.

1.2.1.3. Đồng cấu và đẳng cấu

Cho hai phân thớ tầm thường địa phương $\xi_1 = (E_1, p_1, B)$ và $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$ với thớ mẫu lần lượt là F_1 và F_2 . *Đồng cấu* $h: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ là ánh xạ liên tục $h: E_1 \rightarrow E_2$ sao cho $p_1 = p_2 \circ h$. Khi h là đồng phôi thì h gọi là *đẳng cấu*, ký hiệu $h: \xi_1 \xrightarrow{\cong} \xi_2$.

1.2.2. G -phân thớ chính

1.2.2.1. G -phân thớ

Cho G là *nhóm tôpô* (tức là một nhóm đồng thời là một không gian tôpô sao cho ánh xạ $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ liên tục) tác động liên tục lên không gian tôpô F bởi đồng cấu nhóm liên tục :

$$\begin{aligned} \rho: G &\rightarrow \text{Homeo}(F) \\ g &\mapsto \rho(g) \end{aligned}$$

ở đó, $\text{Homeo}(F)$ là nhóm các phép đồng phôi của F và :

$$\begin{aligned} \rho(g): F &\xrightarrow{\sim} F \\ f &\mapsto \rho(g)(f) = g^{k/h}(f) \end{aligned}$$

Phân thớ tầm thường địa phương với thớ mẫu F được gọi là G -*phân thớ* nếu tồn tại atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ sao cho họ hàm dán $\bar{\varphi}_{\beta\alpha}$ tương ứng với atlas này được cho bởi họ $\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ thỏa mãn hai điều kiện :

$$1. \quad \varphi_{\beta\alpha}(x) \circ \varphi_{\alpha\gamma}(x) = \varphi_{\beta\gamma}(x).$$

$$2. \quad \varphi_{\alpha\alpha}(x) = Id_G(x) = 1_G.$$

tức là :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{\beta\alpha} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F &\xrightarrow{\sim} (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \\ (x, f) &\mapsto (x, \rho(\varphi_{\beta\alpha}(x))(f)) = (x, \varphi_{\beta\alpha}(x)(f)) \end{aligned}$$

Đặc biệt, khi $G = \text{Homeo}(F)$ và $\rho = id_{\text{Homeo}(F)}$ thì mỗi phân thớ tầm thường địa phương $\xi = (E, p, B)$ với thớ mẫu F đều là $\text{Homeo}(F)$ -phân thớ. Như vậy, G -phân thớ là khái niệm mở rộng của phân thớ tầm thường địa phương.

1.2.2.2. G -phân thớ chính

Xét $F = G$ là *nhóm tôpô* (một nhóm đồng thời là một không gian tôpô sao cho ánh xạ $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ liên tục) và tác động của G lên $F = G$ bởi tịnh tiến trái :

$$\begin{aligned} L : G &\rightarrow \text{Homeo}(F) \\ g &\mapsto L_g \end{aligned}$$

ở đó :

$$\begin{aligned} L_g : F = G &\rightarrow F = G \\ f &\mapsto L_g(f) := gf \end{aligned}$$

khi đó, một G -phân thớ với thớ mẫu F được gọi là một G -*phân thớ chính*.

1.2.3. Phân thớ véctor

Cho $\xi = (E, p, B)$ là một G -phân thớ với thớ mẫu F . Nếu $F = \mathbb{R}^n$ ($F = \mathbb{C}^n$) và $G \cong \text{Aut}(F)$ tác động lên F như các tự đồng cấu tuyến tính thì ξ được gọi là một *phân thớ véctor thực (phức) n chiều*.

Ví dụ. Cho M^n là một đa tạp khả vi thực n chiều. Với phép chiếu :

$$\begin{aligned} \pi : TM^n &= \bigcup_{x \in M^n} T_x M^n \rightarrow M^n \\ \vec{v} \in T_x M^n &\mapsto x \end{aligned}$$

thì bộ ba $\xi = (TM^n, \pi, M^n)$ là một phân thớ véctor thực n chiều; ở đó mỗi thớ $\pi^{-1}(x)$ chính là không gian (véctor) tiếp xúc $T_x M^n$ của M^n tại x . Phân thớ này gọi là *phân thớ tiếp xúc* trên đa tạp vi phân M^n .

1.2.4. Phép toán trên các phân thớ vectơ

Cho $\xi_1 = (E_1, p_1, B)$ và $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$ lần lượt là các phân thớ vectơ n_1 chiều và n_2 chiều với họ hàm dẫn tương ứng là $\varphi_{\beta\alpha}^1$ và $\varphi_{\beta\alpha}^2$

• *Tổng trực tiếp (tổng Whitney)* của ξ_1 và ξ_2 , ký hiệu $\xi_1 \oplus \xi_2$, là một phân thớ vectơ có họ hàm dẫn là $\varphi_{\beta\alpha}$ như sau :

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta\alpha} &= \varphi_{\beta\alpha}^1 \oplus \varphi_{\beta\alpha}^2 : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n_1 + n_2, \mathbb{K}) \\ x &\mapsto \varphi_{\beta\alpha}^1(x) \oplus \varphi_{\beta\alpha}^2(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{\beta\alpha}^1(x) & 0 \\ 0 & \varphi_{\beta\alpha}^2(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng, $\xi_1 \oplus \xi_2 = (E, p, B)$, ở đó :

$$E = E_1 \times_B E_2 = \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 : p_1(e_1) = p_2(e_2)\}.$$

$$p(e_1, e_2) = p_1(e_1) = p_2(e_2) \in B$$

• *Tích tenxơ* của ξ_1 và ξ_2 , ký hiệu $\xi_1 \otimes \xi_2$, là một phân thớ vectơ có họ hàm dẫn là $\varphi_{\beta\alpha}$ như sau :

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta\alpha} &= \varphi_{\beta\alpha}^1 \otimes \varphi_{\beta\alpha}^2 : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n_1 n_2, \mathbb{K}) \\ x &\mapsto \varphi_{\beta\alpha}^1(x) \otimes \varphi_{\beta\alpha}^2(x) \end{aligned}$$

Một số tính chất :

1. $(\xi_1 \oplus \xi_2) \oplus \xi_3 \cong \xi_1 \oplus (\xi_2 \oplus \xi_3)$, $(\xi_1 \otimes \xi_2) \otimes \xi_3 \cong \xi_1 \otimes (\xi_2 \otimes \xi_3)$;
2. $\xi_1 \oplus \xi_2 \cong \xi_2 \oplus \xi_1$, $\xi_1 \otimes \xi_2 \cong \xi_2 \otimes \xi_1$;
3. $(\xi_1 \oplus \xi_2) \otimes \xi_3 \cong (\xi_1 \otimes \xi_3) \oplus (\xi_2 \otimes \xi_3)$;
4. $\xi_1 \otimes (\xi_2 \oplus \xi_3) \cong (\xi_1 \otimes \xi_2) \oplus (\xi_1 \otimes \xi_3)$;
5. $\bar{n} \cong X \times F$ là phân thớ vectơ n chiều trên X : *phân thớ tầm thường*.

1.2.5. Vị nhóm Abel $[\text{Vect}(X)]$

Ký hiệu $[\text{Vect}(X)]$ là tập các lớp đẳng cấu các phân thớ vectơ phức hữu hạn chiều trên X . Trên $[\text{Vect}(X)]$, ta định nghĩa phép cộng như sau :

$$[\xi] + [\eta] := [\xi \oplus \eta]$$

dễ thấy rằng :

1. $[\xi] + [\eta] = [\eta] + [\xi]$ vì $\xi \oplus \eta \cong \eta \oplus \xi$;
2. $([\xi] + [\eta]) + [\zeta] = [\xi] + ([\eta] + [\zeta])$ vì $(\xi \oplus \eta) \oplus \zeta \cong \xi \oplus (\eta \oplus \zeta)$;
3. $[\xi] + [\bar{0}] = [\bar{0}] + [\xi] = [\xi]$ vì $\xi \oplus \bar{0} \cong \bar{0} \oplus \xi \cong \xi$.

do đó $([\text{Vect}(X)], +)$ là một vị nhóm Abel.

Ví dụ : xét $X \simeq \{*\}$ (tức là X co rút được). Khi đó, mọi phân thớ vectơ trên X đều tầm thường. Lúc này, mỗi $[\xi] \in [\text{Vect}(X)]$ đều được đặc trưng bởi số chiều của nó, tức là nếu $\dim \xi = \dim \eta$ thì $\xi \cong \eta$. Do đó ta có đẳng cấu vị nhóm :

$$\begin{aligned} \dim : [\text{Vect}(X), +] &\rightarrow (\mathbb{N}, +) \\ [\xi] &\mapsto \dim \xi \end{aligned}$$

suy ra $[\text{Vect}(X)] \cong \mathbb{N}$. Đặc biệt, khi $X = \{*\}$ ta cũng có $[\text{Vect}(\{*\})] \cong \mathbb{N}$.

1.3. Đối xứng hóa và K -nhóm đại số

1.3.1. Đối xứng hóa của một vị nhóm Abel

1.3.1.1. Định nghĩa

Cho $(M, +)$ là một vị nhóm Abel (nửa nhóm giao hoán có phần tử đơn vị nhưng chưa có phần tử đối). Nhóm đối xứng hóa hay nhóm Grothendieck của $(M, +)$ là cặp $(S(M), s)$ bao gồm nhóm Abel $(S(M), +)$ và đồng cấu vị nhóm $s : M \rightarrow S(M)$ thỏa mãn điều kiện phổ dụng sau : với mỗi nhóm Abel G và đồng cấu vị nhóm $f : M \rightarrow G$ thì luôn tồn tại và duy nhất đồng cấu nhóm $\tilde{f} : S(M) \rightarrow G$ sao cho $\tilde{f} \circ s = f$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s} & S(M) \\ f \downarrow & \swarrow \tilde{f} & \\ G & & \end{array}$$

1.3.1.2. Cách xây dựng

Trên vị nhóm tích $M \times M$, ta xét quan hệ tương đương $\sim$ như sau :

$$((x, u) \sim (y, v)) \Leftrightarrow (\exists r \in M : x + v + r = y + u + r)$$

ta ký hiệu tập thương $M \times M / \sim$ là $S(M)$; ở đó, lớp tương đương của cặp (x, u) ký hiệu là $\widetilde{(x, u)}$. Phép toán trên $S(M)$ được di truyền lại từ phép toán trên M , tức là :

$$\widetilde{(x, u)} + \widetilde{(y, v)} := \widetilde{(x + y, u + v)}$$

ta kiểm tra được $(S(M), +)$ là một nhóm Abel với phần tử trung hòa là $\widetilde{(x, x)}$ và phần tử đối của $\widetilde{(x, u)}$ là $\widetilde{(u, x)}$. Với đồng cấu vị nhóm chính tắc :

$$x \in M \mapsto s(x) = [x] := \widetilde{(x, 0)} = \widetilde{(x + r, r)} \in S(M)$$

thì cặp $(S(M), s)$ chính là nhóm Grothendieck của $(M, +)$.

1.3.1.3. Mô tả

Với mỗi $x, y \in M$, vì $[(x + y) + 0] + 0 \sim x + y + 0$ nên :

$$(x + y, y) \sim (x, 0) \Leftrightarrow \widetilde{(x, y)} + \widetilde{(y, 0)} = \widetilde{(x, 0)} \Leftrightarrow \widetilde{(x, y)} = \widetilde{(x, 0)} - \widetilde{(y, 0)}$$

Như vậy $S(M) = \{[x] - [y] : x, y \in M\}$, ở đó :

$$([x] - [y] = [u] - [v]) \Leftrightarrow (\exists r \in M : x + v + r = y + u + r)$$

$$([x] - [y]) + ([u] - [v]) = [x + u] - [y + v]$$

$$0_{S(M)} = \widetilde{(x, x)} \quad , \quad x \in M$$

$$-([x] - [y]) = [y] - [x]$$

1.3.1.4. Các ví dụ kinh điển

+ Xét vị nhóm Abel $(\mathbb{N}, +)$. Khi đó $S(\mathbb{N}) = (\mathbb{Z}, +)$. Vì phép cộng trong $\mathbb{N}$ thỏa mãn luật giản ước nên lúc này $s = i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ chính là phép nhúng.

+ Xét vị nhóm Abel $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$. Khi đó $S(\mathbb{Z}^*) = (\mathbb{Q}^*, \cdot)$. Vì phép nhân trong $\mathbb{Z}^*$ thỏa mãn luật giản ước nên $s = i : \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}^*$ cũng là phép nhúng.

+ Một ví dụ ít tầm thường hơn là với vị nhóm Abel $(\mathbb{Z}, \cdot)$ thì $S(\mathbb{Z}, \cdot) = \{1\}$ là nhóm tầm thường. Thật vậy, với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$, tồn tại $r = 0 \in \mathbb{Z}$ mà $x \cdot y \cdot 0 = y \cdot y \cdot 0$; tức là $(x, y) \sim (y, y)$ suy ra $\widetilde{(x, y)} = \widetilde{(y, y)} = 1_{S(\mathbb{Z}, \cdot)}$.

1.3.2. K -nhóm đại số

1.3.2.1. Môđun và môđun xạ ảnh

• Cho R là vành có đơn vị ký hiệu là 1. Nhóm Abel $(M, +)$ được gọi là *môđun trái trên R* hay R -*môđun trái* nếu trên M đã xác định thêm một ánh xạ :

$$\begin{aligned} \cdot : R \times M &\rightarrow M \\ (r, x) &\mapsto rx \end{aligned}$$

gọi là *phép nhân với hệ tử từ R* , sao cho các tiên đề sau thỏa mãn :

1. $r(x + y) = rx + ry$;
2. $(r + s)x = rx + sx$;
3. $(rs)x = r(sx)$;
4. $1x = x$.

với mọi $x, y \in M$ và mọi $r, s \in R$. Phần tử có dạng $r_1x_1 + \dots + r_nx_n$ với $r_1, \dots, r_n \in R$ và $x_1, \dots, x_n \in M$ được gọi là *tổ hợp tuyến tính* của $x_1, \dots, x_n$ với hệ tử trong R . Tương tự, ta cũng có khái niệm R -*môđun phải*. Khi vành R giao hoán thì R -môđun trái và R -môđun phải trùng nhau và gọi chung là R -*môđun*.

• Cho R -môđun M và $\emptyset \neq S \subset M$. Ta nói S là *hệ sinh* của M nếu mỗi phần tử của M đều biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của các phần tử trong S . Đặc biệt, khi sự biểu diễn của mọi phần tử của M qua S đều duy nhất thì S được gọi là *cơ sở* của M .

• R -môđun M được gọi là *môđun tự do* nếu M là môđun $\{0\}$ hoặc nếu $M \neq \{0\}$ thì phải có cơ sở khác rỗng. Khi $M = \{0\}$, ta hiểu cơ sở của nó là $\emptyset$.

• R -môđun M được gọi là *môđun xạ ảnh* nếu nó là hạng tử trực tiếp của một R -môđun tự do. Môđun tự do là môđun xạ ảnh. Ngược lại, mỗi môđun xạ ảnh trên vành chính đều là môđun tự do.

1.3.2.2. Định nghĩa $K_0(R)$

Cho R là vành có đơn vị. Đặt $\mathcal{P}(R)$ là tập các lớp đẳng cấu các R -môđun xạ ảnh hữu hạn sinh (tức là các R -môđun có hệ sinh hữu hạn). Trên $\mathcal{P}(R)$ ta xét phép toán :

$$[M] + [N] := [M \oplus N]$$

từ các tính chất của $\oplus$, ta có $(\mathcal{P}(R), +)$ là một vị nhóm Abel. Ta định nghĩa :

$$K_0(R) = S(\mathcal{P}(R), +)$$

1.3.2.3. Các ví dụ kinh điển

+ Lấy $R = \mathbb{Z}$. Vì $\mathbb{Z}$ là vành chính nên mọi $\mathbb{Z}$ -môđun xạ ảnh M đều tự do và có cơ sở. Ký hiệu $\text{rank } M$ là số phần tử trong một cơ sở của M . Ta có đẳng cấu :

$$\begin{aligned} \text{rank} : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) &\xrightarrow{\cong} \mathbb{N} \\ [M] &\mapsto \text{rank } M \end{aligned}$$

do đó $K_0(\mathbb{Z}) = S(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), +) \cong S(\mathbb{N}, +) = (\mathbb{Z}, +)$.

+ Lấy $R = \mathbb{R}$. Vì $\mathbb{R}$ là trường nên các R -môđun xạ ảnh M chính là các không gian véctor thực. Tương tự ta cũng có Ta có đẳng cấu :

$$\begin{aligned} \dim : \mathcal{P}(\mathbb{R}) &\xrightarrow{\cong} \mathbb{N} \\ [M] &\mapsto \dim M \end{aligned}$$

do đó $K_0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$.

1.4. Sơ lược về K -lý thuyết tôpô

1.4.1. Nhóm K^0 và hàm tử K^0

1.4.1.1. Trường hợp X compact, Hausdorff

Cho X là không gian tôpô compact, Hausdorff. Ta xây dựng nhóm $K^0(X)$ từ vị nhóm Abel $([\text{Vect}(X)], +)$ bằng cách định nghĩa :

$$K^0(X) := S([\text{Vect}(X)], +)$$

Mô tả :

- Cách 1 :

$$K^0(X) = \{[\xi] - [\eta] : \xi, \eta \in \text{Vect}(X)\}$$

ở đó :

$$([\xi] = [\eta]) \Leftrightarrow (\exists \bar{n} \in \text{Vect}(X) : \xi \oplus \bar{n} \cong \eta \oplus \bar{n})$$

$$([\xi] - [\eta]) + ([\xi'] - [\eta']) := [\xi \oplus \xi'] - [\eta \oplus \eta']$$

- Cách 2 :

$$K^0(X) = \{[\xi] - [\bar{n}] : \xi \in \text{Vect}(X), n \in \mathbb{N}\}$$

ở đó :

$$([\xi] - [\bar{n}] = [\eta] - [\bar{n}]) \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{N} : \xi \oplus \overline{n+p} \cong \eta \oplus \overline{n+p})$$

$$([\xi] - [\bar{n}]) + ([\eta] - [\bar{n}]) := [\xi \oplus \eta] - [\overline{n+m}]$$

Ta kiểm tra được K^0 là một đối hàm tử từ phạm trù các không gian tôpô compact, Hausdorff vào phạm trù các nhóm Abel xác định như sau :

- Mỗi không gian tôpô compact, Hausdorff X tương ứng với một nhóm Abel $K^0(X)$;

- Mỗi ánh xạ liên tục $f : X \rightarrow Y$ tương ứng với một đồng cấu nhóm $K^0(f) = f^* : K^0(Y) \rightarrow K^0(X)$ xác định bởi $f^*([\xi] - [\bar{n}]) = [f^*(\xi)] - [\bar{n}]$.

Đặc biệt, xét không gian chấm điểm $(X, x_0 \in X)$. Khi đó, phép nhúng $i : \{x_0\} \rightarrow X$ cảm sinh một đồng cấu chiều như sau :

$$i^* = \dim : K^0(X) \rightarrow K^0(\{x_0\}) = \mathbb{Z}$$

$$[\xi] - [\bar{n}] \mapsto \dim \xi - n$$

ta định nghĩa :

$$\tilde{K}(X) = \text{Ker } i^* = \{[\xi] - [\eta] : \dim \xi = \dim \eta\} = \{[\xi] - [\bar{n}] : \dim \xi = n\}$$

Ví dụ :

$$K^0(\{*\}) = S(\text{Vect}(\{*\}), +) \cong S(\mathbb{N}, +) = \mathbb{Z}$$

1.4.1.2. Trường hợp X compact địa phương, Hausdorff

Lấy compact hóa một điểm $X^+ = X \cup \{\infty\}$ của X (xem [7]). Xét không gian chấm điểm (X^+, ∞) . Khi đó ta định nghĩa :

$$K^0(X) := \tilde{K}(X^+) = \tilde{K}(X^+, \infty)$$

1.4.1.3. Nhóm $K^0(X, Y)$

Cho các không gian tôpô X và $Y \subset X$. Ta định nghĩa :

$$K^0(X, Y) := \tilde{K}(X/Y) \quad , \quad K^0(X, \emptyset) := K^0(X)$$

1.4.2. Các nhóm $K^1(X)$

1.4.2.1. Treo của một không gian tôpô

Cho không gian tôpô X . Treo của X là không gian :

$$SX := C^+X \cup C^-X$$

ở đó :

$$C^+X := X \cup [0, 1] / X \times \{1\}$$

$$C^-X := X \cup [-1, 0] / X \times \{-1\}$$

1.4.2.2. Các nhóm K^1

Cho các không gian tôpô X và $Y \subset X$. Ta định nghĩa :

$$K^1(X) := K^0(SX) \quad , \quad K^1(X, Y) = \tilde{K}\left(S\left(\frac{X}{Y}\right)\right)$$

1.4.3. Dây khớp tuần hoàn 6–thành phần của K –lý thuyết tôpô

Cho không gian tôpô X và $Y \subset X$. Khi đó, tồn tại các đồng cấu nối δ_0, δ_1 tạo thành dây khớp tuần hoàn 6–thành phần như sau :

$$\begin{array}{ccccc} K^0(X, Y) & \longrightarrow & K^0(X) & \longrightarrow & K^0(Y) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ K^1(Y) & \longleftarrow & K^1(X) & \longleftarrow & K^1(X, Y) \end{array}$$

1.5. Đại số Banach

1.5.1. Đại số

Cho trường F và F -không gian vectơ $\mathcal{A}$. Ta bảo $\mathcal{A}$ là một *đại số (kết hợp) trên F* hay F -*đại số* nếu trên $\mathcal{A}$ trang bị thêm một phép nhân :

$$\begin{aligned} \bullet: \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

sao cho hai điều kiện sau thỏa mãn :

1. Phép nhân trong $\mathcal{A}$ là một F -*dạng song tuyến tính*; tức là, với mọi $\alpha, \beta \in F$ và mọi $x, y, z \in \mathcal{A}$ thì :

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

$$(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$$

2. Với mọi $\alpha \in F$ và mọi $x, y \in \mathcal{A}$ thì $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Giả sử $\mathcal{B}$ là không gian vectơ con của F -*đại số* $\mathcal{A}$. Ta gọi :

- $\mathcal{B}$ là *đại số con* của $\mathcal{A}$, ký hiệu $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$, nếu $ab \in \mathcal{B}$ với mọi $a, b \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ đóng đối với phép nhân).

- $\mathcal{B}$ là *idean* của $\mathcal{A}$, ký hiệu $\mathcal{B} \triangleleft \mathcal{A}$, nếu $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ và $ab \in \mathcal{B}$ với mọi $a \in \mathcal{A}$ và $b \in \mathcal{B}$. Khi đó, ta định nghĩa được *đại số thương* $\mathcal{A}/\mathcal{B} = \{a + \mathcal{B} : a \in \mathcal{A}\}$ với phép nhân xác định bởi $(a_1 + \mathcal{B})(a_2 + \mathcal{B}) := a_1 a_2 + \mathcal{B}$ với mọi $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$.

1.5.2. Đại số Banach

$\mathbb{C}$ -*đại số* A được gọi là một *đại số Banach* nếu trên A trang bị thêm một chuẩn $\|\cdot\|$ sao cho $(A, \|\cdot\|)$ là không gian Banach và $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ với mọi $a, b \in A$.

Các ví dụ kinh điển :

+ $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ là đại số Banach với chuẩn $|\cdot|$ là môđun của số phức.

+ Cho X là không gian tôpô compact, Hausdorff. Ký hiệu $C(X)$ là tập các ánh xạ liên tục trên X nhận giá trị phức. Trên $C(X)$ ta xét chuẩn :

$$\|f\| = \|f\|_{\infty} = \max_{x \in X} |f(x)|, \quad f \in C(X)$$

khi đó $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ là một đại số Banach có đơn vị là hàm hằng $f(x) \equiv 1$.

+ Cho X là không gian tôpô compact địa phương, Hausdorff. Ký hiệu $C_0(X)$ là tập các ánh xạ $f \in C(X)$ mà *triệt tiêu tại vô cùng*; ở đó f triệt tiêu tại vô cùng nếu với mọi $\varepsilon > 0$ thì $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ là tập compact trong X . Khi đó, $C_0(X)$ cùng với chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ lập thành một đại số Banach không có đơn vị.

Chú ý :

+ Ta hiểu số chiều của đại số Banach là số chiều của không gian vectơ.
+ Khi một đại số Banach có đơn vị e , ta luôn có thể giả sử $\|e\| = 1$. Nếu A không có đơn vị, ta đặt $A^+ = A \oplus \mathbb{C}$ với chuẩn $\|(a, z)\| := \|a\| + |z|$. Khi đó A^+ trở thành đại số Banach có đơn vị $e = (0, 1)$. Ta bảo A^+ là đại số Banach nhận được từ A bằng cách thêm vào phần tử đơn vị hay A^+ là *đơn vị hóa* của A .

1.5.3. Nón và treo

1.5.3.1. Định nghĩa

Giả sử A là một đại số Banach giao hoán.

- Tập CA các ánh xạ liên tục từ $[0, 1]$ vào A sao cho $f(0) = 0$ lập thành một đại số Banach và gọi là *nón* của A .
- Tập SA các ánh xạ liên tục từ $[0, 1]$ vào A sao cho $f(0) = f(1) = 0$ lập thành một đại số Banach và gọi là *treo* của A . Dễ thấy rằng, SA là một idêan đóng trong CA . Ta có thể xem :

- + $SA \cong C_0(\mathbb{R}, A)$ là đại số các hàm liên tục từ $\mathbb{R}$ vào A triệt tiêu tại vô cùng;
- + $(SA)^+$ là đại số các ánh xạ liên tục từ $[0, 1]$ vào A^+ sao cho $f(0) = f(1)$.

1.5.3.2. Mệnh đề

Cho A là một đại số Banach giao hoán. Khi đó :

- Nón CA là không gian co rút được.
- Nếu I là không gian idêan tối đại của A thì $\mathbb{R} \times I$ là không gian idêan tối đại của SA và SI^+ là không gian idêan tối đại của $(SA)^+$.

1.6. Ánh xạ mũ và lũy đẳng

1.6.1. Ánh xạ mũ

1.6.1.1. Định nghĩa

Cho A là đại số Banach có đơn vị là 1. Ký hiệu $A^{-1} = \{a \in A : \exists b \in A, ab = 1\}$ là nhóm các phần tử khả nghịch của A . Với mỗi $a \in A$, rõ ràng $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \in A^{-1}$ với nghịch đảo là e^{-a} . Dễ thấy rằng, nếu a và b giao hoán với nhau, tức $ab = ba$, thì $e^{a+b} = e^a e^b$. Đặc biệt hơn, nếu A giao hoán thì ta có đồng cấu, gọi là *ánh xạ mũ*, như sau :

$$\begin{aligned} \exp : (A, +) &\rightarrow (A^{-1}, \cdot) \\ a &\mapsto e^{2\pi i a} \end{aligned}$$

khi đó, $\text{Ker exp} = \{a \in A : e^{2\pi i a} = 1\}$ và $\text{Im exp} = \{e^{2\pi i a} : a \in A\}$ lần lượt là nhóm con chuẩn tắc của A và nhóm con của A^{-1} .

1.6.1.2. Ký hiệu

Với mỗi đại số Banach A có đơn vị, ta ký hiệu $Q(A) = \{a \in A : e^{2\pi i a} = 1\}$ và $\exp(A)$ là nhóm con của A^{-1} sinh bởi các phần tử có dạng e^a với $a \in A$, tức là :

$$\exp(A) = \left\langle \{e^a : a \in A\} \right\rangle = \{e^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_n} : a_1, \dots, a_n \in A\}$$

đặc biệt, nếu A giao hoán thì $\exp(A) = \{e^a : a \in A\}$.

1.6.1.3. Mệnh đề

Thành phần liên thông của đơn vị trong A^{-1} là tập mở liên thông đường và bằng với $\exp(A)$.

1.6.2. Lũy đẳng

1.6.2.1. Định nghĩa

Phần tử $p \in A$ được gọi là *lũy đẳng* nếu $p^2 = p$. Nếu p lũy đẳng thì :

$$e^{2\pi i p} = 1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi i)^n}{n!} \right) p = 1 + (e^{2\pi i} - 1)p = 1 \Rightarrow p \in Q(A)$$

1.6.2.2. Mệnh đề

a) Nếu $p_1, \dots, p_k$ là tập các lũy đẳng giao hoán thì $\sum_{i=1}^k n_i p_i \in Q(A)$ với mọi $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$.

b) Nếu $a \in Q(A)$ thì a có biểu diễn duy nhất dưới dạng $a = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j p_j$, ở đó mỗi p_j là lũy đẳng, $p_j p_k = 0$ với $j \neq k$ và $\sum p_j = 1$.

1.6.2.3. Định nghĩa

Một hệ các lũy đẳng $\{p_j\}$ mà $p_j p_k = 0$ với $j \neq k$ và $\sum p_j = 1$ được gọi là một *phân hoạch của đơn vị* trong A . Với $a \in Q(A)$, biểu diễn duy nhất $a = \sum j p_j$ với $\{p_j\}$ là một phân hoạch của đơn vị, được gọi là *phân tích phổ* của a .

1.6.3. Mệnh đề (Phép nâng phần tử khả nghịch) (xem [20, tr.144])

Cho A, B là các đại số Banach có đơn vị (không nhất thiết giao hoán) và $a \in A^{-1}$. Khi đó, $a \in \exp(A)$ khi và chỉ khi với mỗi toàn cấu $\varphi: B \rightarrow A$, a là ảnh của một phần tử khả nghịch trong B .

Chương 2

K-LÝ THUYẾT CỦA ĐẠI SỐ BANACH

Chương này là nội dung chính của luận văn. Chúng tôi sẽ trình bày cụ thể về những vấn đề cơ bản nhất của K-lý thuyết của đại số Banach. Trong chương này, chúng tôi tham khảo nhiều tài liệu nhưng về cơ bản, chúng tôi chủ yếu theo [20] và [24]. Độc giả muốn tìm hiểu xa hơn có thể tham khảo thêm các tài liệu [6], [12], [15], [16], [18], [25]. Trong đó, [18] là một tài liệu nhập môn (tương đối dễ) để tiếp cận về C^ -đại số và K-lý thuyết của chúng, còn [12] là một tài liệu bao trùm về các vấn đề hiện đại nhất của K-lý thuyết.*

2.1. Nhóm K_1 và hàm tử K_1

Trong mục này, ta sẽ xây dựng nhóm $K_1(A)$ bằng cách phân tích nhóm con sinh bởi ảnh của ánh xạ mũ $\exp : \text{Mat}_n(A) \rightarrow \text{GL}_n(A)$.

Ký hiệu :

- $\text{GL}_n^0(A) := \text{Im exp} = \{e^a : a \in \text{Mat}_n(A)\} \triangleleft (\text{GL}_n(A), \cdot)$ là thành phần liên thông đường của ma trận đơn vị. Nhóm thương $\text{GL}_n(A)/\text{GL}_n^0(A)$ ký hiệu là $L_n(A)$.
- Với mỗi ma trận $a \in \text{Mat}_n(A)$ và $b \in \text{Mat}_k(A)$ ta ký hiệu $a \oplus b$ là ma trận :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n+k}(A)$$

Bây giờ, ta thấy ngay rằng, nếu $\varphi : A \rightarrow B$ là một đồng cấu thì φ cảm sinh một đồng cấu $\text{Mat}_n(A) \rightarrow \text{Mat}_n(B)$ mà ánh xạ $\text{GL}_n(A)$ vào $\text{GL}_n(B)$ và $\text{GL}_n^0(A)$ vào $\text{GL}_n^0(B)$. Từ đó, φ cảm sinh một đồng cấu $\varphi^* : L_n(A) \rightarrow L_n(B)$. Nói cách khác, $A \mapsto L_n(A)$ là một hàm tử từ phạm trù các đại số Banach giao hoán có đơn vị đến phạm trù các nhóm.

2.1.1. Các phép toán sơ cấp

2.1.1.1. Ma trận sơ cấp và phép toán sơ cấp

- Vì $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ là liên thông nên ma trận có dạng :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . \\ . & . & . & z & . & . \\ . & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}^*$$

được nối với ma trận đơn vị bởi một cung trong $GL_n(\mathbb{C})$, do đó thuộc vào $GL_n^0(\mathbb{C})$.

- Ma trận $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nối với ma trận $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bởi cung :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} -\cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

trong $GL_2^0(\mathbb{C})$. Do đó $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2^0(\mathbb{C})$. Tương tự, bất kỳ một *ma trận đổi chỗ sơ cấp* trong $GL_n(\mathbb{C})$ thì đều thuộc vào $GL_n^0(\mathbb{C})$, ở đó ma trận đổi chỗ sơ cấp tức là một ma trận mà tác động của nó lên $\mathbb{C}^n$ thì chỉ thay đổi hai tọa độ và cố định các tọa độ khác.

- Một *ma trận trượt sơ cấp* trong $GL_n(A)$ là ma trận có dạng $I_n + ae_{ij}$ với $i \neq j$, ở đó $a \in A$ và e_{ij} là ma trận mà chỉ có phần tử khác không là phần tử ở vị trí hàng i và cột j . Cung :

$$t \mapsto I_n + tae_{ij}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

nằm trong $GL_n(A)$ và nối ma trận này với ma trận đơn vị. Do đó, ma trận trượt sơ cấp trong $GL_n(A)$ thuộc vào $GL_n^0(A)$. Từ lập luận này, ta có :

2.1.1.2. Mệnh đề

Lớp tương đương của một phần tử của $GL_n(A)$ trong $L_n(A)$ không đôi khi :

- Nhân một dòng (cột) bởi một số khác không;

- Đổi chỗ hai dòng (cột);
- Cộng bội của một dòng (cột) vào dòng (cột) khác.

và do bất kỳ một ma trận phức nào cũng trở thành ma trận đơn vị thông qua một dãy các phép biến đổi sơ cấp ở trên nên ta còn có :

2.1.1.3. Hệ quả

Với mọi n , nhóm $L_n(\mathbb{C})$ là nhóm tầm thường.

2.1.2. Nhóm $K_1(A)$ khi A có đơn vị

2.1.2.1. Xây dựng $K_1(A)$

Với mỗi $m, n \in \mathbb{N}^*$, $n < m$, ta xét đồng cấu :

$$i_{n,m} : GL_n(A) \rightarrow GL_m(A)$$

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix}$$

vì $i_{n,m}(GL_n^0(A)) \subset GL_m^0(A)$ nên $i_{n,m}$ cảm sinh đồng cấu $j_{n,m} : L_n(A) \rightarrow L_m(A)$. Dễ dàng kiểm tra được :

$$j_{m,p} \circ j_{n,m} = j_{n,p} \quad , \quad 0 < n < m < p$$

tức $\{L_n(A); j_{n,m}\}$ là một hệ quy nạp.

Mặc dù $L_n(A)$ có thể không Abel nhưng với m đủ lớn (cụ thể là $m \geq 2n$) thì ảnh của nó trong $L_m(A)$ là Abel. Thật vậy :

2.1.2.2. Mệnh đề

Nếu $a, b \in GL_n(A)$ thì $ab \oplus I_n$, $ba \oplus I_n$, $a \oplus b$ và $b \oplus a$ là tương đương modulo $GL_{2n}^0(A)$.

Chứng minh.

Với bất kỳ $a, b \in GL_n(A)$, bằng phép đổi chỗ các dòng và các cột, ta có $a \oplus b \sim b \oplus a$. Do đó :

$$ab \oplus I_n = (a \oplus I_n)(b \oplus I_n) \sim \underbrace{(a \oplus I_n)(I_n \oplus b)}_{a \oplus b} \sim \underbrace{b \oplus a}_{(b \oplus I_n)(I_n \oplus a)} \sim (b \oplus I_n)(a \oplus I_n) = ba \oplus I_n$$



2.1.2.3. Định nghĩa

Cho A là một đại số Banach giao hoán có đơn vị. Ta định nghĩa :

$$K_1(A) := \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n}} L_n(A) := \bigoplus_{n \geq 1} L_n(A) / \left\langle \{a\} - j_{n,m}(\{a\}) : a \in GL_n(A), n \in \mathbb{N}^* \right\rangle$$

$$= \bigoplus_{n \geq 1} L_n(A) / \left\langle \{a\} - \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{bmatrix} : a \in L_n(A), m, n \in \mathbb{N}^*, n < m \right\rangle$$

2.1.2.4. Hệ quả

- Từ 2.1.2.2, ta suy ra giới hạn $K_1(A)$ là nhóm Abel.
- Từ 2.1.1.2, ta cũng suy ra $K_1(\mathbb{C}) = 0$.

2.1.2.5. Tính chất hàm tử của K_1

Chú ý rằng, nếu $\varphi: A \rightarrow B$ là một đồng cấu đại số thì các ánh xạ cảm sinh $GL_n(A) \rightarrow GL_n(B)$ giao hoán với mở rộng tầm thường. Do đó, các ánh xạ $L_n(A) \rightarrow L_n(B)$ giao hoán với các ánh xạ liên kết của hệ quy nạp và cảm sinh một đồng cấu $\varphi^*: K_1(A) \rightarrow K_1(B)$. Nói cách khác, K_1 là một hàm tử từ phạm trù các đại số Banach giao hoán, có đơn vị đến phạm trù các nhóm Abel.

2.1.3. Nhóm $\tilde{K}_1(A)$ khi A không có đơn vị

2.1.3.1. Xây dựng $\tilde{K}_1(A)$

Bây giờ ta hãy xét phạm trù các đại số Banach không có đơn vị. Ta sẽ thác triển K_1 đến một hàm tử $\tilde{K}_1$ trong một phạm trù rộng hơn.

Xét dãy các đồng cấu :

$$\mathbb{C} \xrightarrow{i} A^+ = A \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{\pi} A^+ / A \cong \mathbb{C}$$

trong đó $i(z) = (0, z)$ và $\pi(a, z) = z$. Khi đó, ta có dãy các đồng cấu cảm sinh :

$$0 = K_1(\mathbb{C}) \xrightarrow{i_*} K_1(A^+) \xrightarrow{\pi_*} K_1(\mathbb{C}) = 0$$

do đó :

$$K_1(A^+) \cong \text{Ker } \pi_* \oplus K_1(\mathbb{C}) = \text{Ker } \pi_* \oplus 0 \cong \text{Ker } \pi_*$$

và ta định nghĩa :

$$\boxed{\tilde{K}_1(A) := \text{Ker } \pi_* \cong K_1(A^+)}$$

2.1.3.2. Tính chất hàm tử của $\tilde{K}_1$

Bây giờ một đồng cấu $\varphi: A \rightarrow B$ luôn xác định một đồng cấu tự nhiên $\varphi^+: A^+ \rightarrow B^+$ bởi $\varphi^+(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda$. Do đó $A \mapsto A^+$ là một hàm tử từ phạm trù các đại số Banach giao hoán tới phạm trù các đại số Banach giao hoán có đơn vị. Do đó $\tilde{K}_1$ là một hàm tử trên phạm trù các đại số Banach giao hoán.

Tiếp theo ta chứng minh $\tilde{K}_1$ là mở rộng của K_1 . Giả sử A có một phần tử đơn vị p . Khi đó, trong A^+ , p và $p-1$ là các lũy đẳng xác định một sự phân tích tổng trực tiếp các đại số $A^+ = A \oplus \mathbb{C}$. Suy ra $K_1(A^+) = K_1(A) \oplus K_1(\mathbb{C})$ và do $K_1(\mathbb{C}) = 0$ nên $\tilde{K}_1(A) = K_1(A^+) = K_1(A)$.

2.1.4. Mệnh đề (Tính khớp yếu của $\tilde{K}_1$) (xem [20, tr.148])

Giả sử A là một đại số Banach giao hoán (không nhất thiết có đơn vị) và I là một idêan đóng của A . Khi đó, dãy khớp $I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I$ cảm sinh một dãy khớp $\tilde{K}_1(I) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}_1(A) \xrightarrow{\pi^*} \tilde{K}_1(A/I)$.

Chứng minh. Ta cần chứng minh $\text{Im } i_* = \text{Ker } \pi_*$.

• Ta lần lượt mở rộng các đồng cấu i và π tới các đồng cấu $i^+ = i \oplus id_{\mathbb{C}}: I^+ = I \oplus \mathbb{C} \rightarrow A^+ = A \oplus \mathbb{C}$ và $p^+ = p \oplus id_{\mathbb{C}}: A^+ \rightarrow (A/I)^+ = A^+/I \oplus \mathbb{C}$. Khi đó, hợp thành $\pi^+ \circ i^+$ ánh xạ I^+ thành các bội của đơn vị trong A^+/I . Vì $K_1(\mathbb{C}) = 0$ nên hợp thành $\pi_* \circ i_* \cong \pi_*^+ \circ i_*^+: \tilde{K}_1(I) \cong K_1(I^+) \rightarrow K_1(A^+/I) \cong \tilde{K}_1(A/I)$ chính là đồng cấu không. Suy ra $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } \pi_*$.

• Giả sử $u \in \text{Ker } \pi_*$, tức là $u \in K_1(A^+)$ và $\pi_*(u) = 0$. Vì $u \in K_1(A^+)$ nên :

$$u = a \cdot \text{GL}_n^0(A^+) \quad , \quad a \in \text{GL}_n(A^+)$$

và do $\pi_*(u) = 0$ nên $\pi(a) \in \text{GL}_n^0(A^+/I)$; tức là :

$$\pi(a) = e^{c_1} \dots e^{c_m} \quad , \quad c_1, \dots, c_m \in \text{Mat}_n(A^+/I)$$

với mỗi $k \in \{1, \dots, m\}$, ta chọn nghịch ảnh $b_k \in \text{Mat}_n(A^+)$ của c_k . Đặt :

$$d = e^{-b_m} \dots e^{-b_1} a \in \text{GL}_n(A^+)$$

thì :

$$\pi(d) = \pi(e^{-b_m} \dots e^{-b_1} a) = \pi(e^{-b_m} \dots e^{-b_1}) \pi(a) = [\pi(a)]^{-1} \pi(a) = 1$$

tức là d nằm trong ảnh của I^+ trong A^+ . Mà :

$$d \cdot \text{GL}_n^0(A^+) = (e^{-b_m} \dots e^{-b_1} a) \text{GL}_n^0(A^+) = a \cdot \text{GL}_n^0(A^+)$$

nên $u = a \cdot \text{GL}_n^0(A^+) = d \cdot \text{GL}_n^0(A^+) \in \text{Im } i_*$. Vì $u \in \text{Ker } \pi_*$ là tùy ý nên $\text{Ker } \pi_* \subset \text{Im } i_*$. ♦

2.2. Nhóm K_0 và hàm tử K_0

Trong mục này, ta sử dụng hạt nhân của ánh xạ mũ $\exp : \text{Mat}_n(A) \rightarrow \text{GL}_n(A)$ để xây dựng nhóm $K_0(A)$.

2.2.1. Xây dựng $K_0(A)$

2.2.1.1. Trường hợp A có đơn vị

Cho A là một đại số Banach giao hoán, có đơn vị ký hiệu là 1. Ta xây dựng $K_0(A)$ theo sơ đồ gồm hai bước như sau :

- Bước 1 : từ A xây dựng vị nhóm Abel $(J(A), +)$.
- Bước 2 : xây dựng $K_0(A)$ từ nhóm Grothendieck $S(J(A))$ của $(J(A), +)$.

Bước 1 Đặt :

$$Q_n(A) := \left\{ a = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(A) : e^{2\pi i a} = I_n \right\} \subset \text{Mat}_n(A)$$

vì $\text{Mat}_n(A)$ không giao hoán nên $(Q_n(A), +)$ không là nhóm. Tuy nhiên, với mỗi $0 < n < m$ ta có phép nhúng :

$$i_{n,m} : Q_n(A) \rightarrow Q_m(A)$$

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix}$$

và ta có hệ quy nạp $\{Q_n(A); i_{n,m}\}$. Đặt :

$$Q(A) := \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n}} Q_n(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Q_n(A)$$

Vì $e^{2\pi i(a \oplus b)} = e^{2\pi i a} \oplus e^{2\pi i b}$ nên trên $Q(A)$, ta có thể định nghĩa phép toán $\oplus$:

$$a \oplus b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in Q_{m+n}(A) \subset Q(A) \quad , \quad a \in Q_n(A), b \in Q_m(A)$$

dễ thấy phép $\oplus$ có tính chất kết hợp. Do đó $(Q(A), \oplus)$ trở thành nửa nhóm. Với $m > n$, ta hiểu mở rộng tầm thường của $a \in Q_n(A)$ là :

$$a \oplus 0_{m-n} \in Q_m(A)$$

tuy nhiên, phép toán $\oplus$ không giao hoán vì :

$$a \oplus b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = b \oplus a$$

do đó trên $Q(A)$, ta xét quan hệ $\sim$ như sau : với mọi $a \in Q_n(A), b \in Q_m(A)$ thì :

$$\begin{aligned} (a \sim b) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (a, b \text{ có mở rộng tầm thường đồng dạng}) \\ &\Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{N}^*, p \geq \max\{m, n\} : a \oplus 0_{p-n} \approx b \oplus 0_{p-m}) \end{aligned}$$

Nhắc lại rằng, hai ma trận $a, b \in \text{Mat}_n(A)$ gọi là *đồng dạng* nếu $a = ubu^{-1}$ với $u \in \text{GL}_n(A)$ nào đó. Ta kiểm tra được $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $Q(A)$ tương thích với phép $\oplus$, tức là nếu $a_1 \sim b_1$ và $a_2 \sim b_2$ thì $a_1 \oplus a_2 \sim b_1 \oplus b_2$. Vì vậy, ta có thể đặt $J(A) = Q(A) / \sim$ với phép chiếu chính tắc :

$$\begin{aligned} Q(A) &\rightarrow J(A) \\ a &\mapsto \tilde{a} \end{aligned}$$

Trên $J(A)$ ta định nghĩa phép cộng như sau :

$$\tilde{a} + \tilde{b} := \widetilde{a \oplus b} \quad , \quad \forall \tilde{a}, \tilde{b} \in J(A)$$

hiển nhiên phép $+$ kết hợp vì $\oplus$ kết hợp. Mặt khác, vì $a \oplus b \sim b \oplus a$ nên $\widetilde{a \oplus b} = \widetilde{b \oplus a}$, tức là $\tilde{a} + \tilde{b} = \tilde{b} + \tilde{a}$ hay phép $+$ trên $J(A)$ giao hoán. Dễ thấy, với mọi

$m, n \in \mathbb{N}^*$ thì 0_n và 0_m đồng dạng với nhau nên phần tử không của $J(A)$ là $\tilde{0}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Vậy, ta đã xây dựng được vị nhóm Abel $(J(A), +)$.

Bước 2 Vì $J(A)$ là vị nhóm Abel nên ta có thể xét nhóm Grothendieck $S(J(A))$ của nó. Với $a \in Q_n(A)$ ta ký hiệu lớp của a trong $S(J(A))$ là $\{a\}$. Tuy nhiên, nếu $a, b \in Q_n(A)$ không giao hoán thì $\{a+b\} \neq \{a\} + \{b\}$. Do đó, ta khắc phục nhược điểm này bằng cách định nghĩa :

$$K_0(A) = \frac{S(J(A))}{\langle \{a+b\} - \{a\} - \{b\} : a, b \in Q_n(A), ab = ba, n \geq 1 \rangle}$$

và với $a \in Q_n(A)$, lớp của a trong $K_0(A)$ ký hiệu là $[a]$.

Tính chất hàm tử của K_0 :

Cho A, B là hai đại số Banach giao hoán có đơn vị và $\varphi : A \rightarrow B$ là một đồng cấu đại số Banach. Khi đó φ cảm sinh ra ánh xạ $\bar{\varphi} : \text{Mat}_n(A) \rightarrow \text{Mat}_n(B)$ xác định như sau :

$$\bar{\varphi}\left(\left(a_{ij}\right)_n\right) := \left(\varphi\left(a_{ij}\right)\right)_n$$

dễ thấy $\bar{\varphi}(Q_n(A)) \subset Q_n(B)$, $\bar{\varphi}(Q(A)) \subset Q(B)$, hơn nữa $\bar{\varphi}$ cảm sinh đồng cấu nhóm :

$$\begin{aligned} \varphi_* : K_0(A) &\rightarrow K_0(B) \\ [a] &\mapsto \varphi_*([a]) := [\varphi(a)] \end{aligned}$$

do đó, K_0 là một hàm tử từ phạm trù các đại số Banach giao hoán có đơn vị tới phạm trù các nhóm Abel.

2.2.1.2. Trường hợp A không có đơn vị

Xét dãy các đồng cấu $\mathbb{C} \xrightarrow{i} A^+ = A \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{\pi} A^+/A \cong \mathbb{C}$, ở đó $i(z) = (0, z)$ và $\pi(a, z) = z$. Ta được dãy các đồng cấu cảm sinh :

$$\mathbb{Z} \cong K_0(\mathbb{C}) \xrightarrow{i_*} K_0(A^+) \xrightarrow{\pi_*} K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$$

vì $\pi \circ i = id_{\mathbb{C}}$ nên $\pi_* \circ i_* = id_{\mathbb{Z}}$. Do đó $K_0(A^+) \cong \text{Ker } \pi_* \oplus K_0(\mathbb{C})$ và ta định nghĩa :

$$\tilde{K}_0(A) = \text{Ker } \pi_*$$

Với mỗi đồng cấu đại số $\varphi: A \rightarrow B$ thì biểu đồ

$$\begin{array}{ccc} A^+ & \xrightarrow{\quad} & A^+/A \\ \downarrow & & \swarrow \searrow \\ B^+ & \xrightarrow{\quad} & B^+/B \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbb{C} \\ \swarrow \searrow \end{array}$$

giao hoán. Do đó biểu đồ :

$$\begin{array}{ccc} K_0(A^+) & & \\ \downarrow & \swarrow \varphi_0^* & \\ K_0(B^+) & & K_0(\mathbb{C}) \end{array}$$

giao hoán. Suy ra đồng cấu $\varphi_*: K_0(A^+) \rightarrow K_0(B^+)$ ánh xạ $\tilde{K}_0(A)$ vào $\tilde{K}_0(B)$. Từ đó, ta xác định được một hàm tử $\tilde{K}_0$ trên phạm trù các đại số Banach giao hoán.

Bây giờ ta hãy mô tả một đồng cấu từ $K_0(A)$ vào nhóm G nào đó.

2.2.1.3. Mệnh đề (xem [20, tr.152])

Cho nhóm G và ánh xạ $\varphi: \bigcup_{n \geq 1} Q_n(A) \rightarrow G$ có các tính chất sau :

- a) Nếu a, b đồng dạng thì $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- b) Nếu b là mở rộng tầm thường của a thì $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- c) Nếu a, b giao hoán thì $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

khi đó, tồn tại một đồng cấu nhóm $\tilde{\varphi}: K_0(A) \rightarrow G$ sao cho $\tilde{\varphi}([a]) = \varphi(a)$.

Chứng minh.

Với $a \in Q_n(A), b \in Q_m(A)$, vì $a \oplus 0$ và $0 \oplus b$ giao hoán trong $Q_{n+m}(A)$ và $a \oplus b = (a \oplus 0) + (0 \oplus b)$ nên từ (c) suy ra ta suy ra $\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Điều này cùng với (a) và (b) suy ra φ xác định một đồng cấu từ vị nhóm $J(A)$ vào G , từ đó, xác định một đồng cấu từ $S(J(A))$ vào G . Bây giờ, từ (c) suy ra đồng cấu này làm triệt tiêu nhóm con của $S(J(A))$ sinh bởi các phần tử $\{a+b\} - \{a\} - \{b\}$ và do đó, xác định một đồng cấu $\tilde{\varphi}: K_0(A) \rightarrow G$. ❖

2.2.2. Mô tả $K_0(A)$ (xem [20, tr.156–158])

Bây giờ, ta sẽ đưa ra một sự mô tả ngắn gọn của K_0 và dùng nó để xác định thêm một vài tính chất của K_0 .

2.2.2.1. Ý tưởng mô tả

Nếu $p \in \text{Mat}_n(A)$ là lũy đẳng thì $p \in Q_n(A)$. Trước hết ta ký hiệu $P_n(A)$ là tập các lũy đẳng trong $\text{Mat}_n(A)$ và xây dựng một nhóm $T(A)$ từ $\bigcup_{n \geq 1} P_n(A)$.

Bây giờ, ta thấy rằng $\bigcup_{n \geq 1} P_n(A)$ là một tập con của $\bigcup_{n \geq 1} Q_n(A)$ đóng dưới phép tổng trực tiếp. Do đó $\bigcup_{n \geq 1} P_n(A)$ xác định một nửa nhóm con $U(A) \subset J(A)$, tức là $U(A)$ là nửa nhóm (dưới phép tổng trực tiếp) các lớp tương đương của các phần tử của $\bigcup_{n \geq 1} P_n(A)$ dưới quan hệ tương đương $\sim$, ở đó $p \sim q$ nếu p, q các mở rộng tầm thường đồng dạng. Đặt $(T(A), s_0) = S(U(A))$ là nhóm Grothendieck của $U(A)$.

Ý tưởng : ta sẽ chỉ ra một đẳng cấu giữa $T(A)$ và $K_0(A)$, và rất tự nhiên, ta mô tả $K_0(A)$ nhờ vào sự mô tả của nhóm Grothendieck $S(U(A)) = T(A)$.

Chú ý rằng, mặc dù $U(A) \subset J(A)$ nhưng chưa chắc là $T(A) \subset S(J(A))$. Điều này được khắc phục như sau :

- Theo định nghĩa $K_0(A)$, ta có phép chiếu chính tắc $p : S(J(A)) \rightarrow K_0(A)$.
- Ngoài ra, ta còn có phép bao lồng $i : U(A) \rightarrow J(A)$ và $s_1 : J(A) \rightarrow S(J(A))$ là ánh xạ chính tắc trong định nghĩa của nhóm Grothendieck $S(J(A))$.
- Đặt $\tilde{i} = p \circ s_1 \circ i : U(A) \rightarrow K_0(A)$. Khi đó, theo định nghĩa của $S(U(A))$, tồn tại và duy nhất đồng cấu $i_* : T(A) \rightarrow K_0(A)$ làm giao hoán biểu đồ :

$$\begin{array}{ccc} U(A) & \xrightarrow{s_0} & S(U(A)) = T(A) \\ \downarrow \tilde{i} & \swarrow i_* & \\ K_0(A) & & \end{array}$$

- Cuối cùng, ta chỉ ra ánh xạ ngược λ_* của i_* (suy ra i_* là một đẳng cấu).

2.2.2.2. Xây dựng ánh xạ λ_*

Với mỗi $a \in Q_n(A)$ ta đặt $a = \sum jp_j$ là sự phân tích phổ như trong 1.6.2.3. Ta xác định một phần tử $\lambda(a) \in T(A)$ bởi $\lambda(a) = \sum j\lambda(p_j)$, ở đó $\lambda(p_j)$ là lớp tương đương của lũy đẳng p_j trong $T(A)$. Khi đó, ánh xạ $\lambda: \bigcup_n Q_n(A) \rightarrow T(A)$ thỏa mãn điều kiện của 2.2.1.3. Thật vậy, có ba điều kiện mà ta cần kiểm tra :

- *Điều kiện (a).* Giả sử $a = \sum jp_j$ đồng dạng với $b = \sum jq_j$. Khi đó, có $u \in GL_n(A)$ sao cho :

$$\sum jp_j = a = ubu^{-1} = \sum juq_ju^{-1}$$

vì sự phân tích phổ là duy nhất nên $p_j = uq_ju^{-1}$ với mọi j . Từ định nghĩa của $T(A)$ ta suy ra :

$$\lambda(a) = \sum j\lambda(p_j) = \sum j\lambda(q_j) = \lambda(b)$$

- *Điều kiện (b).* Giả sử $b = \sum jq_j$ là mở rộng tầm thường của $a = \sum jp_j$. Khi đó, với mọi $j \neq 0$, q_j là mở rộng tầm thường của p_j . Do đó :

$$\lambda(b) = \sum j\lambda(q_j) = \sum j\lambda(p_j) = \lambda(a)$$

- *Điều kiện (c).* Giả sử $a = \sum jp_j$ và $b = \sum jq_j$ là giao hoán. Khi đó, mỗi p_i giao hoán với mỗi q_j và mọi p_iq_j đều lũy đẳng. Vì $\sum p_i = 1 = \sum q_j$ nên :

$$a = \left(\sum ip_i\right)\left(\sum q_j\right) = \sum_{i,j} ip_iq_j, \quad b = \left(\sum jq_j\right)\left(\sum p_i\right) = \sum_{i,j} jp_iq_j$$

do đó :

$$a + b = \sum_{i,j} (i + j) p_iq_j$$

đặt $r_k = \sum_{i+j=k} p_iq_j$ thì $a + b = \sum kr_k$ là sự phân tích phổ của $a + b$. Bây giờ, nếu p và q là các lũy đẳng rời nhau trong $P_n(A)$, tức $pq = qp = 0$, thì $p \oplus q$ sẽ đồng dạng với một mở rộng tầm thường của $p + q$. Thật vậy, ta hãy xét :

$$u = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \in \text{GL}_{2n}(A)$$

dễ thấy $u^{-1} = u$ và :

$$u[(p+q) \oplus 0]u^{-1} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = p \oplus q$$

suy ra :

$$\lambda(r_k) = \lambda\left(\sum_{i+j=k} p_i q_j\right) = \lambda\left(\bigoplus_{i+j=k} p_i q_j\right) = \sum_{i+j=k} \lambda(p_i q_j)$$

mà :

$$\lambda(p_i) = \lambda\left(\sum_j p_i q_j\right) = \lambda\left(\bigoplus_j p_i q_j\right) = \sum_j \lambda(p_i q_j)$$

$$\lambda(q_j) = \lambda\left(\sum_i p_i q_j\right) = \lambda\left(\bigoplus_i p_i q_j\right) = \sum_i \lambda(p_i q_j)$$

nên :

$$\begin{aligned} \lambda(a+b) &= \sum_{i,j} k \lambda(r_k) = \sum_{i,j} (i+j) \lambda(p_i q_j) = \sum_i i \sum_j \lambda(p_i q_j) + \sum_j j \sum_i \lambda(p_i q_j) \\ &= \sum_i i \lambda(p_i) + \sum_j j \lambda(q_j) = \lambda(a) + \lambda(b) \end{aligned}$$

❖

Vì ánh xạ $\lambda: \bigcup_n Q_n(A) \rightarrow T(A)$ thỏa mãn điều kiện của 2.2.1.3 nên λ xác

định một đồng cấu $\lambda_*: K_0(A) \rightarrow T(A)$. Và ta có :

2.2.2.3. Mệnh đề

Ánh xạ $i_*: K_0(A) \rightarrow T(A)$ là một đẳng cấu với ánh xạ ngược là λ_* .

Chứng minh.

Ta cần chứng minh $i_* \circ \lambda_* = id_{K_0(A)}$ và $\lambda_* \circ i_* = id_{T(A)}$. Từ quá trình xây dựng λ_* , rõ ràng hai đẳng thức trên đúng với các lũy đẳng của $K_0(A)$ và $T(A)$. Vì các lũy đẳng sinh ra $K_0(A)$ và $T(A)$ nên hai đẳng thức trên đúng trên các tập sinh của $K_0(A)$ và $T(A)$. Do đó, chúng cũng đúng trên $K_0(A)$ và $T(A)$. ❖

2.2.2.4. Định lý mô tả $K_0(A)$

a) Mỗi phần tử của $K_0(A)$ có dạng $[p] - [q]$ trong đó $p, q \in \bigcup_n Q_n(A)$ là các lũy đẳng; hơn nữa, với hai lũy đẳng p, q thì $[p] - [q] = 0$ khi và chỉ khi tồn tại một lũy đẳng r sao cho $p \oplus r$ và $q \oplus r$ có các mở rộng tầm thường đồng dạng.

b) Mỗi phần tử của $K_0(A)$ đều có dạng $[p] - [I_n]$ với $p \in \bigcup_n P_n(A)$ và n nguyên; hơn nữa, với hai lũy đẳng p, q thì $[p] = [q]$ trong $K_0(A)$ khi và chỉ khi $p \oplus I_n$ và $q \oplus I_n$ có các mở rộng tầm thường đồng dạng với n nguyên nào đó.

Chứng minh.

a) Theo 2.2.2.3, ta có :

- $i_* : K_0(A) \rightarrow T(A)$ là toàn cấu nên mọi phần tử của $K_0(A)$ đều có dạng $[p] - [q]$. Điều kiện $p \oplus r \sim q \oplus r$ chính là điều kiện mà p và q xác định cùng một phần tử trong $T(A) = S(U(A))$.

- $i_* : K_0(A) \rightarrow T(A)$ là đơn cấu chính là điều kiện $[p] = [q]$ trong $K_0(A)$.

b) Nếu $p \in Q_n(A)$ là lũy đẳng thì $I_n - p$ cũng lũy đẳng. Thật vậy, với mỗi lớp $[p] - [q] \in K_0(A)$ với $q \in P_n(A)$ thì :

$$[p] - [q] = [p] - [q] + [q + I_n - q] - [I_n] = [p] + [I_n - q] - [I_n] = [p \oplus (I_n - q)] - [I_n]$$

vì $[p \oplus (I_n - q)]$ là lũy đẳng nên mỗi phần tử của $K_0(A)$ đều có dạng $[p] - [I_n]$ với p là lũy đẳng và n nguyên. Tương tự, nếu $p \oplus r \sim q \oplus r$ với $r \in P_n(A)$ thì :

$$p \oplus I_n \sim p \oplus r \oplus (I_n - r) \sim q \oplus r \oplus (I_n - r) \sim q \oplus I_n$$

❖

2.2.2.5. Nhóm $K_0(\mathbb{C})$

Với mỗi đại số A có đơn vị, ta có đồng cấu vị nhóm :

$$\begin{aligned} i : \mathbb{N} &\rightarrow K_0(A) \\ n &\mapsto [I_n] \end{aligned}$$

Theo tính chất phổ dụng của nhóm Grothendieck, i thác triển được thành đồng cấu nhóm $\tilde{i} : \mathbb{Z} \rightarrow K_0(A)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{s} & S(\mathbb{N}) = \mathbb{Z} \\ i \downarrow & \swarrow \tilde{i} & \\ & K_0(A) & \end{array}$$

Theo 2.2.2.4, đồng cấu này là đơn cấu. Đặc biệt hơn, trong trường hợp một chiều $A = \mathbb{C}$ thì $\tilde{i} : \mathbb{Z} \rightarrow K_0(\mathbb{C})$ còn là đẳng cấu. Thật vậy, nếu p là một ma trận vuông cấp n (phức) lũy đẳng thì p đồng dạng với một ma trận $I_k \oplus 0_{n-k}$ và do đó $[p] = [I_k]$. Theo 2.2.2.4, ta suy ra $\tilde{i} : \mathbb{Z} \rightarrow K_0(A)$ là toàn cấu. Vậy $\boxed{K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}}$.

2.2.2.6. Định lý mô tả $\tilde{K}_0(A)$

Phần tử $[p] - [I_n] \in K_0(A^+)$ thuộc vào $\tilde{K}_0(A)$ khi và chỉ khi $\text{rank } \pi(p) = n$.

Chứng minh.

Vì $\pi_* : K_0(A^+) \rightarrow K_0(\mathbb{C})$ được cảm sinh bởi $\pi : A^+ \rightarrow A^+/A \cong \mathbb{C}$ nên ảnh của $[p] - [I_n]$ chỉ là $[\pi(p)] - [I_n]$. Vì $\pi(p)$ đồng dạng với $I_k \oplus 0$ với $k = \text{rank } \pi(p)$ nên phải có $\text{rank } \pi(p) = n$. ❖

2.2.3. Mệnh đề (Tính khớp yếu của $\tilde{K}_0$) (xem [20, tr.158])

Giả sử A là một đại số Banach giao hoán (không nhất thiết có đơn vị) và I là một idêan đóng của A . Khi đó, dãy khớp $I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I$ cảm sinh một dãy khớp $\tilde{K}_0(I) \xrightarrow{i_*} \tilde{K}_0(A) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{K}_0(A/I)$.

Chứng minh. Ta cần chứng minh $\text{Im } i_* = \text{Ker } \pi_*$.

- Xét dãy khớp :

$$I^+ = I \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{i^+ = i \oplus \text{id}} A^+ = A \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{\pi^+ = \pi \oplus \text{id}} (A/I)^+ = A^+/I = (A \oplus \mathbb{C})/I$$

ta có dãy tương ứng :

$$K_0(I^+) = \tilde{K}_0(I) \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{i_*^+} K_0(A^+) = \tilde{K}_0(A) \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{\pi_*^+} K_0(A^+/I) = \tilde{K}_0(A/I) \oplus \mathbb{C}$$

vì $\mathbb{C}$ nhúng chính tắc vào A^+/I nên $\pi^+ \circ i^+$ chỉ là đồng cấu $I^+ \rightarrow I^+/I \cong \mathbb{C}$. Do đó, $\pi^+ \circ i^+$ cảm sinh cho ta một đồng cấu $\pi_*^+ \circ i_*^+ : K_0(I^+) \rightarrow K_0(\mathbb{C}) \cong \{0\} \oplus K_0(\mathbb{C})$. Suy ra $\pi_* \circ i_* = 0 : \tilde{K}_0(I) \rightarrow \{0\}$. Vậy $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } \pi_*$.

• Bây giờ, giả sử $c \in \text{Ker } \pi_*$, tức là $c \in \tilde{K}_0(A) \subset K_0(A^+)$ và $\pi_*(c) = 0$. Ta cần chứng minh $c \in \text{Im } i_*$, tức là c là ảnh của một phần tử nào đó trong $\tilde{K}_0(I)$.

Thật vậy, vì $c \in \tilde{K}_0(A) \subset K_0(A^+)$ nên theo 2.2.2.3 và 2.2.2.6 thì :

$$c = [p_1] - [I_k] \quad , \quad p_1 \in \bigcup_{n \geq 1} P_n(A^+) \quad , \quad \text{rank } \pi(p_1) = k$$

hơn nữa, $\pi_*(c) = [\pi(p_1)] - [I_k] = 0$ nên tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$\pi(p_1) \oplus I_n \sim I_k \oplus I_n = I_{k+n}$$

do đó nếu $p, q \in \bigcup_{n \geq 1} P_n(A^+)$ lần lượt là mở rộng tầm thường của $\pi(p_1) \oplus I_n$ và I_{k+n}

thì $c = [p] - [q]$ với $\pi(p) \sim \pi(q)$ hay :

$$\pi(q) = u[\pi(p)]u^{-1} \quad , \quad u \in \text{GL}_m(A^+/I)$$

theo 2.1.2.2, ta có thể giả sử $u \in \text{GL}_m^0(A^+/I)$ và :

$$\pi(q) \oplus 0 = (u \oplus u^{-1})[\pi(p) \oplus 0](u \oplus u^{-1})^{-1}$$

vì $u \in \text{GL}_m^0(A^+/I)$ nên theo 1.6.3, ta có :

$$u = \pi(v) \quad , \quad v \in \text{GL}_m^0(A^+)$$

do đó $[p] - [q] = [vpv^{-1}] - [q]$ và $\pi(vpv^{-1}) = u[\pi(p)]u^{-1} = \pi(q)$. Chú ý rằng, q là mở rộng tầm thường của I_{k+n} nên $q = I_{k+n} \oplus 0$ và $\text{rank } \pi(q) = k + n$. Hơn nữa :

$$(vpv^{-1})^2 = (vpv^{-1})(vpv^{-1}) = vp^2v^{-1} = vpv^{-1}$$

nên $vpv^{-1} \in P_m(I^+)$. Từ 2.2.2.6, ta suy ra $c = [p] - [q] \in \text{Im } i_*$. Vì $c \in \text{Ker } \pi_*$ là tùy ý nên $\text{Ker } \pi_* \subset \text{Im } i_*$. ❖

2.3. Liên hệ giữa các nhóm K_0 và K_1

Trong mục này, ta sẽ xây dựng một mối liên hệ mật thiết giữa K_0 và K_1 . Cụ thể là, với mỗi idêan I của đại số Banach A , ta đã có hai dãy khớp :

$$\tilde{K}_0(I) \xrightarrow{i_*} \tilde{K}_0(A) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{K}_0(A/I) \quad , \quad \tilde{K}_1(I) \xrightarrow{i_*} \tilde{K}_1(A) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{K}_1(A/I)$$

và bây giờ, ta sẽ tạo ra một đồng cấu, gọi là *đồng cấu nối*, $\delta_1 : \tilde{K}_1(A/I) \rightarrow \tilde{K}_0(I)$ nối hai dãy khớp trên thành một *dãy khớp 6-thành phần*.

2.3.1. Phương pháp

Mô tả : một phần tử $a \in \text{GL}_k(A/I)$ có thể được dùng để liên kết một lũy đẳng $I_k \oplus 0 \in \text{P}_n(I^+)$ thành một lũy đẳng $p \in \text{P}_n(I^+)$; rất tự nhiên, lớp của a được ánh xạ thành lớp $[p] - [I_k]$. Cụ thể, ta sẽ thực hiện hai bước như sau :

- Bước 1 : xây dựng $\delta_1 : \tilde{K}_1(A/I) \rightarrow \tilde{K}_0(I)$ khi A có đơn vị;
- Bước 2 : thác triển δ_1 trong trường hợp A không có đơn vị.

2.3.2. Xây dựng δ_1

2.3.2.1. Bước 1

• Trước tiên, gọi $\pi : A \rightarrow A/I$ là ánh xạ thương. Với $a \in \text{GL}_k(A/I)$ và $n > k$ nào đó (chẳng hạn $n = 2k$), ta có thể chọn $b \in \text{GL}_{n-k}(A/I)$ (chẳng hạn $b = a^{-1}$) sao cho $a \oplus b \in \text{GL}_n^0(A/I)$. Gọi $u \in \text{GL}_n^0(A)$ là nghịch ảnh của $a \oplus b \in \text{GL}_n^0(A/I)$. Ta đặt $q = I_k \oplus 0_{n-k}$ và $p = uqu^{-1}$. Khi đó $q^2 = q$ và :

$$p^2 = uq^2u^{-1} = uqu^{-1} = p$$

suy ra $p \in \text{P}_n(I^+)$. Mặt khác :

$$\pi(p) = (a \oplus b)(I_k \oplus 0_{n-k})(a \oplus b)^{-1} = a.I_k.a^{-1} \oplus b.0_{n-k}.b^{-1} = I_k \oplus 0_{n-k}$$

vậy $\text{rank } \pi(p) = k$. Từ 2.2.2.6, ta suy ra $[p] - [I_k] \in \tilde{K}_0(I)$.

• Tiếp theo, ta khẳng định rằng, lớp $[p] \in K_0(I^+)$ không bị thay đổi bởi việc chọn b và u mà chỉ phụ thuộc vào lớp của $a \in \text{GL}_k^0(A/I)$. Để chứng tỏ điều này, giả

sử $c \cdot \text{GL}_k^0(A/I) = a \cdot \text{GL}_k^0(A/I)$ và chọn $d \in \text{GL}_{n-k}(A/I)$, $v \in \text{GL}_n(A)$ sao cho $\pi(v) = c \oplus d \in \text{GL}_n^0(A/I)$; đặt $p_1 = vqv^{-1}$. Ta cần chứng minh :

$$[p_1] = [p] \in K_0(I^+) \Leftrightarrow uqu^{-1} \sim vqv^{-1}$$

thật vậy, ta có :

$$(c \oplus d)^{-1}(a \oplus b) = c^{-1}a \oplus d^{-1}b \in \text{GL}_n^0(A/I)$$

vì $c^{-1}a \in \text{GL}_k^0(A/I)$ nên $I_k \oplus d^{-1}b \in \text{GL}_n^0(A/I)$, do đó d và b có thể được thay thế bởi các mở rộng tầm thường $d \oplus I_k$ và $b \oplus I_k$ mà tương đương với nhau, tức là ta có thể giả sử rằng $d^{-1}b \in \text{GL}_{n-k}^0(A/I)$.

Bây giờ ta chọn các nghịch ảnh $g \in \text{GL}_k(A)$ và $h \in \text{GL}_{n-k}(A)$ tương ứng của $c^{-1}a$ và $d^{-1}b$. Đặt $w = g \oplus h \in \text{GL}_n(A)$. Khi đó :

$$\begin{aligned} \pi(vwu^{-1}) &= (c \oplus d)(c^{-1}a \oplus d^{-1}b)(a^{-1} \oplus b^{-1}) = I_n \\ &\Rightarrow vwu^{-1} \in \text{GL}_n(I^+) \end{aligned} \quad (1)$$

mặt khác :

$$p = uqu^{-1} = u(g^{-1} \oplus h^{-1})(I_k \oplus 0)(g \oplus h)u^{-1} = uw^{-1}quw^{-1}$$

suy ra :

$$q = wu^{-1}puw^{-1} \Rightarrow p_1 = vqv^{-1} = vwu^{-1}puw^{-1}v^{-1} = (vwu^{-1})p(vwu^{-1})^{-1} \quad (2)$$

từ (1) và (2) suy ra $uqu^{-1} \sim vqv^{-1}$ nên chúng xác định cùng một lớp trong $K_0(I^+)$.

Điều đó có nghĩa là $[p_1] = [p] \in K_0(I^+)$. Hơn nữa, nếu thay a bởi mở rộng tầm thường $a \oplus I_j$ thì khi thay p bởi $p \oplus I_j$ và I_k bởi I_{k+j} , lớp $[p] - [I_k]$ vẫn không thay đổi.

- Bây giờ, với mỗi $a \in \text{GL}_k(A/I)$, ta đặt $\delta(a) = [p] - [I_k]$. Rõ ràng :

$$\delta(a \oplus b) = \delta(a) + \delta(b)$$

theo 2.2.1.1, vì $ab \oplus I_{n-k} \sim a \oplus b$ nên $\delta(ab) = \delta(a) + \delta(b)$. Từ đó, bằng cách đặt

$\delta_1([a]) = \delta(a)$ ta xác định được một đồng cấu $\delta_1 : K_1(A/I) \rightarrow \tilde{K}_0(I)$.

2.3.2.2. Bước 2

Trong trường hợp A không có đơn vị, ta có :

$$(A/I)^+ = A^+/I \Rightarrow \tilde{K}_1(A/I) = K_1((A/I)^+) = K_1(A^+/I)$$

suy ra, đồng cấu $\delta_1 : \tilde{K}_1(A/I) \rightarrow \tilde{K}_0(I)$ chính là đồng cấu $\delta_1 : K_1(A^+/I) \rightarrow \tilde{K}_0(I)$ mà ta đã xây dựng ở bước 1.

2.3.3. Mệnh đề (xem [20, tr.160])

Nếu I là một idêan đóng của A thì dãy sau là khớp :

$$\tilde{K}_1(I) \xrightarrow{i_*} \tilde{K}_1(A) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{K}_1(A/I) \xrightarrow{\delta_1} \tilde{K}_0(I) \xrightarrow{i_*} \tilde{K}_0(A) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{K}_0(A/I)$$

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh $\text{Im } \pi_* = \text{Ker } \delta_1$ và $\text{Im } \delta_1 = \text{Ker } i_*$ là đủ.

- Tính khớp tại $\tilde{K}_0(I)$:

+ Với mỗi $a \in \text{GL}_k(A^+/I)$, theo cách xác định, ta có :

$$\delta_1([a]) = [p] - [I_k] \in \tilde{K}_0(I)$$

ở đó $p = uqu^{-1}$ với $u \in \text{GL}_n^0(A)$ và $q = I_k \oplus 0_{n-k}$. Khi đó $p \sim I_k \oplus 0_{n-k}$ trong $\text{Mat}_n(A^+)$. Theo 2.2.2.6, ta suy ra $[p] - [I_k] \in \text{Ker } i_*$. Do đó $\text{Im } \delta_1 \subset \text{Ker } i_*$.

+ Nếu $[p] - [I_k] \in \text{Ker } i_*$ thì $p \sim I_k \oplus 0_{n-k}$, nghĩa là $p = u(I_k \oplus 0_{n-k})u^{-1}$ với $u \in \text{GL}_n(A)$ nào đó. Theo 2.2.2.6, $[p] - [I_k] \in \tilde{K}_0(I)$ nên $\text{rank } \pi(p) = k$. Khi đó :

$$I_k \oplus 0 = \pi(u) \cdot (I_k \oplus 0) \cdot [\pi(u)]^{-1} \Rightarrow (I_k \oplus 0) \cdot \pi(u) = \pi(u) \cdot (I_k \oplus 0)$$

vậy $\pi(u)$ giao hoán với $I_k \oplus 0$. Do đó, $\pi(u)$ phải có dạng :

$$\pi(u) = a \oplus b, \quad a \in \text{GL}_k(A^+/I), b \in \text{GL}_{n-k}(A^+/I)$$

theo cách xây dựng δ_1 ta suy ra $[p] - [I_k] = \delta_1([a]) \in \text{Im } \delta_1$. Do đó $\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \delta_1$.

- Tính khớp tại $\tilde{K}_1(A/I)$:

+ Giả sử $[a] \in \text{Im } \pi_*$, tức là $a = \pi(v)$ với $v \in \text{GL}_k(A^+)$. Vì $\delta_1([a])$ không phụ thuộc vào $u \in \text{GL}_n^0(A)$ nên ta có thể chọn $u = v \oplus v^{-1}$. Khi đó, $\delta_1([a]) = [p] - [I_k]$ với $p = u(I_k \oplus 0_{n-k})u^{-1} = I_k \oplus 0_{n-k}$. Suy ra $\delta_1([a]) = 0$. Vậy $\text{Im } \pi_* \subset \text{Ker } \delta_1$.

+ Giả sử $[a] \in \text{Ker } \delta_1$, tức là $[a] \in \tilde{K}_0(A/I)$ và $\delta_1([a]) = [p] - [I_k] = 0$. Theo định nghĩa, ta có $p \sim q = I_k \oplus 0_{n-k}$, nghĩa là $p = vqv^{-1}$ với $v \in \text{GL}_n(I^+)$. Mà $p = uqu^{-1}$ nên $q = vu^{-1}quv^{-1}$ hay $uv^{-1}q = quv^{-1}$. Vì uv^{-1} giao hoán với q nên nó phải có dạng :

$$uv^{-1} = g \oplus h, \quad g \in \text{GL}_k(A^+), \quad h \in \text{GL}_{n-k}(A^+)$$

lưu ý rằng $\pi(v) = I_n$ nên $\pi(g) \oplus \pi(h) = \pi(uv^{-1}) = a \oplus b$. Suy ra a có nghịch ảnh là $g \in \text{GL}_k(A^+)$ hay $[a] \in \text{Im } i_*$. Vậy $\text{Ker } \delta_1 \subset \text{Im } \pi_*$. ❖

2.3.4. Mệnh đề

Tồn tại đẳng cấu $\alpha_* : \tilde{K}_1(A) \rightarrow \tilde{K}_0(SA)$.

Chứng minh.

Ánh xạ $f \mapsto f(1)$ là một toàn cấu từ CA vào A với hạt nhân là SA . Theo định lý Noether ta suy ra $A \cong CA/SA$. Áp dụng 2.3.3, ta có dãy khớp :

$$\tilde{K}_1(SA) \rightarrow \tilde{K}_1(CA) \rightarrow \tilde{K}_1(A) \xrightarrow{\delta_1} \tilde{K}_0(SA) \rightarrow \tilde{K}_0(CA) \rightarrow \tilde{K}_0(A)$$

nhưng CA là co rút được nên $\tilde{K}_0(CA) = \tilde{K}_1(CA) = 0$. Từ dãy khớp trên ta rút ra được dãy khớp $0 \rightarrow \tilde{K}_1(A) \xrightarrow{\delta_1} \tilde{K}_0(SA) \rightarrow 0$. Theo các kết quả cơ bản trong đại số thì dãy khớp này đồng nghĩa với δ_1 là đẳng cấu. Đó chính là đẳng cấu α_* cần tìm. ❖

2.4. Định lý tuần hoàn Bott

Trong mục này, ta sẽ chứng minh một định lý trung tâm của K -lý thuyết, *định lý tuần hoàn Bott*, trong trường hợp của đại số Banach. Trong cách đặt của ta, định lý này nói rằng $\tilde{K}_0(S^2 A) \cong \tilde{K}_0(A)$, ở đó $S^2 A = S(SA)$ là *treo thứ hai* của A ; và một cách tự nhiên, ta cũng có đẳng cấu tương tự $\tilde{K}_1(S^2 A) \cong \tilde{K}_1(A)$.

2.4.1. Phương pháp

Ta chứng minh trực tiếp $\tilde{K}_0(S^2 A) \cong \tilde{K}_0(A)$ bằng cách chỉ ra đẳng cấu $\beta_* : K_0(A) \rightarrow K_1(SA)$ khi A có đơn vị và đẳng cấu $\beta_* : \tilde{K}_0(A) \rightarrow \tilde{K}_1(SA)$ khi A không có đơn vị. Sau đó, áp dụng ánh xạ α_* trong 2.3.4 với A được thay bởi SA .

2.4.2. Trường hợp A có đơn vị

2.4.2.1. Các khái niệm bổ trợ

• Với mỗi đại số A không đơn vị, ta ký hiệu ΩA là đại số có đơn vị các ánh xạ liên tục f từ khoảng đơn vị $[0,1]$ vào A sao cho $f(0) = f(1)$. Chú ý rằng, khi đó SA là một idêan trong ΩA^+ gồm các ánh xạ với giá trị trong A và $(SA)^+$ là đại số con của ΩA^+ gồm các ánh xạ hằng modulo A .

• Khi A có đơn vị, ta sẽ gọi các phần tử của $GL_n(\Omega A)$ là các *khuyên*.

2.4.2.2. Xây dựng β_*

Cho A có đơn vị. Nếu $a \in Q_n(A)$ thì ánh xạ $t \mapsto e^{2\pi i t a}$ xác định một khuyên trong $GL_n(\Omega A)$ mà ta ký hiệu là $\beta(a)$. Chú ý rằng :

- $\beta(a+b) = \beta(a)\beta(b)$ nếu a, b là giao hoán;
- $\beta(uau^{-1}) = u\beta(a)u^{-1}$ với $u \in GL_n(A)$;
- $\beta(a \oplus 0) = \beta(a) \oplus I$.

vậy, β thỏa mãn 2.2.1.3 nên đặt $\beta_*([a]) = [\beta(a)] \in K_1(\Omega A)$ với $[a] \in K_0(A)$ thì suy ra $\beta_* : K_0(A) \rightarrow K_1(\Omega A)$ là một đồng cấu xác định hợp lý.

Ta sẽ chứng minh $\beta_* : K_0(A) \rightarrow K_1(\Omega A)$ là một đẳng cấu bằng cách xây dựng một *nhóm bổ trợ* G sao cho β_* phân tích thành $K_0(A) \xrightarrow{\varphi_*} G \xrightarrow{\psi_*} K_1(\Omega A)$ và sau đó chứng minh rằng φ_* và ψ_* đều là các đẳng cấu.

2.4.2.3. Xây dựng nhóm bổ trợ G

Nếu $p \in P_n(A) \subset Q_n(A)$ là một lũy đẳng thì :

$$\beta(p)(t) = e^{2\pi i t p} = 1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi i t)^n}{n!} \right) p = 1 + (e^{2\pi i t} - 1)p = 1 + p - zp$$

ở đó và trở về sau z ký hiệu là khuyên $z(t) = e^{2\pi i t}$. Do đó $\beta(p)$ là một khuyên tuyến tính theo z . Ta gọi khuyên như vậy là *khuyên tuyến tính*.

Nhóm G được xây dựng từ các khuyên tuyến tính như sau :

• Tổng trực tiếp $f \oplus g$ của hai khuyên tuyến tính f, g lại là một khuyên tuyến tính nên mở rộng tầm thường của khuyên tuyến tính là tuyến tính.

• Ta viết $f \sim g$ nếu các khuyên tuyến tính f, g có các mở rộng tầm thường được nối với nhau bởi một cung bao gồm các khuyên tuyến tính. Lớp tương đương của các khuyên tuyến tính dưới quan hệ này lập thành một nửa nhóm Abel với phép toán $\oplus$. Rất tự nhiên, ta đặt G là nhóm Grothendieck của nửa nhóm này.

Bây giờ ta xây dựng các đồng cấu φ_* và ψ_* như sau :

• Phép bao lồng ψ , ánh xạ mà xem một khuyên tuyến tính chỉ như là một phần tử của $GL_n(\Omega A)$, cảm sinh một đồng cấu $\psi_* : G \rightarrow K_1(\Omega A)$.

• Theo 2.2.1.3, ánh xạ φ biến mỗi lũy đẳng $p \in P_n(A)$ thành khuyên tuyến tính $(1-p) + zp$ cảm sinh một đồng cấu $\varphi_* : K_0(A) \rightarrow G$.

2.4.2.4. Bổ đề

Tồn tại đồng cấu $\lambda_* : G \rightarrow K_0(A)$ sao cho $\lambda_* \circ \varphi_* = Id_{K_0(A)}$ và $\psi_* = \psi_* \circ \varphi_* \circ \lambda_*$.

Chứng minh.

Giả sử g là một khuyên tuyến tính. Khi đó $g(0) = g(1)$ là một ma trận vô hướng và xác định một phép biến dạng về phần tử đơn vị. Suy ra g và $f = g(0)^{-1}g$ có cùng lớp trong G . Hơn nữa, $f(0) = f(1) = 1$.

Vì f tuyến tính nên $f = a + bz$ với $a, b \in \text{Mat}_n(A)$ và $a + b = f(1) = 1$. Suy ra f biến mọi giá trị của nó thành một đại số con giao hoán của $\text{Mat}_n(A)$ sinh bởi a . Chú ý rằng, $f(t)$ là hàm khả vi theo t và $f'(t) = 2\pi izb$. Ta đặt :

$$l(f)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^t f'(s) f(s)^{-1} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_0^t 2\pi izb(a + zb)^{-1} ds = \int_0^t zb(a + zb)^{-1} ds$$

khi đó $l(f)(0) = 0$ và $l(f)$ là hàm khả vi liên tục từ $[0, 1]$ vào A ; hơn nữa :

$$l(f)' = \frac{1}{2\pi i} f f^{-1}$$

do đó hàm $f^{-1} e^{2\pi i l(f)}$ có đạo hàm triệt tiêu và bằng 1 tại $t = 0$. Từ đó $f(t) = e^{2\pi i l(f)(t)}$.

Chú ý rằng mặc dù $l(f)(0) = 0$ nhưng có thể $l(f)(1) \neq 0$, do đó $l(f)$ có thể không nằm trong $\text{Mat}_n(\Omega A)$. Ta đặt $\lambda(g) = \lambda(f) = l(f)(1)$. Khi đó $f(1) = 1$ và $\lambda(g) \in Q_n(A)$. Rõ ràng $\lambda(g)$ liên tục theo g và $\lambda(g_1 \oplus g_2) = \lambda(g_1) + \lambda(g_2)$. Do đó λ xác định một đồng cấu $\lambda_* : G \rightarrow K_0(A)$.

Nếu p lũy đẳng thì $\varphi(p) = (1-p) + zp$ và $\varphi(p)^{-1} = (1-p) + z^{-1}p$. Do đó :

$$\lambda(\varphi(p)) = \int_0^1 zp[(1-p) + z^{-1}p] = \int_0^1 p = p$$

vì các lũy đẳng sinh ra $K_0(A)$ nên $\lambda_* \circ \varphi_* = 1$.

Nếu g là khuyên tuyến tính và $f = g(0)^{-1}g$ thì ta đặt $h(t) = l(f)(t) - t\lambda(g)$. Vì $\lambda(g) = l(f)(1)$ nên $h(0) = h(1) = 0$. Do đó $h \in \text{Mat}_n(\Omega A)$ và $k = e^{2\pi i h} \in GL_n^0(\Omega A)$. Hơn nữa, vì $g = g(0)ke^{2\pi i t\lambda(g)} = g(0)k\varphi \circ \lambda(g)$ nên g và $\varphi \circ \lambda(g)$ xác định cùng một lớp trong $K_1(\Omega A)$. Do đó $\psi_* = \psi_* \circ \varphi_* \circ \lambda_*$. ❖

2.4.2.5. Định nghĩa

Ta hiểu *khuyên đa thức* là một phần tử $f \in GL_n(\Omega A)$ có dạng $f = \sum_{j=0}^k z^j a_j$ với $z(t) = e^{2\pi i t}$ ở trên.

Chú ý rằng, nếu f, g là các khuyên đa thức thì $f \oplus g$ là một khuyên đa thức. Giống như trường hợp khuyên tuyến tính, lớp đồng luân của các khuyên đa thức lập thành một nửa nhóm Abel dưới phép toán $\oplus$, ở đó khuyên đa thức được đồng nhất với mở rộng tầm thường của chúng.

2.4.2.6. Bổ đề

Nhóm phổ dụng của nửa nhóm các lớp đồng luân của các khuyên đa thức đẳng cấu với $K_1(\Omega A)$ qua phép bao lồng.

Chứng minh. Ta có một kết quả cơ bản : các phần tử của ΩA với khai triển chuỗi Laurent $\sum_{j=-k}^k a_j z^j$ là trù mật trong ΩA .

Vì $GL_n^0(\Omega A)$ là mở trong $Mat_n(\Omega A)$ nên với mỗi khuyên $f \in GL_n(\Omega A)$, ta có thể tìm một khuyên :

$$g = \sum_{j=-k}^k z^j a_j \in GL_n(\Omega A)$$

tương đương với f modulo $GL_n^0(\Omega A)$. Với khuyên g như thế, ta có $z^k g$ là một khuyên đa thức, tức là $g = z^{-k} h$ với một khuyên đa thức h nào đó và k là số nguyên không âm. Vì z^{-k} là hàm ngược của khuyên đa thức z^k , $[h] \in K_1(\Omega A)$ với khuyên đa thức h tạo thành một nửa nhóm sinh ra $K_1(\Omega A)$.

Bây giờ giả sử hai khuyên đa thức f, g xác định cùng một lớp trong $K_1(\Omega A)$. Khi đó, bằng cách lấy mở rộng tầm thường, ta có thể giả sử f và g được nối với nhau bởi một cung trong $GL_n(\Omega A)$. Ta chọn các điểm :

$$f = f_0, \quad f_1, \quad \dots \quad f_n = g$$

trên cung đó sao cho chúng gần nhau và các đoạn thẳng nối f_i và f_{i+1} vẫn còn nằm trong $GL_n(\Omega A)$. Bây giờ, xấp xỉ f_i bởi khuyên Laurent g_i và nối chúng bởi các đoạn thẳng, ta có thể xây dựng được một cung tuyến tính tron từng khúc từ f đến g chứa toàn bộ các khuyên Laurent. Nếu ta nhân cung này với z^k với k đủ lớn, ta có một cung của các khuyên đa thức nối $z^k f$ với $z^k g$.

Vì $z^k f \oplus I$ và $f \oplus z^k$ được nối với nhau bởi một cung của các khuyên đa thức, và $z^k f \oplus I$ và $f \oplus z^k$ cũng vậy, nên $[f] = [g]$ trong $K_1(\Omega A)$ nếu và chỉ nếu $f \oplus h$ và $g \oplus h$ là đồng luân trong tập các khuyên đa thức với khuyên đa thức h nào đó. Vì đây là quan hệ ta phân tích bằng cách đi qua nhóm phổ dụng của nửa nhóm các lớp đồng luân của các khuyên đa thức nên định lý được chứng minh. ❖

2.4.2.7. Bổ đề

Ánh xạ $\psi_* : G \rightarrow K_1(\Omega A)$ là một đẳng cấu.

Chứng minh.

Ta sẽ dùng 2.4.2.6 để xây dựng hàm ngược μ_* của ψ_* .

Với khuyên đa thức $f = \sum_0^k z^j a_j \in \text{GL}_n(\Omega A)$ ta đặt $\mu_k(f)$ là ma trận vuông cấp $n(k+1)$ sau :

$$\mu_k(f) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ -zI_n & I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -zI_n & I_n \end{pmatrix}$$

Rõ ràng $\mu_k(f)$ là một khuyên tuyến tính. Hơn nữa, $\mu_k(f)$ tương đương với $f \oplus I_{nk}$ modulo $\text{GL}_{n(k+1)}^0(\Omega A)$. Thật ra, ta có thể xây dựng $f \oplus I_{nk}$ từ $\mu_k(f)$ bằng cách : cộng z lần cột thứ k vào cột $(k-1)$, sau đó cộng $-a_k$ lần hàng k vào hàng thứ nhất. Ở bước này ta có ma trận $b \oplus I_n$ ở đó :

$$b = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & za_k \\ -zI_n & I_n & \dots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -zI_n & & I_n \end{pmatrix}$$

lặp lại quá trình này và sau k bước ta có $f \oplus I_{nk}$. Theo 2.1.1.2, $\mu_k(f)$ và $f \oplus I_{nk}$ tương đương với nhau.

Bây giờ, vì $\mu_k(f)$ là một khuyên tuyến tính nên nó xác định một lớp trong G . Ta khẳng định rằng lớp này là không phụ thuộc vào k với $k \geq \deg(f)$. Thật vậy, nếu $a_k = 0$ thì :

$$\mu_k(f) = \begin{pmatrix} \mu_{k-1}(f) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & -zI_n & I_n \end{pmatrix}$$

được nối với $\mu_{k-1}(f) \oplus I_n$ bởi cung :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \mu_{k-1}(f) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & -tzI_n & I_n \end{pmatrix}$$

Từ đó suy ra nếu ta lấy $\tilde{\mu}(f)$ là một lớp trong G của $\mu_k(f)$ với $k \geq \deg(f)$, thì $\tilde{\mu}$ xác định hợp lý một ánh xạ từ tập các khuyên đa thức vào G . Rõ ràng, nếu f và g được nối với nhau bởi một cung của các khuyên đa thức thì với k đủ lớn, áp dụng điều này cho μ_k , ta tạo ra được một cung của các khuyên tuyến tính nối $\mu_k(f)$ và $\mu_k(g)$ và do đó, $\tilde{\mu}_k(f) = \tilde{\mu}_k(g)$. Rõ ràng, $\tilde{\mu}_k(f \oplus g) = \tilde{\mu}_k(f) \oplus \tilde{\mu}_k(g)$. Ta kết luận $\tilde{\mu}$ xác định một đồng cấu $\mu_* : K_1(\Omega A) \rightarrow G$.

Vì $f \oplus I_n$ và $\mu_k(f)$ với $k \geq \deg(f)$ được nối với nhau bởi một cung của các khuyên đa thức nên $\psi_* \circ \mu_* = 1$. Mặt khác, với khuyên tuyến tính $g = a + bz$ thì :

$$\mu_1(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ -z & I_n \end{pmatrix}$$

và :

$$g \oplus I_n = \begin{pmatrix} a + zb & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

được nối với nhau bởi một cung của các khuyên tuyến tính. Do đó $\mu_* \circ \psi_* = 1$. Định lý được chứng minh. $\diamond$

2.4.2.8. Mệnh đề

Đồng cấu $\beta^* : K_0(A) \rightarrow K_1(\Omega A)$ là một đẳng cấu.

Chứng minh. Trong phần trên, ta đã xây dựng nhóm hỗ trợ G và phân tích đồng cấu β_* thành $K_0(A) \xrightarrow{\varphi_*} G \xrightarrow{\psi_*} K_1(\Omega A)$; ở đó :

- Theo 2.4.2.4, tồn tại đồng cấu $\lambda_* : G \rightarrow K_0(A)$ sao cho :

$$\lambda_* \circ \varphi_* = Id_{K_0(A)} \quad , \quad \psi_* = \psi_* \circ \varphi_* \circ \lambda_*$$

- Theo 2.4.2.7, $\psi_* : G \rightarrow K_1(\Omega A)$ là đẳng cấu.

Vì ψ_* là một đẳng cấu nên từ $\psi_* = \psi_* \circ \varphi_* \circ \lambda_*$ suy ra $\varphi_* \circ \lambda_* = id_G$. Kết hợp với $\lambda_* \circ \varphi_* = id_{K_0(A)}$ ta suy ra φ_* là đẳng cấu. Từ đó $\beta_* = \psi_* \circ \varphi_*$ là đẳng cấu. $\diamond$

2.4.3. Mệnh đề (Trường hợp A không có đơn vị)

Với mỗi đại số không có đơn vị A , tồn tại đẳng cấu $\beta_* : \tilde{K}_0(A) \rightarrow \tilde{K}_1(SA)$.

Chứng minh. Nhắc lại rằng $K_0(A^+) \cong \tilde{K}_0(A) \oplus \tilde{K}_0(\mathbb{C})$ ở đó $\tilde{K}_0(A)$ bao gồm các lớp $[p] - [I_k]$ với $k = \text{rank } p$.

Xem $SA \triangleleft \Omega A^+$, ta có sự phân tích tương tự $K_1(\Omega A^+) \cong \tilde{K}_1(SA) \oplus \tilde{K}_1(C(T))$, ở đó T là đường tròn đơn vị. Thật vậy, với mỗi $f \in \text{GL}_n(\Omega A^+)$ có duy nhất sự phân tích $f = gh$ ở đó g là hằng modulo A và $h \in \text{GL}_n(C(T))$. Do đó, $\text{GL}_n(\Omega A^+)$ là tích của $\text{GL}_n((SA)^+)$ và $\text{GL}_n(C(T)) = \text{GL}_n(\Omega \mathbb{C})$. Do đó, ta có sự phân tích này.

Bây giờ, nếu $p = I_k$ thì $e^{2\pi i p} \in \text{GL}_n(C(T))$ và do đó β_* ánh xạ $\tilde{K}_0(\mathbb{C})$ vào $K_1(C(T))$. Tương tự, β_* ánh xạ $\tilde{K}_0(A)$ vào $K_1(SA)$. Vì $\beta_* : K_0(A^+) \rightarrow K_1(\Omega A^+)$ là một đẳng cấu nên hạn chế $\beta_* : \tilde{K}_0(A) \rightarrow \tilde{K}_1(SA)$ cũng là một đẳng cấu. $\diamond$

2.4.4. Định lý tuần hoàn Bott (Định lý trung tâm của K -lý thuyết)

Với mỗi đại số Banach A thì $\tilde{K}_0(A) \cong \tilde{K}_0(S^2 A)$ và $\tilde{K}_1(A) \cong \tilde{K}_1(S^2 A)$.

Chứng minh.

Theo 2.3.4 và 2.4.3, ta có các đẳng cấu $\tilde{K}_1(A) \xrightarrow{\alpha_*} \tilde{K}_0(SA)$ và $\tilde{K}_0(A) \xrightarrow{\beta_*} \tilde{K}_1(SA)$.

Thay A bởi SA trong các đẳng cấu này, ta có các đẳng cấu $\tilde{K}_1(SA) \xrightarrow{\alpha_*} \tilde{K}_0(S^2 A)$ và $\tilde{K}_0(SA) \xrightarrow{\beta_*} \tilde{K}_1(S^2 A)$. Từ đó $\tilde{K}_0(A) \xrightarrow{\alpha_* \circ \beta_*} \tilde{K}_0(S^2 A)$ và $\tilde{K}_1(A) \xrightarrow{\beta_* \circ \alpha_*} \tilde{K}_1(S^2 A)$. $\diamond$

Bây giờ ta đã tích lũy đầy đủ “vật liệu” để xây dựng *dãy khớp tuần hoàn 6-thành phần của K -lý thuyết đại số*.

2.4.5. Định lý (xem [24, tr.169])

Cho A là một đại số Banach giao hoán và I là một ideal đóng của A . Khi đó, tồn tại dãy khớp tuần hoàn 6-thành phần như sau :

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{K}_0(I) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{K}_0(A) & \xrightarrow{\pi_*} & \tilde{K}_0(A/I) \\
 \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 \\
 \tilde{K}_1(A/I) & \xleftarrow{\pi_*} & \tilde{K}_1(A) & \xleftarrow{i_*} & \tilde{K}_1(I)
 \end{array}$$

Chứng minh. Theo 2.3.3, ta có dãy khớp :

$$\tilde{K}_1(I) \xrightarrow{i_*} \tilde{K}_1(A) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{K}_1(A/I) \xrightarrow{\delta_1} \tilde{K}_0(I) \xrightarrow{i_*} \tilde{K}_0(A) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{K}_0(A/I)$$

do đó ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại của đồng cấu nối $\delta_0 : \tilde{K}_0(A/I) \rightarrow \tilde{K}_1(I)$ để biểu đồ giao hoán là xong. Trước hết, từ 2.3.4 và 2.4.3, ta có các đẳng cấu $\tilde{K}_1(A) \stackrel{\alpha_*}{\cong} \tilde{K}_0(SA)$ và $\tilde{K}_0(A) \stackrel{\beta_*}{\cong} \tilde{K}_1(SA)$. Phép chứng minh của ta trải qua bốn bước :

- Vì $SA/SI \cong S(A/I)$ nên từ 2.3.3, ta lập được thêm dãy khớp :

$$\tilde{K}_1(SI) \xrightarrow{i_*} \tilde{K}_1(SA) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{K}_1(SA/SI) \xrightarrow{\delta_1} \tilde{K}_0(SI) \xrightarrow{i_*} \tilde{K}_0(SA) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{K}_0(SA/SI)$$

- Xếp hai dãy khớp này lại với nhau như sau :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \tilde{K}_0(SI) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{K}_0(SA) & \xrightarrow{\pi_*} & \tilde{K}_0(SA/SI) \\ & \delta_1 \uparrow & & & & & \\ & & \tilde{K}_1(I) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{K}_1(A) & \xrightarrow{\pi_*} & \tilde{K}_1(A/I) \\ & & & & & & \downarrow \delta_1 \\ & & \tilde{K}_0(A/I) & \xleftarrow{\pi_*} & \tilde{K}_0(A) & \xleftarrow{i_*} & \tilde{K}_0(I) \\ & & & & & & \\ & & \tilde{K}_1(SA/SI) & \xleftarrow{\pi_*} & \tilde{K}_1(SA) & \xleftarrow{i_*} & \tilde{K}_1(SI) \end{array}$$

- Dùng α_* và β_* “co rút” dãy khớp bên ngoài về dãy khớp bên trong :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \tilde{K}_0(SI) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{K}_0(SA) & \xrightarrow{\pi_*} & \tilde{K}_0(SA/SI) \\ & \delta_1 \uparrow & \swarrow \alpha_*^{-1} & & \downarrow \alpha_*^{-1} & & \downarrow \alpha_*^{-1} \\ & & \tilde{K}_1(I) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{K}_1(A) & \xrightarrow{\pi_*} & \tilde{K}_1(A/I) \\ & & \uparrow \delta_0 & & & & \downarrow \delta_1 \\ & & \tilde{K}_0(A/I) & \xleftarrow{\pi_*} & \tilde{K}_0(A) & \xleftarrow{i_*} & \tilde{K}_0(I) \\ & & \nwarrow \beta_*^{-1} & & \uparrow \beta_*^{-1} & & \uparrow \beta_*^{-1} \\ & & \tilde{K}_1(SA/SI) & \xleftarrow{\pi_*} & \tilde{K}_1(SA) & \xleftarrow{i_*} & \tilde{K}_1(SI) \end{array}$$

- Cuối cùng, đặt $\delta_0 = \alpha_*^{-1} \circ \delta_1 \circ \beta_*$. Vì bên ngoài là dãy khớp tuần hoàn nên “phép co rút” cho ta dãy khớp tuần hoàn 6–thành phần cần tìm. $\diamond$

Chương 3

MỘT VÀI ỨNG DỤNG

Trong chương này, chúng tôi sẽ vận dụng các chất trong chương 2 để áp dụng tính toán với một số ví dụ cụ thể. Chúng tôi không có tham vọng trình bày nhiều mà đôi lúc chỉ lướt qua về C^ -đại số. Về các áp dụng xa hơn, độc giả có thể tham khảo thêm trong các tài liệu [5], [8], [11], [12], [14], [18], [20], [21], [24].*

3.1. Các nhóm K_n với $n \geq 2$

Trong chương 2, ta đã xét các nhóm K_0 và K_1 của một đại số Banach. Bây giờ, ta sẽ xét đến các nhóm K_n với $n \geq 2$.

3.1.1. Nhóm K_n với $n \geq 2$

3.1.1.1. Định nghĩa

Với mỗi đại số Banach A và mỗi số nguyên $n \geq 2$, ta định nghĩa :

$$K_n(A) := K_{n-1}(SA)$$

3.1.1.2. Mệnh đề

Cho A là một đại số Banach. Khi đó, với mỗi số nguyên $n \geq 0$ ta có :

$$K_{n+2}(A) \cong K_n(A)$$

Chứng minh.

- Trường hợp $n = 0$, mệnh đề đúng theo định lý tuần hoàn Bott.
- Trường hợp $n > 0$, mệnh đề được suy ra từ phép quy nạp :

$$K_{n+2}(A) = K_{n+1}(SA) = K_n(S^2A) \cong K_n(A)$$

❖

3.1.1.3. Nhận xét

Từ mệnh đề trên, ta suy ra chỉ cần xét các nhóm K_0 và K_1 là đủ.

3.1.2. Vài ứng dụng

3.1.2.1. Mệnh đề

Với mỗi số tự nhiên n , ta có :

$$K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , \quad n = 2k \\ 0 & , \quad n = 2k+1 \end{cases}, \quad K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k \\ \mathbb{Z} & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Chứng minh.

Trước tiên, ta có 2 nhận xét :

- Với các không gian compact địa phương, Hausdorff X, Y , ta có *luật mũ* :

$$C_0(X \times Y, Z) \cong C_0(X, C_0(Y, Z))$$

- Từ định nghĩa 1.5.3.1, ta lại có $S\mathbb{C} = C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = C_0(\mathbb{R})$.

Bây giờ, áp dụng hai điều trên, ta có :

$$S^2\mathbb{C} = S(S\mathbb{C}) \cong C_0(\mathbb{R}, S\mathbb{C}) = C_0(\mathbb{R}, C_0(\mathbb{R})) \cong C_0(\mathbb{R}^2)$$

và tổng quát là $S^n\mathbb{C} \cong C_0(\mathbb{R}^n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó :

$$K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong K_0(S^n\mathbb{C}) = K_n(\mathbb{C}) = \begin{cases} K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z} & , \quad n = 2k \\ K_1(\mathbb{C}) = 0 & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$$K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong K_1(S^n\mathbb{C}) = K_0(S^{n+1}\mathbb{C}) = K_{n+1}(\mathbb{C}) = \begin{cases} K_1(\mathbb{C}) = 0 & , \quad n = 2k \\ K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z} & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

❖

3.1.2.2. Mệnh đề

Với mỗi số tự nhiên n , ta có :

$$K_0(C(S^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & , \quad n = 2k \\ \mathbb{Z} & , \quad n = 2k+1 \end{cases}, \quad K_1(C(S^n)) = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k \\ \mathbb{Z} & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

ở đó S^n là mặt cầu đơn vị trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$.

Chứng minh.

Trong Tôpô đại cương, ta biết rằng, compact hóa một điểm của $\mathbb{R}^n$ là S^n , tức là $S^n \approx (\mathbb{R}^n)^+$. Do đó :

$$C(S^n) \cong C((\mathbb{R}^n)^+) \cong (C_0(\mathbb{R}^n))^+$$

Mặt khác, với mỗi đại số Banach A thì :

$$K_0(A^+) \cong K_0(A) \oplus K_0(\mathbb{C}) = K_0(A) \oplus \mathbb{Z} \quad , \quad K_1(A^+) \cong K_1(A)$$

Kết hợp với 3.1.2.1, ta suy ra :

$$K_0(C(S^n)) \cong K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) \oplus \mathbb{Z} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & , \quad n = 2k \\ \mathbb{Z} & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$$K_1(C(S^n)) \cong K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k \\ \mathbb{Z} & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

❖

3.1.2.3. Ví dụ (xem [24, tr.135])

Cho $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert tách được, vô hạn chiều. Ký hiệu $\mathbf{IB}$ và $\mathbf{IK}$ lần lượt là đại số các toán tử tuyến tính bị chặn và compact trên $\mathcal{H}$. Rõ ràng là $\mathbf{IK} \triangleleft \mathbf{IB}$. Khi đó, $\mathbf{IB}$, $\mathbf{IK}$ và từ đó là $\mathbf{IB}/\mathbf{IK}$ trở thành các đại số Banach với chuẩn :

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \max \{ \|f(x)\| : x \in \mathcal{H} \} \quad , \quad f \in \mathbf{IB}, \mathbf{IK}$$

đại số $\mathbf{IB}/\mathbf{IK}$, gọi là *đại số Calkin*, có vai trò quan trọng trong lý thuyết C^* -đại số. Ở đây, ta sẽ vận dụng dãy khớp tuần hoàn để tính các nhóm $K_0(\mathbf{IB}/\mathbf{IK})$ và $K_1(\mathbf{IB}/\mathbf{IK})$.

Trước tiên, bằng những tính toán (xem phụ lục), ta có các kết quả :

$$K_0(\mathbf{IB}) = K_1(\mathbf{IB}) = 0 \quad , \quad K_0(\mathbf{IK}) = \mathbb{Z} \quad , \quad K_1(\mathbf{IK}) = 0$$

Bây giờ, dãy khớp ngắn $0 \rightarrow \mathbf{IK} \xrightarrow{i} \mathbf{IB} \xrightarrow{\pi} \mathbf{IB}/\mathbf{IK} \rightarrow 0$ cảm sinh dãy khớp tuần hoàn 6-thành phần như sau :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathbf{IK}) & \xrightarrow{K_0(i)} & K_0(\mathbf{IB}) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(\mathbf{IB}/\mathbf{IK}) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(\mathbf{IB}/\mathbf{IK}) & \xleftarrow{K_1(\pi)} & K_1(\mathbf{IB}) & \xleftarrow{K_1(i)} & K_1(\mathbf{IK}) \end{array}$$

áp dụng kết quả trên, dãy khớp tuần hoàn trở thành :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{K_0(i)} & 0 & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(\mathbf{IB}/\mathbf{IK}) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(\mathbf{IB}/\mathbf{IK}) & \xleftarrow{K_1(\pi)} & 0 & \xleftarrow{K_1(i)} & 0 \end{array}$$

theo các kết quả cơ bản trong đại số, các dãy khớp :

$$0 \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(\mathbb{B}/\mathbb{K}) \xrightarrow{\delta_0} 0 \xrightarrow{K_1(i)} 0$$

$$0 \xrightarrow{K_1(\pi)} K_1(\mathbb{B}/\mathbb{K}) \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{K_0(i)} 0$$

đồng nghĩa với δ_0 và δ_1 đều là đẳng cấu, tức là :

$$K_0(\mathbb{B}/\mathbb{K}) \cong 0 \quad , \quad K_1(\mathbb{B}/\mathbb{K}) \cong \mathbb{Z}$$

❖

3.1.3. Nhận xét

Trên đây chỉ là một vài mệnh đề và ví dụ áp dụng cơ bản nhất của phương pháp K -hàm tử. Dưới đây là một kết quả khá thú vị nêu rõ đặc trưng của các hàm tử K -lý thuyết.

3.1.3.1. Định nghĩa

Cho hàm tử $F : \mathcal{C}^* - \text{alg} \rightarrow \mathcal{A}$, ở đó $\mathcal{C}^* - \text{alg}$ là phạm trù các C^* -đại số.

- F được gọi là *liên tục* nếu với mọi hệ quy nạp $\{A_n, \varphi_n\}$ các C^* -đại số mà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \quad \text{thì} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(A_n) \cong F(A).$$

- Giả sử F bảo toàn vật không, tức là $F(0) = 0$. Ta bảo F là *hàm tử khớp* (tương ứng, *nửa khớp*) nếu mọi dãy khớp ngắn các C^* -đại số :

$$0 \rightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \rightarrow 0$$

thì dãy các nhóm Abel cảm sinh :

$$0 \rightarrow F(I) \xrightarrow{F(\varphi)} F(A) \xrightarrow{F(\psi)} F(B) \rightarrow 0$$

là khớp (tương ứng, nửa khớp) tại $F(A)$. Đặc biệt hơn, F được gọi là *hàm tử khớp chẻ* nếu dãy các C^* -đại số là dãy khớp chẻ thì dãy các nhóm Abel cảm sinh cũng là dãy khớp chẻ.

- F được gọi là *bất biến đồng luân* nếu A và B là các C^* -đại số tương đương đồng luân thì các nhóm Abel $F(A)$ và $F(B)$ là đẳng cấu.

- F được gọi là *ổn định* nếu với mọi C^* -đại số A và mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $F(A) \cong F(A \otimes \mathbb{K})$.

3.1.3.2. Định lý Cuntz (xem [8, tr.30])

Nếu hàm tử $F: \mathcal{C}^* - \text{alg} \rightarrow \mathcal{A}$ liên tục, nửa khớp, bất biến đồng luân và ổn định thì F chính là K_0 hoặc K_1 . Cụ thể là :

- Nếu $F(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ và $F(S\mathbb{C}) = 0$ thì $F = K_0$;
- Ngược lại, nếu $F(\mathbb{C}) = 0$ và $F(S\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ thì $F = K_1$.

3.2. Chỉ số của đại số Banach

Trong mục này, ta sẽ nêu ra ý nghĩa của cặp đồng cấu nối trong dãy khớp tuần hoàn 6–thành phần của K –lý thuyết và xét một ví dụ tính toán cụ thể.

3.2.1. Chỉ số của đại số Banach

3.2.1.1. Định nghĩa (xem [5] hoặc [11])

Cho A là một đại số Banach. Khi đó, dãy khớp ngắn các đại số Banach :

$$0 \rightarrow J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 0$$

cảm sinh cho ta một dãy khớp tuần hoàn 6–thành phần như đã đề cập đến trong 2.4.5. Cặp đồng cấu nối $\gamma = (\delta_0, \delta_1)$ trong dãy khớp tuần hoàn 6–thành phần đó được gọi là *chỉ số của đại số Banach* A liên kết với dãy khớp (hay *mở rộng*) trên và được ký hiệu là $\text{Index } A$.

3.2.1.2. Nhận xét

- Thật ra, người ta thường nhắc tới *chỉ số của C^* –đại số* hơn là *chỉ số của đại số Banach*. Tuy nhiên, vì mỗi một C^* –đại số trước hết phải là một đại số Banach và do khuôn khổ bản luận văn, chúng ta sẽ dùng thuật ngữ *chỉ số của đại số Banach*.

- Chỉ số giữ một vai trò quan trọng trong việc xác định kiểu ổn định của các C^* –đại số mà ta cần mô tả.

3.2.2. Bổ túc

Phần này, chúng tôi trình bày sơ lược một số vấn đề mở rộng nhằm phục vụ cho việc tính toán. Độc giả có thể tham khảo thêm trong [5], [10], [11] và [21].

3.2.2.1. Tích tenxơ ngoài

Cho A, B là các đại số Banach và $i, j \in \{0, 1\}$. Khi đó, các dãy khớp tuần hoàn 6–thành phần cảm sinh từ hai dãy khớp ngắn và chẻ :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow A \otimes B \rightarrow \tilde{A} \otimes B \rightarrow B \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \tilde{A} \otimes B \rightarrow \tilde{A} \otimes \tilde{B} \xrightarrow{\sigma} \widetilde{A \otimes B} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cảm sinh cho ta đẳng cấu :

$$K_i(A \otimes B) \cong \text{Ker } \sigma_* \triangleleft K_i(\tilde{A} \otimes \tilde{B})$$

do đó, ta chỉ cần xét trường hợp A, B đều có đơn vị.

Với mỗi $[u] \in K_i(A)$ và $[v] \in K_j(B)$, ta sẽ xác định một phần tử trong $K_{i+j}(A \otimes B)$, ký hiệu là $[u] \boxtimes [v]$, gọi là tích *tenxơ ngoài của* $[u]$ và $[v]$; tương ứng $\boxtimes: K_i(A) \times K_j(B) \rightarrow K_{i+j}(A \otimes B)$ gọi là phép toán *tích tenxơ ngoài*. Cụ thể là :

$$[u] \boxtimes [v] := \begin{cases} [u \otimes v] & , \quad i = j = 0 \\ s_1^{-1}(s_i([u]) \boxtimes [v]) & , \quad i = 1, j = 0 \\ (s_1 \circ s_0)^{-1}(s_1([u]) \boxtimes s_1([v])) & , \quad i = j = 1 \end{cases}$$

ở đó, $s_0: K_0(A) \rightarrow K_1(SA)$ và $s_1: K_1(SA) \rightarrow K_0(A)$ là các đẳng cấu nối trong dãy khớp tuần hoàn 6–thành phần cảm sinh từ dãy khớp :

$$0 \rightarrow SA \rightarrow CA \rightarrow A \rightarrow 0$$

3.2.2.2. Định lý tuần hoàn Bott

Như đã đề cập trong Chương 2, với mỗi đại số Banach A có đơn vị, ta có các đẳng cấu Bott như sau :

$$K_0(A) \cong K_0(S^2 A) \quad , \quad K_1(A) \cong K_1(S^2 A)$$

Các đẳng cấu này có dạng khác như sau :

$$\begin{aligned} K_j(A) &\cong K_{j+1}(A \otimes C_0(\mathbb{R})) \\ K_j(A) &\cong K_j(A \otimes C_0(\mathbb{R}^2)) \cong K_j(A \otimes C_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})) \end{aligned}$$

ở đó $j = 0, 1$ còn $j+1$ là phép cộng modulo 2.

3.2.2.3. Định lý (Liên hệ giữa K -lý thuyết tôpô và K -lý thuyết đại số)

- Nếu X là không gian tôpô compact, Hausdorff thì :

$$K_0(C(X)) \cong K^0(X) \quad , \quad K_1(C(X)) \cong K^1(X)$$

- Nếu X là không gian tôpô compact địa phương, Hausdorff thì :

$$K_0(C_0(X)) \cong K^0(X) \quad , \quad K_1(C_0(X)) \cong K^1(X)$$

3.2.3. Đặt bài toán (xem [5], [11], [22], [23])

Xét các đa tạp sau :

$$V = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\} \approx \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^*$$

$$V_1 = \{(t, x, y, z) \in V : z \neq 0\} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^* \subset V$$

$$W_1 = V \setminus V_1 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2)^* \subset V$$

với phép bao lồng $i: C_0(V_1) \rightarrow C_0(V)$ và phép hạn chế $\pi: C_0(V) \rightarrow C_0(W_1)$ như sau :

$$i(f)(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in V_1 \\ 0 & , \quad x \in V \setminus V_1 \end{cases} \quad , \quad f \in C_0(V_1)$$

$$\pi(f) = f|_{W_1} \quad , \quad f \in C_0(V)$$

thì dãy sau đây là dãy khớp các đại số Banach :

$$0 \rightarrow C_0(V_1) \xrightarrow{i} C_0(V) \xrightarrow{\pi} C_0(W_1) \rightarrow 0 \quad (*)$$

❗ Hãy tính Index $C_0(V)$ liên kết với mở rộng $(*)$.

3.2.4. Nhận xét

i. Từ định lý tuần hoàn Bott và [10, tr.51] thì $K_0(C_0(\mathbb{R}^2)) \cong K_0(C_0(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$ được sinh bởi phần tử Bott $[b]$.

ii. Xét hàm $u: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ và các hàm hạn chế của nó xác định bởi :

$$\begin{cases} u(t) = e^{\frac{2\pi it}{\sqrt{1+t^2}}} & , \quad t \in \mathbb{R} \\ u_{\pm} = u|_{\mathbb{R}_{\pm}} \end{cases}$$

vì lớp đồng luân của $u_{\pm}$ tương ứng là phần tử sinh chính tắc của $K^1(\mathbb{R}_{\pm}) = \mathbb{Z}$ nên

$K_1(C_0(\mathbb{R}_{\pm})) \cong K^1(\mathbb{R}_{\pm}) = \mathbb{Z}$ được sinh bởi $u_{\pm}$; còn $K_0(C_0(\mathbb{R}_{\pm})) \cong K^0(\mathbb{R}_{\pm}) = 0$.

iii. Cũng từ định lý tuần hoàn Bott và [10, tr.51] thì $[b] \boxtimes [u_{\pm}]$ tương ứng là phần tử sinh của $K_1(C_0(\mathbb{R}^2) \otimes C_0(\mathbb{R}_{\pm}))$.

iv. Lớp đồng luân của hàm hằng $1: S^1 \rightarrow S^1$ là phần tử sinh chính tắc của $K_0(C(S^1)) = \mathbb{Z}$; còn lớp đồng luân của hàm đồng nhất $id: S^1 \rightarrow S^1$ là phần tử sinh chính tắc của $K_1(C(S^1)) = \mathbb{Z}$.

3.2.5. Bổ đề

Ký hiệu $J = C_0(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*)$ và $A = C_0((\mathbb{R}^2)^*)$. Khi đó, ta có :

- i. $K_0(J) = 0$; $K_1(J) = \mathbb{Z}^2$ được sinh bởi hai phần tử $[b] \boxtimes [u_{\pm}]$.
- ii. $K_0(C_0(\mathbb{R}^3)^*) = 0$; $K_1(C_0(\mathbb{R}^3)^*) = \mathbb{Z}^2$.
- iii. $K_0(A) = \mathbb{Z}$ được sinh bởi phần tử $[id] \boxtimes [u_+]$; $K_1(A) = \mathbb{Z}$ được sinh bởi phần tử $[1] \boxtimes [u_+]$.

Chứng minh.

- i. Vì $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^* = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+) \cup (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-)$ nên :

$$J = C_0(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*) \cong [C_0(\mathbb{R}^2) \otimes C_0(\mathbb{R}_+)] \oplus [C_0(\mathbb{R}^2) \otimes C_0(\mathbb{R}_-)]$$

do đó :

$$K_n(J) \cong K_n[C_0(\mathbb{R}^2) \otimes C_0(\mathbb{R}_+)] \oplus K_n[C_0(\mathbb{R}^2) \otimes C_0(\mathbb{R}_-)] \quad , \quad n = 0, 1$$

- Với $n = 0$: từ định lý tuần hoàn Bott và 3.2.4.ii, ta có :

$$K_0(J) \cong K_0(C_0(\mathbb{R}_+)) \oplus K_0(C_0(\mathbb{R}_-)) = 0$$

- Với $n = 1$: từ định lý tuần hoàn Bott và 3.2.4.ii, ta có :

$$K_1(J) \cong K_1(C_0(\mathbb{R}_+)) \oplus K_1(C_0(\mathbb{R}_-)) \cong \mathbb{Z}^2$$

và theo 3.2.4.iii thì nó được sinh bởi hai phần tử $[b] \boxtimes [u_{\pm}]$.

- ii. Xét dãy khớp chẵn $0 \rightarrow C_0((\mathbb{R}^3)^*) \xrightarrow{\sigma} C_0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\eta} \mathbb{C} \rightarrow 0$; ở đó, η là phép hạn chế $C_0(\mathbb{R}^3)$ lên $C_0(\{0\}) \cong \mathbb{C}$, còn σ là phép nhúng mà mỗi hàm trên

$(\mathbb{R}^3)^*$ được mở rộng thành hàm trên $\mathbb{R}^3$ mà triệt tiêu tại 0 và vô cùng. Dãy khớp này cảm sinh dãy khớp tuần hoàn 6–thành phần như sau :

$$\begin{array}{ccccc} K_0\left(C_0\left((\mathbb{R}^3)^*\right)\right) & \xrightarrow{K_0(\sigma)} & K_0\left(C_0\left(\mathbb{R}^3\right)\right) & \xrightarrow{K_0(\eta)} & K_0(\mathbb{C}) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(\mathbb{C}) & \xleftarrow{K_1(\eta)} & K_1\left(C_0\left(\mathbb{R}^3\right)\right) & \xleftarrow{K_1(\sigma)} & K_1\left(C_0\left((\mathbb{R}^3)^*\right)\right) \end{array}$$

với $K_0\left(C_0\left(\mathbb{R}^3\right)\right) = 0$ và $K_1\left(C_0\left(\mathbb{R}^3\right)\right) = \mathbb{Z}$ thì dãy khớp tuần hoàn trên trở thành :

$$\begin{array}{ccccc} K_0\left(C_0\left((\mathbb{R}^3)^*\right)\right) & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} \\ \delta_1 = 0 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ 0 & \xleftarrow{0} & \mathbb{Z} & \xleftarrow{K_1(\sigma)} & K_1\left(C_0\left((\mathbb{R}^3)^*\right)\right) \end{array}$$

áp dụng các kiến thức cơ bản về đại số, ta có :

- Dãy khớp $0 \xrightarrow{\delta_1} K_0\left(C_0\left((\mathbb{R}^3)^*\right)\right) \xrightarrow{0} 0$ cho ta :

$$K_0\left(C_0\left((\mathbb{R}^3)^*\right)\right) = \text{Ker } 0 = \text{Im } \delta_1 = 0$$

- Dãy khớp chẻ $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta_0} K_1\left(C_0\left((\mathbb{R}^3)^*\right)\right) \xrightarrow{K_1(\sigma)} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ cho ta :

$$K_1\left(C_0\left((\mathbb{R}^3)^*\right)\right) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2$$

iii. Vì $(\mathbb{R}^2)^* \cong S^1 \times \mathbb{R}_+$ nên $A \cong C_0(S^1) \otimes C_0(\mathbb{R}_+)$. Kết hợp với định lý tuần hoàn Bott và 3.2.4.iv, ta suy ra :

$$K_0(A) \cong K_0\left(C_0(S^1) \otimes C_0(\mathbb{R}_+)\right) \cong K_1\left(C_0(S^1)\right) = \mathbb{Z}$$

được sinh bởi phần tử $[id] \boxtimes [u_+]$; và :

$$K_1(A) \cong K_1\left(C_0(S^1) \otimes C_0(\mathbb{R}_+)\right) \cong K_0\left(C_0(S^1)\right) = \mathbb{Z}$$

được sinh bởi phần tử $[1] \boxtimes [u_+]$.

❖

3.2.6. Bổ đề

- i. $K_0(C_0(V)) = \mathbb{Z}^2$ và $K_1(C_0(V)) = 0$.
- ii. $K_0(C_0(V_1)) = \mathbb{Z}^2$ được sinh bởi hai phần tử $[b] \boxtimes [u_+]$; còn $K_1(C_0(V_1)) = 0$.
- iii. $K_0(C_0(W_1)) = \mathbb{Z}$ được sinh bởi phần tử $[1] \boxtimes [u_+]$; $K_1(C_0(W_1)) = \mathbb{Z}$ được sinh bởi phần tử $[id] \boxtimes [u_+]$.

Chứng minh.

- i. Ta có :

$$C_0(V) = C_0(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^*) \cong C_0((\mathbb{R}^3)^*) \otimes C_0(\mathbb{R})$$

kết hợp với định lý tuần hoàn Bott và 3.2.5.ii, ta suy ra :

$$K_0(C_0(V)) \cong K_1(C_0((\mathbb{R}^3)^*)) = \mathbb{Z}^2, \quad K_1(C_0(V)) \cong K_0(C_0((\mathbb{R}^3)^*)) = 0$$

- ii. Ta lại có :

$$C_0(V_1) \cong C_0(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*) \otimes C_0(\mathbb{R}) = J \otimes C_0(\mathbb{R})$$

kết hợp với định lý tuần hoàn Bott và 3.2.4.i, ta suy ra $K_0(C_0(V_1)) \cong K_1(J) = \mathbb{Z}^2$ được sinh bởi hai phần tử $[b] \boxtimes [u_+]$ và $[b] \boxtimes [u_-]$; còn $K_1(C_0(V_1)) \cong K_0(J) = 0$.

- iii. Tương tự :

$$C_0(W_1) \cong C_0((\mathbb{R}^2)^*) \otimes C_0(\mathbb{R}) = A \otimes C_0(\mathbb{R})$$

kết hợp với định lý tuần hoàn Bott và 3.2.4.iii, ta suy ra $K_0(C_0(W_1)) \cong K_1(A) = \mathbb{Z}$ được sinh bởi phần tử $[1] \boxtimes [u_+]$; còn $K_1(C_0(W_1)) \cong K_0(A) = \mathbb{Z}$ được sinh bởi phần tử $[id] \boxtimes [u_+]$. ❖

3.2.7. Bổ đề

Giả sử $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : (\mathbb{R}^2)^* \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ là hàm hằng trên $(\mathbb{R}^2)^*$ nhận giá trị là ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; và $p : (\mathbb{R}^2)^* \cong S^1 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ là hàm xác định bởi :

$$p(e^{i\varphi}, r) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos \pi r & e^{i\varphi} \sin \pi r \\ e^{-i\varphi} \sin \pi r & 1 + \cos \pi r \end{pmatrix}, \quad (e^{i\varphi}, r) \in S^1 \times \mathbb{R}_+$$

khi đó :

- i. Với mỗi $(e^{i\varphi}, r) \in S^1 \times \mathbb{R}_+$ thì $p(e^{i\varphi}, r)$ là một ma trận lũy đẳng hạng 1.
- ii. Hiệu $[p] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$ của các lớp của p và $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ trong $K_0(\tilde{A})$ chính là

phần tử sinh $[id] \boxtimes [u_+]$ của $K_0(A) = \mathbb{Z}$.

Chứng minh.

- i. Thu được bằng tính toán trực tiếp.
- ii. Cũng thu được nhờ tính toán trực tiếp và áp dụng [10, tr.51]. ❖

3.2.8. Nhận xét

- Mặc dù $[p] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = [id] \boxtimes [u_+]$ nhưng khi biểu diễn ở dạng $[p] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$ sẽ thuận tiện hơn trong việc tính toán.

• Ký hiệu $\nu: C_0((\mathbb{R}^3)^*) \rightarrow C_0((\mathbb{R}^2)^*)$ là phép hạn chế. Theo định nghĩa thông thường của δ_0 , với $f \in \text{Mat}_n(\tilde{A})$ và f lũy đẳng (tức $[f] \in K_0(\tilde{A})$) thì :

$$\delta_0([f]) = [e^{2\pi i f}]$$

ở đó $\tilde{f} \in \text{Mat}_n(\widetilde{C_0(\mathbb{R}^3)^*})$ sao cho $\nu(\tilde{f}) = f$ [19, tr.170].

- Theo [19, tr.170], ký hiệu :

$$Q(\widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)}) = \left\{ f \in \widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)} : e^{2\pi i f} = 1 \right\}$$

ở đó 1 là đơn vị của $\widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)}$; và :

$$Q_n(\widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)}) = \left\{ f \in \text{Mat}_n(\widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)}) : e^{2\pi i f} = I_n \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

ở đó I_n là ma trận đơn vị cấp n trên $\widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)}$.

Gọi $\text{tr} : \text{Mat}_n(\widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)}) \rightarrow \widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)}$ là hàm vết thông thường các ma trận. Khi đó, tr xác định trên $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_n(\widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)})$ một hàm cộng tính Tr như sau :

$$\text{Tr} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_n(\widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)}) \rightarrow \mathcal{Q}(\widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)})$$

mặt khác, mỗi phần tử $[f] \in K_1(C_0(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_\pm))$ có thể được biểu diễn như hàm :

$$f : \mathbb{R}_\pm \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_n(\widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)})$$

sao cho $\lim_{t \rightarrow 0^\pm} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)$. Hơn nữa :

$$[f] = w_\pm \cdot ([b] \boxtimes [u_\pm])$$

ở đó $w_\pm$ là số vòng quay của f xác định bởi công thức :

$$w_\pm = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}_\pm} \text{Tr} [f'(t) \cdot f(t)^{-1}] dt$$

❖

3.2.9. Lời giải bài toán 3.2.3

Dãy khớp (*) cảm sinh ra dãy khớp tuần hoàn 6-thành phần như sau :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_0(V_1)) & \longrightarrow & K_0(C_0(V)) & \longrightarrow & K_0(C_0(W_1)) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(C_0(W_1)) & \longleftarrow & K_1(C_0(V)) & \longleftarrow & K_1(C_0(V_1)) \end{array}$$

từ 3.2.6, ta suy ra dãy khớp này tương đương với dãy khớp :

$$\begin{array}{ccccc} K_1(J) & \longrightarrow & K_1(C_0((\mathbb{R}^3)^*)) & \longrightarrow & K_1(A) \\ \delta_0 \uparrow & & & & \downarrow \delta_1 \\ K_0(A) & \longleftarrow & K_0(C_0((\mathbb{R}^3)^*)) & \longleftarrow & K_0(J) \end{array}$$

và từ 3.2.5 thì dãy khớp này trở thành :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \delta_0 \uparrow & & & & \downarrow \delta_1 = 0 \\ \mathbb{Z} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

và như vậy, thay vì tính $\delta_1 : K_1(C_0(W_1)) \rightarrow K_0(C_0(V_1))$, ta sẽ tính $\delta_0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$.

Theo 3.2.7, vì $K_0(A) = \mathbb{Z}$ sinh bởi $[p] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$ nên ta cần phải tính :

$$\delta_0 \left([p] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right) = \delta_0([p]) - \delta_0 \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right)$$

3.2.9.1. Tính $\delta_0 \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right)$

Với $[f] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$, ta có thể chọn $\tilde{f} : (\mathbb{R}^3)^* \rightarrow \text{Mat}_2(A)$ cho bởi :

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^3)^*$$

tức là, $\tilde{f} = 1_{\mathbb{R}} \cdot f$, với $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm hằng nhận giá trị 1. Dễ thấy

$\tilde{f} \in \text{Mat}_n \left(\overline{C_0 \left((\mathbb{R}^3)^* \right)} \right)$ và $\nu(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Áp dụng 3.2.8.ii, ta có :

$$\delta_0 \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right) = \left[e^{2\pi i \tilde{f}} \right] \in K_1(J) = K_1(C_0(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)) \oplus K_1(C_0(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-)) = \mathbb{Z}^2$$

ký hiệu $\tilde{f}_{\pm} = f \cdot 1_{\mathbb{R}_{\pm}}$ thì :

$$\delta_0 \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right) = \left[e^{2\pi i \tilde{f}} \right] = \left(\left[e^{2\pi i \tilde{f}_+} \right], \left[e^{2\pi i \tilde{f}_-} \right] \right)$$

Theo 3.2.8.iii, ta lại có :

$$\left[e^{2\pi i \tilde{f}_{\pm}} \right] = w_{\pm} \cdot ([b] \boxtimes [u_{\pm}])$$

Tính toán cụ thể ta được :

$$w_{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \text{Tr} \left(\frac{d}{dz} (e^{2\pi i \tilde{f}_{\pm}}) \cdot e^{-2\pi i \tilde{f}_{\pm}} \right) dz = \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \text{Tr} \left(\frac{d\tilde{f}_{\pm}}{dz} \right) dz = \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \frac{d1_{\mathbb{R}_{\pm}}}{dz} dz = 0$$

suy ra $\left[e^{2\pi i \tilde{f}_+} \right] = \left[e^{2\pi i \tilde{f}_-} \right] = 0$, tức là :

$$\delta_0 \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right) = 0$$

3.2.9.2. Tính $\delta_0([p])$

Chọn $\tilde{p} : (\mathbb{R}^3)^* \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ xác định bởi :

$$\tilde{p}(x, y, z) = l(z) \cdot p(x, y) \quad , \quad (x, y, z) \in (\mathbb{R}^3)^*$$

ở đó, $l : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm cho bởi :

$$l(z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \quad , \quad z \in \mathbb{R}^*$$

Rõ ràng $\tilde{p} \in \text{Mat}_n \left(\overline{C_0 \left((\mathbb{R}^3)^* \right)} \right)$ và $v(\tilde{p}) = p$. Ký hiệu :

$$\tilde{p}_+ = \tilde{p}|_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+} \quad , \quad \tilde{p}_- = \tilde{p}|_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-}$$

khi đó, theo 3.2.8.ii, ta có :

$$\delta_0([p]) = [e^{2\pi i \tilde{p}}] = ([e^{2\pi i \tilde{p}_+}], [e^{2\pi i \tilde{p}_-}]) \in K_1(C_0(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)) \oplus K_1(C_0(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-))$$

và theo 3.2.8.iii, ta có :

$$[e^{2\pi i \tilde{p}_\pm}] = w_\pm \cdot ([b] \boxtimes [u_\pm])$$

với :

$$w_\pm = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}_\pm} \text{Tr} \left(\frac{d}{dz} (e^{2\pi i \tilde{p}_\pm}) \cdot e^{-2\pi i \tilde{p}_\pm} \right) dz = \int_{\mathbb{R}_\pm} \text{Tr} \left(\frac{d\tilde{p}_\pm}{dz} \right) dz = \int_{\mathbb{R}_\pm} l'(z) dz = 1$$

tức là :

$$\delta_0([p]) = ([b] \boxtimes [u_+], [b] \boxtimes [u_-])$$

Kết hợp với kết quả ở 3.2.9.1, ta suy ra :

$$\delta_0 \left([p] - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = ([b] \boxtimes [u_+], [b] \boxtimes [u_-])$$

tức là $\delta_1 = \delta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2)$.

Tóm lại :

$$\text{Index } C_0(V) = \left(\delta_0 = 0 \quad , \quad \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$



3.2.10. Nhận xét

Trong nhiều trường hợp, để xác định được kiểu ổn định của một C^* -đại số A nào đó, ta phải thông qua nhiều dãy khớp liên tiếp, gọi là *mở rộng lặp*, có dạng như sau (xem [11, tr.25]) :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow J_1 \rightarrow A \rightarrow B_1 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow J_2 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow 0 \\ \dots \\ 0 \rightarrow J_{k-1} \rightarrow B_{k-2} \rightarrow B_{k-1} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow J_k \rightarrow B_{k-1} \rightarrow B_k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ở đó, các C^* -đại số $J_1, \dots, J_k$ và $B_1, \dots, B_k$ đều có dạng $C_0(X) \otimes \mathbb{K}$ với X là một không gian compact địa phương, Hausdorff thích hợp nào đó, còn $k \in \mathbb{N}$ là hữu hạn. Các dãy khớp tuần hoàn 6-thành phần tương ứng với các mở rộng trên lần lượt xác định cho ta các cặp đồng cấu nối $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Tập hợp $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ gọi là *hệ bất biến chỉ số (chính tắc)* của A , và cũng được ký hiệu là $\text{Index } A$.

Chẳng hạn, trong việc xác định $\text{Index } C_0(V)$ ở trên, ta có thể phải xét thêm một mở rộng (xem [22, tr.229]) :

$$0 \rightarrow C_0(V_2) \xrightarrow{\sigma} C_0(W_1) \xrightarrow{\mu} C_0(W_2) \rightarrow 0 \quad (**)$$

ở đó :

$$V_2 = \{(t, x, y, z) \in W_1 : xy \neq 0\} \approx \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2)^* \subset W_1$$

$$W_2 = W_1 \setminus V_2 \approx \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^* \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}^*) \subset W_1$$

còn $\sigma : C_0(V_2) \rightarrow C_0(W_1)$ và $\mu : C_0(W_1) \rightarrow C_0(W_2)$ cũng là phép bao lồng và phép hạn chế xác định bởi :

$$\sigma(f)(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in V_2 \\ 0 & , \quad x \in W_1 \setminus V_2 \end{cases} \quad , \quad f \in C_0(V_2)$$

$$\mu(f) = f|_{W_2} \quad , \quad f \in C_0(W_1)$$

bằng kỹ thuật tính toán tương tự như trên (xem [5, tr.92]), ta xác định được cặp đồng cấu nối $\eta = (\delta_2, \delta_3)$ liên kết với mở rộng $(**)$ là :

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \delta_3 = 0$$

như vậy, hệ bất biến chỉ số chính tắc của $C_0(V)$ liên kết với mở rộng lặp $(*)$ và $(**)$ là :

$$\text{Index } C_0(V) = \{\gamma, \eta\}$$

✱

✱ ✱

KẾT LUẬN

Qua những phần đã trình bày, phương pháp K -hàm tử đã chứng tỏ được “sức mạnh” của nó trong việc nghiên cứu K -lý thuyết của đại số Banach. Một điều cần nói thêm là, thông qua các tính toán cụ thể ở chương 3, ta cũng thấy được mối liên hệ mật thiết giữa K -lý thuyết tô pô và K -lý thuyết đại số. Đồng thời, mặc dù không trình bày cụ thể, nhưng ta cũng phần nào thấy được vai trò của phương pháp này trong việc mô tả các C^* -đại số.

Một hướng mới trong nghiên cứu là áp dụng phương pháp K -hàm tử để mô tả một lớp các C^* -đại số, lớp các C^* -đại số $C^*(V, \mathcal{F})$ liên kết chính tắc với mỗi phân lá $(V, \mathcal{F})$, được đề xướng bởi A. Connes vào năm 1982 (xem [9], [11]). Tuy nhiên, một câu hỏi được đặt ra là ở chỗ : liệu phương pháp K -hàm tử có thích hợp với vấn đề này hay không ?

Và câu trả lời là Có.

Vào năm 1985, A. M. Torpe đã sử dụng thành công phương pháp K -hàm tử để mô tả các C^* -đại số của phân lá Reeb trên xuyên T^2 và mặt cầu S^3 (xem [21]). Tuy nhiên, hiện nay vẫn còn một lớp rất rộng các C^* -đại số của phân lá vẫn chưa được mô tả bằng phương pháp này. Đó vẫn còn là một bài toán mở và rộng lớn.

Do còn nhiều hạn chế khách quan và chủ quan, Luận văn đã dừng lại trong những khuôn khổ nhất định. Tác giả hy vọng còn có dịp tiếp tục nghiên cứu những vấn đề trên trong tương lai.

Sau cùng, mặc dù đã có nhiều cố gắng trong việc soạn thảo, nhưng những sai sót là không thể tránh khỏi, tác giả xin chân thành lắng nghe và cảm ơn các độc giả đã, đang và sẽ đóng góp ý kiến cho quyển luận văn này.

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

$\sim$	: Quan hệ hoặc quan hệ tương đương
$\sim_u$	: Quan hệ tương đương unita
$\sim_0$	: Quan hệ tương đương trong định nghĩa $\mathcal{D}(A)$
$\sim_1$	: Quan hệ tương đương trong định nghĩa K_1 của C^* -đại số A
$\approx$	: Đồng phôi
$\simeq$	: Đồng luân
$\cong$	: Đồng cấu
$\oplus$	: Tổng trực tiếp hoặc phép toán hai ngôi
$\otimes, \boxtimes$	: Tích tenxơ và tích tenxơ ngoài
$\leq$	: Nhóm con hoặc đại số con hoặc C^* -đại số con
$\triangleleft$	: Nhóm con chuẩn tắc hoặc idêan
$\ \cdot\ $	: Chuẩn trên không gian vectơ
$\{*\}$	: Tập hợp (hay không gian) đơn điểm (một phần tử)
i^*	: $K^0(i)$ hoặc $K^1(i)$
i_*	: $K_0(i)$ hoặc $K_1(i)$
ΩA	: Đại số có đơn vị các ánh xạ $f \in C([0,1], A)$ mà $f(0) = f(1)$
$\mathcal{A}$	: Atlas của một phân thớ hoặc đại số trên một trường
$\mathcal{A}_b$	: Phạm trù các nhóm Abel
$\text{Aut}(V)$	: Tập các tự đẳng cấu tuyến tính của không gian vectơ V
A^+	: Compắc hóa một điểm hoặc đơn vị hóa của đại số Banach
$\tilde{A}$	: Đơn vị hóa của đại số Banach hay C^* -đại số A
A/I	: Không gian tôpô thương hoặc đại số (Banach) thương
$(a_{ij})^t$	: Ma trận chuyển vị của ma trận (a_{ij})

a^*	: Phần tử liên hợp của a
IB	: Tập các toán tử tuyến tính bị chặn trên $\mathcal{H}$
IB^n	: Tập các toán tử tuyến tính bị chặn trên $\mathcal{H}^n = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_n$
$\mathcal{C}^* - \text{alg}$	: Phạm trù các C^* -đại số
$\mathbb{C}$	: Trường số phức
CA	: Nón của một đại số Banach hoặc không gian tôpô
$C(X, Y)$	: Tập các ánh xạ liên tục từ X đến Y
$C(X)$	: Đại số các ánh xạ $f \in C(X, \mathbb{C})$
$C_0(X)$	: Đại số các ánh xạ $f \in C(X)$ mà triệt tiêu tại vô cùng
$\mathcal{D}(A)$	: $\mathcal{D}(A)/\sim_0$ (vị nhóm Abel các phép chiếu của C^* -đại số A)
$\dim$	: Chiều hoặc đồng cấu chiều
$\exp$	: Ánh xạ mũ
$\text{GL}_n^0(A)$	: $\exp(\text{Mat}_n(A))$ (thành phần liên thông đường của ma trận đơn vị)
$\text{GL}_n(A)$	: Tập các ma trận vuông cấp n khả nghịch với phần tử thuộc A
$\mathcal{H}$	: Không gian Hilbert tách được, vô hạn chiều
$\text{Hom}(X, Y)$	: Tập các cấu xạ từ X đến Y
$\text{Homeo}(F)$	: Tập các phép đồng phôi của không gian tôpô F
Im	: Ảnh của một đồng cấu
$\text{Index } A$	: Chỉ số hoặc hệ bất biến chỉ số của đại số Banach
IK	: Tập các toán tử tuyến tính compact trên $\mathcal{H}$
$\text{IKA}, A \otimes \text{IK}$	: Các ổn định hóa của C^* -đại số A
κ	: $*$ -đồng cấu $\kappa_1 : A \rightarrow \text{IKA}$ từ C^* -đại số A đến ổn định hóa IKA
K^0, K^1	: Các đối hàm tử của K -lý thuyết tôpô
K_0, K_1	: Các hàm tử của K -lý thuyết đại số
Ker	: Hạt nhân của một đồng cấu

$\lim_{\xrightarrow{n}}, \lim_{\rightarrow}$	: Giới hạn quy nạp
$L_n(A)$	: Nhóm thương $GL_n(A)/GL_n^0(A)$
$\lambda_{n,A}$	: $*$ -đồng cấu $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ từ C^* -đại số A đến C^* -đại số $Mat_n(A)$
$Mat_n(A)$	: Tập các ma trận vuông cấp n với phần tử thuộc A
$Mat_{m \times n}(A)$	: Tập các ma trận cấp $m \times n$ với phần tử thuộc A
$\mathbb{N}$	: Vị nhóm Abel các số tự nhiên
$\mathcal{P}(A)$	: Tập các phép chiếu trong C^* -đại số A
$\mathcal{P}_n(A)$	: $\mathcal{P}(Mat_n(A))$ – tập các phép chiếu trong C^* -đại số $Mat_n(A)$
$\mathcal{P}_\infty(A)$	: Tập hợp $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A)$
$[p]_{\mathcal{D}}$	: Lớp tương đương của phần tử $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$ trong $\mathcal{D}(A)$
$[p]_0$	: $s([p]_{\mathcal{D}})$ – ảnh của $[p]_{\mathcal{D}}$ qua ánh xạ Grothendieck
$P_n(A)$	: Tập các phần tử lũy đẳng trong $Mat_n(A)$
$\mathbb{Q}$	: Trường số hữu tỷ
$\mathbb{R}$	: Trường số thực
$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$	: Các tập hợp $[0, +\infty)$ và $(-\infty, 0]$
$\mathbb{R}^*$	: Tập hợp $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
rank	: Hạng (của một ma trận)
$\mathcal{Set}$	: Phạm trù các tập hợp
S^1	: Đường tròn đơn vị $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \equiv \{z \in \mathbb{C} : z ^2 = 1\}$
$S(M)$	: Nhóm Grothendieck của vị nhóm Abel M
SA	: Treo của một đại số Banach hoặc không gian tôpô
$S^n A$	: Treo thứ n của một đại số Banach hay không gian tôpô
s	: Ánh xạ chính tắc trong định nghĩa nhóm Grothendieck

- $T_x M^n, TM^n$: Không gian tiếp xúc và phân thớ tiếp xúc của đa tạp khả vi M^n
 Tr, tr : Ánh xạ vết
 $\mathcal{U}(A)$: Tập các phần tử unita của C^* -đại số A
 $\mathcal{U}_0(A)$: Tập các phần tử unita $u \in \mathcal{U}(A)$ mà $u \simeq 1$
 $\mathcal{U}_n(A)$: $\mathcal{U}(\text{Mat}_n(A))$ – tập các phần tử unita trong C^* -đại số $\text{Mat}_n(A)$
 $\mathcal{U}_\infty(A)$: Tập hợp $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n(A)$
 $[u]_1$: Lớp của phần tử $u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})$ trong nhóm K_1 của C^* -đại số A
 $[\text{Vect}(X)]$: Tập các lớp đẳng cấu phân thớ vectơ phức hữu hạn chiều trên X
 w_f : Số vòng quay của ánh xạ f
 $\mathbb{Z}$: Vành các số nguyên
 $\bar{z}$: Liên hợp của số phức z

CHỈ MỤC

$\mathcal{A}$		Đại số con	30
Ánh xạ mũ	32	Đại số Banach	30
Ánh xạ tuyến tính liên hợp	80	Đại số Calkin	63
Atlas	20	Đại số thương	30
$\mathcal{B}$		Đáy	20
Bản đồ địa phương	20	Đẳng cấu	16, 21
Bảo toàn vật không	64	Định lý tuần hoàn Bott	52, 59
Bất biến đồng luân	64	Đối hàm tử	17
$\mathcal{C}$		Đồng cấu nội	29
C^* -đại số	80	Đồng dạng	40
C^* -đại số con	80	Đồng luân	19
Cấu xạ	15	Đơn vị hóa	31, 82
Cấu xạ đồng nhất	15	Đơn xạ	16
Chỉ số (của đại số Banach)	65	Đường liên tục	83
Co rút được	20	$\mathcal{G}$	
Compắc hóa một điểm	29, 62	G -phân thớ	21
Cơ sở	26	G -phân thớ chính	22
Cùng kiểu đồng luân	19	Giới hạn quy nạp của hàm tử	18
$\mathcal{D}$		Giới hạn quy nạp của hệ quy nạp	19
Dạng song tuyến tính	30	$\mathcal{H}$	
Dãy khớp 6-thành phần	49	Hàm dẫn	20
Dãy khớp tuần hoàn 6-thành phần	29	Hàm tử	17
$\mathcal{E}$		Hàm tử đồng nhất	17
Đại số (kết hợp)	30	Hàm tử khớp (nửa khớp, chẻ)	64
		Hàm tử liên tục	64

Hàm tử quên (hàm tử xóa)	17	Nhóm $K_0(R)$	27
Hàm vết	72, 86	Nhóm $K^0(X)$	27, 29
Hệ bất biến chỉ số (chính tắc)	75	Nhóm $\tilde{K}(X)$	28
Hệ quy nạp	18	Nhóm $K^0(X, Y)$	29
Hệ sinh	26	Nhóm $K^1(X)$	29
Hợp thành	15	Nhóm $K^1(X, Y)$	29
$\mathcal{I}$		Nhóm tôpô	21
Idêan	30, 81	Nón	31
$\mathcal{K}$		$\mathcal{O}$	
Không gian chấm điểm	28	Ổn định	64
Không gian toàn thể	20	Ổn định hóa	82
Khuyên	53	$\mathcal{P}$	
Khuyên đa thức	55	Phạm trù	15
Khuyên tuyến tính	53	Phạm trù cân bằng	16
$\mathcal{L}$		Phản nhân tính	80
Lọc phải	19	Phân hoạch đơn vị	33
Luật mũ	62	Phân thớ tầm thường	23
Lũy đẳng	32	Phân thớ tầm thường địa phương	20
$\mathcal{M}$		Phân thớ tiếp xúc	22
Ma trận đổi chỗ sơ cấp	35	Phân thớ vectơ	22
Ma trận trượt sơ cấp	35	Phân tích phổ	33
Môđun	26	Phần tử tự liên hợp	83
Môđun tự do	26	Phần tử unita	81
Môđun xạ ảnh	26	Phép chiếu	81
Mở rộng	65	Phép nâng phần tử khả nghịch	33
Mở rộng lặp	75	Phép đồng luân	19
Mở rộng tầm thường	40	$\mathcal{S}$	
$\mathcal{N}$		Song xạ	16
Nhóm Grothendieck	24		

Số vòng quay	72
$\mathcal{I}$	
Thór	20
Thór mẫu	20
Tích tenxơ	23
Tích tenxơ ngoài	66
Tính khớp yếu của $\tilde{K}_0$	47
Tính khớp của $\tilde{K}_1$	38
Toàn xạ	16
Tổ hợp tuyến tính	26
Tổng trực tiếp (tổng Whitney)	23
Tương đương đồng luân	19
Tương đương Murray–Newman	83
Tương đương unita	83
Treo	31
Treo thứ hai	52
Triệt tiêu tại vô cùng	31
$\mathcal{V}$	
Vật	15
Vật cuối	16
Vật đầu	16
Vật không	16
Vật phổ dụng	16
Vị nhóm Abel	24

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

K -lý thuyết tôpô là một lý thuyết đối đồng điều suy rộng và là một công cụ mạnh của Tôpô đại số. Công cụ này cho phép giải quyết nhiều vấn đề thuộc lĩnh vực Hình học – Tôpô cũng như nhiều lĩnh vực khác của Toán học. Năm 1958, Grothendieck khi nghiên cứu về định lý Riemann – Roch trong *Hình học đại số* đã khởi xướng ý tưởng về K -lý thuyết tôpô. Đến năm 1961, K -lý thuyết tôpô đã chính thức được hình thành bởi các công trình nghiên cứu độc lập của Atiyah và Hirzebruch.

K -lý thuyết tôpô được xây dựng nhờ *không gian phân thớ*, nó cho phép chuyển một loạt các bài toán của giải tích và tôpô thành bài toán đại số. Từ K -lý thuyết tôpô đã nảy sinh một cách tự nhiên ra K -lý thuyết đại số, mà một bộ phận quan trọng của nó là K -lý thuyết của đại số Banach và C^* -đại số.

K -lý thuyết tôpô (còn gọi là K -lý thuyết hình học) xuất hiện trước và liên quan với các phân thớ vectơ phức trên các đáy là các không gian tôpô. Đối tượng cơ bản của K -lý thuyết tôpô là các lớp tương đương ổn định của các phân thớ vectơ (phức). Bằng phép toán tổng Whitney các phân thớ vectơ, ta xây dựng được một vị nhóm Abel, rồi thông qua nhóm Grothendieck, ta xây dựng được các nhóm K^0 và K^1 của một không gian tôpô.

K -lý thuyết đại số liên quan đến nhiều đối tượng hơn. Năm 1962, Swan đề ý thấy rằng có sự tương ứng giữa phạm trù các không gian tôpô nào đó (như không gian compact, Hausdorff) với phạm trù các đại số Banach hoặc C^* -đại số. Ý tưởng là ở chỗ tập các nhát cắt liên tục của mỗi một phân thớ vectơ trên không gian tôpô X là một $C(X)$ -môđun. Điều này dẫn tới việc nghiên cứu các môđun xạ ảnh, các K -nhóm đại số và đó là xuất phát điểm của K -lý thuyết đại số.

Trong K -lý thuyết đại số thì K -lý thuyết của đại số Banach có một vai trò quan trọng. Sở dĩ có điều này là ở chỗ, với mỗi không gian tôpô X (compact, Hausdorff) thì tập $C(X)$ các ánh xạ liên tục trên X nhận giá trị phức lập thành một đại số Banach và từ đó dẫn tới một liên hệ mật thiết giữa K -lý thuyết tôpô và K -lý thuyết đại số. Từ mối liên hệ này, ta có thể chuyển từ việc nghiên cứu K -lý thuyết tôpô sang nghiên cứu K -lý thuyết đại số và ngược lại (mỗi khi việc tính toán ở bên này khó hơn bên kia).

Bởi vì là một công cụ mạnh của Tôpô đại số nên K -lý thuyết có nhiều ứng dụng trong Toán học và cả Vật lý học. Thông qua việc sơ bộ tìm hiểu những vấn đề trên, cộng với một chút “lòng yêu thích” và có xét đến khả năng có hạn của mình, chúng tôi đã mạnh dạn chọn đề tài nghiên cứu về K -lý thuyết mà cụ thể là K -lý thuyết đại số. Tuy nhiên, việc nghiên cứu K -lý thuyết đại số ở tầm tổng quát là rất khó khăn vì phải dùng đến nhiều kiến thức của cả Đại số hiện đại lẫn Giải tích. Vì vậy, chúng tôi đã giới hạn việc tìm hiểu của mình trong phạm vi của đại số Banach và đề tài của chúng tôi mang tên là : “ *K -lý thuyết của đại số Banach và một vài ứng dụng*”.

2. Nội dung và phương pháp nghiên cứu

Luận văn tìm hiểu hai vấn đề chính : Đại số Banach và K -lý thuyết của chúng. Để giảm thiểu phần nào đó sự “đơn điệu”, luận văn lồng vào trong đó một số vấn đề *cơ bản nhất* về C^* -đại số, một đối tượng đầy sâu sắc, như là một “hương vị mới”.

Phương pháp nghiên cứu : luận văn sử dụng những công cụ mạnh là Đại số đồng điều và Giải tích hàm, xen kẽ với đó, trong một chừng mực có thể, là cách trình bày theo tinh thần của Toán học hiện đại – ngôn ngữ Phạm trù và Hàm tử.

3. Ý nghĩa khoa học của luận văn

Tiếp cận với phương pháp K -hàm tử; đồng thời, chúng tôi được “sức mạnh” của phương pháp này trong việc nghiên cứu các đại số Banach. Vì mỗi một C^* -đại số trước tiên là một đại số Banach nên cũng phần nào cho thấy ý nghĩa của phương pháp K -hàm tử trong việc nghiên cứu cấu trúc của các C^* -đại số.

4. Cấu trúc luận văn

Luận văn gồm phần mở đầu, 3 chương, phần kết luận và phụ lục. Cụ thể là :

a) **Phần mở đầu** : nêu một số vấn đề về lịch sử, phạm vi nghiên cứu và phương pháp nghiên cứu.

b) **Chương 1** : trình bày các khái niệm cơ bản về K -lý thuyết của đại số Banach. Phần này chỉ trình bày những kiến thức cần thiết có liên quan đến nội dung đang xét.

c) **Chương 2** : trình bày cụ thể về cách xây dựng các nhóm K_0 và K_1 ; đồng thời xác định một số tính chất cơ bản của các hàm tử K_0 và K_1 .

d) **Chương 3** : trình bày một số ví dụ cơ bản và cụ thể nhằm làm rõ “sức mạnh” của phương pháp K -hàm tử

e) **Phần kết luận** : trình bày các vấn đề mở có thể tiếp tục nghiên cứu tiếp sau đề tài.

f) **Phụ lục** : trình bày các vấn đề cơ bản nhất về C^* -đại số đã được sử dụng trong các chương.

5. Ký hiệu trong luận văn

Các ký hiệu được dùng trong luận văn này hoặc là các ký hiệu thông dụng hoặc sẽ được giải thích khi dùng lần đầu (xem *Danh mục các ký hiệu*).

Để trích dẫn một kết quả, chúng tôi cũng dùng những ký hiệu quen thuộc. Chẳng hạn, nếu ghi "1.6.3" có nghĩa là xin xem mục 1.6.3 ở Chương 1; nếu ghi "2.2.5" có nghĩa là xin xem mục 2.2.5 ở Chương 2; còn nếu ghi "[19, tr.170]" có nghĩa là xin xem trang 170 của Tài liệu tham khảo số 19.

MỤC LỤC

Trang phụ bìa	
Lời cảm ơn.....	1
Mục lục.....	2
Danh mục các ký hiệu.....	8
MỞ ĐẦU	12
Chương 1 : KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	
1.1. Sơ lược về phạm trù và hàm tử.....	15
1.1.1. Phạm trù.....	15
1.1.2. Đơn xạ, toàn xạ, đẳng xạ.....	16
1.1.3. Vật phổ dụng của phạm trù.....	16
1.1.4. Hàm tử.....	17
1.1.5. Đối hàm tử.....	17
1.1.6. Giới hạn quy nạp trong một phạm trù.....	18
1.1.6.1. Giới hạn quy nạp của hàm tử.....	18
1.1.6.2. Hệ quy nạp.....	18
1.1.6.3. Giới hạn quy nạp.....	18
1.1.6.4. Ví dụ.....	19
1.1.7. Phạm trù các không gian tôpô	19
1.1.7.1. Quan hệ đồng luân.....	19
1.1.7.2. Không gian co rút được.....	20
1.2. Đại cương về phân thớ và phân thớ vectơ.....	20
1.2.1. Phân thớ tầm thường địa phương.....	20
1.2.1.1. Định nghĩa.....	20
1.2.1.2. Atlas – hàm dán.....	20
1.2.1.3. Đồng cấu và đẳng cấu.....	21
1.2.2. G -phân thớ chính.....	21

1.2.2.1. G –phân thớ.....	21
1.2.2.2. G –phân thớ chính.....	22
1.2.3. Phân thớ véc tơ.....	22
1.2.4. Phép toán trên phân thớ véc tơ.....	23
1.2.5. Vị nhóm Abel $[\text{Vect}(X)]$	23
1.3. Đối xứng hóa và K –nhóm đại số.....	24
1.3.1. Đối xứng hóa của một vị nhóm Abel.....	24
1.3.1.1. Định nghĩa.....	24
1.3.1.2. Cách xây dựng.....	25
1.3.1.3. Mô tả.....	25
1.3.1.4. Các ví dụ kinh điển.....	25
1.3.2. K –nhóm đại số.....	26
1.3.2.1. Môđun và môđun xạ ảnh.....	26
1.3.2.2. Định nghĩa $K_0(R)$	27
1.3.2.3. Các ví dụ kinh điển.....	27
1.4. Sơ lược về K –lý thuyết tôpô.....	27
1.4.1. Nhóm K^0 và hàm tử K^0	27
1.4.1.1. Trường hợp X compact, Hausdorff.....	27
1.4.1.2. Trường hợp X compact địa phương, Hausdorff.....	29
1.4.1.3. Nhóm $K^0(X, Y)$	29
1.4.2. Các nhóm $K^1(X)$	29
1.4.2.1. Treo của một không gian tôpô.....	29
1.4.2.2. Các nhóm K^1	29
1.4.3. Dãy khớp tuần hoàn 6–thành phần của K –lý thuyết tôpô.....	29
1.5. Đại số Banach.....	30
1.5.1. Đại số.....	30
1.5.2. Đại số Banach.....	30
1.5.3. Nón và treo.....	31

1.5.3.1. Định nghĩa	31
1.5.3.2. Mệnh đề	31
1.6. Ánh xạ mũ và lũy đẳng	32
1.6.1. Ánh xạ mũ	32
1.6.1.1. Định nghĩa	32
1.6.1.2. Ký hiệu	32
1.6.1.3. Mệnh đề	32
1.6.2. Lũy đẳng	32
1.6.2.1. Định nghĩa	32
1.6.2.2. Mệnh đề	33
1.6.2.3. Định nghĩa	33
1.6.3. Mệnh đề	33
Chương 2 : K-LÝ THUYẾT CỦA ĐẠI SỐ BANACH	
2.1. Nhóm K_1 và hàm tử K_1	34
2.1.1. Các phép toán sơ cấp	35
2.1.1.1. Ma trận sơ cấp và phép toán sơ cấp	35
2.1.1.2. Mệnh đề	35
2.1.1.3. Hệ quả	36
2.1.2. Nhóm $K_1(A)$ khi A có đơn vị	36
2.1.2.1. Xây dựng $K_1(A)$	36
2.1.2.2. Mệnh đề	36
2.1.2.3. Định nghĩa	37
2.1.2.4. Hệ quả	37
2.1.2.5. Tính chất hàm tử của K_1	37
2.1.3. Nhóm $\tilde{K}_1(A)$ khi A không có đơn vị	37
2.1.3.1. Xây dựng $\tilde{K}_1(A)$	37
2.1.3.2. Tính chất hàm tử của $\tilde{K}_1$	38
2.1.4. Mệnh đề	38

2.2. Nhóm K_0 và hàm tử K_0	39
2.2.1. Xây dựng $K_0(A)$	39
2.2.1.1. Trường hợp A có đơn vị	39
2.2.1.2. Trường hợp A không có đơn vị	41
2.2.1.3. Mệnh đề	42
2.2.2. Mô tả $K_0(A)$	43
2.2.2.1. Ý tưởng mô tả	43
2.2.2.2. Xây dựng ánh xạ λ_*	44
2.2.2.3. Mệnh đề	45
2.2.2.4. Định lý mô tả $K_0(A)$	46
2.2.2.5. Nhóm $K_0(\mathbb{C})$	46
2.2.2.6. Định lý mô tả $\tilde{K}_0(A)$	47
2.2.3. Mệnh đề	47
2.3. Liên hệ giữa các nhóm K_0 và K_1	49
2.3.1. Phương pháp	49
2.3.2. Xây dựng δ_1	49
2.3.2.1. Bước 1	49
2.3.2.2. Bước 2	51
2.3.3. Mệnh đề	51
2.3.4. Mệnh đề	52
2.4. Định lý tuần hoàn Bott	52
2.4.1. Phương pháp	52
2.4.2. Trường hợp A có đơn vị	53
2.4.2.1. Các khái niệm bổ trợ	53
2.4.2.2. Xây dựng β_*	53
2.4.2.3. Xây dựng nhóm bổ trợ G	53
2.4.2.4. Bổ đề	54

2.4.2.5. Định nghĩa	55
2.4.2.6. Bổ đề	55
2.4.2.7. Bổ đề	56
2.4.2.8. Mệnh đề	58
2.4.3. Mệnh đề	58
2.4.4. Định lý tuần hoàn Bott	59
2.4.5. Định lý	59
Chương 3 : MỘT VÀI ỨNG DỤNG	
3.1. Các nhóm K_n với $n \geq 2$	61
3.1.1. Nhóm K_n với $n \geq 2$	61
3.1.1.1. Định nghĩa	61
3.1.1.2. Mệnh đề	61
3.1.1.3. Nhận xét	61
3.1.2. Vài ứng dụng	62
3.1.2.1. Mệnh đề	62
3.1.2.2. Mệnh đề	62
3.1.2.3. Ví dụ	63
3.1.3. Nhận xét	64
3.1.3.1. Định nghĩa	64
3.1.3.2. Định lý Cuntz	65
3.2. Chỉ số của đại số Banach	65
3.2.1. Chỉ số của đại số Banach	65
3.2.1.1. Định nghĩa	65
3.2.1.2. Nhận xét	65
3.2.2. Bổ túc	65
3.2.2.1. Tích tenxơ ngoài	66
3.2.2.2. Định lý tuần hoàn Bott	66
3.2.2.3. Định lý	67
3.2.3. Đặt bài toán	67

3.2.4. Nhận xét.....	67
3.2.5. Bổ đề.....	68
3.2.6. Bổ đề.....	70
3.2.7. Bổ đề.....	70
3.2.8. Nhận xét	71
3.2.9. Lời giải bài toán 3.2.3.....	72
3.2.9.1. Tính $\delta_0\left(\left[\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\right]\right)$	73
3.2.9.2. Tính $\delta_0([p])$	74
3.2.10. Nhận xét.....	75
KẾT LUẬN	77
TÀI LIỆU THAM KHẢO	78
PHỤ LỤC	80
CHỈ MỤC	90

PHỤ LỤC

Mục đích của phần này là trình bày những vấn đề cơ bản nhất của lý thuyết về các C^* -đại số và chứng minh bốn kết quả đã được dùng trong 3.1.1.3 :

$$K_0(\mathbb{B})=0 \quad , \quad K_1(\mathbb{B})=0 \quad , \quad K_0(\mathbb{K})=\mathbb{Z} \quad , \quad K_1(\mathbb{K})=0$$

ở đó, nhắc lại rằng, $\mathbb{B}$ và $\mathbb{K}$ lần lượt là đại số Banach (thực chất là C^* -đại số) các toán tử tuyến tính bị chặn và compact trên không gian Hilbert tách được vô hạn chiều $\mathcal{H}$. Ngoài ra, ta còn ký hiệu $\mathbb{B}^n$ là C^* -đại số các toán tử tuyến tính bị chặn trên $\mathcal{H}^n = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_n$.

Trong phần này, chúng tôi chủ yếu theo [16] và [18].

1. Khái niệm chung về C^* -đại số

- Cho A là một $\mathbb{C}$ -đại số. Phép đối hợp trên A một ánh xạ tuyến tính liên hợp và phản nhân tính $*$: $A \rightarrow A$ sao cho $a^{**} = (a^*)^* = a$ với mọi $a \in A$. Cụ thể là, với mọi $a, b \in A$ và mọi $\lambda \in \mathbb{C}$ thì :

$$a^{**} = a \quad , \quad (ab)^* = b^* a^* \quad , \quad (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$$

- Cho A là một đại số Banach. Ta bảo A là một C^* -đại số nếu trên A trang bị thêm một phép đối hợp $a \mapsto a^*$ thỏa mãn điều kiện sau :

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \quad , \quad \forall a \in A$$

- + Từ định nghĩa, dễ dàng suy ra là $\|a^*\| = \|a\|$ với mọi $a \in A$. Khi phép nhân trên A có đơn vị, ta bảo A là C^* -đại số có đơn vị.

- + Một $*$ -đồng cấu $\varphi: A \rightarrow B$ giữa các C^* -đại số A, B là một ánh xạ tuyến tính và nhân tính sao cho $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ với mọi $a \in A$. Nếu A, B có đơn vị và $\varphi(1_A) = 1_B$ thì φ được gọi là bảo toàn đơn vị.

• Lớp tất cả các C^* -đại số và các $*$ -đồng cấu giữa chúng lập thành một phạm trù gọi là *phạm trù các C^* -đại số* và ký hiệu là $\mathcal{C}^* - \text{alg}$.

• Cho B là một tập con khác rỗng của C^* -đại số A :

+ Ta bảo B là $*$ -đại số con của A nếu B đóng đối với bốn phép toán trên A (phép cộng, phép nhân, phép nhân vô hướng và phép đối hợp). Ngoài ra, nếu B còn đóng đối với chuẩn trên A thì B gọi là C^* -đại số con của A , ký hiệu $B \leq A$.

+ Ta bảo B là *idean* của A , ký hiệu $B \triangleleft A$, nếu $B \leq A$ và $ab, ba \in B$ với mọi $a \in A$ và mọi $b \in B$.

• Cho A là một C^* -đại số. Phần tử $p \in A$ được gọi là *phép chiếu* nếu $p = p^2 = p^*$. Tập các phép chiếu của A được ký hiệu là $\mathcal{P}(A)$; phần tử $u \in A$ được gọi là *phần tử unita* nếu $uu^* = 1 = u^*u$. Nhóm các phần tử unita của A được ký hiệu là $\mathcal{U}(A)$.

• Bây giờ giả sử A là một C^* -đại số (không nhất thiết có đơn vị). Đặt :

$$\tilde{A} = \{(a, \alpha) : a \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

với phép cộng và phép nhân vô hướng theo thành phần, còn phép nhân và phép đối hợp xác định như sau :

$$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (ab + \beta a + \alpha b, \alpha\beta) \quad , \quad (a, \alpha)^* = (a^*, \bar{\alpha})$$

Chú ý rằng $i(a) = (a, 0)$ và $\pi(a, \alpha) = \alpha$ lần lượt là $*$ -đơn cấu và $*$ -toàn cấu.

Với mỗi $x \in \tilde{A}$ ta đặt :

$$\|x\|_{\tilde{A}} = \sup \{\|ax\|_A : a \in A, \|a\|_A \leq 1\}$$

và định nghĩa :

$$\|x\|_{\tilde{A}} = \max \{\|ax\|_{\tilde{A}}, |\pi(x)|\}$$

Ta kiểm tra được $(\tilde{A}, \|\cdot\|_{\tilde{A}})$ là đầy đủ, đồng thời với mọi $x, y \in \tilde{A}$ thì :

$$\|xy\|_{\tilde{A}} \leq \|x\|_{\tilde{A}} \|y\|_{\tilde{A}} \quad , \quad \|x^*x\|_{\tilde{A}} = \|x\|_{\tilde{A}}^2$$

do đó $\tilde{A}$ là một C^* -đại số có đơn vị là $1_{\tilde{A}} = (0, 1)$. Ta gọi $\tilde{A}$ là C^* -đại số nhận được từ A bằng cách thêm vào phần tử đơn vị hay $\tilde{A}$ là *đơn vị hóa* của A .

+ Dãy $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{A} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \rightarrow 0$ là dãy khớp chẻ. Suy ra $A \triangleleft \tilde{A}$.

+ $\tilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$ khi và chỉ khi A có đơn vị.

• Bây giờ giả sử A là một C^* -đại số (không nhất thiết có đơn vị). Khi đó C^* -đại số $A \otimes \mathbb{K}$ được gọi là *ổn định hóa* của A . Một mô hình khác của ổn định hóa $A \otimes \mathbb{K}$ là C^* -đại số $\mathbb{K}A$ như sau : xét hệ quy nạp các C^* -đại số :

$$A \xrightarrow{\varphi_1} \text{Mat}_2(A) \xrightarrow{\varphi_2} \text{Mat}_3(A) \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

ở đó :

$$\varphi_n(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \text{Mat}_n(A), n \in \mathbb{N}$$

gọi $(\mathbb{K}A, \kappa_n)$ là giới hạn quy nạp của hệ quy nạp trên, ở đó $\kappa_n : \text{Mat}_n(A) \rightarrow \mathbb{K}A$ và đặt $\kappa = \kappa_1 : A \rightarrow \mathbb{K}A$. Khi đó, C^* -đại số $\mathbb{K}A$ gọi là ổn định hóa của A . Ta kiểm tra được hai tính chất quan trọng là : $\mathbb{K}A \cong A \otimes \mathbb{K}$ và $\mathbb{K}\mathbb{C} \cong \mathbb{K}$.

2. Đại số ma trận

• Với mỗi C^* -đại số A , ta ký hiệu $\text{Mat}_n(A)$ là tập tất cả các ma trận vuông cấp n với phần tử thuộc A . Ta đã biết $\text{Mat}_n(A)$ là một không gian véc tơ với phép cộng và phép nhân ma trận. Đặt $(a_{ij})^* = (a_{ij}^*)^t$ ta xác định được phép đối hợp trên $\text{Mat}_n(A)$. Để xây dựng chuẩn trên $\text{Mat}_n(A)$, ta chọn một không gian Hilbert $\mathcal{H}$ và một $*$ -đơn cấu $\varphi : A \rightarrow \mathbb{B}$. Gọi $\varphi_n : \text{Mat}_n(A) \rightarrow \mathbb{B}$ xác định bởi :

$$\varphi_n \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a_{11})\xi_1 + \cdots + \varphi(a_{1n})\xi_n \\ \vdots \\ \varphi(a_{n1})\xi_1 + \cdots + \varphi(a_{nn})\xi_n \end{pmatrix}, \quad \xi_j \in \mathcal{H}$$

và định nghĩa chuẩn trên $\text{Mat}_n(A)$ bởi

$$\|a\| = \|\varphi_n(a)\|, \quad \forall a \in \text{Mat}_n(A)$$

khi đó $\text{Mat}_n(A)$ trở thành một C^* -đại số, hơn nữa chuẩn này không phụ thuộc vào việc chọn biểu diễn của φ nếu nó là $*$ -đơn cấu và :

$$\max_{i,j} \|a_{ij}\| \leq \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\| \leq \sum_{i,j} \|a_{ij}\|$$

• Tính chất hàm tử : với mỗi $n \in \mathbb{N}$, một $*$ -đồng cấu $\varphi: A \rightarrow B$ luôn cảm sinh cho ta một $*$ -đồng cấu $\varphi: \text{Mat}_n(A) \rightarrow \text{Mat}_n(B)$ xác định bởi $\varphi((a_{ij})) = (\varphi(a_{ij}))$.

3. Vị nhóm Abel các phép chiếu

• Cho X là một không gian tôpô. Ta nói hai phần tử $a, b \in X$ *đồng luân* với nhau, ký hiệu $a \simeq b$, nếu tồn tại ánh xạ liên tục $v: [0,1] \rightarrow A$ sao cho $v(0) = a$ và $v(1) = b$. Ánh xạ liên tục v gọi là *đường liên tục từ a đến b* và ký hiệu là $t \mapsto v_t$.

+ Nếu A là một C^* -đại số có đơn vị, ta ký hiệu $\mathcal{U}_0(A) = \{u \in \mathcal{U}(A) : u \simeq 1\}$. Một tính chất quan trọng của $\mathcal{U}_0(A)$ là : phần tử $u \in A$ thuộc vào $\mathcal{U}_0(A)$ khi và chỉ khi $u = e^{ih_1} e^{ih_2} \dots e^{ih_n}$ với $n \in \mathbb{N}$ và $h_1, h_2, \dots, h_n$ là các *phần tử tự liên hợp* của A (tức là $h_j = h_j^*$ với mọi $j = 1, \dots, n$);

+ Trong một C^* -đại số A , nếu chọn đường liên tục $t \mapsto (1-t)a + tb$ thì bất kỳ hai phần tử $a, b \in A$ nào cũng đồng luân với nhau. Tuy nhiên, trên $\mathcal{P}(A)$ thì điều này không đúng.

• Trên $\mathcal{P}(A)$, ta xét hai quan hệ tương đương sau :

+ *Tương đương Murray – Neumann* : $p \sim q$ nếu tồn tại $v \in A$ sao cho $p = v^*v$ và $q = vv^*$;

+ *Tương đương unita* : $p \sim_u q$ nếu tồn tại phần tử unita $u \in \mathcal{U}(\tilde{A})$ sao cho $q = upu^*$.

• Bây giờ, với mỗi C^* -đại số A và mỗi $n \geq 1$, ký hiệu $\mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}(M_n(A))$ và $\mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A)$. Trên $\mathcal{P}_\infty(A)$, ta xét quan hệ tương đương $\sim_0$ và phép toán hai ngôi $\oplus$ như sau : với $p \in \mathcal{P}_n(A)$ và $q \in \mathcal{P}_m(A)$ thì :

+ $p \sim_0 q$ nếu tồn tại $v \in \text{Mat}_{m \times n}(A)$ sao cho $p = v^*v$ và $q = vv^*$, ở đó $M_{m \times n}(A)$ là tập các ma trận cấp $m \times n$ với phần tử thuộc A . Dễ thấy rằng khi $n = m$ thì $p \sim_0 q$ khi và chỉ khi $p \sim q$;

$$+ \quad p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_{n+m}(A).$$

Dễ dàng chứng minh được :

- + $p \sim_0 p \oplus 0_n$ với mọi $0_n \in M_n(A)$ và mọi $n \in \mathbb{N}$;
- + Nếu $p \sim_0 q$ và $p' \sim_0 q'$ thì $p \oplus p' \sim_0 q \oplus q'$;
- + $p \oplus q \sim_0 q \oplus p$;
- + Nếu $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ mà $pq = 0$ thì $p + q \in \mathcal{P}_n(A)$ và $p + q \sim_0 p \oplus q$;
- + $(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$.
- Đặt $\mathcal{D}(A) = \mathcal{P}_\infty(A) / \sim_0$. Trên $\mathcal{D}(A)$, ta định nghĩa phép toán :

$$[p]_{\mathcal{D}} + [q]_{\mathcal{D}} = [p \oplus q]_{\mathcal{D}}, \quad p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$$

ta kiểm tra được phép toán định nghĩa hợp lý và $(\mathcal{D}(A), +)$ là một vị nhóm Abel.

4. Nhóm K_0 của C^* -đại số có đơn vị

• Cho A là C^* -đại số có đơn vị. Ta định nghĩa $K_0(A) = S(\mathcal{D}(A), +)$. Ta ký hiệu $[\cdot]_0 : \mathcal{P}_\infty(A) \rightarrow K_0(A)$ xác định bởi :

$$[p]_0 = s([p]_{\mathcal{D}}), \quad p \in \mathcal{P}_\infty(A)$$

- Mô tả : nếu A là một C^* -đại số có đơn vị thì :

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)\} = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_n(A), n \in \mathbb{N}\}$$

ở đó :

$$([p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0) \Leftrightarrow (\exists k, l \in \mathbb{N} : p \oplus 1_k \sim_0 q \oplus 1_l)$$

$$([p]_0 - [s(p)]_0 = 0) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N} : p \oplus 1_k \sim_0 s(p) \oplus 1_k)$$

• Ta kiểm tra được $K_0 : \mathcal{C}^* - \text{alg} \rightarrow \mathcal{A}$ là một hàm tử xác định như sau :

+ $A \in \mathcal{C}^* - \text{alg}$ tương ứng với $K_0(A) \in \mathcal{A}$;

+ *-đồng cấu $\varphi : A \rightarrow B$ tương ứng với đồng cấu $K_0(\varphi) : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$

định bởi :

$$K_0(\varphi)([p]_0 - [s(p)]_0) = [\tilde{\varphi}(p)]_0 - [s(\tilde{\varphi}(p))]_0, \quad p \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$$

• Tính chất cơ bản của hàm tử K_0 :

+ $K_0(A \oplus B) \cong K_0(A) \oplus K_0(B)$ với mọi $A, B \in \mathcal{C}^* - \text{alg}$;

+ Tính khớp chẻ : K_0 biến mọi dãy khớp chẻ $0 \rightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \rightarrow 0$

thành dãy khớp chẻ $0 \rightarrow K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B) \rightarrow 0$;

+ Tính ổn định : với mọi $A \in \mathcal{C}^* - \text{alg}$ và mọi số tự nhiên n , ta luôn có $K_0(A) \cong K_0(\text{Mat}_n(A))$ và $K_0(A) \cong K_0(A \otimes \mathbb{K})$. Cụ thể hơn, K_0 biến *-đồng cấu :

$$\lambda_{n,A} : A \rightarrow \text{Mat}_n(A)$$

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

thành đẳng cấu $K_0(\lambda_{n,A}) : K_0(A) \xrightarrow{\cong} K_0(\text{Mat}_n(A))$.

Mệnh đề 1. $K_0(\mathbb{B}) = 0$.

Chứng minh.

Đồng nhất $\text{Mat}_n(\mathbb{B}) = \mathbb{B}^n$. Ánh xạ $\dim : \mathcal{P}(\mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ xác định bởi :

$$\dim(p) = \dim p(\mathcal{H}^n) \quad , \quad p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{B}) = \mathcal{P}(\mathbb{B}^n)$$

là một toàn ánh. Chú ý rằng, nếu p, q là các phép chiếu trong $\mathcal{P}(\mathbb{B}^n)$ thì

$\dim(p) = \dim(q)$ khi và chỉ khi $p \sim q$. Vì $\dim(p \oplus 0) = \dim(p)$ nên với mọi phép

chiều $p, q \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{B})$ thì $\dim(p) = \dim(q)$ khi và chỉ khi $p \sim_0 q$. Vì chiều có tính chất cộng nên $\dim(p \oplus q) = \dim(p) + \dim(q)$. Do đó, nếu đặt $d([p]_{\mathcal{G}}) = \dim(p)$ thì ta xác định hợp lý một đẳng cấu vị nhóm $d: \mathcal{D}(\mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Suy ra :

$$K_0(\mathbb{B}) = S(\mathcal{D}(\mathbb{B})) \cong S(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) = 0$$

❖

Mệnh đề 2. $K_0(\mathbb{K}) = \mathbb{Z}$.

Chứng minh.

Trước tiên, từ tính chất của ổn định hóa và tính ổn định của K_0 , ta suy ra :

$$K_0(\mathbb{K}) \cong K_0(\mathbb{K}\mathbb{C}) \cong K_0(\mathbb{C} \otimes \mathbb{K}) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong K_0(\text{Mat}_n(\mathbb{C}))$$

do đó ta sẽ tính $K_0(\text{Mat}_n(\mathbb{C}))$ thay vì $K_0(\mathbb{K})$. Cụ thể là : $K_0(\text{Mat}_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$.

Bây giờ, gọi $\text{Tr}: \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm vết định bởi $\text{Tr}((a_{ij})) = \sum_{j=1}^n a_{jj}$. Giả sử

$p, q \in \mathcal{P}(\text{Mat}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$. Ta chứng minh được 3 điều kiện sau là tương đương :

- i. $p \sim q$ (tương đương Murray – Newman);
- ii. $\text{Tr}(p) = \text{Tr}(q)$;
- iii. $\dim p(\mathbb{C}^n) - \dim q(\mathbb{C}^n)$;

hơn nữa nếu $p \sim q$ thì $p \approx q$ và $p \sim_u q$.

Với mỗi $g \in K_0(\text{Mat}_n(\mathbb{C}))$, từ sự mô tả K_0 , ta suy ra tồn tại $k \in \mathbb{N}$ và các phép chiếu $p, q \in \text{Mat}_k(\text{Mat}_n(\mathbb{C})) = \text{Mat}_{kn}(\mathbb{C})$ sao cho $g = [p]_0 - [q]_0$. Do đó :

$$K_0(\text{Tr})(g) = \text{Tr}(p) - \text{Tr}(q) = \dim(p(\mathbb{C}^{kn})) - \dim(q(\mathbb{C}^{kn}))$$

Rõ ràng $K_0(\text{Tr})(g) \in \mathbb{Z}$, tức là $K_0(\text{Tr}): K_0(\text{Mat}_n(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{Z}$. Ta khẳng định $K_0(\text{Tr})$ là một đẳng cấu. Thật vậy :

+ Nếu $K_0(\text{Tr})(g) = 0$ thì từ (i) suy ra $p \sim q$ và do đó $g = [p]_0 - [q]_0 = 0$. Do đó, $K_0(\text{Tr})$ là đơn cấu;

+ Mặt khác $\text{Im } K_0(\text{Tr}) \leq \mathbb{Z}$ và do $\mathbb{Z}$ Abel nên $\text{Im } K_0(\text{Tr}) \triangleleft \mathbb{Z}$. Hơn nữa, vì $K_0(\text{Tr})([e]_0) = 1 \in \text{Im } K_0(\text{Tr})$ nên $\text{Im } K_0(\text{Tr}) = \mathbb{Z}$, tức $K_0(\text{Tr})$ là toàn cấu.

Vì $K_0(\text{Tr}): K_0(\text{Mat}_n(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{Z}$ là đẳng cấu nên :

$$K_0(\mathbb{K}) \cong K_0(\text{Mat}_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$$

❖

5. Nhóm K_1 của C^* -đại số có đơn vị

• Với A là một C^* -đại số có đơn vị, ta ký hiệu $\mathcal{U}_n(A) = \mathcal{U}(\text{Mat}_n(A))$ và $\mathcal{U}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n(A)$. Trên $\mathcal{U}_\infty(A)$, ta xét phép toán hai ngôi $\oplus$ và quan hệ tương đương $\sim_1$ như sau : với $u \in \mathcal{U}_n(A)$ và $v \in \mathcal{U}_m(A)$ thì :

$$+ \quad u \oplus v = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{n+m}(A);$$

+ $u \sim_1 v$ nếu tồn tại $k \geq \max\{m, n\}$ sao cho $u \oplus 1_{k-n} \simeq v \oplus 1_{k-m}$ trong $\mathcal{U}_k(A)$, ở đó 1_r là đơn vị trong $\text{Mat}_r(A)$.

• Dễ dàng chứng minh được các mối liên hệ giữa $\oplus$ và $\sim_1$ sau :

+ $p \sim_1 p \oplus 1_n$ với mọi $p \in \mathcal{U}_\infty(A)$ và mọi $n \in \mathbb{N}$;

+ Nếu $u \sim_1 v$ và $u' \sim_1 v'$ thì $u \oplus u' \sim_1 v \oplus v'$ với mọi $u, u', v, v' \in \mathcal{U}_\infty(A)$;

+ $u \oplus v \sim_1 v \oplus u$ với mọi $u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$;

+ Nếu $u, v \in \mathcal{U}_n(A)$ thì $uv \sim_1 vu \sim_1 u \oplus v$ với mọi $n \in \mathbb{N}$;

+ $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ với mọi $u, v, w \in \mathcal{U}_\infty(A)$.

• Với mỗi $A \in \mathcal{C}^* - \text{alg}$, đặt $K_1(A) = \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) / \sim_1$. Ta ký hiệu lớp tương đương của $u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})$ trong $K_1(A)$ là $[u]_1$. Từ các tính chất trên, với phép toán :

$$[u]_1 + [v]_1 = [u \oplus v]_1 \quad , \quad u, v \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})$$

thì $(K_1(A), +)$ trở thành một nhóm Abel.

- Mô tả : nếu $A \in \mathcal{C}^* - \text{alg}$ thì $K_1(A) = \{[u]_1 : u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})\}$, ở đó :

$$([u]_1 \simeq [v]_1) \Leftrightarrow (u \sim_1 v)$$

$$[1]_1 = 0_{K_1(A)}$$

$$-[u]_1 = [u^*]_1$$

- Ta kiểm tra được $K_1 : \mathcal{C}^* - \text{alg} \rightarrow \mathcal{Ab}$ là một hàm tử xác định như sau :

+ $A \in \mathcal{C}^* - \text{alg}$ tương ứng với $K_1(A) \in \mathcal{Ab}$;

+ *-đồng cấu $\varphi : A \rightarrow B$ tương ứng với đồng cấu $K_1(\varphi) : K_1(A) \rightarrow K_1(B)$

xác định bởi :

$$K_0(\varphi)([p]_0 - [s(p)]_0) = [\tilde{\varphi}(p)]_0 - [s(\tilde{\varphi}(p))]_0, \quad p \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$$

- Tính chất cơ bản của hàm tử K_1 :

+ $K_1(A) \cong K_1(\tilde{A})$ với mọi $A \in \mathcal{C}^* - \text{alg}$;

+ $K_1(A \oplus B) \cong K_1(A) \oplus K_1(B)$ với mọi $A, B \in \mathcal{C}^* - \text{alg}$;

+ Tính khớp chẻ : K_1 biến mọi dãy khớp chẻ $0 \rightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \rightarrow 0$

thành dãy khớp chẻ $0 \rightarrow K_0(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_0(B) \rightarrow 0$;

+ Tính liên tục : nếu $\{A_n; \varphi_n\}$ là hệ quy nạp các C^* -đại số mà $\lim_{\rightarrow} A_n = A$ thì

$$\lim_{\rightarrow} K_1(A_n) \cong K_1(A) ;$$

+ Tính ổn định : $K_1(A) \cong K_1(\text{IK}A)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và mọi $A \in \mathcal{C}^* - \text{alg}$.

Mệnh đề 3. $K_1(\text{IB}) = 0$.

Chứng minh.

Với mọi $u \in \mathcal{U}_n(\text{IB})$, nếu ta chứng tỏ được $u \simeq 1_n$ thì suy ra $u \sim_1 1$ và do đó thì

$$[u]_1 = [1]_1 = 0_{K_1(\text{IB})} \text{ với mọi } u \in \mathcal{U}_n(\text{IB}) \text{ và mọi } n \in \mathbb{N} .$$

Trước tiên, ta thấy ánh xạ $\varphi : S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ xác định bởi :

$$\varphi(e^{i\theta}) = \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

là đo được Borel, bị chặn và $z = e^{i\varphi(z)}$ với mỗi $z \in S^1$.

Bây giờ, gọi $u \in \mathcal{U}_n(\mathbb{B}) = \mathcal{U}(\mathbb{B}^n)$. Khi đó $\varphi(u) = \varphi(u^*)$ trong $\mathbb{B}^n$ và $u = e^{i\varphi(u)}$. Do đó, $u \in \mathcal{U}_0(\mathbb{B}^n)$ tức là $u \approx 1$.

Vậy $[u]_1 = [1]_1 = 0_{K_1(\mathbb{B})}$ với mọi $u \in \mathcal{U}_n(\mathbb{B})$, tức là $K_1(\mathbb{B}) = 0$. ❖

Mệnh đề 4. $K_1(\mathbb{K}) = 0$.

Chứng minh.

Trước hết ta có $K_1(\mathbb{K}) \cong K_1(\mathbb{C} \otimes \mathbb{K}) \cong K_1(\mathbb{C}) \cong K_1(\text{Mat}_n(\mathbb{C}))$.

Vì $\mathcal{U}(\text{Mat}_k(\text{Mat}_n(\mathbb{C}))) = \mathcal{U}(\text{Mat}_{kn}(\mathbb{C})) = \mathcal{U}_{kn}(\mathbb{C})$ liên thông với mọi $k, n \in \mathbb{N}$ nên $\mathcal{U}_\infty(\text{Mat}_n(\mathbb{C}))/\sim_1$ chỉ có một phần tử. Do đó $K_1(\text{Mat}_n(\mathbb{C})) = 0$. ❖

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Khu Quốc Anh, Nguyễn Doãn Tuấn (2005), *Lý thuyết liên thông và Hình học Riemann*, Nxb Đại Học Sư Phạm, Hà Nội.
2. Nguyễn Hữu Việt Hưng (1999), *Đại số đại cương*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.
3. Hà Huy Khoái, Nguyễn Văn Khuê, Nguyễn Xuân My, Hoàng Tụy (1979), *Mở đầu một số lý thuyết hiện đại của Tô pô và Đại số*, Tập 1, Nxb Đại học & Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội.
4. Lang S. (1978), *Đại số*, Nxb Đại học & Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội.
5. Lê Anh Vũ (1990), *Không Gian Phân Lá Tạo Bởi Các K–Quỹ Đạo Chiều Cực Đại Của Lớp Các Nhóm Lie MD4*, Luận án Phó Tiến Sĩ Toán–Lý, Viện Toán Học–Viện Khoa Học Việt Nam, Hà Nội.

Tiếng Anh

6. Blackadar B. (1986), *K–Theory for Operator Algebras*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–London–New York–Paris–Tokyo.
7. Bliznyakov N., Borisovich YU., Izrailevich YA., Fomenko T. (1985), *Introduction to Topology*, Mir Publishers, Moscow.
8. Brodzki J. (1996), "An introduction to K–Theory and Cyclic Cohomology", *arXiv : funct–an*, (9606001v1), pp. 5 – 98.
9. Connes A. (1982), *A Survey of Foliations and Operator Algebras*, Pure Mathematics, American Mathematics Society.
10. Connes A. (1981), *An Analogue of the Thom Isomorphism for Crossed Products of a C^* –algebra by an Action of $\mathbb{R}$* , Academic Press, New York and London.
11. Diep D.N. (1996), *Non Commutative Geometry Methods for Group C^* –algebras*, Institute of Mathematics, Viet Nam.

12. Friedlander E.M., Grayson D.R. (2005), *Handbook of K–Theory*, Volume 1 & 2, Springer–Verlag, Germany.
13. Hatcher A. (2002), *Algebraic Topology*, Cambridge University, London.
14. Landsman N.P. (2003), *Lecture Notes on C^* –Algebras and K–Theory*, University of Amsterdam, Netherlands.
15. Murphy G.J. (1990), *C^* –Algebras and Operator Theory*, Academic Press, United State of America.
16. Pederson G.K. (1979), *C^* –Algebras and Their Automorphism Groups*, Academic Press, New York.
17. MacLane S. (1963), *Homology*, Springer–Verlag, Germany.
18. Rordam M., Larsen F., Laustsen N. (2000), *An Introduction to K–Theory for C^* –Algebras*, Cambridge University Press, United Kingdom.
19. Sunder V.S. (2008), *Operator Algebras*, Institute of Mathematical Sciences, Chennai, India.
20. Taylor J.L. (1975), "5. Banach Algebras and Topology", *Algebras in Analysis*, pp. 118–186, Academic Press, London–New York–San Francisco.
21. Torpe A.M. (1985), "K–Theory for the Leaf Space of Foliations by Reeb Components", *Journal of Functional Analysis*, pp.15–71.
22. Vu L.A. (1990), "On the structure of the C^* –Algebra of the Foliation formed by the K–Orbits of maximal dimendion of the Real Diamond Group", *Journal of Operator theory*, pp. 217–237.
23. Vu L.A. (1990), "On the Foliations formed by the Generic K–Orbits of the MD4–Groups", *Acta Mathematica Vietnamica*, Vol. 15, (2), pp. 39–54.
24. Wegge–Olsen N.E. (1993), *K–Theory and C^* –Algebras : A Friendly Approach*, Oxford University Press, Oxford–New York–Tokyo.
25. Williams D.P. (2007), *Crossed Products of C^* –Algebras*, American Mathematical Society, United State of America.