

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

NGUYỄN VĂN ĐỨC

**KHÁI NIỆM KHOẢNG, ĐOẠN TRONG PHÉP TÍNH
ĐẠO HÀM, NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN**

Chuyên ngành: Lý luận và phương pháp dạy học môn Toán
Mã số: 60 14 10

LUẬN VĂN THẠC SĨ GIÁO DỤC HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. TRẦN LƯƠNG CÔNG KHANH**

Thành phố Hồ Chí Minh – 2011

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Trần Lương Công Khanh, người đã tận tình hướng dẫn tôi về mặt nghiên cứu khoa học và mất khá nhiều công sức, thời gian để giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn: PGS.TS. Lê Thị Hoài Châu, PGS.TS. Lê Văn Tiến, TS. Đoàn Hữu Hải, TS. Trần Lương Công Khanh, TS. Nguyễn Ái Quốc, TS. Lê Thái Bảo Thiên Trung đã nhiệt tình giảng dạy, truyền thụ kiến thức và niềm say mê đối với Didactic Toán.

Tôi xin trân trọng cảm ơn: TS. Alain Birebent đã nhiệt tình góp ý hướng nghiên cứu đề tài và giải đáp những thắc mắc cần thiết cho chúng tôi.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn:

- Ban lãnh đạo và chuyên viên Phòng KHCN – SDH trường ĐHSP TP.HCM đã tạo điều kiện thuận lợi cho chúng tôi khi được học tập tại trường.

- Ban giám hiệu trường THPT Lộc Hưng cùng với các đồng nghiệp thuộc Bộ môn Toán đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong lúc học tập tại trường ĐHSP TP.HCM.

- Ban Giám hiệu và các giáo viên của các trường THPT Trần Quốc Đại, THPT Nguyễn Trãi, THPT Lê Quý Đôn, THPT Quang Trung Tỉnh Tây Ninh đã nhiệt tình giúp đỡ và sắp xếp cho tôi thực nghiệm tại Quý trường.

Xin gửi những lời cảm ơn chân thành đến các bạn trong lớp Didactic khóa 18 đã cùng tôi học tập, trải qua những ngày vui buồn và những khó khăn trong khóa học.

Sau cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các thành viên trong gia đình tôi, luôn động viên và giúp đỡ tôi về mọi mặt.

Nguyễn Văn Đức

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN.....	2
MỤC LỤC	3
MỞ ĐẦU	4
1. Ghi nhận ban đầu và câu hỏi xuất phát	4
2. Khung lý thuyết tham chiếu	4
3. Câu hỏi nghiên cứu	5
4. Phương pháp nghiên cứu.....	6
5. Cấu trúc luận văn	6
CHƯƠNG 1: MỐI QUAN HỆ THỂ CHẾ CỦA KHÁI NIỆM KHOẢNG, ĐOẠN VỚI CÁC ĐỐI TƯỢNG ĐẠO HÀM, NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN TRONG CHƯƠNG TRÌNH ĐẠI HỌC.....	8
1.1. Khái niệm khoảng, đoạn.....	8
1.2. Khái niệm giới hạn hàm số.....	9
1.3. Khái niệm đạo hàm	10
1.4. Khái niệm nguyên hàm	14
1.5. Khái niệm tích phân xác định.....	18
CHƯƠNG 2: SỰ VẬN HÀNH CỦA KHOẢNG, ĐOẠN TRONG CÁC KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM, NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN Ở CHƯƠNG TRÌNH TOÁN PHỔ THÔNG	29
2.1. Tiến trình hình thành khái niệm khoảng, đoạn.....	30
2.1.1. Khái niệm khoảng, đoạn trước khi được định nghĩa.....	30
2.1.2. Khái niệm khoảng, đoạn khi được định nghĩa	31
2.2. Đạo hàm	32
2.2.1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm.....	32
2.2.2. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng	36
2.3. Đạo hàm cấp cao.....	50
2.5. Đạo hàm	65
2.5.1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm.....	65
2.5.2. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng	66
CHƯƠNG 3: NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM.....	70
3.1. Thực nghiệm đối với giáo viên.....	70
3.1.1. Giới thiệu thực nghiệm.....	70
3.1.2. Phân tích Posteriori	76
3.2. Thực nghiệm đối với học sinh	79
3.2.1. Giới thiệu thực nghiệm.....	79
3.2.2. Phân tích apriori.....	80
KẾT LUẬN.....	89
PHỤ LỤC	91
Phụ lục 1. Phiếu câu hỏi dành cho giáo viên.....	91
Phụ lục 2. Phiếu câu hỏi dành cho học sinh.....	93

MỞ ĐẦU

1. Ghi nhận ban đầu và câu hỏi xuất phát

Khái niệm khoảng, đoạn tham gia tường minh hoặc ngầm ẩn vào việc xây dựng các định nghĩa và định lý của chương trình Toán trung học phổ thông nhưng chưa được quan tâm nghiên cứu đúng mức trên phương diện học thuật lẫn thực hành giảng dạy. Nghiên cứu của chúng tôi xuất phát từ những câu hỏi ban đầu sau:

1.1. Khái niệm khoảng, đoạn xuất hiện trong Toán học như thế nào, phục vụ cho những kiểu bài toán gì?

1.2. Trong chương trình Toán trung học phổ thông hiện hành, các khái niệm khoảng, đoạn được đưa vào như thế nào, nhằm mục đích gì?

1.3. Việc không quan tâm đúng mức đến vai trò của khoảng, đoạn dẫn đến những sai lầm nào trong dạy và học Toán ở trung học phổ thông?

Giới hạn đề tài

Trong phạm vi một luận văn thạc sĩ, chúng tôi tự giới hạn đề tài ở việc nghiên cứu sự vận hành của các khái niệm khoảng, đoạn trong việc giảng dạy các khái niệm đạo hàm, nguyên hàm và tích phân ở trung học phổ thông.

2. Khung lý thuyết tham chiếu

Để tìm kiếm các yếu tố cho phép trả lời những câu hỏi trên, chúng tôi đặt nghiên cứu trong khuôn khổ của lý thuyết didactic, cụ thể là hợp đồng didactic và lý thuyết nhân chủng học didactic.

1.1. Trong lý thuyết nhân chủng học didactic, chúng tôi sử dụng các khái niệm quan hệ thể chế và quan hệ cá nhân đối với một tri thức.

Quan hệ $R(I,O)$ của thể chế I với tri thức O là tập hợp những tác động qua lại mà thể chế I có với tri thức O . Nghiên cứu mối quan hệ thể chế sẽ cho chúng tôi biết đối tượng tri thức “khái niệm khoảng, đoạn” và xuất hiện như thế nào, nhằm mục đích gì, phục vụ cho những kiểu bài toán nào?

Quan hệ $R(X,O)$ của cá nhân X với tri thức O là tập hợp những tác động qua lại mà X có thể có với O : thao tác nó, sử dụng nó, nói về nó, nghĩ về nó, ... Quan hệ cá nhân với một đối tượng O chỉ rõ cách thức mà X biết O . Việc học tập là sự điều chỉnh mối quan hệ của một cá nhân X với O . Hoặc quan hệ này bắt đầu được thiết lập (nếu nó chưa từng tồn tại), hoặc quan hệ này bị biến đổi (nếu nó đã tồn tại). Nghiên cứu mối quan hệ cá nhân sẽ giúp chúng tôi thấy được việc không quan tâm đúng mức đến vai

trò của khoảng, đoạn của chủ thể hệ thống dạy học (giáo viên, học sinh) dẫn đến những sai lầm nào trong dạy và học Toán ở trung học phổ thông.

Mối quan hệ thể chế $R(I,O)$, quan hệ cá nhân $R(X,O)$ được xác định thông qua nghiên cứu các tổ chức toán học, các *praxéologie*. *Praxéologie* là một khái niệm do Yves Chevallard (1998) đưa ra mà việc phân tích chúng cho phép ta xác định mối quan hệ thể chế đối với đối tượng tri thức O . Theo Chevallard, mỗi *praxéologie* là một bộ phận gồm bốn thành phần $[T, \tau, \theta, \Theta]$, trong đó T là một kiểu nhiệm vụ, τ là kỹ thuật cho phép giải quyết T , θ là công nghệ giải thích cho kỹ thuật τ , Θ là lý thuyết giải thích cho công nghệ θ .

1.2. Hợp đồng didactic:

Hợp đồng didactic là một sự mô hình hoá các quyền lợi và nghĩa vụ ngầm ẩn của giáo viên và học sinh đối với các đối tượng tri thức toán học đem giảng dạy. Thông thường, nó là tập hợp những quy tắc phân chia và hạn chế trách nhiệm của mỗi bên, học sinh và giáo viên, đối với một tri thức toán được giảng dạy. Hợp đồng didactic là quy tắc giải mã các hoạt động của quá trình học tập. chỉ có thể thấu hiểu ý nghĩa của những gì định hướng cách ứng xử của giáo viên và học sinh –điều chỉnh chủ yếu đối với phân tích didactic-khi giải thích một cách rõ ràng và chính xác những sự kiện đã quan sát bằng khuôn khổ của hợp đồng. Nghiên cứu hợp đồng didactic giúp chúng tôi tạo một sự biến loạn trong hệ thống giảng dạy, sao cho có thể đặt những thành viên chủ chốt trong một tình huống khác lạ nhằm mục đích phá vỡ hợp đồng để thấy được vai trò của các khái niệm này khi nó vận hành trong mỗi phát biểu mà nó hiện diện.

3.Câu hỏi nghiên cứu

Sau đây, chúng tôi phát biểu lại các câu hỏi ban đầu dưới ánh sáng của khung lý thuyết tham chiếu đã chọn. Mục đích của luận văn là trả lời các câu hỏi nghiên cứu mới phát biểu này.

Q1 Ở cấp độ tri thức khoa học, các khái niệm khoảng, đoạn xuất hiện như thế nào? Trong định nghĩa đạo hàm, nguyên hàm và tích phân, chúng có vai trò gì và phục vụ cho những kiểu bài toán nào?

Q2 Ở cấp độ tri thức cần giảng dạy trong thể chế dạy học ở bậc THPT, khái niệm khoảng, đoạn được sgk hiện hành giới thiệu như thế nào? Vai trò của chúng xuất hiện trong các bài đạo hàm, nguyên hàm và tích phân có được các tác giả tính đến không? Chúng phục vụ cho những kiểu bài toán nào?

Q3 Những quy tắc nào của hợp đồng didactic được hình thành giữa giáo viên và học sinh trong quá trình dạy-học khái niệm đạo hàm, nguyên hàm và tích phân có sự tác động của khái niệm khoảng, đoạn? Việc không hiểu đúng mức đến vai trò của khoảng, đoạn dẫn đến những sai lầm nào trong dạy và học Toán ở trung học phổ thông?

4. Phương pháp nghiên cứu

Từ những câu hỏi ban đầu, chúng tôi lựa chọn khung lý thuyết tham chiếu phù hợp, trên cơ sở đó đặt ra những câu hỏi nghiên cứu **Q1, Q2, Q3**.

Đối với câu hỏi **Q1**, do không có điều kiện về tư liệu cũng như về thời gian nên chúng tôi không thể dấn thân vào một nghiên cứu khoa học luận đầy đủ dựa trên các tài liệu lịch sử toán. Vì vậy, chúng tôi sẽ làm rõ mối quan hệ thể chế nhờ vào phân tích một số định nghĩa được xây dựng trên khái niệm khoảng, đoạn của các giáo trình toán dùng ở các trường đại học. Đây cũng là cơ sở để đi đến kết luận nguyên nhân dẫn đến sự xuất hiện của các khái niệm này. Kế đến là việc phân tích vai trò của chúng trong việc giải quyết các kiểu bài toán của đạo hàm, nguyên hàm và tích phân. Kết quả thu được cho phép chúng tôi đưa ra câu trả lời cho câu hỏi **Q1** và được trình bày trong **chương 1: Nghiên cứu khoa học luận về các khái niệm khoảng, đoạn**.

Đối với câu hỏi **Q2**, chúng tôi cũng tiến hành phân tích mối quan hệ thể chế (giáo dục phổ thông) với đối tượng tri thức khái niệm khoảng, đoạn qua việc phân tích các định nghĩa được hình thành trên các khái niệm khoảng, đoạn từ sách giáo khoa, sách giáo viên và phân tích các kiểu bài toán của các bài đạo hàm, nguyên hàm mà việc giải quyết phải nhờ vào các khái niệm khoảng, đoạn. Việc làm này giúp chúng tôi trả lời được vai trò của chúng có được thể chế quan tâm không? Kết quả này sẽ được trình bày trong **chương 2: Phân tích mối quan hệ thể chế đối với các khái niệm khoảng, đoạn**.

Kết quả nghiên cứu trong hai chương đầu tiên cho phép chúng tôi rút ra hợp đồng didactic về sự vận hành của khoảng, đoạn trong các bài toán liên quan đến đạo hàm, nguyên hàm, tích phân. Các quy tắc của hợp đồng được phát biểu và kiểm chứng bằng thực nghiệm trong chương 3: Thực nghiệm.

5. Cấu trúc luận văn

Luận văn có cấu trúc chi tiết như sau:

Mở đầu

Chương 1. Nghiên cứu khoa học luận về các khái niệm khoảng, đoạn

1.1. Sơ lược về sự xuất hiện các khái niệm khoảng, đoạn trong lịch sử Toán học (Các điểm chính cần nghiên cứu trong luận văn: Các khái niệm này xuất hiện để giải quyết bài toán gì? Tiến triển của chúng

trong lịch sử Toán học? Mối liên hệ của chúng với khái niệm số thực, nhất là việc xây dựng tập $\mathbf{R}$ và các tính chất tôpô của đường thẳng thực?)

1.2. Vai trò của các khái niệm khoảng, đoạn trong việc giải quyết một số kiểu bài toán liên quan đến đạo hàm, nguyên hàm và tích phân trong chương trình đại học

1.3. Kết luận chương 1

Chương 2. Phân tích mối quan hệ thể chế đối với các khái niệm khoảng, đoạn

2.1. Các khái niệm khoảng, đoạn trong chương trình Toán phổ thông

2.2. Sự can thiệp của khoảng, đoạn trong một số kiểu bài toán liên quan đến đạo hàm, nguyên hàm và tích phân

2.3. Kết luận chương 2

Chương 3. Thực nghiệm

3.1. Tóm tắt kết quả 2 chương đầu

3.2. Phát biểu giả thuyết nghiên cứu

3.3. Thực nghiệm đối với giáo viên

3.4. Thực nghiệm đối với học sinh

3.5. Kết luận chương 3

Kết luận chung

CHƯƠNG 1: MỐI QUAN HỆ THỂ CHẾ CỦA KHÁI NIỆM KHOẢNG, ĐOẠN VỚI CÁC ĐỐI TƯỢNG ĐẠO HÀM, NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN TRONG CHƯƠNG TRÌNH ĐẠI HỌC

Trên phương diện công cụ, khoảng, đoạn được sử dụng để thay thế cho các tập con của tập hợp số thực, chức năng chủ yếu nhằm làm đơn giản hóa cách viết¹. Trên phương diện lý thuyết, khoảng, đoạn trở nên quan trọng khi nó được liên kết với một khái niệm nào đó. Trong chương này, nghiên cứu của chúng tôi chỉ quan tâm đến sự tham gia của các khái niệm *khoảng, đoạn* trong việc xây dựng các khái niệm *giới hạn của hàm số tại một điểm, đạo hàm, nguyên hàm và tích phân* được trình bày trong tập 1, giáo trình *Giải tích toán học* của các tác giả Vũ Tuấn, Phan Đức Thành, Ngô Xuân Sơn (kí hiệu M). Chúng tôi chọn giáo trình này vì nó thường được sử dụng làm tài liệu giảng dạy và học tập trong khoa Toán các trường đại học sư phạm trên toàn quốc.

1.1. Khái niệm khoảng, đoạn

Trong lịch sử toán học, những ý tưởng manh nha về khoảng, đoạn xuất hiện sớm hơn, khi giải các bất phương trình và hệ bất phương trình đại số.

Trong giáo trình, sau khi giới thiệu khái niệm tập hợp và các định nghĩa ánh xạ, số thực. Các tác giả đã định nghĩa khoảng, đoạn, nửa khoảng, nửa đoạn như sau:

Cho hai số thực a và b ($a < b$). Ta gọi tập hợp mọi số thực x thỏa mãn điều kiện $a < x < b$ là khoảng (a, b) , tập hợp các số thực x thỏa mãn điều kiện $a \leq x \leq b$ là đoạn $[a, b]$. [28]

Tập hợp mọi số thực x thỏa mãn điều kiện $a \leq x < b$ (hay $a < x \leq b$) được gọi là các nửa đoạn (hoặc nửa khoảng) và được kí hiệu lần lượt là $[a, b)$, $(a, b]$ [29]

Như vậy, để định nghĩa khoảng, đoạn, nửa khoảng, nửa đoạn đòi hỏi phải có khái niệm tập hợp và tập số thực $\mathbb{R}$.

Trong giáo trình này, các tác giả chỉ đề cập đến khoảng, đoạn, nửa khoảng, nửa đoạn bị chặn nhưng trong chú ý về tính bị chặn của hàm số, các tác giả lại nhận xét:

Có những hàm số không bị chặn trong một khoảng nào đó nhưng có thể bị chặn trên (hoặc dưới) trong khoảng đó. Chẳng hạn hàm số $y = \frac{1}{x}$ không bị chặn trong khoảng $(0, +\infty)$ nhưng bị chặn dưới trong khoảng đó.

[40]

¹ Trong một vài trường hợp, việc sử dụng ký hiệu khoảng, đoạn có thể trở nên *phức tạp* hơn việc sử dụng ký hiệu khác. Có thể đơn cử ví dụ về hai cách biểu diễn tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ hoặc $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$.

Mặc dù không được định nghĩa chính thức nhưng các tác giả đã ngầm thừa nhận kí hiệu $(0, +\infty)$ là một khoảng. Từ đây, cho thấy mục đích của các tác giả chỉ nhằm củng cố một số định nghĩa khoảng, đoạn, nửa khoảng, nửa đoạn đã được giới thiệu ở bậc phổ thông.

Việc xây dựng các định nghĩa đạo hàm, nguyên hàm phải đặt trên cơ sở của định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm. Vì vậy, nghiên cứu của chúng tôi cũng bắt đầu từ phân tích giới hạn hàm số tại một điểm.

1.2. Khái niệm giới hạn hàm số

Để chuẩn bị cho định nghĩa khái niệm *giới hạn của hàm số tại một điểm*, giáo trình đưa vào khái niệm *điểm giới hạn*:

Cho tập số thực E . Số thực x_0 được gọi là một điểm giới hạn của tập E nếu mọi lân cận (dù với bán kính $\varepsilon > 0$ nhỏ như thế nào) của điểm x_0 cũng chứa ít nhất một điểm khác x_0 thuộc E .

Định nghĩa trên là sự đặc biệt hóa (với mêtric thông thường trên $\mathbf{R}$) của định nghĩa khái niệm *điểm giới hạn* trong không gian tôpô mà chúng tôi nhắc lại dưới đây cùng với 2 khái niệm liên quan là *điểm dính*, *điểm cô lập*.

Điểm dính của một tập hợp A trong không gian tôpô là một điểm mà mọi lân cận của nó có giao không rỗng với A . Tập hợp các điểm dính của A tạo thành bao đóng của A .

Điểm cô lập của một tập hợp A trong không gian tôpô là điểm của A mà có một lân cận không chứa điểm nào khác của A .

Điểm giới hạn của một tập hợp A trong một không gian tôpô là điểm x mà trong mỗi lân cận của nó có ít nhất một điểm của A khác x . Như vậy điểm giới hạn là điểm dính mà không phải là điểm cô lập.

Sau khi định nghĩa khái niệm *điểm giới hạn*, giáo trình định nghĩa khái niệm *giới hạn của hàm số tại một điểm*:

Cho hàm số f , xác định trên tập $X \subseteq \mathbf{R}$, lấy giá trị trên $\mathbf{R}$; x_0 là một điểm giới hạn của tập X .

Định nghĩa: Số l được gọi là giới hạn của hàm số f khi x dần đến x_0 nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho ta có $|f(x) - l| < \varepsilon$ (tức là $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$) với mọi $x \in X$ mà $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ (tức là $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$; $x \neq x_0$).

Rõ ràng để xây dựng định nghĩa giới hạn hàm số khi x dần đến x_0 , một điều kiện tiên quyết là x_0 là điểm giới hạn của tập X . Vì tập hợp các điểm giới hạn của (a, b) là $[a, b]$ nên ở bậc trung học phổ thông, việc xét giới hạn của hàm số tại một điểm thuộc khoảng, đoạn xác định của hàm số đó luôn thỏa điều kiện tiên quyết này mà không cần phải đưa vào các khái niệm tôpô liên quan. Để thấy được vai trò ngầm ẩn của khái niệm khoảng, đoạn trong việc xét giới hạn của hàm số tại một điểm, chúng ta hãy xét hai ví dụ:

Cho hàm số $f: \{-1\} \cup (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

Dù $-1 \in D_f$, ta không xét giới hạn của f tại -1 vì -1 không phải là điểm giới hạn của D_f .

Cho hàm số $g: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto g(x) = x^2$$

Dù $0 \notin D_g$ nhưng 0 là điểm giới hạn của D_g nên ta có thể xét giới hạn của g tại 0 .

Ta thấy biểu thức giải tích của f và g giống nhau. Hai hàm số f và g chỉ khác nhau ở tập xác định. D_f không phải là một khoảng nên có thể tồn tại một điểm của D_f mà tại đó ta không thể xét giới hạn của f . D_g là một khoảng nên có thể xét giới hạn của g tại mọi điểm thuộc $\overline{D_g}$.

Trên $\mathbf{R}$ với mêtric thông thường, tập các điểm giới hạn (bao đóng) của khoảng (a, b) là đoạn $[a, b]$, tập các điểm giới hạn (bao đóng) của đoạn $[a, b]$ là chính nó.

Mặc dù vai trò của khoảng trong định nghĩa giới hạn hàm số được thể hiện một cách ngầm ẩn nhưng giá trị của nó thì không thể nghĩ bàn. Nhờ vào khoảng mà ta nhận biết được đâu là điểm giới hạn của tập xác định của hàm số, một trong những điều kiện thiết yếu trước khi tính giới hạn đồng thời chỉ ra được sự tồn tại $x \in X$ mà $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ là cơ sở cho việc kiểm tra $f(x)$ thỏa mãn $|f(x) - l| < \varepsilon$. Có thể khẳng định rằng trong định nghĩa giới hạn hàm số chưa từng đề cập đến khái niệm khoảng nhưng tác động của nó đã quyết định khả năng tồn tại của định nghĩa.

Như vậy, giáo trình chỉ xét giới hạn của hàm số f tại những điểm x_0 là điểm giới hạn của tập xác định X . Điều này một mặt không đòi hỏi $x_0 \in X$, mặt khác đảm bảo rằng X có chứa những điểm nằm gần x_0 “một cách tùy ý” (với mêtric thông thường trên $\mathbf{R}$). Khi đó, giới hạn l của f tại x_0 là giá trị “gần” $f(x)$ nhất khi x tiến “gần” đến x_0 .

1.3. Khái niệm đạo hàm

Trước khi định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm, các tác giả trình bày hai kết quả nghiên cứu trang 139 $\rightarrow$ 140:

Tìm cách tính vận tốc tức thời

Ta nhận thấy rằng nếu khoảng thời gian $t - t_0$ càng bé thì vận tốc trung bình:

$$v_{tb} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

cho ta hiểu biết càng chính xác về sự nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm đó. Do nhận xét đó tự nhiên ta đi đến định nghĩa sau đây về vận tốc tức thời của một chuyển động (không đều).

Ta coi giới hạn

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (3)$$

là vận tốc tức thời của chuyển động thẳng $s = f(t)$ tại thời điểm t_0 . Nếu kí hiệu $t - t_0 = \Delta t$, $f(t) - f(t_0) = \Delta f = \Delta s$ thì giới hạn (3) sẽ được viết là

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (4)$$

Tìm cách tính tỉ khối địa phương của một thanh không đồng chất

Ta sẽ chọn một trong các đầu mút của thanh (chẳng hạn A) làm gốc quy chiếu O và lấy chiều từ đầu mút này đến đầu mút kia (từ A đến B) làm chiều dương thì mỗi điểm trên thanh sẽ hoàn toàn xác định bởi hoành độ của điểm đó; lúc đó khối lượng m của đoạn OM ($\overline{OM} = x$) của thanh là một hàm số theo x : $m = f(x)$.

Giả sử muốn xét sự phân bố vật chất tại điểm x_0 . Ta nhận thấy rằng nếu chiều dài $x - x_0$ càng bé thì tỉ khối trung bình

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cho ta biết càng chính xác về sự phân bố vật chất của thanh ở lân cận điểm x_0 . Vì vậy tự nhiên ta đưa ra định nghĩa:

Ta sẽ coi giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (6)$$

là tỉ khối địa phương của thanh thẳng AB tại điểm x_0 . Tỉ số (6) có thể viết

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (7)$$

nếu kí hiệu $\Delta f = f(x) - f(x_0)$; $\Delta x = x - x_0$

Nguyên nhân dẫn đến định nghĩa đạo hàm được các tác giả giải thích:

Từ (4) và (7) ta thấy việc tính vận tốc tức thời của một chuyển động thẳng không đều, tính tỉ khối địa phương của một thanh thẳng không đồng chất đưa đến cùng một bài toán là tính giới hạn của tỉ số giữa số gia của hàm số và số gia của đối số.

Do vậy để giải quyết đồng thời hai bài toán trên (và tất cả những bài toán tương tự) ta đưa ra khái niệm đạo hàm dưới đây:

Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Giả sử $y = f(x)$ là một hàm số xác định trong khoảng (a, b) và x_0 là một điểm tùy ý trong khoảng đó. Ta thành lập tỉ số

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x_0 + \Delta x \in (a, b)) \quad (1) \quad [141]$$

Nếu tỉ số đó có giới hạn (hữu hạn) khi $\Delta x \rightarrow 0$ thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và viết

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2)$$

Quá trình hình thành định nghĩa đã cho thấy, có rất nhiều bài toán dẫn đến kết quả phải tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Sau khi đặt $\Delta y = f(x) - f(x_0)$; $\Delta x = x - x_0$ các tác giả thừa nhận nếu một trong hai

giới hạn hữu hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tồn tại thì bằng nhau, ta cũng có thể chứng

minh được mối quan hệ này bằng định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm. Vì thế, đạo hàm của hàm số tại một điểm cũng được định nghĩa thông qua sự tồn tại hữu hạn của giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Theo

cách này, điều kiện hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) và $x_0 \in (a, b)$ có hai chức năng vừa đảm

bảo biểu thức $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ xác định trên $(a; b) \setminus \{x_0\}$ vừa đảm bảo x_0 là điểm giới hạn của khoảng $(a;$

$b) \setminus \{x_0\}$ vì $\forall \delta > 0, \exists x \in (a, b)$ sao cho $0 < |x - x_0| < \delta$. Rõ ràng nếu thay khoảng (a, b) bằng một tập con nào đó của $\mathbf{R}$ thì có thể định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm sẽ không thành lập, chẳng hạn không thể xét đạo hàm tại bất kì điểm x_0 nào thuộc $\mathbf{N}$ đối với hàm số

$$g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \mapsto g(x) = x^2$$

vì cơ bản các điểm này không phải là điểm giới hạn của $\mathbf{N}$ dẫn đến không xét được giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Trở lại giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, các tác giả mặc nhiên thừa nhận $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ là một hàm số, các kí hiệu $\Delta x = x$

$- x_0$, $\Delta x \rightarrow 0$ cho biết Δx là biến độc lập của hàm số. Ngoài chú thích $x_0 + \Delta x \in (a, b)$, các tác giả không đề cập gì tới tập xác định của hàm số cũng như mối quan hệ giữa tập đó và số 0.

Rõ ràng các điều kiện quan trọng trước khi xét sự tồn tại của đạo hàm như: hàm số xác định trên khoảng và 0 phải thuộc khoảng đó đã không được các tác giả kiểm tra một cách chặt chẽ. Theo chúng

tôi, khoảng xác định của hàm số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ được chỉ ra nhờ vào khoảng xác định của hàm số f , giả sử hàm số

f xác định trên khoảng (a, b) , $x_0 \in (a, b)$ thì dễ dàng chứng minh được khoảng $(a - x_0, b - x_0)$ là khoảng

xác định của hàm số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ và 0 thuộc khoảng $(a - x_0, b - x_0)$.

Theo sau định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm, các tác giả trình bày:

Định nghĩa đạo hàm của hàm số

Nhận định của các tác giả trước khi trình bày định nghĩa:

Rõ ràng giá trị của giới hạn (2) phụ thuộc vào x_0 cho nên f' là một hàm số. Miền xác định của hàm số f' là tập hợp mọi điểm x mà ở đó tồn tại giới hạn (2).

Hàm số f' được gọi là đạo hàm của hàm số f và số $f'(x_0)$ được gọi là đạo hàm của hàm số f tại điểm $x = x_0$ nó còn được kí hiệu như sau:

$$f'(x_0) = [f(x)]'_{x=x_0} \quad [141]$$

Theo chúng tôi vẫn còn một yếu tố quan trọng để f' xác định một hàm số đó là tính duy nhất của giá trị được suy ra từ tính duy nhất của giới hạn. Để hàm số f' tồn tại thì hàm số f trước tiên phải thỏa điều kiện xác định trên khoảng nhưng tập xác định của hàm số f' là một tập con bất kì của tập số thực $\mathbb{R}$.

Tương tự như giới hạn hàm số, đạo hàm cũng đề cập đến đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải:

Đạo hàm một phía

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x: x_0 \leq x < b$. Nếu tồn tại giới hạn một phía

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

thì ta nói rằng hàm f đã cho có đạo hàm bên phải tại điểm x_0 và $f'_+(x_0)$ còn được kí hiệu là $f'(x_0 + 0)$.

Tương tự, giả sử hàm $f(x)$ xác định trong nửa khoảng $a < x \leq x_0$ và tồn tại giới hạn bên trái

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

thì ta nói rằng hàm f đã cho có đạo hàm bên trái tại điểm x_0 và $f'_-(x_0)$ còn được kí hiệu là $f'(x_0 - 0)$

[148]

Trước và sau khi định nghĩa, các tác giả không giới thiệu về biến h , nhờ kí hiệu $h \rightarrow \pm 0$ đã ngầm cho chúng ta biết h là biến độc lập của hàm số $y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Theo định nghĩa, một hàm số xác định trên tập con bất kì của tập số thực có thể không tồn tại đạo hàm (chẳng hạn, hàm số xác định trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ thì không tồn tại đạo hàm) nên vấn đề được quan tâm nhất trước khi xét sự tồn tại của đạo hàm đó là hàm số $y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ xác định trên tập nào? 0 có thuộc tập đó không?

Lại không thấy các tác giả đề cập.

Đạo hàm của hàm số còn là cơ sở để xây dựng tiếp định nghĩa đạo hàm cấp cao như sau:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ trong khoảng (a, b) . Ta biết rằng $f'(x)$ cũng là một hàm số của x , do đó nó cũng có thể có đạo hàm. Nếu $y' = f'(x)$ có đạo hàm tại x ta sẽ kí hiệu đạo hàm của nó là $y'' = f''(x)$ và gọi là đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$. Tiếp tục lí luận như thế ta thu được trên khoảng (a, b) các hàm số

$$f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$$

trong đó $f^{(n)}(x)$ với $n \geq 1$ là đạo hàm của hàm $f^{(n-1)}(x)$. Hàm số $f^{(n)}(x)$ được gọi là đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$.

[157]

Định nghĩa đã cho biết khi hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) có thể xác định các hàm số $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$. Nhưng các hàm số này có thể không xác định trên (a, b) . Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số, tập xác định của hàm số $f'(x)$ là tập con của khoảng (a, b) nhưng để xét đạo hàm cấp hai thì tập xác định của hàm số $f''(x)$ phải là khoảng con của khoảng (a, b) . Bằng quy nạp, để xét đạo hàm cấp n thì các hàm số $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ phải xác định trên khoảng. Giả sử (a_i, b_i) là tập xác định của hàm số $f^{(i)}(x)$ ($i = \overline{1, n-1}$) thì $(a_{i+1}, b_{i+1}) \subset (a_i, b_i)$ ($i = \overline{1, n-1}$).

Tóm lại, yếu tố quan trọng xây dựng nên các định nghĩa trên nhất thiết phải kể đến là khái niệm giới hạn hàm số tại một điểm. Vì thế khoảng xuất hiện trong giả thiết của các định nghĩa này cũng có vai trò tương tự như trong khái niệm giới hạn, với mục đích nhằm đảm bảo mọi điểm thuộc khoảng đều là điểm giới hạn của khoảng đó.

1.4. Khái niệm nguyên hàm

Để giới thiệu khái niệm nguyên hàm và tích phân không xác định, các tác giả đã mở đầu bằng bài toán sau đây:

Trong cơ học, cho biết vận tốc $v = v(t)$ của chuyển động thẳng của một vật tại bất kì thời điểm t nào, hãy tìm quy luật chuyển động của vật đó, nghĩa là tìm sự liên hệ giữa quãng đường nó đi được với thời gian. Vì vận tốc $v = v(t)$ chính là đạo hàm của hàm số $s = f(t)$, biểu thị quy luật chuyển động, cho nên ở đây đã biết đạo hàm $f'(t) = v(t)$ của hàm số chưa biết $f(t)$, ta phải tìm hàm số đó.

Bài toán ngược của phép tính vi phân nêu trên là nội dung cơ bản của phép tính tích phân [211]

Khái niệm nguyên hàm và tích phân không xác định

Định nghĩa

Cho hàm số f xác định trong khoảng (a, b) . hàm số F được gọi là nguyên hàm của f nếu F xác định và khả vi trong khoảng (a, b) và $F'(x) = f(x)$ với $\forall x \in (a, b)$.

Nếu hàm số f xác định trên đoạn $[a, b]$ thì F sẽ được gọi là nguyên hàm của f nếu F xác định trên $[a, b]$, khả vi trong (a, b) và

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$F'_+(a) = f(a)$$

$$F'_-(b) = f(b)$$

Khái niệm tích phân không xác định được xây dựng trên cơ sở của định lý dưới đây :

Định lý. Nếu hàm số f có một nguyên hàm F thì tập hợp $\{F + C : C \in \mathbb{R}\}$ là họ tất cả các nguyên hàm của f .

Người ta gọi họ tất cả các nguyên hàm của f là tích phân không xác định của hàm số này và kí hiệu là :

$$\int f(x)dx$$

Vậy nếu F là một trong các nguyên hàm của hàm số f thì:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad [212]$$

Rõ ràng nguyên hàm của một hàm số thực chất là một phần tử của tích phân không xác định của hàm số đó nhưng khẳng định $\int f(x)dx = F(x) + C$ đã ngầm đồng nhất giữa nguyên hàm và tích phân không xác định.

Định nghĩa đã cho thấy, khi hàm số F là nguyên hàm của hàm số trên (a, b) (hay $[a, b]$) thì tất nhiên hàm số f phải thỏa mãn điều kiện $F'(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$ (hay $[a, b]$). Khi đó hàm số F xác định trên (a, b) (hay $[a, b]$) và mỗi phần tử thuộc (a, b) (hay $[a, b]$) đóng vai trò là điểm giới hạn của (a, b) (hay $[a, b]$). Đây là yếu tố quan trọng trước khi xét đạo hàm từng điểm trên (a, b) (hay $[a, b]$). Chúng ta đã biết:

Hai hàm số f và g được gọi là bằng nhau trên tập E (và kí hiệu $f = g$) nếu

Chúng cùng xác định trên E ;

Với mọi x thuộc E ta đều có $f(x) = g(x)$ [36]

Như vậy định nghĩa nguyên hàm số được xây dựng dựa trên khái niệm hai hàm số bằng nhau. Một câu hỏi được đặt ra: Tại sao các tác giả không quy định $F' = f$ trên một tập con bất kì của $\mathbb{R}$ mà lại ràng buộc $F' = f$ trên khoảng (a, b) (hoặc đoạn $[a, b]$). Để trả lời câu hỏi này chúng tôi xét các hàm số sau:

$$f(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$g(x) = x^2 + 3x$$

$$h: \{-1; 3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h(x) = x$$

Rõ ràng $f'(x) = h(x)$ trên $\{-1; 3\}$ và $g'(x) = h(x)$ trên $\{-1; 3\}$. Nếu định nghĩa nguyên hàm mở rộng cho mọi tập con của $\mathbb{R}$ thì hàm số h sẽ có vô số nguyên hàm, đơn cử là hai hàm số f và g . Điều đáng quan tâm ở đây là các hàm số này chẳng có mối liên hệ đặc biệt nào. Ngược lại, nếu định nghĩa nguyên hàm chỉ đóng khung trên khoảng, đoạn thì người ta đã chứng minh được là các hàm số này chỉ sai khác nhau một hằng số. Khoảng, đoạn trong định nghĩa làm cho các nguyên hàm của hàm số có mối liên hệ đặc biệt là chỉ sai khác một hằng số.

Trước khi định nghĩa nguyên hàm, các tác giả cho biết việc nghiên cứu nguyên hàm phục vụ cho nhiều mục đích nghiên cứu trong đó có cơ học vật lí. Sự ra đời của khái niệm nguyên hàm nói cụ thể là nguyên hàm trên khoảng (hay đoạn) kết hợp với giả thiết liên tục trên khoảng (đoạn) này làm cho việc tính toán phân tích định trở nên dễ dàng nhờ công thức Newton-Leibniz.

Mối quan hệ giữa đạo hàm và nguyên hàm được thể hiện qua bảng các công thức dưới đây:

STT	Đạo hàm	Nguyên hàm
1	$(C)' = 0$	$\int 0 dx = C$
2	$(x)' = 1$	$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$
3	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
4	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
5	$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\operatorname{arcc}tg x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$ $= -\operatorname{arcc}tg x + C$
6	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ $= -\arccos x + C$
7	$(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$
8	$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
9	$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
10	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
11	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
12	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
13	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

14	$(\operatorname{cthx})' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cthx} + C$
15	$(\operatorname{thx})' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{thx} + C$

Các công thức tính nguyên hàm ở bảng trên có được nhờ suy ngược từ công thức lấy đạo hàm tương ứng. Ở đây chưa có sự can thiệp của tính chất liên tục trên khoảng (hay đoạn) đối với các hàm dưới dấu tích phân.

Sau khi giới thiệu các công thức tính nguyên hàm, các tác giả phát biểu:

Công thức 4 đúng với mọi đoạn (khoảng) không chứa điểm 0.

Thật vậy, nếu $x > 0$ thì $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ cho nên $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

Nếu $x < 0$ thì vì $\int \frac{dx}{x} = \ln[-x] + C$

Kết hợp hai công thức trên đây ta được công thức 4.

[215]

Theo các tác giả, công thức 4 đúng với mọi khoảng, đoạn không chứa điểm 0. Vì thế cũng đúng trên $(0, +\infty)$ (hay $(-\infty, 0)$) nhưng nguyên hàm trên các khoảng này chưa được định nghĩa, trong giáo trình các tác giả chỉ đề cập đến khái niệm nguyên hàm của hàm số trên đoạn và khoảng bị chặn. Phát biểu trên cũng cho thấy, mặc dù trong các công thức lấy nguyên hàm không kèm theo điều kiện hợp thức nhưng căn cứ vào định nghĩa buộc chúng ta phải ngầm hiểu, các công thức trên chỉ xác định trên mỗi khoảng, đoạn, cấu thành tập xác định của hàm số cần lấy nguyên hàm nếu như hợp của chúng không tạo thành một khoảng, hoặc một đoạn.

Để nhận biết sự tồn tại của nguyên hàm các tác giả còn giới thiệu thêm một tính chất:

Mọi hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn đó [212].

Tính chất này được các tác giả chứng minh trong tích phân xác định.

Ngoài các công thức xác định nguyên hàm được cho ở bảng trên. Ở trang 216 $\rightarrow$ 217, các tác giả còn giới thiệu hai quy tắc và hai phương pháp tìm nguyên hàm

Các quy tắc đơn giản nhất của tích phân

1) $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

2) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Lưu ý: Các tác giả không đề cập gì đến điều kiện của hàm số.

Phương pháp lấy tích phân

Phương pháp đổi biến số

Giả sử g, w, w' là những hàm số liên tục. Khi đó nếu ta có

$$\int g(u)du = G(u) + C$$

$$\text{thì } \int g(w(x))w'(x)dx = G(w(x)) + C.$$

Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục.

Ta đã biết

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$\text{hay } u dv = d(uv)$$

Tích phân hai vế của đẳng thức trên ta được:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Hàm số liên tục là cách nói chung cho các trường hợp hàm số liên tục tại một điểm, hàm số liên tục trên khoảng, đoạn, nửa khoảng, nửa đoạn. Vì thế, giả thiết g, w, w' là những hàm số liên tục trong phương pháp đổi biến số cũng như giả thiết u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trong phương pháp tích phân từng phần đều chưa đảm bảo sự tồn tại nguyên hàm của các hàm số dưới dấu tích phân trong trường hợp các hàm này chỉ liên tục tại một điểm, trên một khoảng, nửa khoảng hay nửa đoạn. Vì trong tích phân xác định, các tác giả chỉ chứng minh được mọi hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn đó còn những hàm số chỉ liên tục tại một điểm không thấy các tác giả đề cập. Vậy việc chỉ ra hàm số liên tục trên tập nào là điều kiện cần thiết để nhận biết hàm số đó có tồn tại nguyên hàm trên tập đó hay không.

1.5. Khái niệm tích phân xác định

Chúng tôi xin tóm lược hai kết quả nghiên cứu trang 237 trước khi định nghĩa tích phân

Bài toán 1. Tìm diện tích hình thang cong.

Ta gọi là một đường cong liên tục, tập các điểm $M(x, y)$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$$

Trong đó $\varphi(t)$ và $\psi(t)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$.

Đường cong liên tục C được gọi là đường cong Gióccđăng nếu với hai điểm bất kì t_1 và t_2 mà $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$ (trừ trường hợp $t_1 = \alpha$ và $t_2 = \beta$) thì $M_1[\varphi(t_1), \psi(t_1)] \neq M_2[\varphi(t_2), \psi(t_2)]$.

Đường cong Gióccđăng được gọi là đường cong kín nếu $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ và $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$.

Giả sử S là một hình phẳng giới hạn bởi một đường cong Gióccđăng nào đó (hình 55a). Ta chia hình này thành nhiều hình nhỏ bởi các đường thẳng theo hai phương vuông góc. Mỗi hình nhỏ này được giới hạn bởi các đoạn thẳng và một cung, giống như một hình thang nhưng có một cạnh cong. Chính vì vậy, ta sẽ gọi mỗi hình thang như thế là một hình thang cong (hình 55b). Đặc biệt, nếu xảy ra trường hợp như hình 55c ta cũng sẽ coi nó như là “hình thang cong” có một “đáy” thu về một điểm.

Ta sẽ chọn hệ tọa độ vuông góc sao cho hình thang cong có vị trí như trên hình 56. Nói cách khác, hình thang cong đó được giới hạn bởi đường cong AB, có phương trình $y = f(x)$ (trong đó f liên tục và không âm), trục hoành và hai trung tuyến $x = a, x = b$.

Để tính diện tích các hình thang cong ta phải

1. định nghĩa diện tích hình thang cong;
2. tìm cách tính diện tích đó.

Để định nghĩa diện tích hình thang cong, ta làm như sau:

Chia đoạn $[a, b]$ đáy của hình thang thành một số hữu hạn đoạn nhỏ bởi các điểm

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b. \quad (1)$$

Ta sẽ gọi mỗi phép chia này là một phép phân hoạch; kí hiệu π . Trên mỗi đoạn $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$), ta lấy một điểm bất kì ξ_k .

Khi hàm số $f(x)$ không đổi trên đoạn Δ_k thì trong suốt đoạn này giá trị của hàm số sẽ là $f(\xi_k)$ và lúc đó diện tích của hình thang cong con sẽ là $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

Trong trường hợp tổng quát, nếu đoạn rất nhỏ, ta sẽ coi $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ là giá trị gần đúng của “diện tích” S_k hình thang cong con PQSR, nghĩa là $S_k \approx f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

Khi đó, nếu kí hiệu S là diện tích của hình thang cong Abba thì:

$$S = \sum_{k=1}^n S_k \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = S^*. \quad (2)$$

Rõ ràng, nếu ta chọn phép phân hoạch π sao cho $d(\pi) = \max(x_k - x_{k-1})$ càng nhỏ thì mỗi hình thang con PQSR càng gần trùng với hình chữ nhật có đáy là Δ_k và chiều cao là $f(\xi_k)$.

Vì vậy, đương nhiên ta đi đến định nghĩa sau đây:

Diện tích S của hình thang cong Abba là giới hạn của tổng (2) khi $d(\pi) \rightarrow 0$:

$$S = \lim_{d(\pi) \rightarrow 0} S^* = \lim_{d(\pi) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (3)$$

Số S được gọi là giới hạn của S^* và kí hiệu: $S = \lim_{d(\pi) \rightarrow 0} S^*$

nếu ứng với mỗi số $\varepsilon > 0$ đều tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi phép phân hoạch π mà $d(\pi) < \delta$ và với mọi cách lấy các điểm ξ_k ta đều có $|S^* - S| < \varepsilon$.

Do đó, diện tích hình thang cong được định nghĩa như sau:

Số S được gọi là diện tích hình thang cong đã cho nếu ứng với mỗi số $\varepsilon > 0$ đều tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi phép phân hoạch π mà $d(\pi) < \delta$ và với mọi cách chọn điểm ξ_k ta đều có:

$$|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - S| < \varepsilon.$$

Bài toán 2. Tính công của một lực biến thiên.

Giả sử một chất điểm chuyển động trên trục $\overrightarrow{Ox}$ dưới tác dụng của một lực P cùng phương với $\overrightarrow{Ox}$. Nếu lực P không đổi thì công W của nó trên một đoạn có độ dài s bằng

$$W = P.s$$

Bây giờ giả sử chất điểm chuyển động dưới tác dụng của một lực biến thiên theo vị trí của chất điểm; lúc đó lực $P = P(x)$ là hàm số của hoành độ x của chất điểm di chuyển từ điểm a đến điểm b .

Vì ta chưa có khái niệm về công của một lực biến thiên cho nên ở đây ta cũng phải giải quyết hai vấn đề:

1. định nghĩa công của một lực biến thiên;
2. tìm cách tính công đó.

Ta giải quyết vấn đề thứ nhất.

Lại dùng một phép phân hoạch π chia đoạn $[a, b]$ thành các đoạn nhỏ bởi các điểm:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

và trong mỗi đoạn $[x_{k-1}, x_k]$ lại lấy điểm ξ_k bất kì. Lực tác dụng lên chất điểm ξ_k bằng $P(\xi_k)$. Nếu nó giữ nguyên giá trị đó suốt cả chiều dài của đoạn $[x_{k-1}, x_k]$ thì công của nó trên đoạn này là

$$P(\xi_k) (x_k - x_{k-1}). \quad (4)$$

Nếu đoạn $[x_{k-1}, x_k]$ rất nhỏ thì ta có thể xem lực $P(x)$ thay đổi rất ít trên đoạn đó và do đó giá trị của nó ở những điểm khác nhau trên đoạn này sai rất ít so với $P(\xi_k)$.

Từ đó rất tự nhiên ta có ý nghĩ coi

$$P(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \quad (5)$$

là giá trị gần đúng của công w_k do lực biến thiên $P(x)$ sinh ra khi di chuyển trên đoạn $[x_{k-1}, x_k]$ nghĩa là

$$w_k \approx P(\xi_k) (x_k - x_{k-1}).$$

và nếu kí hiệu công của $P(x)$ trên toàn đoạn $[a, b]$ là W thì:

$$W = \sum_{k=1}^n w_k \approx \sum_{k=1}^n P(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \quad (6)$$

Ta nhận xét rằng khi đoạn $[x_{k-1}, x_k]$ càng nhỏ thì $P(x)$ với $x \in [x_{k-1}, x_k]$ sai khác càng ít so với $P(\xi_k)$ trong đó $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Ta đi đến định nghĩa sau đây

Công W của lực biến thiên $P(x)$ trên đoạn $[a, b]$ là giới hạn

$$W = \lim_{d(\pi) \rightarrow 0} \sum P(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

trong đó $d(\pi) = \max_k (x_k - x_{k-1})$.

Nói cách khác, số W sẽ được gọi là công của lực biến thiên $P(x)$ trên $[a, b]$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ bao nhiêu tùy ý, ắt có số $\delta > 0$ sao cho với mỗi phân hoạch π đoạn $[a, b]$ thỏa mãn điều kiện $d(\pi) < \delta$ và với mọi cách chọn điểm ξ_k ta đều có:

$$|\sum_{k=1}^n P(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - W| < \varepsilon.$$

Nhận xét của các tác giả

Qua hai bài toán trên ta thấy có nhiều bài toán thuộc những lĩnh vực rất khác nhau nhưng cùng dẫn đến việc tìm giới hạn của một tổng dạng

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (7)$$

(so sánh với (2) và (6) (với nghĩa mở rộng của khái niệm giới hạn).

Để giải quyết đồng thời vấn đề thứ hai trong hai bài toán trên và trong tất cả những bài toán tương tự, chúng ta cần nghiên cứu riêng vấn đề tính giới hạn dạng:

$$\lim_{d(\pi) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

đối với một hàm số bất kì (không gắn với nội dung thực tế về vật lí, hình học của bài toán). Đó chính là nguyên nhân sinh ra khái niệm tích phân dưới đây.

ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

Cho hàm số $y = f(x)$, xác định trên đoạn $[a, b]$

Để xây dựng định nghĩa tích phân của một hàm số trên một đoạn ta tiến hành như sau:

Chia đoạn $[a, b]$ thành những đoạn nhỏ bởi các điểm

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Mỗi phép chia như thế gọi là một *phép phân hoạch đoạn* $[a, b]$ và được kí hiệu bởi chữ π : các điểm $x_0, x_1, \dots, x_n$ được gọi là các *điểm chia*.

Trong mỗi đoạn $[x_{k-1}, x_k]$ ta lấy một điểm bất kì ξ_k ($x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$) rồi lập tổng:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (1)$$

Tổng (1) được gọi là *tổng tích phân* của hàm số $f(x)$ ứng với phép phân hoạch π . Rõ ràng giá trị của tổng này phụ thuộc vào phép phân hoạch và cách lấy các điểm ξ_k .

Ta kí hiệu $d(\pi)$ là số lớn nhất trong độ dài các đoạn $[x_{k-1}, x_k]$ trong phép phân hoạch π , tức là:

$$d(\pi) = \max_k (x_k - x_{k-1}). \quad (2)$$

Ta nói rằng dần tới giới hạn I khi $d(\pi) \rightarrow 0$ nếu:

Với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước nhỏ tùy ý, bao giờ cũng tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi phép phân hoạch π mà $d(\pi) < \delta$ và với mọi cách chọn các điểm ta đều có:

$$|\sigma_\pi - I| = \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - I \right| < \varepsilon$$

và sẽ kí hiệu là:

$$I = \lim_{d(\pi) \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{d(\pi) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Từ đó, ta đưa ra định nghĩa:

Nếu tồn tại giới hạn

$$I = \lim_{d(\pi) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (3)$$

(giới hạn được hiểu theo nghĩa nêu trên) thì giới hạn đó được gọi là tích phân xác định (*) của hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ và kí hiệu là:

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (4)$$

Khi đó hàm số f được gọi là khả tích trên đoạn $[a, b]$

Khác với giả thiết của bài toán 1, bài toán 2 và định nghĩa tích phân chỉ giả thiết hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ không yêu cầu liên tục trên đoạn này. Xét về ý nghĩa hình học giả thiết hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$ nhằm đảm bảo đồ thị của nó là một đường liền nét nên khi kết hợp với trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ tạo thành một hình thang cong.

Kể cả định nghĩa diện tích hình thang cong, công của lực biến thiên cho đến định nghĩa tích phân xác định đều phát sinh chung một nghi vấn: trước khi kiểm tra $|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - I| < \varepsilon$, liệu có tồn tại phân hoạch π để cho $d(\pi) < \delta$. Dường như ở đây, các tác giả ngầm thừa nhận sự tồn tại của một phân hoạch như thế. Thiết nghĩ, việc chứng minh tính chất này sẽ làm cho định nghĩa rõ ràng hơn. Với mọi $\delta > 0$, tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{b-a}{n} < \delta$. Khi đó, chúng tôi xây dựng một phân hoạch như sau:

$$x_0 = a$$

$$x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n}$$

$$x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n}$$

.....

$$x_n = x_{n-1} + \frac{b-a}{n}$$

Dễ thấy rằng $x_i = x_0 + \frac{i(b-a)}{n} \in [a, b]$ với $i=0;1;2\dots;n$

Phân hoạch trên cùng với vô số phân hoạch khác thỏa mãn $d(\pi) < \delta$ ($\delta > 0$) đều có chung đặc trưng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trong các điểm chia luôn là hai đầu mút của đoạn $[a, b]$ đồng thời các điểm còn lại cũng thuộc đoạn này. Từ đây cho thấy mỗi phần tử của đoạn $[a, b]$ đều tham gia xây dựng nên định nghĩa tích phân xác định vì những phần tử đó có thể là điểm chia của một phân hoạch nào đó. Trong khái niệm nguyên hàm, các tác giả có thể xây dựng định nghĩa trên cả khoảng lẫn

đoạn nhưng với tích phân, việc phát biểu định nghĩa tích phân trên khoảng là không thể thực hiện được vì trên đó không tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Định nghĩa hàm số khả tích được xây dựng trên đoạn. Tất nhiên, để các hàm dưới đây khả tích trước tiên nó phải được giả thiết xác định trên một đoạn

Các lớp hàm khả tích

Định lí 1. Mọi hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì khả tích trên đoạn đó.

Định lí 2. Mọi hàm số bị chặn $y = f(x)$ trên $[a, b]$ chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn thì khả tích trên đoạn này.

Định lí 3. Nếu hàm số $y = f(x)$ bị chặn và đơn điệu trên đoạn $[a, b]$ thì y khả tích trên đoạn này.

Ba định lí trên đây giúp ta nhận biết các điều kiện làm cho hàm số khả tích. Chúng ta đã biết có ba trường hợp dẫn đến hàm số f gián đoạn tại một điểm x_0 :

- o Giới hạn của hàm f khi x dần đến x_0 khác $f(x_0)$.
- o Hàm số f không tồn tại giới hạn khi x dần đến x_0 .
- o Điểm x_0 không thuộc tập xác định của hàm số.

Nhưng ở định lí 2, giả thiết hàm số bị chặn trên đoạn $[a, b]$ đã loại trừ khả năng điểm x_0 không thuộc tập xác định của hàm số nghĩa là các điểm gián đoạn phải là điểm làm cho giới hạn của hàm f khi x dần đến x_0 khác $f(x_0)$ hoặc điểm làm cho giới hạn của hàm số f tại đó không tồn tại.

Các tính chất của tích phân xác định

Định lí 1. Nếu hàm số $y = f(x) = c$ ($c = \text{const}$) với mọi x thuộc đoạn $[a, b]$ thì nó khả tích trên đoạn đó và

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx$$

Định lí 2. Nếu các hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì $f_1(x) \pm f_2(x)$ cũng khả tích trên đoạn đó và

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

Định lí 3. Nếu hàm số $y = f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ và α là một hằng số bất kì thì hàm số $\alpha f(x)$ cũng khả tích trên đoạn $[a, b]$ và

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

Định lí 4. Nếu hàm số $y = f(x)$ khả tích trên mỗi đoạn $[a, c]$, $[c, b]$ ($a < c < b$) thì nó cũng khả tích trên đoạn $[a, b]$ và

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Định lí 5. Nếu $f(x) \leq \varphi(x)$ ($a \leq x \leq b$) và các hàm số f và φ khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$$

Định lí 6. nếu hàm số $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ và nếu $m \leq f(x) \leq M$ với mọi $x \in [a, b]$, trong đó m, M là những hằng số thì :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Định lí 7.

a) Nếu hàm số $f(x)$ khả tích và không âm trên đoạn $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

b) Nếu hàm số $y = f(x)$ khả tích và dương trên đoạn $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Định lí 8. Nếu hàm số $y = f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì hàm số $|f(x)|$ cũng khả tích trên đoạn đó và $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Định lí 9. (định lí giá trị trung bình). Nếu hàm số $y = f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ và nếu $m \leq f(x) \leq M$ thì tồn tại số μ thỏa mãn bất đẳng thức $m \leq \mu \leq M$ sao cho

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a).$$

Định lí 10. (định lí giá trị trung bình mở rộng) Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

1. $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$.
2. $m \leq f(x) \leq M$.
3. $g(x)$ không đổi dấu trên $[a, b]$ (tức là $g(x) \geq 0$) (hoặc $g(x) \leq 0$) với mọi $x \in [a, b]$ thì tồn tại số μ : $m \leq \mu \leq M$ sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Việc chứng minh các định lí trên chỉ sử dụng giả thiết hàm số khả tích trên đoạn $[a, b]$. Ở đây không cần sự can thiệp của hàm số liên tục trên một đoạn.

Mối liên hệ giữa tích phân xác định và nguyên hàm

Định lí 1. Nếu hàm số f khả tích trên đoạn $[a, b]$ và liên tục tại một điểm nào đó $x \in [a, b]$ thì hàm số $F(x) =$

$$\int_a^x f(u) du \text{ khả vi tại điểm } x \text{ và } F'(x) = f(x).$$

Định lí 2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì hàm số $F(x) = \int_a^x f(u) du$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn này.

Định lí 3. Nếu hàm số $y = \phi(x)$ là một trong các nguyên hàm của hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x) dx = \phi(b) - \phi(a)$.

Ba định lí trên xác lập mối quan hệ khăng khít giữa hai khái niệm tích phân xác định và nguyên hàm. Mối quan hệ này có ý nghĩa hết sức quan trọng cả về phương diện lý thuyết lẫn thực hành. Nó sẽ cho ta biết điều kiện để một hàm có nguyên hàm, đồng thời nhờ chỗ chúng ta đã nghiên cứu khá kĩ về cách tính nguyên hàm của nhiều lớp hàm số, mối quan hệ này sẽ cho ta công cụ rất hiệu lực để tính tích phân của một lớp hàm số quan trọng, tránh cho chúng ta khỏi phải tính tích phân bằng định nghĩa, rất phức tạp, cồng kềnh. Định lí 2 cho ta biết điều kiện để một hàm số có nguyên hàm. Trước đây, chúng ta chỉ mới làm quen cách tính nguyên hàm của một số lớp rất hẹp mà thôi; lúc đó vấn đề tồn tại nguyên hàm vẫn chưa được giải quyết. Định lí 2 cho ta biết mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có nguyên hàm. Định lí 3 cho phép tính tích phân của một hàm số liên tục trên một đoạn nếu biết một trong các nguyên hàm của nó.

Các phương pháp tính tích phân xác định

Phương pháp đổi biến số

Giả sử ta phải tính tích phân

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Trong đó $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$.

Giả sử $x = \varphi(t)$ là một hàm số thỏa mãn các điều kiện:

- 1) $\varphi(t)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ nào đó và $\varphi(t) \in [a, b]$ với mọi $t \in [\alpha, \beta]$;
- 2) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;
- 3) tồn tại đạo hàm $\varphi'(t)$ liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$.

Thế thì:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử u, v là hai hàm số khả vi liên tục trên đoạn $[a, b]$. Ta có công thức tích phân từng phần đối với tích phân xác định sau đây:

$$\int_a^b uv' dx = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vu' dx$$

Trong phương pháp đổi biến, giả thiết $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$, $\varphi(t)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, $\varphi'(t)$ liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$ nhằm đảm bảo cho hàm $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$, $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ khả tích trên $[\alpha, \beta]$. Cũng vậy, trong công thức tích phân từng phần, u, v được giả thiết là hai hàm số khả vi liên tục trên đoạn $[a, b]$ không ngoài mục đích làm cho các hàm u', v, uv' khả tích trên đoạn $[a, b]$. Rõ ràng, giả thiết hàm số liên tục trên một đoạn đã mang đến hai kết quả, vừa làm cho hàm số có nguyên hàm vừa làm cho hàm số khả tích. Thế nhưng, trong phương pháp đổi biến và từng phần của nguyên hàm, các hàm số chỉ được nói chung chung là liên tục và không phát biểu đầy đủ là liên tục trên đoạn như tích phân xác định. Vì thế, phát biểu đó có thể bao hàm luôn trường hợp các hàm số liên tục tại một điểm, trên một khoảng, hoặc nửa khoảng. Trên phương diện lý thuyết chưa có cơ sở nào đảm bảo hàm số liên tục tại một điểm, trên một khoảng, nửa đoạn hoặc nửa khoảng có nguyên hàm. Qua đó cho thấy, giả thiết hàm số liên tục trên một đoạn là thật sự cần thiết trong phương pháp đổi biến và từng phần trong nguyên hàm cũng như trong tích phân xác định.

Kết luận

6.1. Khái niệm khoảng, đoạn

Trong giáo trình, các tác giả chỉ củng cố các khái niệm khoảng, đoạn được định nghĩa ở bậc phổ thông.

6.2. Khái niệm giới hạn hàm số

Giới hạn của hàm số tại một điểm x_0 thường được xét thuộc $(a ; b)$ hoặc $[a ; b]$ xác định của hàm số nhằm thỏa điều kiện tiên quyết, x_0 là điểm giới hạn của $(a ; b)$ hoặc $[a ; b]$.

6.3. Khái niệm đạo hàm

6.3.1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) và $x_0 \in (a, b)$ có hai chức năng vừa đảm bảo biểu thức $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ xác định trên $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ vừa đảm bảo x_0 là điểm giới hạn của khoảng $(a ; b) \setminus \{x_0\}$.

Khoảng xác định K của hàm số $y = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ và điều kiện $0 \in K$ chưa thể hiện tường minh khi tính

đạo hàm thông qua giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

6.3.2. Đạo hàm của hàm số

Để hàm số f' tồn tại thì hàm số f trước tiên phải thỏa mãn điều kiện xác định trên khoảng.

6.3.3. Đạo hàm một bên

Khoảng xác định K của hàm số $y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ và điều kiện $0 \in K$ chưa thể hiện tường

minh khi định nghĩa đạo hàm bên phải, bên trái thông qua giới hạn $f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$,

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

6.3.4. Đạo hàm cấp cao

Để xét đạo hàm cấp n thì các hàm số $f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ phải xác định trên khoảng. Giả sử (a_i, b_i) là tập xác định của hàm số $f^{(i)}(x)$ ($i = \overline{1, n-1}$) thì $(a_{i+1}, b_{i+1}) \subset (a_i, b_i)$ ($i = \overline{1, n-1}$).

 Khoảng xuất hiện trong giả thiết của các định nghĩa này cũng có vai trò tương tự như trong khái niệm giới hạn, với mục đích nhằm đảm bảo mọi điểm thuộc khoảng đều là điểm giới hạn của khoảng đó.

6.4. Khái niệm nguyên hàm

Hàm số F là nguyên hàm của hàm số f trên khoảng (a, b) (hay $[a, b]$) thì bản thân F xác định trên khoảng (a, b) (hay $[a, b]$). Đồng thời mỗi phần tử thuộc (a, b) (hay $[a, b]$) đóng vai trò là điểm giới hạn của (a, b) (hay $[a, b]$).

Khoảng, đoạn trong định nghĩa làm cho các nguyên hàm của hàm số có mối liên hệ đặc biệt là chỉ sai khác một hằng số.

Định nghĩa nguyên hàm chỉ phát biểu giới hạn trên đoạn và khoảng bị chặn nhưng trong khẳng định và chứng minh công thức $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, các tác giả lại mở rộng cho khoảng không bị chặn $(0, +\infty)$ (hay $(-\infty, 0)$).

Mọi hàm số liên tục trên đoạn đều có nguyên hàm trên đoạn đó thế nhưng giả thiết hàm số liên tục trong phương pháp đổi biến và tích phân từng phần còn phát biểu chung chung chưa đảm bảo sự tồn tại nguyên hàm của các hàm số dưới dấu tích phân.

6.5. Khái niệm tích phân

Giả thiết hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ nhằm đảm bảo đồ thị của nó là một đường liên nét nên khi kết hợp với trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ tạo thành một hình thang cong.

Mỗi phân hoạch đều có các đặc trưng, giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trong các điểm chia luôn là hai đầu mút của đoạn $[a, b]$ đồng thời các điểm còn lại cũng thuộc đoạn này. Khi tính tích phân xác định thì mọi phân hoạch đều có khả năng được xét đến trong quá trình kiểm tra bằng định nghĩa:

với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước nhỏ tùy ý, bao giờ cũng tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi phép phân hoạch π mà $d(\pi) < \delta$ và với mọi cách chọn các điểm ta đều có: $|\sigma_\pi - I| = \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - I \right| < \varepsilon$. Vì thế, có thể nói mỗi phần tử của đoạn $[a, b]$ đều tham gia xây dựng nên định nghĩa tích phân xác định vì những phần tử đó có thể là điểm chia của một phân hoạch nào đó.

Giả thiết các hàm số liên tục trên đoạn trong phương pháp đổi biến và tích phân từng vò đảm bảo cho các hàm số dưới dấu tích phân khả tích vò, tồn tại nguyên hàm vò tạo thuận lợi cho việc sử dụng công thức Newton- Leibniz.

CHƯƠNG 2: SỰ VẬN HÀNH CỦA KHOẢNG, ĐOẠN TRONG CÁC KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM, NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN Ở CHƯƠNG TRÌNH TOÁN PHỔ THÔNG

Trong chương này chúng tôi phân tích mối quan hệ thể chế giữa khái niệm khoảng, đoạn với các đối tượng đạo hàm, nguyên hàm và tích phân (chỉ phân tích các TCTH khi cần thiết). Tiếp theo chúng tôi sẽ so sánh với các vấn đề đã nghiên cứu được ở chương I, đồng thời rút ra các hợp đồng didactic trong quá trình phân tích.

Với mục tiêu mà luận văn đề ra, chúng tôi đặt trọng tâm nghiên cứu ngay trong chương trình dành cho ban nâng cao, song song với các nội dung đó, chúng tôi phân thích thêm chương trình dành cho ban cơ bản trong chương trình hiện hành nếu giữa hai chương trình có sự khác biệt đáng kể.

Tài liệu tham khảo gồm có:

Phan Đức Chính (Tổng chủ biên)-Tôn Thân (Chủ biên)-Nguyễn Huy Đoan-Lê Văn Hồng-Trương Công Thành-Nguyễn Hữu Thảo, toán 8, tập 2, NXB Giáo dục (GK_{8,2}).

Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên)-Nguyễn Huy Đoan (chủ biên)-Nguyễn Xuân Liêm- Đặng Hùng Thắng-Trần Văn Vương, Đại số 10 nâng cao, NXB Giáo dục (GK_{NC10})

Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên)-Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên)-Nguyễn Xuân Liêm-Nguyễn Khắc Minh-Đặng Hùng Thắng, *Đại số và giải tích 11 nâng cao*, NXB Giáo dục (GK_{NC11}).

Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên)-Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên)-Nguyễn Xuân Liêm-Nguyễn Khắc Minh-Đặng Hùng Thắng, *sách giáo viên Đại số và giải tích 11 nâng cao*, NXB Giáo dục (GV_{NC11}).

Trần văn Hạo (Tổng chủ biên)-Vũ Tuấn (Chủ biên)-Đào Ngọc Nam-Lê Văn Tiến-Vũ Viết Yên, *Đại số và giải tích 11*, NXB Giáo dục (GK_{CB11}).

Trần văn Hạo (Tổng chủ biên)-Vũ Tuấn (Chủ biên)-Đào Ngọc Nam-Lê Văn Tiến-Vũ Viết Yên, *sách giáo viên Đại số và giải tích 11*, NXB Giáo dục (GV_{CB11}).

Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên)-Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên)-Trần Phương Dung-Nguyễn Xuân Liêm-Đặng Hùng Thắng, *Giải tích 12 nâng cao*, NXB Giáo dục (GK_{NC12}).

Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên)-Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên)-Trần Phương Dung-Nguyễn Xuân Liêm-Đặng Hùng Thắng, *sách giáo viên Giải tích 12 nâng cao*, NXB Giáo dục (GV_{NC12}).

Trần văn Hạo (Tổng chủ biên)-Vũ Tuấn (Chủ biên)-Lê Thị Thiên Hương-Nguyễn Tiến Tài-Cần Văn Tuất, *Giải tích 12*, NXB Giáo dục (GK_{CB12}).

Trần văn Hạo (Tổng chủ biên)-Vũ Tuấn (Chủ biên)-Lê Thị Thiên Hương-Nguyễn Tiến Tài-Cần Văn Tuất, *sách giáo viên Giải tích 12*, NXB Giáo dục (GV_{CB12}).

2.1. Tiến trình hình thành khái niệm khoảng, đoạn

2.1.1. Khái niệm khoảng, đoạn trước khi được định nghĩa

Ở bậc THCS, khoảng và nửa khoảng xuất hiện ngầm ẩn trong chương IV - bất phương trình bậc nhất một ẩn của GK_{8,2}. Thời kì này, khoảng và nửa khoảng chưa có tên gọi và các tác giả chỉ sử dụng hình biểu diễn của chúng trên trục số như là công cụ để phác họa tập nghiệm của bất phương trình với lí do được giải thích qua hai ví dụ sau:

Ví dụ 1. Tập nghiệm của bất phương trình $x > 3$ là tập hợp các số lớn hơn 3, tức là tập hợp $\{x \mid x > 3\}$.

Để dễ hình dung, ta biểu diễn tập hợp này trên trục số như hình vẽ sau:



(Trong hình vẽ trên, tất cả các điểm bên trái điểm 3 và cả điểm 3 bị gạch bỏ).

Ví dụ 2. Bất phương trình $x \leq 7$ có tập nghiệm là tập hợp các số nhỏ hơn hoặc bằng 7, tức là tập hợp $\{x \mid x \leq 7\}$.

Tập hợp này được biểu diễn trên trục số như sau:



(Trong hình vẽ trên, các điểm bên phải điểm 7 bị gạch bỏ nhưng điểm 7 giữ lại)

Để học sinh vẽ được, các tác giả đã hướng dẫn thông qua hai hoạt động sau:

23 *Viết và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình $x \geq -2$ trên trục số.*

Hướng dẫn: Trên trục số, gạch bỏ các điểm bên trái điểm -2 bằng dấu “/” và giữ lại điểm -2 bằng dấu “[”.

24 *Viết và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình $x < 4$ trên trục số.*

Hướng dẫn: Trên trục số, gạch bỏ các điểm bên phải điểm 4 bằng các dấu “/” và gạch bỏ điểm 4 bằng dấu “)”.

Xét về vị trí, định nghĩa tập nghiệm của bất phương trình được chương trình đưa vào sau khi giới thiệu số thực và trục số thực ở lớp 7. Trên cơ sở đã biết quan hệ thứ tự của các số thực và tương ứng 1-1 giữa các phần tử của tập số thực và các điểm trên trục số nên học sinh nhận biết được phần nào của trục là tập nghiệm của bất phương trình. Theo hướng dẫn, bước kế tiếp dùng dấu “/” để gạch bỏ phần không là tập nghiệm của bất phương trình và tại hằng số a là một vế của bất phương trình $x > a$ ($x < a$, $x \geq a$, $x \leq a$) phải thận trọng trong việc sử dụng các dấu “(,), [,]” theo một quy tắc ngầm ẩn:

Nếu a là nghiệm của bất phương trình thì tại a giữ lại bằng các dấu “[,]”.

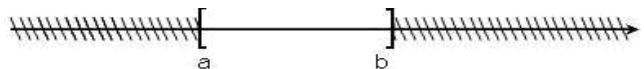
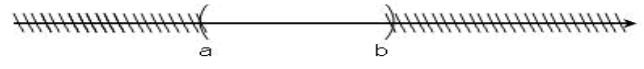
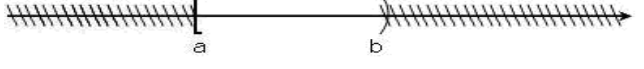
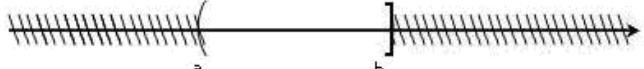
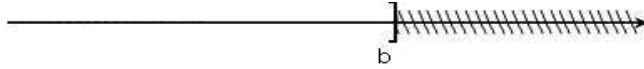
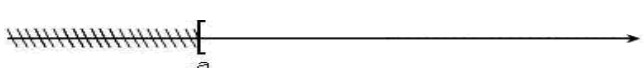
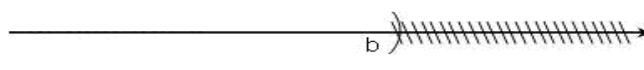
Nếu a không là nghiệm của bất phương thì gạch bỏ a bằng các dấu “(,)”.

Hình biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình trên trục số theo hướng dẫn trên cũng chính là hình biểu diễn của khoảng, nửa khoảng không bị chặn. Vì đối tượng bất phương trình được nghiên cứu

ở bậc học này chỉ là các bất phương trình tương đương với bất phương trình bậc nhất một ẩn nên đây là nguyên nhân ngăn cản sự xuất hiện hình biểu diễn của khoảng, đoạn, nửa khoảng bị chặn. Theo các tác giả, việc sử dụng hình biểu diễn làm cho học sinh dễ hình dung tập nghiệm của bất phương trình.

2.1.2. Khái niệm khoảng, đoạn khi được định nghĩa

Đến bậc THPT, khái niệm khoảng, đoạn, nửa khoảng được định nghĩa tường minh vào đầu chương trình lớp 10 trong bài “Tập hợp và các phép toán trên tập hợp”.

Tên gọi và kí hiệu Tập hợp		Biểu diễn trên trục số (phần không bị gạch)
Tập số thực $(-\infty ; +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn $[a ; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng $(a ; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng $[a ; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng $(a ; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty ; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
Nửa khoảng $[a ; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	
Khoảng $(-\infty ; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	
Khoảng $(a ; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	

[GK_{NC10}, 15]

Ở lớp 8, các tập hợp $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ chưa có tên gọi, kí hiệu và chỉ xuất hiện khi phải giải các bất tương đương với bốn dạng $a < x$, $x < b$, $a \leq x$, $x \leq b$ (chúng tôi tạm gọi là bất phương trình cơ bản). Đến lớp 10, các tác giả vẫn đề cập đến các tập hợp đó. Ngoài ra còn bổ sung thêm các tập hợp mới $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ kèm theo tên gọi và kí hiệu tương ứng và hình biểu diễn cho các tập hợp này vẫn không thay đổi.

Xét về thứ tự, định nghĩa khoảng, nửa khoảng, đoạn được giới thiệu trước định nghĩa bất phương trình. Vì thế, khi kết luận tập nghiệm của bất phương trình, các tác giả thay thế các tập hợp bằng các kí hiệu tương ứng. Việc thay thế này cũng được thực hiện một cách tương đối với các vấn đề ngoài bất phương trình với mục đích chủ yếu làm đơn giản hóa các tập hợp.

Khoảng, đoạn không phải là đối tượng mà chỉ là công cụ và được định nghĩa bằng ký hiệu như trên. Ở một số nước khác, chẳng hạn Pháp, người ta dùng từ *intervalle* để chỉ chung *khoảng, đoạn, nửa khoảng* (bị chặn hoặc không bị chặn). Khi cần nói rõ, người ta thêm vào tính từ *mở* hoặc *đóng*. Các ký hiệu cũng không giống như ở Việt Nam.

Trong bộ SGK thời kỳ 1990-2000 do GS Trần Văn Hạo chủ biên, các tác giả đã ưu tiên sử dụng tập nghiệm hơn là các nghiệm. Vì vậy, khoảng, đoạn thường được huy động để biểu diễn tập nghiệm (của PT, HPT, BPT, HBPT). Tuy nhiên, việc này không phải bao giờ cũng dễ dàng, nhất là đối với phân môn lượng giác.

Nhận xét

Đối với bậc THCS, các tác giả chỉ dùng hình biểu diễn của khoảng và nửa khoảng không bị chặn để biểu diễn cho tập nghiệm của các bất phương trình tương đương với bất phương trình dạng cơ bản.

Đối với bậc THPT, khái niệm khoảng, đoạn được định nghĩa tường minh. Sau định nghĩa, các tập hợp được thay thế bằng các kí hiệu tương ứng.

2.2. Đạo hàm

Trong đạo hàm, các định nghĩa: đạo hàm của hàm số tại một điểm, đạo hàm của hàm số trên một khoảng, đạo hàm cấp cao được xem là nền tảng của các định nghĩa khác. Vì thế để thấy sự vận hành của các khái niệm khoảng, đoạn, nghiên cứu của chúng tôi chỉ nhằm đến phân tích mối quan hệ thể chế với ba đối tượng này.

2.2.1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Để chuẩn bị cho định nghĩa khái niệm *đạo hàm của hàm số tại một điểm*, GK_{NC11} đưa vào khái niệm *giới hạn hàm số tại một điểm*:

Giả sử $(a ; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a ; b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ (tức $x_n \in (a ; b)$ và $x_n \neq x_0$ với mọi n) mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0$$

[GK_{NC11},146]

Một câu hỏi được đặt ra ngay trong nội hàm của định nghĩa, liệu có tồn tại một dãy số (x_n) trong tập hợp $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ thỏa mãn điều kiện $\lim x_n = x_0$ không? Để trả lời câu hỏi này, trước tiên chúng ta phải biết giả thiết hàm số f xác định trên $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ nhằm mục đích gì? Đây có thể được xem là ràng buộc của thể chế chương trình phổ thông bởi vì khối lượng kiến thức được tạo dựng trước đó không đủ để trả lời các câu hỏi này dẫn đến kết quả là vai trò của khoảng trong định nghĩa bị lãng quên. Nếu vấn đề được đặt ra trong giáo trình M thì chúng ta sẽ thấy được giả thiết hàm số f xác định trên tập $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ là điều kiện đủ để tồn tại một dãy số (x_n) trong tập hợp $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ thỏa mãn điều kiện $\lim x_n = x_0$.

Sau khi định nghĩa khái niệm *giới hạn hàm số tại một điểm*, GK_{NC11} định nghĩa khái niệm *đạo hàm của hàm số tại một điểm*:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó.

Định nghĩa

Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 được gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0 ,

$$\text{kí hiệu là } f'(x_0) \text{ hoặc } y'(x_0), \text{ nghĩa là } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

[GK_{NC11},185]

Theo GK_{NC11}, đạo hàm của hàm số tại một điểm được định nghĩa thông qua sự tồn tại giới hạn (hữu hạn) của hàm số $y = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 . Vai trò của khoảng $(a ; b)$ được thể hiện ngầm ẩn trong giả thiết “hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó” vì đây là điều kiện đủ để hàm số $y = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ xác định trên khoảng $(a ; b) \setminus \{x_0\}$, kết quả này đã thỏa mãn ràng buộc của định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm. Trước khi định nghĩa M, cũng giả thiết hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$. Ngoài mục đích để hàm số $y = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ xác định trên $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ còn đảm bảo x_0 là điểm giới hạn của $(a ; b) \setminus \{x_0\}$, một trong các điều kiện thiết yếu của định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm. Theo sau định nghĩa là nhận xét:

Trong định nghĩa trên, nếu đặt $\Delta x = x - x_0$ và $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ thì ta có

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad [\text{GK}_{\text{NC11}}, 185]$$

Lợi thế của việc tính đạo hàm thông qua số gia được các tác giả giải thích:

Cũng như nhiều sách khác, khái niệm *số gia của biến số* vẫn được định nghĩa bởi hiệu số $\Delta x = x - x_0$. Đó là một thủ pháp sơ phạm nhằm đưa khái niệm vào một cách tự nhiên, giúp học sinh dễ tiếp nhận hơn. Tuy nhiên nó cũng có một nhược điểm là có thể làm cho học sinh hiểu thật không đầy đủ về khái niệm này

[GV_{NC11}, 225]

Quan điểm trên cũng phổ biến rộng rãi qua lời giải của yêu cầu tính đạo hàm của hàm số tại một điểm bằng định nghĩa. Phân tích tổ chức toán T1 liên quan đến bài tập này ta sẽ thấy rõ hơn.

T1: “Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 ”

Ví dụ: bt 2. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của mỗi hàm số sau đây tại điểm x_0

a) $y = 2x + 1, x_0 = 2;$

b) $y = x^2 + 3x, x_0 = 1.$

Để giúp học sinh tính đạo hàm của hàm số tại một điểm, GK_{NC11} trang 186 đã phát biểu quy tắc :

Muốn tính đạo của hàm số f tại điểm x_0 theo định nghĩa, ta thực hiện các bước sau :

Bước 1 : Tính Δy theo công thức $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, trong đó Δx là số gia của biến số tại x_0

Bước 2 : Tìm giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Kĩ thuật $\tau_{1.1}$:

Xác định $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Công nghệ $\theta_{1.1}$: Định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm.

Kĩ thuật $\tau_{1.2}$:

Xác định $\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Lập tỉ số $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Tính giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Công nghệ $\theta_{1.2}$: nhận xét

T1 có 11 nhiệm vụ trong đó có mười bài tập và một ví dụ, lời giải của ví dụ được trình bày trong sách GK_{NC11}, của bài tập được trình trong GV_{NC11}. Xem xét bài giải, chúng tôi thấy rằng các tác giả chỉ thực hiện đúng hai bước theo quy tắc tính đạo hàm bằng công cụ số gia. Vì thế $\tau_{1.2}$ là kĩ thuật mà thế chế mong đợi. Điểm đặc biệt trong lời giải, không thấy các tác giả nhắc đến điều kiện hàm số xác định trên khoảng. Các hàm số trong các nhiệm vụ thuộc kiểu nhiệm vụ T1 đều có chung đặc điểm là xác định trên khoảng. Điều này đã hình thành cho học sinh một hợp đồng ngầm ẩn như sau:

“Khi tính đạo hàm của hàm số tại một điểm, học sinh không có trách nhiệm kiểm tra điểm đang xét có thuộc khoảng xác định của hàm số hay không”.

Rõ ràng, theo định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm thì hàm số $y = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ đủ điều kiện để xét giới hạn vì bản thân nó cũng xác định trên khoảng $(a; b) \setminus \{x_0\}$ nhưng không được chú ý, còn với đối tượng số gia Δx thì được GV_{NC11} gợi ý để giáo viên giới thiệu đến học sinh một cách mơ hồ:

Sau khi học sinh nắm được bài, giáo viên có thể tìm cơ hội, giải thích thêm rằng Δx là một số thực bất kỳ, miễn là thỏa mãn điều kiện: $\Delta x + x_0$ thuộc vào khoảng đang xét [GV_{NC11}, 225].

Chúng ta đã biết kí hiệu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ chỉ được xét đến khi tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ là một hàm số xác định trên khoảng và 0 phải là điểm giới hạn của khoảng đó theo điều kiện của định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm nhưng thể chế chưa một lần nhìn nhận $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ là một hàm số và cũng không chỉ ra tập xác định của nó nhưng đây lại là điều kiện quyết định sự tồn tại của giới hạn. Đúng như nhận định của các tác giả, sử dụng công cụ số gia có thể cho lời giải đơn giản hơn nhưng việc không quan tâm đến các đặc trưng của Δx , Δy vô tình dẫn học sinh đến kết quả đúng một cách giả tạo.

Ở đại học, bên cạnh M chỉ định nghĩa đạo hàm tại một điểm cho những hàm số xác định trên khoảng còn có giáo trình định nghĩa trên tập con bất kì của tập số thực miễn là điểm đang xét là phải điểm giới hạn và thuộc tập đó. Đây là điểm khác biệt với chương trình phổ thông. Vậy cả hai chương trình này của hai cấp bậc còn có những điểm tương đồng sau đây:

Định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm thông qua hai giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ và $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Kí hiệu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ chưa được giới thiệu với tư cách là một hàm số.

Khoảng xác định của Δx chưa được nêu ra.

Từ những điểm giống nhau đã cho thấy, khoảng là một trong những yếu tố then chốt xây dựng nên định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm nhưng không được thể chế chương trình phổ thông quan tâm, làm cho các bước tính đạo hàm tại một điểm bằng công cụ số gia mà học sinh tiếp nhận từ phía giáo viên chỉ là những thao tác hình thức. Ở khía cạnh này, học sinh không thấy được sự nổi khóp giữa định nghĩa và kĩ thuật giải quyết do giáo viên cung cấp.

2.2.2. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

Định nghĩa của GK_{CB11} trang 153:

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó

GK_{CB11} chỉ phát biểu trên khoảng bị chặn nhưng trong vận dụng lại mở rộng cho khoảng không bị chặn, thậm chí là hợp của các khoảng không bị chặn. Chẳng hạn, định lí 4 trang 166 phát biểu:

Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Cũng định nghĩa này nhưng sách GK_{NC11} trang 189 phát biểu tổng quát hơn:

Cho hàm số f xác định trên tập J , trong đó J là một khoảng hoặc hợp của những khoảng nào đó. Ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa

Hàm số f gọi là **có đạo hàm trên J** nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc J

Định nghĩa này chưa được phát biểu trong M. Với định nghĩa trên, GK_{NC11} đã khắc phục những khiếm khuyết của GK_{CB11} nên khả năng vận hành cũng bao quát trên phạm vi rộng hơn.

Theo sau là định nghĩa đạo hàm của hàm số:

Nếu hàm số f có đạo hàm trên J thì hàm số f' xác định bởi
$$\begin{matrix} f': J \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{matrix}$$
 gọi là **đạo hàm của hàm số f** .

Trước khi phát biểu định nghĩa, J được giả thiết là một khoảng hoặc là hợp của các khoảng miễn là hàm số có đạo hàm trên đó. Vậy đạo hàm của hàm số là một hàm số có đặc trưng, tập xác định là một khoảng hoặc hợp của các khoảng. Từ nội hàm của định nghĩa đã cho thấy mọi hàm số thu hẹp $f|_I$ (I là khoảng con của J) cũng được gọi là đạo hàm của hàm số. Khi đó, với yêu cầu tìm đạo hàm của hàm số, học sinh sẽ đưa ra nhiều kết quả khác nhau.

Xét ví dụ 2. Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $f(x) = \frac{x^8}{4} - \frac{2x^6}{3} + 3x;$

b) (...)

Giải

a) $f'(x) = \left(\frac{x^8}{4} - \frac{2x^6}{3} + 3x\right)' = \frac{1}{4}(x^8)' - \frac{2}{3}(x^6)' + 3(x)' = 2x^7 - 4x^5 + 3.$

b) (...)

Lời giải của các nhiệm vụ này trong các yêu cầu tìm đạo hàm của hàm số, GV_{NC11} cũng đơn giản chỉ xác định y', y' được hiểu ngầm ẩn là một hàm số. Tìm tập xác định của hàm số $f'(x)$ là tìm tập các giá trị của biến x làm cho $f'(x)$ xác định và nhiệm vụ này xem như người học đã biết. Nói tóm lại,

quan điểm của các tác giả được thể hiện qua các lời giải đã đồng nhất yêu cầu tìm đạo hàm của hàm số với hàm số $f': J \rightarrow R$
 $x \mapsto f'(x)$ trong đó J là tập tất cả các giá trị của x sao cho đạo hàm tại đó xác định. Phân tích này cho thấy, để tạo sự nối khớp giữa định nghĩa đạo hàm của hàm số và quan điểm của các tác giả qua lời giải của yêu cầu tìm đạo hàm của hàm số ngay thì trước khi định nghĩa các tác giả phải giả thiết khoảng J là tập hợp các giá trị x sao cho đạo hàm $f'(x)$ tại đó xác định. Đây cũng là lựa chọn của các tác giả của M

Khái niệm đạo hàm trên một khoảng can thiệp vào nhiều vấn đề xoay quanh tính đơn điệu của hàm số. Vì thế trong phân tích chúng tôi cũng tính đến các vấn đề này

Ở bậc đại học, khái niệm hàm số đơn điệu được khá nhiều giáo trình định nghĩa trên một tập con bất kì của tập số thực, chẳng hạn M .

Trong sách giáo khoa Việt Nam các thời kì, khái niệm hàm số đơn điệu đều được định nghĩa trên một khoảng bị chặn, trừ quyển GK_{NC10} định nghĩa khái niệm hàm số đơn điệu trên đoạn, nửa đoạn (bị chặn hoặc không bị chặn).

Sự chuyển đổi didactic này được các tác giả giải thích trong HD₁₂ như sau:

Trong các SGK trước đây cũng như trong SGK chỉnh lí hợp nhất *Giải tích 12*, các tác giả chỉ xét tính đơn điệu của hàm số trên một khoảng mà không đề cập đến tính đơn điệu của hàm số trên một đoạn và trên nửa khoảng. Trong SGK này, các tác giả đã giới thiệu định nghĩa hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng. Sự mở rộng này giúp cho việc chứng minh một số bất đẳng thức, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số và chứng minh một vài định lí thuận tiện và dễ dàng hơn.

Việc phân bài học của nhiều sách giáo khoa chỉ định nghĩa tính đơn điệu của hàm số trên một khoảng bị chặn là không phù hợp với các kiểu nhiệm vụ liên quan trong phần bài tập vì ở đó có xét những hàm số đơn điệu trên khoảng không bị chặn.

Do sách GK_{NC10} chỉ định nghĩa tính đơn điệu của hàm số trên một khoảng nên khi trình bày dãy số (những hàm số không xác định trên một khoảng), sách GK_{NC11} phải định nghĩa thêm các khái niệm dãy số tăng, dãy số giảm.

Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương N^* được gọi là một **dãy số vô hạn** (hay còn gọi tắt là **dãy số**).

Người ta thường kí hiệu các giá trị $u(1), u(2), \dots$ tương ứng bởi $u_1, u_2, \dots$

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu với mọi n ta có $u_n < u_{n+1}$.

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu với mọi n ta có $u_n > u_{n+1}$. [GK_{NC11}, 154]

Ngoài việc sử dụng định nghĩa để xét tính đơn điệu của hàm số, các sách giáo khoa giải tích 12 đều trang bị thêm một công cụ để hỗ trợ cho việc xét tính đơn điệu của hàm số. Chẳng hạn, GK_{NC12}:

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I .

Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng I .

Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I .

Sách giáo khoa này nhấn mạnh rằng định lí trên là một điều kiện đủ để hàm số đơn điệu trên một khoảng và bổ sung thêm: “Khoảng I trong định lí trên có thể được thay thế bởi một đoạn hoặc một nửa khoảng”.

Chúng tôi tạm gọi định lí trên là định lí T.

Dưới đây là nhận định của các tác giả về việc mở rộng định nghĩa hàm số đơn điệu trên nửa khoảng, đoạn được trình bày trong sách GV_{NC12} trang 21

Một vài ví dụ dưới đây cho thấy sự cần thiết và lợi ích của việc xét tính đơn điệu của hàm số không chỉ trên một khoảng mà cả trên một đoạn và trên một nửa khoảng.

Đây là ví dụ cùng với bài giải của một học sinh.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ là đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giải

Hàm số có đạo hàm

$$y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2.$$

Từ đó ta lập được bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		0	
y	$-\infty$	1	$+\infty$

Như vậy hàm số đồng biến từ $-\infty$ đến 1 trên khoảng $(-\infty ; -1)$, sau đó đồng biến từ 1 đến $+\infty$ trên khoảng $(-1 ; +\infty)$ thành thử hàm số đồng biến trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

Lập luận vừa nêu là không chặt chẽ. Đúng ra phải chứng tỏ trên mỗi nửa khoảng $(-\infty ; -1]$ và $[-1 ; +\infty)$ từ đó mới suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Tính đồng biến của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$ được chứng minh một cách chặt chẽ tương tự như ví dụ 3 trong bài.

Dưới đây là ví dụ và bài giải của một học sinh.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

trên các đoạn và nửa khoảng sau đây:

a) $[-2 ; -\frac{1}{2}]$

b) $[-\frac{1}{2} ; 1]$

c) $[1 ; 3]$

Giải

c) Trên nửa khoảng $[1 ; 3)$ không có điểm nào tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm. Vì $f'(2) = 36 > 0$ nên $f'(x) > 0$ trên nửa khoảng $[1 ; 3)$. Do đó $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[1 ; 3)$. Vì vậy $\min_{[1;3]} f(x) = f(1) = 4$.

Thực ra trong lời giải trên đây, không cần điều kiện $f'(1)$ dương để khẳng định hàm số đồng biến trên $[1 ; 3)$. Và lại, lập luận tương tự như thế không ứng dụng được để khẳng định hàm số f đồng biến chẳng hạn, trên $[0 ; 3)$ vì ở đây, $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (0 ; 3)$ nhưng $f'(0) = 0$.

Trong ví dụ 1, nhờ thiết lập định nghĩa hàm số đơn điệu trên nửa khoảng là cơ sở để đi đến kết luận hàm số đồng biến trên $\mathbf{R}$ một cách dễ dàng. Tuy nhiên, ta vẫn chứng minh được hàm số này đồng biến trên $\mathbf{R}$ hoàn toàn bằng định nghĩa nhưng nếu vận dụng định lí T của các SGK trước đây thì ta chỉ kết luận hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(-1 ; +\infty)$. Điều này làm cho giá trị của định lí T bị thu hẹp đáng kể. Tương tự như nửa khoảng, đối với các đoạn mà trên đó hàm số cùng tăng (hoặc cùng giảm), nếu giữa chúng có chung một đầu mút thì hàm số sẽ tăng (hoặc giảm) trên cả phần hợp của chúng. Rõ ràng, việc mở rộng định lí T trên nửa khoảng, đoạn giúp chúng ta biết được tính đơn điệu trên cả tập xác định của hàm số nếu trên tập xác định đó, hàm số chỉ thỏa một trong hai tính chất (tăng hoặc giảm). Việc mở rộng hàm số đơn điệu trên nửa khoảng, đoạn còn là nền tảng lí thuyết quan trọng giải thích cho nhận xét được trình bày trong GK_{NC12}, trang 7

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. Nếu $f'(x) \geq 0$ với mỗi $x \in I$ (hoặc $f'(x) \leq 0$ với mỗi $x \in I$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I.

Chúng tôi cũng tạm gọi nhận xét trên là định lí T'.

Như vậy định lí T' là trường hợp mở rộng của định lí T. Đặc biệt là nếu thay I bởi một tập con bất kì của $\mathbf{R}$ thì cả hai định lí T và T' không còn đúng nữa. Chúng tôi sẽ giải thích thông qua hàm số sau:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 < x \leq 1 \\ 4x & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Dễ thấy hàm số $f'(x) \geq 0 \forall x \in (0 ; 1) \cup (1 ; 2)$ nhưng hàm số f không tăng trên $(0 ; 1) \cup (1 ; 2)$. Trong giảng dạy, nếu giáo viên không nhấn mạnh vai trò của khoảng, đoạn trong định lí T', có thể học sinh chỉ chú ý đến $(x^3)' = 3x^2 \geq 0$, $(4x)' = 4 > 0$ và sẽ kết luận hàm số f tăng trên $(0 ; 1)$.

Tổ chức toán học gắn liền với khái niệm hàm số đơn điệu

Trong bài tính đơn điệu của hàm số có bốn kiểu nhiệm vụ

T1: “Xét chiều biến thiên của hàm số”

T2: “Tìm giá trị của tham số để hàm số đơn điệu trên một khoảng”

T3: “Chứng minh bất đẳng thức $f(x) > g(x)$ với $x \in (a ; b)$ ”

T4: “Chứng minh hàm số đồng biến trên một khoảng”

Ngoài phạm vi của bài học trên có thêm một kiểu nhiệm vụ

T5: “Tìm cực trị của hàm số”

T6: “Tìm GTLN, GTNN của hàm số”

Bảng thống kê số lượng ví dụ và bài tập liên quan đến khái niệm hàm số đơn điệu.

Kiểu nhiệm vụ	Số bài tập và ví dụ	
	Ví dụ	Bài tập
T1	2	15
T2	0	2
T3	0	5
T4	1	5
T5	4	9
T6	3	12
Tổng	10	46

Theo bảng này cho thấy có sự chênh lệch giữa số lượng nhiệm vụ trong sáu kiểu nhiệm vụ trên. Đường như các tác giả đặt nặng yêu cầu xét chiều biến thiên, tìm cực trị của hàm số, Tìm GTLN, GTNN của hàm số hơn các vấn đề còn lại. Chúng tôi sẽ tiến hành phân tích chi tiết từng kiểu nhiệm vụ trên đây.

Phân tích các tổ chức toán học liên quan đến đối tượng hàm số đơn điệu

T1: “Xét chiều biến thiên của hàm số”

Ví dụ 2 trang 6. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên tập hợp $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Chiều biến thiên của hàm số được nêu trong bảng sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y		$\nearrow$	-4	$\searrow$	4	$\nearrow$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -2)$ và $(2 ; +\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2 ; 0)$ và $(0 ; 2)$.

Kĩ thuật τ_1 để giải quyết T1 là:

Tìm TXĐ của hàm số

Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Xét dấu $f'(x)$

Lập bảng biến thiên.

Có hai cách kết luận

Cách 1: Nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách 2: Nêu kết luận về các đoạn, nửa khoảng, khoảng (ưu tiên theo thứ tự: nếu trên đoạn không thể xét mới tính đến nửa khoảng rồi mới tới khoảng) đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Công nghệ θ_1 : Định lí T.

Đối với nhiệm vụ xét chiều biến thiên của hàm số trong GK_{NC12}, trang 5 quy định:

Việc tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của một hàm số còn được nói gọn là xét chiều biến thiên của hàm số đó

Một hàm số có thể không đơn điệu trên cả tập xác định nhưng có thể đơn điệu trên các khoảng con của nó. Mục đích nghiên cứu của kiểu nhiệm vụ T1 là chia tập xác định thành các khoảng sao cho trên đó hàm số đơn điệu nhằm phục vụ cho việc lập bảng biến thiên. Vì theo ý kiến của các tác giả được trình bày trong GV_{NC12} trang 19. Việc lập bảng biến thiên có những lợi ích sau:

Trong giảng dạy giáo viên nên hướng dẫn cho học sinh lập bảng biến thiên của hàm số, giúp các em hiểu ý nghĩa của bảng biến thiên và sử dụng nó để xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Việc lập bảng biến thiên sẽ giúp các em nắm được vấn đề tốt hơn, giải bài tập nhanh hơn và ít mắc nhầm lẫn trong thực hành.

Chúng ta hãy xem lời giải bài tập 1f của GK_{NC12} trang 7 được trình bày trong GV_{NC12} trang 24.

1. Xét sự biến thiên của các hàm số sau:

...

f) $y = \sqrt{4 - x^2}$

Giải

Hàm số xác định trên đoạn $[-2; 2]$.

$$y' = \frac{-x}{4 - x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y		2	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2 ; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0 ; 2)$. (Có thể nói rằng hàm số đồng biến trên đoạn $[-2 ; 0]$ và nghịch biến trên đoạn $[0 ; 2]$).

Theo quy định của GK_{NC12}, nhiệm vụ xét chiều biến thiên là chỉ ra các khoảng mà trên đó hàm số đơn điệu nhưng trong lời giải của chính các tác giả, ở kết quả cuối lại bổ sung thêm đáp án hàm số đơn điệu trên đoạn. Vậy đáp án nào được xem là đúng? Chúng ta hãy tìm hiểu quan điểm của các tác giả nhìn nhận vấn đề này trong GV_{NC12} trang 22

Khi xét sự biến thiên của hàm số, để tránh nặng nề, ta thường chỉ nói tới tính đơn điệu của hàm số trên một khoảng. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp việc xét sự biến thiên của hàm số trên một đoạn hoặc một nửa khoảng tỏ ra rất tiện dụng trong thực hành.

Quan điểm của các tác giả cũng không dứt khoát trong việc phải chọn đáp án nào. Bài tập của GK_{NC12} có 13 nhiệm vụ thuộc kiểu nhiệm vụ T1 nhưng có 11 nhiệm vụ chấp nhận hai đáp án nhưng có 2 nhiệm vụ được GV_{NC12} trình bày cả hai đáp án. Điều đáng lưu ý đáp án hàm số đơn điệu trên đoạn được bổ sung trong dấu ngoặc đơn dưới hành thức chỉ để tham khảo. Phân tích trên cho thấy đã có một sự chênh lệch quá lớn trong quá trình chuyển đổi didactic từ mục tiêu chương trình đến tri thức cần dạy.

Đối với chương trình phổ thông hiện hành, khái niệm hàm số đơn điệu là một chủ đề của bài đại cương về hàm số trong các sách đại số 10. Bài tập dành cho nội dung này cũng không nhiều, trong sách giáo khoa nâng cao chỉ có duy nhất hai bài:

Bài số 4 trang 45

Khảo sát sự biến thiên của mỗi hàm số sau và lập bảng biến thiên của nó:

- a) $y=x^2+2x-2$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(-1 ; +\infty)$;
- b) $y=-2x^2+4x+1$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; 1)$ và $(1 ; +\infty)$;
- c) $y = \frac{2}{x-3}$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; 3)$ và $(3 ; +\infty)$

Bài 12 trang 46.

Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

- a) $y = \frac{1}{x-2}$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; 2)$ và $(2 ; +\infty)$;
- b) $y=x^2-6x+5$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; 3)$ và $(3 ; +\infty)$;
- c) $y=x^{2005}+1$ trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$

Các hàm số có mặt trong các bài này là các hàm đa thức hoặc hữu tỷ.

Đến lớp 11, việc xét tính đơn điệu chỉ dành cho các hàm số lượng giác, kỹ thuật xét tính đơn điệu chủ yếu nhờ vào định nghĩa.

Đến lớp 12, chủ đề hàm số đơn điệu trở thành một bài học có số lượng bài tập khá phong phú với τ_1 là kỹ thuật giải được ưu tiên. Thậm chí để khảo sát chiều biến thiên của các hàm số hàm số mũ, hàm số lôgarit và hàm số lũy thừa các tác giả cũng lựa chọn kỹ thuật này, khác với trước đây công việc này chỉ được các tác giả trực tiếp kiểm tra bằng định nghĩa.

Từ đây, chúng tôi có thể kết luận: Trong chương trình phổ thông, tất cả các nhiệm vụ xét tính đơn điệu của hàm số (không bao gồm hàm số lượng giác) đều có thể sử dụng kỹ thuật τ_1 để giải quyết và đây có thể là kỹ thuật mà thế chế mong đợi.

T2: “Tìm giá trị của tham số để hàm số đơn điệu trên R”

Ví dụ: bài tập 5 trang 8. Tìm các giá trị của a để hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$$

đồng biến trên R.

Giải

$$f'(x) = x^2 + 2ax + 4.$$

$$\Delta' = a^2 - 4.$$

Nếu $a^2 - 4 < 0$ hay $-2 < a < 2$ thì $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đồng biến trên R.

Nếu $a = 0$ thì $f'(x) = (x+2)^2$ với mọi $x \neq -2$. Hàm số đồng biến trên R.

Nếu $a < -2$ hoặc $a > 2$ thì $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Giả sử $x_1 < x_2$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Các giá trị này của a không thỏa mãn điều kiện đòi hỏi.

Vậy hàm số đồng biến trên R khi và chỉ khi $-2 \leq a \leq 2$.

Kỹ thuật $\tau_{2.1}$:

Tính $f'(x)$, $\Delta_{y'}$ (hoặc Δ').

Giải các bất phương trình $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ và phương trình $\Delta = 0$ sẽ tìm được a và dấu của $f'(x)$

Chọn a thỏa mãn yêu cầu bài toán nhờ vào định lý T

Công nghệ $\theta_{2.1}$: Định lý về dấu của tam thức bậc hai, Định lý T

Kỹ thuật $\tau_{2.2}$:

Tính $f'(x)$, $\Delta_{y'}$ (hoặc Δ').

Giải bất phương trình $\Delta_{y'} \leq 0$, a nếu tìm được sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Công nghệ $\theta_{2.2}$: Định lý về dấu của tam thức bậc hai và Định lý T'

Các hàm số được cho trong kiểu nhiệm vụ T2 là các hàm bậc ba có đặc điểm hệ số của x^3 là hằng số, còn tham số chứa trong hệ số của x hoặc x^2 . Có thể các tác giả chỉ quan tâm đến hàm này vì

khi lấy y' sẽ trở thành tam thức bậc hai. Việc tìm điều kiện của tham số để tam thức bậc hai không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ đã trở nên quá quen thuộc đối với học sinh khi học định lý đảo về dấu tam thức bậc hai ở lớp 10. Phải thông qua xét dấu Δ mới thấy được giá trị nào của a làm cho $f'(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ và giá trị đó cũng chính là đáp án cần tìm nhờ vào tác động của định lý T hoặc T'.

Kĩ thuật $\tau_{2.2}$ cho lời giải ngắn gọn hơn nhưng không được thể chế chương trình nâng cao chấp nhận vì tác giả đã không đề cập đến định lý T'. Tuy nhiên, ta có thể tìm thấy định lý này trong GV_{CB12} trang 15 nhưng chỉ phát biểu cho khoảng bị chặn. Do đó $\tau_{2.1}$ vẫn là kĩ thuật mà thể chế mong đợi.

T3: “Chứng minh bất đẳng thức $f(x) > g(x)$ với $x \in (a ; b)$ ”

Ví dụ: bài tập 9 trang 29. Chứng minh rằng

$$\sin x + \tan x > 2x \text{ với mọi } x \in (0 ; \frac{\pi}{2}).$$

Giải

Hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ liên tục trên nửa khoảng $[0 ; \frac{\pi}{2})$ và có đạo hàm

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > 0 \text{ với mọi } (0 ; \frac{\pi}{2})$$

vì $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} > 2$ với mọi $(0 ; \frac{\pi}{2})$. Do đó hàm số f đồng biến trên với mọi $[0 ; \frac{\pi}{2})$

và ta có $f(x) > f(0) = 0$ với mọi $x \in (0 ; \frac{\pi}{2})$.

Kĩ thuật τ_3 để giải quyết T3 là:

Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$.

Chứng tỏ hàm số $h(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$.

Chứng tỏ hàm số $h(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$.

Chứng tỏ $h(a) = 0$.

Suy ra $h(x) > h(a) = 0$

Suy ra $f(x) > g(x)$ với $x \in (a ; b)$.

Kĩ thuật này có thể áp dụng cho đoạn và nửa khoảng có thể hoặc không bị chặn

Công nghệ θ_3 : Định lý T và tính chất của bất đẳng thức:

$$f(x) - g(x) > 0, x \in (a ; b) \Leftrightarrow f(x) > g(x), x \in (a ; b).$$

Hai vế bất đẳng thức của các nhiệm vụ này là hai hàm số khác nhau. Trong đó có một vế là hàm đa thức. Với đặc trưng này thì τ_3 là kĩ thuật mà thể chế mong đợi.

Các khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng trong giả thiết của bất đẳng thức ngầm chứa một đặc điểm có một đầu mút là số 0, đầu mút còn lại là số dương. Đặc biệt là giá trị của hai hàm số trong hai vế bất đẳng thức tại 0 luôn bằng nhau.

T4: “Chứng minh hàm số đồng biến trên một khoảng”

Ví dụ: bài tập 2a trang 7. Chứng minh rằng

Hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Giải

$$y' = \frac{4}{(x+2)^2} > 0 \text{ với mọi } x \neq -2.$$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Kĩ thuật $\tau_{4.1}$:

Tính y'

Chứng minh $y' \geq 0$ ($y' \leq 0$) với mọi x thuộc khoảng yêu cầu.

Công nghệ $\theta_{4.1}$: Định lí T

Kĩ thuật $\tau_{4.2}$:

Tìm TXĐ của hàm số

Tính y'

Xét dấu y'

Lập bảng biến thiên

Chứng tỏ khoảng làm cho hàm số đơn điệu chứa khoảng mà đề bài yêu cầu

Công nghệ $\theta_{4.2}$: Định lí T và tính chất (I, J là hai khoảng và $I \subset J$, nếu hàm đơn điệu trên J thì sẽ đơn điệu trên I).

Hàm số trong các nhiệm vụ này là hàm sơ cấp, khoảng cần chứng minh hàm số đơn điệu trên đó có khi được cho sẵn, có khi là tập xác định của hàm số mà đòi hỏi học sinh phải tự tìm.

Các bước thực hiện kĩ thuật $\tau_{4.1}$ là quá trình kiểm tra điều kiện đủ của định lí T một cách tường minh và các bài giải của các nhiệm vụ này trong sách giáo viên đều sử dụng kĩ thuật $\tau_{4.1}$ nên đây là kĩ thuật mà thể chế mong đợi. Tuy nhiên, có thể $\tau_{4.2}$ sẽ được học sinh nhanh chóng đón nhận hơn vì dễ dàng nhận ra các khoảng làm cho hàm số đơn điệu từ bảng biến thiên. Trên cơ sở đó chỉ cần chứng tỏ khoảng mà bài toán đề nghị xét là con của khoảng làm cho hàm số đơn điệu. Hơn nữa lợi thế của kĩ thuật này là đỡ phải va chạm với việc chứng minh bất đẳng thức.

T5: “Tìm cực trị của hàm số”

Ví dụ 1 trang 14. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$$

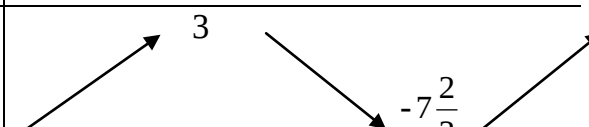
Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = x^2 - 2x - 3$.

Từ đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Sau đây là bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$, giá trị cực đại của hàm số là $f(x) = 3$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$, giá trị cực tiểu của hàm số là $f(x) = -7\frac{2}{3}$.

Kĩ thuật $\tau_{5.1}$:

Tìm $f'(x)$

Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots$) tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm

Xét dấu $f'(x)$

Lập bảng biến thiên của hàm số

Nhận biết khi x đi qua điểm x_i mà $f'(x)$ đổi dấu thì x_i là điểm cực trị

Công nghệ $\theta_{5.1}$: Định lí T và định lí 1 bài cực trị của hàm số trang 12 của hàm số được trình bày dưới đây

Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó

a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .

Kĩ thuật $\tau_{5.2}$:

Tìm $f'(x)$

Tìm các nghiệm x_i ($i = 1, 2, \dots$) của phương trình $f'(x) = 0$

Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$

Nếu $f'(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i

Nếu $f'(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i

Công nghệ 05.2: Định lí 3 của bài cực trị của hàm số trang 15 phát biểu như sau

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .

a) Nếu $f'(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0

b) Nếu $f'(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0

Theo định nghĩa, một điểm x_0 gọi điểm cực trị của hàm số thì một điều kiện trước tiên phải được đảm bảo là tồn tại khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0 và thỏa mãn $(a ; b)$ là tập con của tập xác định. Vì thế trong các nhiệm vụ tìm điểm cực trị, tập xác định của hàm số là hợp không quá đếm được của các khoảng (đoạn, nửa khoảng) nhằm đảm bảo điều kiện cho mọi phần tử thuộc tập xác định.

Nhiệm vụ khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số luôn có mặt thường trực trong các đề thi tốt nghiệp phổ thông từ trước cho đến nay. Việc lập bảng biến thiên và tìm cực trị là hai khâu không thể thiếu trong kĩ thuật giải của kiểu nhiệm vụ này, nhưng một khi lập được bảng biến thiên cũng đồng nghĩa với xác định được điểm cực trị nên kĩ thuật $\tau_{5.2}$ sẽ không được chú ý đến trong kiểu nhiệm vụ này.

Trong khuôn khổ của kiểu nhiệm vụ T5, cả hai kĩ thuật đều cho đáp án đơn giản nhưng xét đến tính trực quan thì kĩ thuật $\tau_{5.1}$ chiếm ưu thế hơn.

Xét trên phương diện rộng thì $\tau_{5.1}$ kĩ thuật mà thể chế mong đợi.

T6: “Tìm GTLN, GTNN của hàm số”

Gồm có hai kiểu nhiệm vụ con

T6.1: “Tìm GTLN, GTNN trên D_1 ”

Trong đó D_1 là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

Liên quan đến kiểu nhiệm vụ này, một câu hỏi được đặt ra : Có thể tìm được GTLN, GTNN của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a ; b)$ từ đoạn $[a ; b]$ và ngược lại không? (giả sử hàm số đó xác định trên đoạn $[a ; b]$)

Nếu $\min_{x \in (a;b)} f(x) = m$, $\max_{x \in (a;b)} f(x) = M$ thì $\min_{x \in [a;b]} f(x) = \min\{f(a), m, f(b)\}$, $\max_{x \in [a;b]} f(x) = \max\{f(a), M, f(b)\}$.

Vậy nếu hàm số đạt GTLN, GTNN trên khoảng thì cũng đạt GTLN, GTNN trên bao đóng của khoảng đó nhưng điều ngược lại có thể không đúng, ví dụ: cho hàm số

$$g: [a ; b] \rightarrow [a ; b]$$

$$x \mapsto g(x) = x$$

Ta thấy hàm số g đạt GTLN, GTNN trên $[a ; b]$ nhưng không đạt GTLN, GTNN trên $(a ; b)$.

Trước khi trình bày kĩ thuật giải chúng tôi bắt đầu từ ví dụ 1 trang 18

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Giải

Tập xác định của hàm số là $[-2 ; 2]$. Hiển nhiên $0 \leq f(x) \leq 2$ với mọi $x \in [-2 ; 2]$;

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \text{ và } f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

Do đó

$$\min_{x \in [-2; 2]} \sqrt{4 - x^2} = 0 ; \quad \max_{x \in [-2; 2]} \sqrt{4 - x^2} = 2.$$

Kĩ thuật $\tau_{6.1.1}$:

Tìm m, M nếu có sao cho $m \leq f(x) \leq M$

Tìm $x_1, x_2 \in D_1$ sao cho $f(x_1) = m, f(x_2) = M$

Kết luận $\min_{x \in D} f(x) = m, \max_{x \in D} f(x) = M$

Lưu ý: Nếu giả thiết không nhắc đến tìm GTLN, GTNN trên tập nào thì phải hiểu là tìm yêu cầu đặt trên tập xác định của hàm số

Công nghệ $\theta_{6.1.1}$: Định nghĩa GTLN, GTNN

Kĩ thuật $\tau_{6.1.2}$:

Lập bảng biến thiên

Tính các giá trị của hàm số tại các đầu mút của D_1 (nếu được)

Chia D_1 thành đoạn, nửa khoảng, khoảng (theo thứ tự ưu tiên) sao cho hàm số đơn điệu

Tìm GTLN, GTNN dựa trên tính đơn điệu của mỗi đoạn, nửa khoảng, khoảng (theo thứ tự ưu tiên)

GTLN (GTNN) cần tìm trên D_1 chính là GTLN (GTNN) của các GTLN (GTNN) trên các đoạn, nửa khoảng, khoảng (theo thứ tự ưu tiên)

Công nghệ $\theta_{6.1.2}$: Định lí T và tính chất GTLN (GTNN) cần tìm trên D_1 chính là GTLN (GTNN) của các GTLN (GTNN) trên các đoạn, nửa khoảng, khoảng (theo thứ tự ưu tiên)).

T6.1.2: “Tìm GTLN, GTNN trên tập N^* ”

Ví dụ (bài tập 20 trang 22)

Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng

$$P(n) = 480 - 20n \text{ (gam)}$$

Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

Giải

Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì sau một vụ, số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ trung bình cân nặng

$$f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2 \text{ (gam)}$$

Xét hàm số $f(x) = 480x - 20x^2$ trên khoảng $[1; +\infty)$.

(Biến số n lấy giá trị nguyên dương được thay bằng biến số x lấy các giá trị trên khoảng $[1; +\infty)$).

$$f'(x) = 480 - 40x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 12.$$

x	$-\infty$	12	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$f(12)$	

Trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 12$. Từ đó suy ra rằng trên tập hợp N^* các số nguyên dương, hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại điểm $n = 12$.

Vậy muốn thu hoạch được nhiều nhất sau một vụ thì trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ phải thả 12 con cá.

Kỹ thuật $\tau_{6.2}$:

Tìm GTLN, GTNN trên nửa khoảng $[1; +\infty)$ bằng một trong hai kỹ thuật $\tau_{6.1.1}$, $\tau_{6.1.2}$

$$\text{Tìm } x_1, x_2 \text{ sao cho } f(x_1) = \min_{x \in [1; +\infty)} f(x), f(x_2) = \max_{x \in [1; +\infty)} f(x)$$

Chứng tỏ $x_1, x_2 \in N^*$

$$\text{Kết luận } f(x_1) = \min_{x \in N^*} f(x), f(x_2) = \max_{x \in N^*} f(x)$$

Công nghệ $\theta_{6.2}$: Công nghệ của một trong hai kỹ thuật $\tau_{6.1.1}$, $\tau_{6.1.2}$ đã chọn, Tính chất (Nếu f đạt GTLN, GTNN tại $x_1, x_2 \in X$, $A \subset X$ và $x_1, x_2 \in A$ thì f đạt GTLN, GTNN trên A).

Vì kỹ thuật $\tau_{6.2}$ căn bản dựa vào hai kỹ thuật $\tau_{6.1.1}$, $\tau_{6.1.2}$ nên trong phân tích chúng tôi không quan tâm đến kỹ thuật này.

Trong hai kỹ thuật toán học gắn liền với kiểu nhiệm vụ T6.1, kỹ thuật $\tau_{6.1.1}$ yếu thế hơn kỹ thuật $\tau_{6.1.2}$ vì muốn sử dụng thành thạo kỹ thuật này đòi hỏi học sinh phải biết huy động và nhạy bén vận dụng các bất đẳng thức để tìm kiếm các giá trị m, M thỏa mãn $\min_{x \in D} f(x) = m, \max_{x \in D} f(x) = M$. việc làm này không

phải lúc nào cũng thuận lợi. Trái lại, kĩ thuật $\tau_{6.1.2}$ thao tác lại đơn giản, và lại đảm bảo tính khách quan nên $\tau_{6.1.2}$ được xem là kĩ thuật mà thể chế mong đợi.

Nếu không kể đến bài tập 20 được trình bày trên thì hầu hết các hàm số cần tìm GTLN, GTNN đều xác định trên khoảng (đoạn, nửa khoảng).

🌈 Từ phân tích các kiểu nhiệm vụ liên quan đến tính đơn điệu của hàm số đã cho thấy hàm số được đề nghị trong các nhiệm vụ luôn xác định trên hợp không quá đếm được của các khoảng (đoạn, nửa khoảng) với kĩ thuật giải được ưu tiên lập bảng biến thiên đặt trên cơ sở của định lí T. Đây có thể là lí do mà các tác giả của chương trình nâng cao chỉ quan tâm đến việc xây dựng thêm khái niệm hàm số đơn điệu trên khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

2.3. Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa đạo hàm cấp cao được xây dựng bằng quy nạp, với quy ước đạo hàm của hàm số f được gọi là đạo hàm cấp một, kí hiệu f' .

Tiếp theo là định nghĩa đạo hàm cấp 2

Cho hàm số f có đạo hàm f' . Nếu f' cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm số f và kí hiệu là f'' , tức là $f'' = (f')'$ [GK_{NC11}, 216]

Từ đây, các tác giả khái quát lên thành đạo hàm cấp n

Cho hàm số f có đạo hàm cấp $n - 1$ (với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) là $f^{(n-1)}$. Nếu $f^{(n-1)}$ là hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của hàm số và kí hiệu là $f^{(n)}$. Nói cách khác, $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$, ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). [GK_{NC11}, 218]

Trong định nghĩa, chúng ta không thấy sự xuất hiện của khoảng. Vậy nếu không tính đến sự can thiệp của khoảng thì các định nghĩa trên có được thành lập không?

Điều kiện để xét được đạo hàm cấp hai hay cấp n là các hàm số $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ phải có đạo hàm dẫn đến một yêu cầu tất yếu là các hàm số này phải xác định trên khoảng (theo giả thiết định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm). Vai trò của khoảng chỉ thể hiện ngầm ẩn trong các định nghĩa của sách GK_{NC11}, trái lại nó xuất hiện một cách tường minh trong GV_{CB11}:

Cho hàm số

$$y = f(x)$$

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi $x \in (a; b)$. Khi đó tương ứng:

$$f': (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

Cho ta một hàm số mới. Vì hàm số này xây dựng từ hàm số $y = f(x)$, hoàn toàn xác định bởi hàm số đó nên được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$, hoàn toàn xác định bởi hàm số đó nên được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

Tương tự, nếu hàm số

$$y' = f'(x) \quad (2)$$

có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (c; d) \subset (a; b)$ thì ta lập được đạo hàm của (2) theo cách trên gọi là đạo hàm cấp (2) của $y = f(x)$ và kí hiệu là

$$y'' = f''(x)$$

Tổng quát, nếu hàm số

$$y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x)$$

có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (e; f)$ thì tương ứng

$$f^{(n)} : (e; f) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f^{(n)}(x)$$

cho ta đạo hàm của $y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x)$ gọi là đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$ và kí hiệu là

$$y^n = f^{(n)}(x) \quad [\text{GV}_{\text{CB11}}, 180]$$

Trong thể chế dạy học, mối quan hệ giữa học sinh với đối tượng đạo hàm cấp cao được hình thành như thế nào?

Để trả lời câu hỏi chúng tôi phân tích TCTH liên quan đến đạo hàm cấp cao

T1: “Tìm đạo hàm của hàm số cấp lớn hơn 1”

T2: “Chứng minh đạo hàm cấp n của hàm số bằng một biểu thức phụ thuộc vào n ”, $n \in \mathbb{N}^*$

Bảng thống kê số lượng ví dụ và bài tập liên quan đến đạo hàm cấp cao

Kiểu nhiệm vụ	Số bài tập và ví dụ	
	Ví dụ	Bài tập
T1	3	12
T2	0	7
Tổng	3	19

T1: “Tìm đạo hàm của hàm số cấp lớn hơn 1”

Ví dụ (bài tập 4a) Tìm đạo hàm của mỗi hàm số đến cấp được kèm theo.

a) $f(x) = x^4 - \cos 2x, f^4(x)$

Giải

$$f^1(x) = [f(x)]' = (x^4 - \cos 2x)' = 4x^3 + 2\sin 2x$$

$$f^2(x) = [f^1(x)]' = (4x^3 + 2\sin 2x)' = 12x^2 + 4\cos 2x$$

$$f^3(x) = [f^2(x)]' = (12x^2 + 4\cos 2x)' = 24x - 8\sin 2x$$

$$f^4(x) = [f^3(x)]' = (24x - 8\sin 2x)' = 24 - 16\cos 2x$$

Kĩ thuật $\tau_{6.1.1}$: Tính theo thứ tự bắt đầu từ y^1, y^2 cho đến khi tính được đạo hàm với cấp cần tìm

Công nghệ $\theta_{6.2}$: Định nghĩa đạo hàm cấp cao

T2: “Chứng minh đạo hàm cấp n của hàm số bằng một biểu thức phụ thuộc vào n ”, $n \in \mathbb{N}^*$

Ví dụ (bài tập 43a) Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta có:

$$\text{Nếu } f(x) = \frac{1}{x} \text{ thì } f^n(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Giải

Cho $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$). Ta hãy chứng minh công thức

$$f^n(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad (\forall n \geq 1) \quad (1)$$

Với $n = 1$, ta có

$$f^n(x) = f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ và } \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = -\frac{1}{x^2}.$$

Suy ra (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (1) đúng cho trường hợp $n = k$ ($k \geq 1$), tức là

$$f^k(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}},$$

Ta phải chứng minh (1) đúng cho trường hợp $n = k + 1$, tức là

$$f^{k+1}(x) = \frac{(-1)^{k+1} (k+1)!}{x^{k+2}}$$

Thật vậy, ta có

$$f^{k+1}(x) = [f^k(x)]' = -\frac{(-1)^k k!(k+1)x^k}{x^{2(k+1)}} = \frac{(-1)^{k+1} (k+1)!}{x^{k+2}}.$$

Kĩ thuật $\tau_{6.1.1}$:

Tính y^1 , chứng tỏ mệnh đề đúng với $n = 1$

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ ($k \geq 1$) và $y^{(k)} = f^k(x)$

Xác định mệnh đề ứng với $n = k + 1$, giả sử $y^{(k+1)} = g(x)$

Chứng minh $[y^{(k)}]' = [f^k(x)]' = g(x)$

Công nghệ $\theta_{6.2}$: Phương pháp quy nạp toán học, định nghĩa đạo hàm cấp, các quy tắc tính đạo hàm.

Hàm số trong các nhiệm vụ thuộc hai kiểu nhiệm vụ trên đều có đặc điểm chung là đạo hàm của chúng luôn được xác định trên hợp của các khoảng và nếu hàm số có đạo hàm cấp một thì sẽ có đạo hàm cấp cao hơn, đây có thể là hợp đồng ngầm ẩn của thể chế chương trình. Đối với học sinh nếu không quan tâm đến vai trò của khoảng trong định nghĩa vẫn có thể đưa ra kết quả dễ dàng nhờ phương pháp mà giáo viên cung cấp. Nguyên nhân này làm cho những đóng góp của khoảng bị lãng quên. Trên

thực tiễn toán học, vẫn luôn tồn tại những hàm số có đạo hàm tại hữu hạn các điểm trên một khoảng. Nếu yêu cầu học sinh tính đạo hàm cấp hai thì họ sẽ giải quyết như thế nào trước tính huống xa lạ.

Nguyên hàm

Trước khi định nghĩa, các tác giả có nêu lí do phải nghiên cứu nguyên hàm:

Nhiều vấn đề của khoa học và kĩ thuật đã dẫn tới bài toán sau đây:

Cho hàm số f xác định trên K , ở đó K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng nào đó. Hãy tìm hàm số F sao cho $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

Định nghĩa

Cho hàm số f xác định trên K . Hàm số F được gọi là nguyên hàm của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

[GK_{NC12}, 136]

Theo định nghĩa, F được gọi là nguyên hàm của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K , K có thể là một đoạn, khoảng hoặc nửa khoảng. Cùng một thể chế của chương trình nâng cao nhưng ở lớp 11, các tác giả chỉ định nghĩa đạo hàm trên khoảng hoặc hợp của các khoảng. đạo hàm trên đoạn, nửa khoảng chỉ giới thiệu trong bài đọc thêm. Vì thế khi định nghĩa nguyên hàm của hàm số trên đoạn các tác giả có giải thích thêm:

Trong trường hợp $K = [a; b]$, các đẳng thức $F'(a) = f(a)$, $F'(b) = f(b)$ được hiểu là

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a) \text{ và } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b) \quad [\text{GK}_{\text{NC12}}, 136]$$

So với M thì GK_{NC12}, GK_{CB12} phát biểu định nghĩa trên phạm vi rộng (có thể bao quát cho nửa khoảng và khoảng không bị chặn) trong khi M chỉ giới hạn ở đoạn và khoảng bị chặn. Tương tự như M, khoảng, đoạn trong định nghĩa nguyên hàm của GK_{NC12}, GK_{CB12} làm cho các nguyên hàm của hàm số có mối liên hệ đặc biệt là chỉ sai khác một hàm số

Khác với SGK của chương trình chuẩn và trước đây, GK_{NC12} đã bổ sung thêm tính chất về mối quan hệ giữa nguyên hàm của hàm số trên khoảng và trên đoạn:

Cho hai hàm số f và F liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu F là nguyên hàm của f trên khoảng $(a; b)$ thì có thể chứng minh được rằng $F'(a) = f(a)$ và $F'(b) = f(b)$, do đó F cũng là nguyên hàm của f trên đoạn $[a; b]$

[GK_{NC12}, 136]

Ứng dụng của tính chất trên được thể hiện qua ví dụ 1c trang 137:

Hàm số $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ vì $F'(x) = \sqrt{x}$ với mọi $x \in$

$(0; +\infty)$ và cả hai hàm số f và F đều liên tục trên $[0; +\infty)$

Tính chất trên được vận dụng trong tình huống này là không thỏa đáng vì nó được phát biểu trên đoạn nhưng trong ví dụ lại mở rộng cho nửa khoảng không bị chặn dù rằng việc mở rộng đó là không

sai. Thêm nữa, trên khoảng $(0 ; +\infty)$ đúng thật $F'(x) = f(x)$ vì $F'(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} = f(x)$ nên điều kiện F là nguyên hàm của f trên khoảng xem như thỏa mãn và vấn đề bắt đầu nảy sinh trong kết luận f và F đều liên tục trên $[0 ; +\infty)$. chúng ta đã biết, điều kiện để xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, trước tiên điểm đó phải thuộc tập xác định của hàm số mà hàm số lũy thừa $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ trong ví dụ trên có tập xác định là $(0 ; +\infty)$ nên không thể liên tục tại 0. Có thể vì người ta có xu hướng lạm dụng hệ thức sau đối với $x = 0$

$$x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}, x > 0$$

nên có thể các tác giả sách GK_{NC12} đồng nhất $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ với hàm số $G(x) = \sqrt{x^3}$ liên tục trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$.

Nếu như trong lời giải, đổi lại chọn $G(x) = \sqrt{x^3}$ thay cho $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ thì chương ngại không xuất hiện và thông qua kiểm tra điều kiện đủ của tính chất, ta dễ dàng chứng minh được $F(x) = \sqrt{x^3}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ trên $[0 ; +\infty)$.

Cũng giống SGK của chương trình chuẩn và trước đây, sách GK_{NC12} giới thiệu công cụ để nhận biết hàm số nào có nguyên hàm

Người ta đã chứng minh được rằng: Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K

[GK_{NC12},138]

Khi tìm nguyên hàm của một hàm số, học sinh có trách nhiệm đưa ra kết quả nhưng không có trách nhiệm kiểm tra hàm số có nguyên hàm không vì chương trình quy định:

Từ đây, trong các bài toán về nguyên hàm của một hàm số, nếu không nói gì thêm, ta luôn giả thiết rằng hàm số đó là liên tục và nguyên hàm của nó được xét trên mỗi khoảng (nửa khoảng, đoạn) xác định của hàm số đó

[GK_{NC12},138]

Quy định trên còn cho biết, những hàm số có tập xác định là hợp của các khoảng (nửa khoảng, đoạn) thì nếu đề bài yêu cầu tìm nguyên hàm của hàm số ta phải hiểu việc tìm nguyên hàm phải được xét trên từng khoảng (nửa khoảng, đoạn) cấu thành nên tập xác định của hàm số.

Quan điểm của các tác giả về đặc trưng của các hàm số cần tìm nguyên hàm dành cho đối tượng học sinh phổ thông:

Bài toán tìm nguyên hàm thực chất là bài toán ngược với bài toán tìm đạo hàm. Việc tìm nguyên hàm của một hàm số thường được đưa về tìm nguyên hàm của các hàm số đơn giản hơn. Sau đây là nguyên hàm của một hàm số đơn giản thường gặp

$$1) \int 0 dx = C, \int dx = x + C;$$

$$2) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$$

$$3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$4) \text{ Với } k \text{ là hằng số khác } 0$$

$$a) \int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C;$$

$$b) \int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C;$$

$$c) \int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C;$$

$$d) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1);$$

$$5) \quad a) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$

$$b) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$$

[GK_{NC12}, 139]

Trong các công thức trên, chúng tôi đặc biệt quan tâm đến công thức của 3) và 5) vì tập xác định của hàm số cần tìm nguyên hàm là hợp của các khoảng và về phải là chính là nguyên hàm trên mỗi khoảng xác định của các hàm số đó. Thế nhưng, từ tính chất: đạo hàm của các hàm số $y = \ln|x|$, $y = \tan x$, $y = -\cot x$ lần lượt là các hàm $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ kết hợp với các thói quen đọc của giáo viên: $\ln|x| + C$ là nguyên hàm của $\frac{1}{x}$, $\tan x + C$ là nguyên hàm của $\frac{1}{\cos^2 x}$, $-\cot x + C$ là nguyên hàm của

$\frac{1}{\sin^2 x}$ từ các công thức mà không đề cập đến cụm từ chỉ vị trí “trên mỗi khoảng xác định” đã hình thành cho học sinh quy tắc ngầm ẩn sau:

“Nếu đạo hàm của hàm số F là hàm số f thì F là nguyên hàm của hàm số f ”

Quy tắc trên cùng với ví dụ 1c đã nêu có thể là hiệu ứng của việc không phát biểu tường minh khoảng, đoạn trong các công thức nguyên hàm.

Phân tích trên đây chỉ đề cập đến nguyên hàm của một hàm số. Đối với những hàm số cùng xác định trên K thì nguyên hàm của chúng còn có mối liên hệ sau đây:

Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì a) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ b) Với mọi số thực $k \neq 0$ ta có $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$
--

[GK_{NC12}, 140]

Có rất nhiều yếu tố tạo nên các đẳng thức trên, một trong số đó phải kể đến là tính chất các hàm số đồng liên tục trên K .

Thật vậy, giả thiết $f(x), g(x)$ cùng liên tục trên K là điều kiện đủ để các hàm $f(x) + g(x), k f(x)$ cũng liên tục trên K . Đây là yếu tố quyết định sự tồn tại về phải của các đẳng thức. Về điểm này, M chỉ giới thiệu hai công thức và không đề cập đến điều kiện của hàm số.

Ngoài các tính chất trên, các tác giả sách GK_{NC11} còn giới thiệu thêm hai định lí nhằm cung cấp cho học sinh các phương pháp tính nguyên hàm:

Định lí 1:

Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho $f[u(x)]$ xác định trên K . Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f , tức là $\int f(u) du = F(u) + C$ thì

$$\int f[u(x)]u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

[GK_{NC11}, 142]

Định lí 2:

Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

[GK_{NC11}, 144]

Với định lí 2, giả thiết u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K đã đảm bảo cho các hàm $u(x)v'(x), v(x)u'(x)$ cũng liên tục trên K , dẫn đến kết quả nguyên hàm của chúng tồn tại.

Với định lí 1, giả thiết hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K đã cho biết hàm số đó cũng xác định trên K . Vậy điều kiện để hàm số $f[u(x)]$ xác định trên K là gì? Trong khi tập xác định của hàm số $y = f(x)$ giả thiết không nói đến.

Trong chương trình phổ thông, khái niệm hàm số hợp lần đầu tiên được đề cập đến trước khi định nghĩa đạo hàm của hàm số hợp và để trả lời câu hỏi trên, trước tiên chúng tôi nhắc lại khái niệm hàm số hợp:

Giả sử $u = g(x)$ là hàm số của x , xác định trên khoảng $(a ; b)$ và lấy giá trị trên khoảng $(c ; d)$; $y = f(x)$ là hàm số của u , xác định trên $(c ; d)$ và lấy giá trị trên R . Khi đó, ta lập một hàm số xác định trên $(a ; b)$ và lấy giá trị trên R theo quy tắc sau:

$$x \mapsto f(g(x))$$

Ta gọi hàm $y = f(g(x))$ là hàm số hợp của hàm $y = f(u)$ với $u = g(x)$ [GK_{CB11},161]

Vậy theo GK_{CB11}, để xây dựng hàm số hợp $y = f(g(x))$, hai điều kiện cần thiết phải được đảm bảo là cả hai hàm số phải có tập xác định là khoảng bị chặn đồng thời tạo ảnh tập xác định của hàm này là tập con của tập xác định của hàm số kia.

Khái niệm hàm số hợp của sách GK_{NC11} trang 201:

Cho hai hàm số $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Thay thế biến u trong biểu thức $f(u)$ bởi biểu thức $u(x)$, ta được biểu thức $f[u(x)]$ với biến x . Khi đó, hàm số $y = g(x)$ với $g(x) = f[u(x)]$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số f và u ; hàm số u gọi là hàm số trung gian [GK_{NC11},201]

Theo sau định nghĩa, các tác giả sách GK_{NC11} còn quy ước:

Trong định nghĩa trên, tập xác định của hàm số hợp $y = g(x)$ là tập các giá trị của x sao cho biểu thức $f[u(x)]$ có nghĩa.

Rõ ràng các tác giả sách GK_{NC11} đã quan điểm, chỉ cần thay thế u trong biểu thức $f(u)$ bởi biểu thức $u(x)$ ta có ngay một hàm số hợp $y = g(x) = f[u(x)]$. Từ quy định trên đã cho thấy tập xác định của hàm số hợp $y = g(x) = f[u(x)]$ và hàm số $u = u(x)$ có thể khác nhau. Cụ thể hơn, sách GK_{NC11} đã xét hoạt động H6 trang 201:

Cho $f(u) = \sqrt{u}$ và $u(x) = x - 1$. Hãy tìm hàm số hợp $y = f[u(x)]$ và tập xác định của nó

Trả lời cho H6, GV_{NC11} trang 239 trình bày như sau:

$$f[u(x)] = \sqrt{x-1}, \text{ xác định trên nửa khoảng } [1 ; +\infty)$$

Chúng ta đã biết tập xác định của hàm số $u(x)$ là R nhưng tập xác định của hàm số $f[u(x)]$ là nửa khoảng $[1 ; +\infty)$. Kết quả này cho thấy tập xác định của hai hàm số $u(x)$ và $f[u(x)]$ có thể khác nhau. Nếu bài toán này được xem xét trong thể chế chương trình GK_{CB11} thì hàm số hợp $f[u(x)]$ không tồn tại vì $f(R)$ không xác định. Sự khác biệt này xuất phát từ cách xây dựng định nghĩa hàm số hợp của hai thể chế. Tuy nhiên, các tác giả sách GK_{NC11} đã nhìn nhận như sau:

Một cách chính xác, khái niệm hàm số hợp phải được định nghĩa như là tích của hai ánh xạ. Cụ thể, cho hàm số $u : D \rightarrow R$ và $f : D_f \rightarrow R$ sao cho $u(D) \subset D_f$. Khi đó hàm số $g : D \rightarrow R$ xác định bởi $g(x) = f[u(x)]$ gọi là hàm số hợp của hàm số f và hàm số u , kí hiệu là $g = f \circ u$. Như vậy, ta có $g(x) = (f \circ u)(x) = f[u(x)]$.

$$[GV_{NC11},236]$$

Vậy định nghĩa của GV_{NC11} được khái quát từ định nghĩa của GK_{CB11} . Không có sự nổi khóp giữa định nghĩa của GK_{NC11} và GV_{NC11} , điển hình là bài toán trong H6, $f[u(x)] = \sqrt{x-1}$ là hàm số theo định nghĩa của GK_{NC11} nhưng trong GV_{NC11} thì không tồn tại hàm số hợp. Việc định nghĩa hàm số hợp thông qua ánh xạ tích của GK_{NC11} đã ngầm đảm bảo hàm số g xác định trên K thì hàm số $y = f(g(x))$ cũng xác định trên K vì $g(K) \subset (c; d)$. Việc xây dựng hàm số hợp bằng cách thay thế biến u trong biểu thức $f(u)$ bởi biểu thức $u(x)$ theo GK_{NC11} chưa tạo cơ sở lý thuyết cho phép trả lời câu hỏi khi với điều kiện nào thì hàm số $f[u(x)]$ xác định trên K ? Thế nhưng, quá trình chuyển đổi didactic này được giải thích như sau:

Rõ ràng định nghĩa như trên là rất khó hiểu đối với học sinh. Do đó các tác giả đã lựa chọn giải pháp có tính sự phạm là:

- Chỉ xét các hàm số cho bởi biểu thức.
- Cho hai hàm số $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Khi đó hàm số hợp của hai hàm số này là hàm số cho bởi biểu thức $g(x)$, trong đó $g(x)$ có được bằng cách thay thế biến u trong $f(u)$ bởi biểu thức $u(x)$.
- Tập xác định của hàm số $y = g(x)$ nói trên được hiểu như đã quy ước về tập xác định của hàm số cho bởi biểu thức $[GV_{NC11}, 236]$

Thêm nữa, tính liên tục của các hàm $u'(x)$, $f(u)$ là yếu tố can thiệp không ít đến sự tồn tại nguyên hàm của hàm $f[u(x)]u'(x)$ nhưng vấn đề đặt ra là hàm số $f(u)$ liên tục trên tập nào thì giả thiết không nói rõ. Căn cứ vào các định nghĩa liên tục hiện có trong sách GK_{NC11} thì $f(u)$ có hai khả năng là liên tục tại một điểm hoặc liên tục trên K' (K' là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng)

Trường hợp 1: Hàm số $f(u)$ liên tục tại một điểm duy nhất u_0 . Khi đó:

Nếu $u(K)$ có nhiều hơn một phần tử khác u_0 thì hàm tích $f \circ u$ sẽ không liên tục trên K nên chưa thể khẳng định hàm số $f[u(x)]u'(x)$ có liên tục trên K không.

Nếu $u(K) = u_0$ thì hàm tích $f \circ u$ liên tục trên K nên hàm số $f[u(x)]u'(x)$ cũng liên tục trên K .

Trường hợp 2: Hàm số $f(u)$ liên tục trên K' (K' là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng)

Nếu $u(K) \not\subset K'$ thì hàm tích $f \circ u$ sẽ không liên tục trên K nên chưa thể kết luận hàm số $f[u(x)]u'(x)$ có liên tục trên K không.

Nếu $u(K) \subset K'$ thì hàm tích $f \circ u$ liên tục trên K nên hàm số $f[u(x)]u'(x)$ cũng liên tục trên K .

Phân tích trên cho thấy, chỉ có hai trường hợp $u(K) = u_0$, $u(K) \subset K'$ làm cho hàm số $f[u(x)]u'(x)$ liên tục trên K nhưng với trường hợp $u(K) = u_0$ làm cho $f[u(x)]u'(x) = 0$ với mọi x thuộc K . Vậy giả thiết $u(x)$ liên tục nói một cách đầy đủ là liên tục trên $K' (u(K) \subset K')$.

Trong định lí 1, hai yếu tố: hàm số $y = f(u)$ liên tục và $f[u(x)]$ xác định trên K đã tác động không ít đến kết quả của định lí. Thế nhưng, các kiến thức liên quan đến hàm số hợp chưa giúp học sinh trả lời được khi nào $f[u(x)]$ xác định trên K , còn giả thiết hàm số $f(u)$ liên tục chưa chỉ ra một cách tường minh là trên tập nào, nhiều trường hợp làm cho hàm số $f[u(x)]u'(x)$ không liên tục trên K . Lúc này chưa có cơ sở nào đảm bảo hàm số $f[u(x)]u'(x)$ có nguyên hàm hay không. Nếu như định lí 1 được bổ sung thêm hàm số $f(u)$ liên tục trên K' ($u(K) \subset K'$) thì hàm số $f[u(x)]u'(x)$ sẽ tự liên tục và xác định trên K .

Cũng nhằm mục đích cung cấp phương pháp đổi biến số, sách GK_{CB12} trang 98 đã phát biểu định lí 1:

Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f[u(x)]u'(x) dx = F[u(x)] + C.$$

Hàm số $u'(x)$ trong GK_{NC12} được giả thiết liên tục trên K nên tồn tại nguyên hàm trên K . Trong khi đó, GK_{CB12} chỉ cho biết $u'(x)$ liên tục và không giới thiệu cụ thể là liên tục trên tập nào. Đặt trường hợp, $u'(x)$ chỉ liên tục tại một điểm thì chưa có gì bảo đảm nó có nguyên hàm hay không. Thêm nữa, hàm $f(u)$ trong GK_{NC12} được giả thiết liên tục mặc dù không chỉ rõ vị trí nhưng đã thể hiện ý đồ của các tác giả muốn hàm $f(u)$ liên tục trên K để tồn tại nguyên hàm trên K . Trái lại, trong GK_{CB12} chỉ giả thiết $F[u(x)] + C$ là nguyên hàm của $f[u(x)]$ mà không đề cập tính liên tục của $f(u)$. Nếu giả sử nguyên hàm của $u'(x)$ tồn tại thì chưa có lí thuyết nào trả lời được hàm $f[u(x)]u'(x)$ có nguyên hàm hay không.

Ngoài tính chất, mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K , chương trình phổ thông không giới thiệu thêm tính chất nào để giúp học sinh nhận biết một hàm số bất kì có nguyên hàm không. Tất nhiên trong phương pháp đổi biến số thể hiện qua định lí 1 được trình bày trong các sách GK_{CB12}, GK_{NC12}, một hàm số muốn có nguyên hàm thì bản thân nó phải liên tục trên K nhưng giả thiết $f(u)$ liên tục trong GK_{NC12} và $u'(x)$ liên tục trong GK_{CB12} thì chưa đủ cơ sở để kết luận hàm số này có nguyên hàm không. Ở khía cạnh này, M có cùng nội dung với sách GK_{CB12}, GK_{NC12}.

Vai trò của khoảng, đoạn thể hiện ngầm ẩn trong giả thiết, các hàm số liên tục cùng liên tục trên K xuất hiện trong tất cả các tính chất của nguyên hàm, với chức năng làm cho các hàm số đó tồn tại nguyên hàm.

Các bài tập trong chương này đều chỉ yêu cầu tìm nguyên hàm mà phần bài học đã cung cấp đầy đủ các kĩ thuật giải quyết. Các hàm số cần tìm nguyên hàm luôn được xác định bởi một công thức, đồng thời các công thức tính nguyên hàm cần huy động để vận dụng vào bài tập đều có chung một đặc trưng, trên mỗi khoảng xác định của hàm số đều có chung một công thức tính nguyên hàm. Do đó, khi

cần tìm nguyên hàm của hàm số được xác định bằng hai công thức, dựa theo định nghĩa nguyên hàm, học sinh có thể quy nạp thành quy tắc hợp đồng ngầm ẩn sau đây :

“Nếu $y = F_1(x)$ là nguyên hàm của hàm số $y = f_1(x)$ trên I , $y = F_2(x)$ là nguyên hàm của hàm số $y = f_2(x)$ trên J thì $y = F(x) = \begin{cases} F_1(x) & , x \in I \\ F_2(x) & , x \in J \end{cases}$ là nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , x \in I \\ f_2(x) & , x \in J \end{cases}$ ”.

. Trong chương trình phổ thông, các tác giả chỉ yêu cầu tìm nguyên hàm đối với các hàm số có chung công thức nguyên hàm trên mỗi khoảng xác định. Trên thực tiễn vẫn có những hàm số sơ cấp có nguyên hàm sai khác nhau trên những khoảng khác nhau nhưng chúng tôi không thấy các tác giả đề cập, chẳng hạn hàm số sau đây :

Cho f là hàm số xác định trên $\mathbf{R}$ bởi

$$f(x) = (x + 1)e^{-|x|}.$$

Hãy xác định một nguyên hàm của f trên khoảng $(0, +\infty)$.

Hãy xác định một nguyên hàm của f trên khoảng $(-\infty, 0)$.

(Bài tập được trích từ đề thi Tú tài 1975, Poitiers, ban C)

Lời giải mong đợi

Biểu thức của f trên các khoảng $(-\infty, 0)$ và $(0, +\infty)$ tương ứng là

$$f_1(x) = (x + 1)e^x \text{ và } f_2(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

Xác định một nguyên hàm của f_1 . Thực hiện tích phân từng phần, ta được một nguyên hàm F_1 của f_1 là

$$F_1(x) = \boxed{} = \boxed{} = (x + 1)e^x - \boxed{},$$

hay

$$F_1(x) = xe^x.$$

Xác định một nguyên hàm của f_2 . Thao tác tương tự với f_2 , ta được một nguyên hàm F_2 của f_2 là

$$F_2(x) = \boxed{} = \boxed{} = -(x + 1)e^{-x} + \boxed{},$$

hay

$$F_2(x) = -(x + 2)e^{-x}.$$

Tích phân

Để giới thiệu định nghĩa tích phân, các tác giả bắt đầu bằng hai bài toán

Bài toán 1:

Cho hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$). Giả sử f là hàm số liên tục, đồng biến và nhận giá trị dương trên đoạn $[a ; b]$. Chứng minh rằng diện tích S của hình thang cong đó là

$$S = F(b) - f(a)$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kì của f trên đoạn $[a ; b]$.

[GK_{NC12},146]

Trên phương diện hình học, giả thiết f liên tục trên đoạn $[a ; b]$ làm cho đồ thị là một đường liên nét. Đây là một trong những yếu tố tạo nên sự khép kín của hình thang cong.

Trên phương diện giải tích, giả thiết f liên tục trên đoạn $[a ; b]$ để đảm bảo sự tồn tại nguyên hàm của hàm số f trên đoạn đó.

Bài toán 2:

Giả sử một vật chuyển động có vận tốc thay đổi theo thời gian, $v = f(t)$ ($0 < t < T$). Chứng minh rằng quãng đường L vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b$ ($0 < a < b < T$) là

$$L = F(b) - F(a),$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kỳ của f trên khoảng $(0 ; T)$.

[GK_{NC12},148]

Về ý nghĩa vật lí, giả thiết một vật chuyển động có vận tốc thay đổi theo thời gian, $v = f(t)$ ($0 < t < T$) đã ngầm đảm bảo sự tồn tại nguyên hàm của hàm số $v = f(t)$ trên khoảng $(0 ; T)$.

Động cơ dẫn đến định nghĩa được các tác giả trình bày:

Trong khoa học và kĩ thuật, có nhiều đại lượng quan trọng được biểu thị bằng hiệu $F(b) - F(a)$ trong đó F là một nguyên hàm của hàm số f nào đó.

Định nghĩa

Cho hàm số f liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K . Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số $F(b) - F(a)$

được gọi là **tích phân của f từ a đến b** và kí hiệu là

$$\int_a^b f(x) dx$$

[GK_{NC12},148]

Định nghĩa này thực chất là định lí thứ 3 (công thức Newton-Leibniz) trong M, trước và sau định nghĩa các tác giả cũng không nói rõ K là tập nào. Từ hai bài toán mở đầu chúng tôi giả định K có thể là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

Trong chương trình phổ thông kí hiệu $\int_a^b f(x) dx$ thay cho đại lượng $F(b) - F(a)$, định nghĩa đã

cho thấy tích phân phụ thuộc phần nhiều vào nguyên hàm nhưng ngược dòng lịch sử thì ta nhận thức được hai định nghĩa này xuất hiện độc lập nhau. Sau khi giới thiệu bài toán tìm diện tích hình thang cong, sách GK_{CB12} trang 104 cũng đi đến định nghĩa tích phân như sau:

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a ; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a ; b]$ của hàm số $f(x)$, kí hiệu là

$$\int_a^b f(x) dx$$

Ta còn dùng kí hiệu $F(x) \Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$.

$$\text{Vậy } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Xét ở khía cạnh nội hàm của định nghĩa tích phân, sách GK_{NC12} và GK_{CB12} có những điểm tương đồng và khác biệt sau:

Điểm tương đồng: Cả hai sách đều lựa chọn định nghĩa tích phân thông qua công thức Newton-Leibniz.

Điểm khác biệt:

Điểm khác biệt	GK _{NC12}	GK _{CB12}
Vị trí liên tục	Hàm số f liên tục trên K (K là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng)	Hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$
Cận lấy tích phân	$a, b \in K$.	a, b là hai đầu mút của đoạn $[a ; b]$.
Hiệu số $F(b) - F(a)$	Bao gồm ba trường hợp $a > b, a = b, a < b$	Chỉ xét $a < b$. Sau đó bổ sung quy ước: Nếu $a = b$ thì $\int_a^a f(x) dx = 0$ Nếu $a > b$ thì $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

Nhận xét

Khi $[a ; b] = K$, định nghĩa của hai sách GK_{NC12} và GK_{CB12} có chung nội dung

Khi $[a ; b] \neq K$, các phần tử của đoạn $[a ; b]$ đều có vai trò trong định nghĩa của sách GK_{CB12} nhưng các phần tử nằm ngoài đoạn $[a ; b]$ lại không can thiệp trong định nghĩa của sách GK_{NC12}.

Trong định nghĩa tích phân, vai trò của $[a ; b]$ chỉ tính đến khi nó đi kèm với điều kiện hàm số f liên tục trên $[a ; b]$ vì đây là điều kiện đủ để hàm số f tồn tại nguyên hàm. Các hàm số trong các bài tập

tính tích phân đều liên tục trên đoạn lấy tích phân. Vì thế, chúng tôi tiếp tục dự đoán sự tồn tại của một hợp đồng didactic mà Trần Lương Công Khanh (2002) đã chứng minh đối với chương trình chính lý hợp nhất:

“Khi tính tích phân, học sinh không có trách nhiệm khảo sát tính liên tục của hàm số trên đoạn lấy tích phân”.

Trong thực hành giảng dạy, nếu không quan tâm đến vai trò của đoạn, đôi khi giáo viên yêu cầu tính vì “các cận quá đẹp” trong khi tích phân này không tồn tại. Trần Lương Công Khanh

(2006) đã chứng minh rằng trong việc tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$, thể chế thường xem trọng quá trình tính nguyên hàm F của f hơn là quá trình tính $F(a) - F(b)$. Đây là nguyên nhân dẫn đến các yêu cầu không thỏa đáng như trường hợp đã nêu.

Trở lại vấn đề diện tích hình thang cong, bài toán 1 chỉ đề cập đường cong của những hàm số đồng biến và liên tục trên K . Sau khi định nghĩa tích phân, bài toán 1 tiếp tục mở rộng cho những hàm số chỉ thỏa điều kiện liên tục trên K :

Định lí 1

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a ; b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

$$S = \int_a^b f(x)dx \quad [GK_{NC12}, 150]$$

Mặc dù tính đồng biến không được đề cập nhưng tính liên tục trên K luôn được đảm bảo vì đây là điều kiện để cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường liên nét, kết hợp với trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ tạo nên một hình thang cong khép kín. Để vận dụng định lí 1, sách GK_{NC12} đưa ra 3 bài tập yêu cầu tính tích phân nhưng các hàm dưới dấu tích phân có đồ thị là đường thẳng nên kĩ thuật tính chủ yếu quy về việc tính diện tích hình thang bằng công cụ hình học.

Để hỗ trợ cho việc tích tích phân các tác giả giới thiệu thêm các tính chất

Định lí 2

Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kì thuộc K . Khi đó ta có

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0 ;$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$3) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx ;$$

$$4) \int_b^a [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx ;$$

$$5) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \text{ với } k \in R$$

Các tính chất này dễ dàng chứng minh được hoàn toàn bằng định nghĩa. Khác với GK_{CB12} và GK_{NC12} . Trong M, việc chứng minh các tính chất trên chỉ yêu cầu các hàm f, g khả tích không cần sự can thiệp của điều kiện các hàm số f, g liên tục trên K . Phần bài tập, có 5 bài tập áp dụng cho các công thức của định lý 2, nội dung chủ yếu tích tích phân khi các tích phân còn lại trong cùng một công từ 5 công thức trên.

Bên cạnh định lý 2, các tác giả còn giới thiệu thêm hai phương pháp để tính tích phân

Phương pháp đổi biến số

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là công thức sau đây.

$$\int_a^b f[u(x)u'(x)] dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$$

Trong đó hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K , hàm số $y = f(u)$ liên tục và sao cho hàm số hợp $f[u(x)]$ xác định trên K ; a và b là hai số thuộc K .

Phương pháp tích phân từng phần

Cơ sở của phương pháp này là công thức sau đây.

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = (u(x)v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx$$

Trong đó các hàm số u, v có đạo hàm liên tục trên K và a, b là hai số thuộc K

Trong phương pháp đổi biến và tích phân từng phần của nguyên hàm, các hàm số dưới dấu tích phân chỉ được giả thiết chung chung là liên tục, phát biểu này có thể bao hàm cho các trường hợp liên tục tại một điểm, liên tục trên khoảng, nửa khoảng nên chưa đủ cơ sở khẳng định nguyên hàm của chúng tồn tại. ngược lại, trong tích phân chỉ ra một cách tường minh là liên tục trên K nên đủ điều kiện để tích phân của chúng tồn tại. Xét ở khía cạnh này, nội dung của hai phương pháp được thể hiện qua GK_{NC12} , GK_{CB12} và M hoàn toàn trùng khớp. Phần bài tập áp dụng cho phương pháp đổi biến gồm 6 bài tập, áp dụng cho phương pháp tích phân từng phần gồm 4 bài tập.

🚦 Sự can thiệp của khoảng, đoạn trong chương trình THPT có thể tạm chia thành hai cấp độ:

- Tường minh: khoảng, đoạn xuất hiện trong các định nghĩa như một điều kiện tiên quyết (đạo hàm của hàm số trong một khoảng, nguyên hàm của hàm số trong một khoảng, tích phân của hàm số trên một đoạn). Trong thực hành giải bài tập, các điều kiện tiên quyết này đôi khi trở thành *hình thức* và do đó, hay bị bỏ qua.

- Ngầm ẩn: khoảng, đoạn can thiệp ở mức độ tinh tế hơn và khó nhận ra hơn và có độ lệch lớn giữa tri thức cần dạy và tri thức bác học. Chẳng hạn vai trò của khoảng, đoạn trong định nghĩa khái niệm giới hạn của hàm số tại một điểm.

Kết luận

5.1 Tiến trình hình thành khái niệm khoảng, đoạn

Trước khi định nghĩa: dùng hình biểu diễn của khoảng và nửa khoảng không bị chặn để biểu diễn cho tập nghiệm của các bất phương trình tương đương với bất phương trình dạng cơ bản.

Khi được định nghĩa: giới thiệu đầy đủ các định nghĩa khoảng, đoạn, nửa khoảng bị chặn và không bị chặn kèm theo các kí hiệu và hình biểu diễn tương ứng. Trở về sau, các tập hợp được thay thế bằng các kí hiệu khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng hoặc hợp giữa chúng nếu có thể, mục đích chủ yếu làm đơn giản hóa cách viết.

2.5.Đạo hàm

2.5.1.Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Giả thiết hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$ và điểm x_0 thuộc $(a ; b)$ làm cho hàm số $y = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ xác định trên khoảng $(a ; b) \setminus \{x_0\}$, thỏa mãn điều kiện ràng buộc của định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm.

Khoảng xác định K của hàm số $y = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ và điều kiện $0 \in K$ chưa thể hiện tường minh nhưng khi tính đạo hàm, giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ lại được các tác giả ưu tiên. Vì thế, học sinh không thấy được sự nổi khớp giữa định nghĩa và kĩ thuật giải do giáo viên cung cấp.

Các hàm số trong các nhiệm vụ thuộc kiểu nhiệm vụ T1 đều có chung đặc điểm là xác định trên khoảng. Điều này đã hình thành cho học sinh một hợp đồng ngầm ẩn như sau:

“Khi tính đạo hàm số tại một điểm, học sinh không có trách nhiệm kiểm tra điều kiện hàm số xác định trên khoảng nhưng có trách nhiệm phải tính được đạo hàm tại điểm đó bằng bao nhiêu”

2.5.2. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

GK_{CB11} chỉ phát biểu trên khoảng bị chặn nhưng trong vận dụng lại mở rộng cho khoảng không bị chặn, thậm chí là hợp của các khoảng không bị chặn.

GK_{NC11} phát biểu tổng quát cho các trường hợp một khoảng hoặc hợp của những khoảng bất kì.

Đạo hàm của hàm số

Đạo hàm của hàm số là một hàm số xác định trên một khoảng hoặc hợp của những khoảng và trên đó hàm số có đạo hàm. Với yêu cầu tìm đạo hàm của hàm số, học sinh sẽ đưa ra nhiều kết quả khác nhau.

Các vấn đề liên quan đến hàm số đơn điệu

Các sách giáo khoa Việt Nam các thời kì, định nghĩa hàm số đơn điệu trên khoảng bị chặn, điều này không phù hợp với các kiểu nhiệm vụ liên quan trong phần bài tập vì ở đó có xét những hàm số đơn điệu trên khoảng không bị chặn.

Định lí T, T' chỉ đúng khi phát biểu trên khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và sẽ không đúng trên tập hợp khác.

Việc mở rộng định lí T trên nửa khoảng, đoạn giúp chúng ta biết được tính đơn điệu trên cả tập xác định của hàm số nếu trên tập xác định đó, hàm số chỉ thỏa một trong hai tính chất (tăng hoặc giảm).

Trong giảng dạy, nếu người thầy không nhấn mạnh vai trò của khoảng, đoạn trong định lí T', có thể học sinh sẽ cho rằng mệnh đề: Nếu $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a; b)$; $f'(x) \geq 0 \forall x \in (c; d)$ thì hàm số $f(x)$ tăng trên $(a; b) \cup (c; d)$ là đúng như ví dụ mà chúng tôi đã nêu.

Các kiểu nhiệm vụ liên quan đến tính đơn điệu của hàm số đã cho thấy hàm số được đề nghị trong các nhiệm vụ luôn xác định trên hợp không quá đếm được của các khoảng (đoạn, nửa khoảng) với kỹ thuật giải được ưu tiên lập bảng biến thiên đặt trên cơ sở của định lí T. Đây có thể là lí do mà các tác giả của chương trình nâng cao chỉ quan tâm đến việc xây dựng thêm khái niệm hàm số đơn điệu trên khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

Đạo hàm cấp cao

Điều kiện để xét được đạo hàm cấp hai hay cấp n là các hàm số $f^1, \dots, f^{(n-1)}$ phải có đạo hàm dẫn đến một yêu cầu tất yếu là các hàm số này phải xác định trên khoảng.

🚩 Các hàm số trong các nhiệm vụ thuộc các kiểu nhiệm vụ trên đây, đều có chung đặc điểm là xác định trên khoảng hoặc hợp của các khoảng. Ở khía cạnh này, hoàn toàn khớp với các hàm số trong giả thiết của các định nghĩa. Đây có thể là nguyên nhân làm cho giáo viên phớt lờ vai trò của khoảng trong

định nghĩa trong giảng dạy, dẫn đến học sinh ít quan tâm đến sự xuất khoảng trong các nhiệm vụ, hậu quả có thể xảy ra đối với học sinh là áp dụng các định nghĩa một cách tùy tiện cho mọi hàm số.

5.2 Nguyên hàm

Vì đạo hàm chỉ định nghĩa trên khoảng hoặc hợp của các khoảng. Vì thế khi định nghĩa nguyên hàm của hàm số trên đoạn các tác giả có giải thích thêm:

Trong trường hợp $K = [a ; b]$, các đẳng thức $F'(a) = f(a)$, $F'(b) = f(b)$ được hiểu là $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b)$.

Khoảng, đoạn trong định nghĩa nguyên hàm của GK_{NC12} , GK_{CB12} làm cho các nguyên hàm của hàm số có mối liên hệ đặc biệt là chỉ sai khác một hàm số.

Phát biểu của tính chất nói về mối quan hệ giữa nguyên hàm của hàm số trên khoảng và trên đoạn chỉ giới hạn trên đoạn và khoảng bị chặn trong lời giải của một bài tập vận dụng cho khoảng không bị chặn.

Việc không ghi rõ điều kiện xác định kèm theo các công thức tính nguyên hàm là nguyên nhân hình thành quy tắc ngầm ẩn sau:

“Nếu đạo hàm của hàm số F là hàm số f thì F là nguyên hàm của hàm số f ”

Từ hai hàm số cho trước có thể tồn tại hàm số hợp trong thể chế GK_{NC11} nhưng không xác định trong thể chế GK_{CB11} .

Mọi hàm số liên tục trên đoạn đều có nguyên hàm trên đoạn đó thế nhưng giả thiết hàm số liên tục trong phương pháp đổi biến và tích phân từng phần của GK_{NC11} , GK_{CB11} còn phát biểu chung chung chưa đảm bảo sự tồn tại nguyên hàm của các hàm số dưới dấu tích phân.

Vai trò của khoảng, đoạn thể hiện ngầm ẩn trong giả thiết, các hàm số liên tục cùng liên tục trên K xuất hiện trong tất cả các tính chất của nguyên hàm, với chức năng làm cho các hàm số đó tồn tại nguyên hàm.

Khi cần tìm nguyên hàm của hàm số được xác định bằng hai công thức, dựa theo định nghĩa nguyên hàm, học sinh có thể quy nạp thành quy tắc hợp đồng ngầm ẩn sau đây :

“Nếu $F(x)$ được xác định bằng hai công thức $F_1(x)$ và $F_2(x)$ và F_1, F_2 lần lượt là nguyên hàm của f_1, f_2 , thì F là nguyên hàm của hàm số f xác định bởi hai công thức $f_1(x)$ và $f_2(x)$ ”.

5.3 Tích phân

Giả thiết f liên tục trên đoạn $[a ; b]$ trong bài toán 1 vừa làm cho đồ thị là một đường liền nét vừa đảm bảo sự tồn tại nguyên hàm của hàm số f trên đoạn đó.

Định nghĩa tích phân từ a đến b của GK_{NC12} đòi hỏi hai cận a, b phải thuộc K (K có thể là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng) nhưng trong GK_{CB12} chỉ yêu cầu a, b là hai đầu mút của một đoạn.

Trong thực hành giảng dạy, nếu không quan tâm đến vai trò của đoạn, đôi khi giáo viên yêu cầu học sinh tính trong khi tích phân đó không tồn tại.

Giả thiết hàm số liên tục trong phương pháp đổi biến và tích phân từng phần được chỉ ra một cách tường minh, đảm bảo tích phân tồn tại.

Các hàm số trong các bài tập tính tích phân đều liên tục trên đoạn lấy tích phân. Vì thế, chúng tôi dự đoán có một hợp đồng ngầm ẩn về phía học sinh như sau:

“Khi tính tích phân, học sinh không có trách nhiệm khảo sát tính liên tục của hàm số trên đoạn lấy tích phân”.

 Từ phân tích trên, chúng tôi đưa ra hai giả thiết nghiên cứu

Đối với giáo viên

H1: Khoảng, đoạn xuất hiện trong các định nghĩa đạo hàm, nguyên hàm và tích phân được giáo viên xem như là điều kiện ràng buộc của định nghĩa, vai trò của chúng không được tính đến.

Đối với học sinh

H2: Khi thực hiện các phép tính đạo hàm, nguyên hàm và tích phân. Học sinh bỏ qua việc kiểm tra điều kiện hàm số xác định trên khoảng, đoạn.

CHƯƠNG 3: NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM

Để kiểm chứng những quy tắc của hợp đồng didactic khái niệm khoảng, đoạn trong phép tính đạo hàm, nguyên hàm và tích phân, chúng tôi đã tiến hành thực nghiệm vào tháng 5 năm 2010, khi học sinh đã học xong các kiến thức về khoảng, đoạn, đạo hàm, nguyên hàm và tích phân.

Chúng tôi đã gửi phiếu thực nghiệm đến 24 giáo viên trong tỉnh và nhận hồi âm của 20 giáo viên từ các trường trung học khác nhau của Tây Ninh.

Có 226 học sinh của bốn lớp 12 thuộc ba trường trung học tham gia giải các bài tập trong thời gian 45 phút, dưới sự giám sát của người làm thực nghiệm. Các lớp 12 được chọn đều đang học chương trình nâng cao.

3.1. Thực nghiệm đối với giáo viên

3.1.1. Giới thiệu thực nghiệm

Dưới đây là lời giải của học sinh. Xin quý thầy, cô cho điểm (theo thang điểm 10) từng lời giải một và ghi ý kiến của mình về đề bài hoặc về lời giải

Câu 1

Cho hàm số $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Tính giới hạn của hàm số f khi x dần đến 0.

Bài làm

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Điểm:

Ý kiến:

Câu 2

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & , |x| > 1 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Tính giới hạn của hàm số f khi x dần đến 0.

Bài làm

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Điểm:

Ý kiến:

Câu 3

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a ; b)$ và có đạo hàm duy nhất tại điểm $x_0 \in (a,b)$ và $f'(x_0)=1$. Tính $f''(x_0)$

Bài làm

Vì $f'(x_0)=1$ nên $f''(x_0)=0$.

Điểm:

Ý kiến:

Câu 4

Cho hai hàm số $F(x) = \ln|x|$ và $f(x) = \frac{1}{x}$

Em hãy cho biết tính đúng sai của mệnh đề sau:

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$

Bài làm

Mệnh đề đúng vì $F'(x) = f(x)$ trên $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$ nên $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$

Điểm:

Ý kiến:

Câu 5

Em hãy cho biết tính đúng sai của mệnh đề sau:

Nếu K là khoảng hoặc nửa khoảng. f là hàm số liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K . F là nguyên hàm của hàm số f trên K thì $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Bài làm

Mệnh đề đúng vì theo định nghĩa tích phân, K là tập bất kì miễn là f là hàm số liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K . F là nguyên hàm của hàm số f trên K . Vì thế ta có quyền thay K bằng khoảng hoặc nửa khoảng tùy ý.

Điểm:

Ý kiến:

Phân tích apriori

Câu 1

a. Biến didactic và giá trị của biến

V1: Tập xác định của hàm số: Khoảng, đoạn, nửa khoảng hay các tập hợp khác

V2: Điểm được xét giới hạn:

Là điểm giới hạn của tập xác định

Là điểm cô lập của tập xác định.

b. Phân tích chi tiết

Câu hỏi này nhằm mục đích tìm hiểu xem, giáo viên chấp nhận hay bác bỏ bài làm của học sinh. Việc chấp nhận, cho thấy giáo viên đã nhận ra vai trò của khoảng trong định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm. Nếu bác bỏ, cho thấy giáo viên chỉ dừng lại ở việc kiểm tra điều kiện định nghĩa của sách giáo khoa.

b.1. Giá trị của biến được chọn và ảnh hưởng giá trị của các biến

V1 = “khoảng”

Khi hàm số f xác định trên $(0 ; +\infty)$ thì mọi điểm thuộc $[0 ; +\infty)$ đều là điểm giới hạn của $(0 ; +\infty)$ nên có thể xét giới hạn của hàm f tại 0. Nếu thay khoảng $(0 ; +\infty)$ bằng tập $\mathbb{N}^*$ thì không thể xét giới hạn vì mọi số thực đều không phải là điểm giới hạn của $\mathbb{N}^*$.

V2 = “điểm giới hạn”

Nếu điểm được xét giới hạn là điểm cô lập của $(0 ; +\infty)$ chẳng hạn $-\frac{1}{10^{3000}}$ thì không thể xét giới hạn hàm số tại điểm đó. Trong đề bài chọn điểm được xét giới hạn là 0 nhằm mục đích để giới hạn hàm số tại đó tồn tại.

b.2. Cái cần quan sát

Giáo viên đồng ý hay phủ nhận bài làm của học sinh, và nhận xét như thế nào?

b.3 Các chiến lược có thể và cái có thể quan sát:

b.3.1. Chiến lược S1 – không xét được giới hạn

Giáo viên không đồng ý với bài làm của học sinh

Cái có thể quan sát

Trước khi định nghĩa giới hạn hàm số, hàm số f được giả thiết xác định trên khoảng $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ nên có thể giáo viên cho rằng 0 không thuộc $(0 ; +\infty)$ nên không xét được giới hạn của hàm số f tại 0 và hàm số chỉ tồn tại giới hạn bên phải tại 0.

b.3.2. Chiến lược S2 – giới hạn tồn tại

Giáo viên đồng ý với bài làm của học sinh

Cái có thể quan sát

Giáo viên nhận ra 0 là điểm giới hạn của $(0 ; +\infty)$ nên tồn tại giới hạn của hàm số f tại 0.

a. Biến didactic và giá trị của biến

V1: Tập xác định của hàm số: $\mathbf{R}$ hoặc $\{x \in \mathbf{R} / |x| > 1\} \cup \{0\}$

V2: Điểm được xét giới hạn:

Là điểm giới hạn của tập xác định

Là điểm cô lập của tập xác định.

b. Phân tích chi tiết

Mục đích của câu này muốn biết giáo viên có nhận ra 0 là điểm cô lập của tập xác định, câu trả lời sẽ giúp chúng tôi biết được vai trò của khoảng trong định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm có được giáo viên quan tâm không.

b.1 Giá trị của biến được chọn và ảnh hưởng của các biến

V1 = “ $\{x \in \mathbf{R} / |x| > 1\} \cup \{0\}$ ”

Khi hàm số f có tập xác định là $\mathbf{R}$ thì mọi phần tử thuộc $\mathbf{R}$ đều là điểm giới hạn của $\mathbf{R}$ nên giới hạn của hàm số f tại 0 tồn tại.

Khi hàm số f có tập xác định là $\{x \in \mathbf{R} / |x| > 1\} \cup \{0\}$. Vì 0 là điểm cô lập của “ $\{x \in \mathbf{R} / |x| > 1\} \cup \{0\}$ ” nên không xét được giới hạn của hàm số f tại 0.

V2 = “điểm cô lập”

Vì 0 là điểm cô lập của $\{x \in \mathbf{R} / |x| > 1\} \cup \{0\}$ nên không thể xét được giới hạn của hàm số f tại 0 nhưng nếu thay thế 0 bởi một điểm bất kì thuộc $\{x \in \mathbf{R} / |x| > 1\}$ thì hàm số f sẽ có giới hạn tại điểm đó.

b.2. Cái cần quan sát

Giáo viên đồng ý hay phủ nhận bài làm của học sinh, và nhận xét như thế nào

b.3. Các chiến lược có thể và cái có thể quan sát:

b.3.1. Chiến lược S1 – Không xét được giới hạn

Giáo viên không đồng ý với bài làm của học sinh

Cái có thể quan sát

Giáo viên nhận ra 0 là điểm cô lập của $\{x \in \mathbf{R} / |x| > 1\} \cup \{0\}$ nên không thể xét giới hạn của hàm số f tại 0.

b.3.2. Chiến lược S2 – giới hạn tồn tại

Giáo viên đồng ý với bài làm của học sinh

Cái có thể quan sát

Giáo viên cho rằng 0 thuộc tập xác định nên giới hạn tồn tại và không để ý đến điều kiện hàm số f phải xác định trên khoảng chứa 0.

Câu 3

a. Biện didactic và giá trị của biến

V: Tập xác định của hàm số $f: \{x_0\}$ hay khoảng chứa x_0 .

b. Phân tích chi tiết

Câu này có mục đích thăm dò xem giáo viên có quan tâm đến vai trò của khoảng trong định nghĩa đạo hàm cấp cao không

b.1 Giá trị của biến được chọn và ảnh hưởng của các biến

$V = \{\{x_0\}\}$

Khi hàm số f có tập xác định là $\{x_0\}$ thì không thể xét đạo hàm cấp hai tại x_0 vì x_0 là điểm cô lập của tập $\{x_0\}$

Khi hàm số f có tập xác định là khoảng chứa x_0 thì x_0 là điểm giới hạn của khoảng đó nên có thể xét đạo hàm cấp hai tại x_0 .

b.2. Cái cần quan sát

Giáo viên đồng ý hay phủ nhận bài làm của học sinh, và nhận xét như thế nào

b.3. Các chiến lược có thể và cái có thể quan sát:

b.3.1. Chiến lược S1 – không xét được $f'(x_0)$

Giáo viên không đồng ý với bài làm của học sinh

Cái có thể quan sát

Giáo viên nhận thấy x_0 là điểm cô lập của tập $\{x_0\}$ nên không thể xét đạo hàm cấp hai tại mọi điểm thuộc $(a; b)$.

b.3.2. Chiến lược S2 – $f'(x_0) = 0$

Giáo viên đồng ý với bài làm của học sinh

Cái có thể quan sát

Có thể giáo viên vận dụng quy tắc “nếu $f(x) = 0$ thì $f'(x) = 0$ ” cho x_0 mà không xem xét quy tắc này chỉ đúng khi $f(x) = 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$.

Câu 4

a. Biện didactic và giá trị của biến

V: Tập hợp làm cho mệnh đề đúng: cả tập xác định hay mỗi khoảng cấu thành tập xác định

b. Phân tích chi tiết

Mục đích của câu này là nhằm kiểm chứng tắc hợp đồng “Nếu đạo hàm của hàm số F là hàm số f thì F là nguyên hàm của hàm số f ”

b.1 Giá trị của biến được chọn và ảnh hưởng của các biến

$V = \text{“cả tập xác định”}$

Theo định nghĩa nguyên hàm, mệnh đề chỉ đúng với từng khoảng xác định của hàm số và không đúng trên tập xác định của hàm số cần tìm nguyên hàm.

b.2. Cái cần quan sát

Giáo viên đồng ý hay phủ nhận bài làm của học sinh, và nhận xét như thế nào

b.3. Các chiến lược có thể và cái có thể quan sát:

b.3.1. Chiến lược S1 – mệnh đề sai

Giáo viên không đồng ý với bài làm của học sinh

Cái có thể quan sát

Có thể giáo viên nhận xét, nguyên hàm chỉ được định nghĩa trên khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng, việc định nghĩa nguyên hàm trên cả tập xác định là không thỏa đáng.

b.3.2. Chiến lược S2 – mệnh đề đúng

Giáo viên đồng ý với bài làm của học sinh

Cái có thể quan sát

Giáo viên cho rằng quy tắc “Nếu đạo hàm của hàm số F là hàm số f thì F là nguyên hàm của hàm số f ”

Câu 5

a. Biến didactic và giá trị của biến

Theo định nghĩa tích phân, f phải có nguyên hàm trên K , vì định nghĩa nguyên hàm chỉ được phát biểu trên khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng nên

V : Tập K : K có thể là khoảng, đoạn, nửa khoảng

b. Phân tích chi tiết

Trước và sau khi định nghĩa tích phân, GK_{NC12} không nói rõ K là tập nào và cả GV_{NC12} cũng không đề cập. Mục đích của câu này nhằm tìm hiểu xem, trong giảng dạy định nghĩa tích phân, giáo viên có quan tâm đến việc giải thích K là tập nào hay không?

b.1 Giá trị của biến được chọn và ảnh hưởng của các biến

Nếu K là đoạn thì $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ tồn tại vì thỏa mãn các điều kiện của định nghĩa tích phân nhưng

nếu K là khoảng hoặc nửa khoảng thì tích phân $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ không tồn tại, vì không tìm được khoảng

hay nửa khoảng chứa 1 và -1 làm cho hàm số $y = \sqrt{1-x^2}$ xác định. Trái lại, trong lời giải của ví dụ 2 GK_{NC12} trang 159 thì tích phân này vẫn được theo phương pháp đổi biến số. Vậy K trong định nghĩa tích phân của GK_{NC12} được thay bằng đoạn là hoàn toàn hợp lí, đây cũng là lựa chọn của sách GK_{CB12}.

b.2. Cái cần quan sát

Giáo viên có giải thích tập K? nếu có thì K là tập nào?

b.3. Các chiến lược có thể và cái có thể quan sát:

b.3.1. Chiến lược S1 – mệnh đề sai

Giáo viên không đồng ý với bài làm của học sinh

Cái có thể quan sát

Giáo viên giải thích, nếu K là khoảng, nửa khoảng thì sẽ có một số tích phân không tồn tại, chẳng hạn như $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ nhưng vẫn tính được theo phương pháp đổi biến số.

b.3.2. Chiến lược S2 – mệnh đề đúng

Giáo viên đồng ý với bài làm của học sinh

Cái có thể quan sát

Giáo viên cho rằng, vì định nghĩa đã không giải thích rõ tập K nên K có quyền được thay thế bằng khoảng và nửa khoảng.

3.1.2. Phân tích Posteriori

Câu 1

Bảng 1: Thống kê các trả lời câu 1 của giáo viên

Câu trả lời	Số lượng	%
Chiến lược S1 Không xét được giới hạn	20	100%
Chiến lược S2 Giới hạn tồn tại	0	0%
Tổng	20	100%

Trong bảng thống kê trên, có đến 100% giáo viên lựa chọn S1, họ giải thích hàm số trong câu 1 chỉ tồn tại giới hạn bên phải tại 0, tức là $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$ và không tồn tại giới hạn bên trái tại 0 nên hàm số đó không tồn tại giới hạn tại 0. Câu trả lời này chỉ đúng trong khuôn khổ của chương trình phổ thông vì trước khi định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm x_0 , các tác giả đã giả thiết hàm số phải được xác định trên khoảng $(a; b) \setminus \{x_0\}$. Nếu bài toán được xem xét ở góc độ chương trình đại học, bài làm của học sinh đúng. Độ lệch tri thức giữa hai cấp bậc làm cho sự lựa chọn S1 trội hơn S2, kết quả này đã cho thấy khoảng được giáo viên chú ý với mục đích kiểm tra tính thỏa đáng của định nghĩa và vai trò của nó trong định nghĩa thì không được giáo viên quan tâm.

Câu 2

Bảng 2: Thống kê các trả lời câu 2 của giáo viên

Câu trả lời	Số lượng	%
Chiến lược S1 Không xét được giới hạn	19	95%
Chiến lược S2 Giới hạn tồn tại	1	5%
Tổng	20	100%

Trong bảng thống kê trên, cho thấy chiến lược S1 chiếm ưu thế hơn chiến lược S2, việc lựa chọn S1 được các giáo viên giải thích như sau:

- Lời giải của học sinh sai vì khi ghi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ thì $x \in$ lân cận của 0 mà theo hàm số đã cho thì hàm số không xác định trong một lân cận nào của 0, chỉ xác định tại 0 thôi .
- Góc tọa độ O và hai nhánh của đồ thị không tạo thành một đường liền nét nên hàm số không tồn tại giới hạn tại 0.

Trong hai nhận xét trên, chỉ một giáo viên có nhận xét thứ nhất, với cách giải thích này cho thấy tác giả đã nhận ra 0 không phải là điểm giới hạn của hàm số, $\frac{19}{20}$ (95%) giáo viên còn lại có nhận xét thứ hai, theo cách giải thích này cho thấy hàm số trong các bài tập tính giới hạn luôn xác định trên khoảng chứa điểm cần xét giới hạn và giáo viên không có trách nhiệm kiểm tra điều kiện này. Cả hai nhận xét trên đây đều cho rằng lời giải của học sinh không đúng nhưng cách giải thích có sự khác nhau. Sự chênh lệch về tỉ lệ đã cho chúng ta biết, có một bộ phận giáo viên không quan tâm đến vai trò của khoảng trong định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm.

Câu 3

Bảng 3: Thống kê các trả lời câu 3 của giáo viên

Câu trả lời	Số lượng	%
Chiến lược S1 không xét được $f'(x_0)$	18	90%
Chiến lược S2 $f'(x_0) = 0$	2	10%
Tổng	20	100%

Trong bảng thống kê trên, cho thấy chiến lược S1 vượt trội hơn S2, $\frac{18}{20}$ (90%) giáo viên phủ nhận bài làm của học sinh bằng các phản ví dụ tiêu biểu sau:

- Xét hàm số $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ xác định trên $(-\infty; +\infty)$

$$f(x) = 9x^2 + 4x + 1$$

$$f'(x) = 18x + 4$$

$$\text{Chọn } x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(0) = 1$$

$$f'(x_0) = f'(0) = 4 \neq 0$$

- $y = f(x) = x^3, x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$f(x_0) = 1 \text{ nhưng } f'(x_0) \neq 0$$

Chúng ta đã thấy, hàm số f trong hai phản ví dụ trên đều có tập xác định là $\mathbf{R}$, điều này có thể giải thích, quan điểm của nhiều giáo viên mà chúng tôi đã xin ý kiến, một hàm số f có tập xác định là $\{x_0\}$ không thể tồn tại, nói một cách khác f phải được giả thiết là xác định trên khoảng, đoạn, nửa khoảng hay hợp của chúng. Việc các giáo viên không trả lời đúng yêu cầu đã chứng tỏ vai trò của khoảng, đoạn trong định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm không được quan tâm.

Câu 4

Bảng 4: Thống kê các trả lời câu 4 của giáo viên

Câu trả lời	Số lượng	%
Chiến lược S1 Mệnh đề sai	3	15%
Chiến lược S2 Mệnh đề đúng	15	70%
Chiến lược khác	3	15%

Tổng	20	100%
-------------	-----------	-------------

Chiến lược khác mà chúng tôi đề cập trong bảng trên, $\frac{3}{20}$ (15%) giáo viên đề nghị thay $F(x)$ bằng $F(x) + C$ thì mệnh đề mới đúng. Ở đây chúng tôi không ý kiến đề nghị của các giáo viên đúng hay sai vì để biết chân giá trị của mệnh đề thì chỉ cần dựa vào định nghĩa nguyên hàm. Sự vượt trội của chiến lược S2 so với các chiến lược còn lại cho thấy quy tắc “Nếu đạo hàm của hàm số F là hàm số f thì F là nguyên hàm của hàm số f ” đã vận hành trong một bộ phận giáo viên và như thế điều kiện hàm số xác định trên khoảng trong định nghĩa nguyên hàm không được giáo viên quan tâm.

Câu 5

Bảng 5: Thống kê các trả lời câu 5 của giáo viên

Câu trả lời	Số lượng	%
Chiến lược S1 Mệnh đề sai	8	40%
Chiến lược S2 Mệnh đề đúng	12	60%
Tổng	20	100%

Việc chọn S1 được giáo viên giải thích, định nghĩa tích phân trong GK_{CB12} được các tác giả xây dựng với giả thiết liên tục trên đoạn $[a ; b]$ nên K trong định nghĩa tích phân của GK_{NC12} cũng là một đoạn nào đó. Vậy ở đây, các giáo viên chỉ dừng lại ở mức độ so sánh hai chương trình và không lấy được ví dụ cụ thể. Chiến lược S2 vẫn được giáo viên chọn nhiều hơn S1, cơ sở để giáo viên giải thích là bám chặt vào định nghĩa của GK_{NC12} , K có thể là khoảng hoặc nửa khoảng. Tất cả giáo viên mà chúng tôi đã xin ý kiến đều không phát hiện có những tích phân tính được theo phương pháp đổi biến số nhưng tích phân đó không tồn tại theo định nghĩa tích phân, chẳng hạn $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} .$

Từ phân tích trên cho thấy khoảng, đoạn chỉ được giáo viên đề cập khi cần kiểm tra giả thiết của định nghĩa và vai trò của chúng trong các định nghĩa dường như các khi giáo viên chưa nghĩ đến.

3.2. Thực nghiệm đối với học sinh

3.2.1. Giới thiệu thực nghiệm

Câu 1.

Cho hàm số $f: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x.$

1) Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 = 1$

2) Tìm đạo hàm của hàm số f

3) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số f

Câu 2.

Cho hai hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x^3 & , x \in [2; 4] \\ \frac{x}{5} & , x \in (4; 6] \end{cases}$. Và $y = g(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x \in [2; 4] \\ \frac{1}{5} & , x \in (4; 6] \end{cases}$.

Hàm số f là nguyên hàm của hàm số g trên $[2; 6]$ đúng không? Tại sao?

Câu 3.

Cho hai hàm số $F(x) = \ln|x|$ và $f(x) = \frac{1}{x}$

Hãy giải thích tính đúng (sai) của mệnh đề sau đây:

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Câu 4. Tính $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

3.2.2. Phân tích apriori

Câu 1

a. Biến didactic và giá trị của biến

V: Tập xác định của hàm số: $\mathbb{N}^*$ hay một khoảng bất kì chứa 1.

b. Phân tích chi tiết

Câu này nhằm kiểm chứng quy tắc hợp đồng “Khi tính đạo hàm của hàm số tại một điểm, học sinh không có trách nhiệm kiểm tra điểm đang xét có thuộc khoảng xác định của hàm số hay không”

b.1 Giá trị của biến được chọn và ảnh hưởng của các biến

$V = “\mathbb{N}^*”$

Nếu tập xác định của hàm số là một khoảng bất kì chứa 1 thì đạo hàm tại 1 là $f'(1) = 1$, đạo hàm của hàm số f là $f'(x) = 1$, đạo hàm cấp hai của hàm số f là $f''(x) = 0$.

Nếu tập xác định của hàm số là $\mathbb{N}^*$ thì mọi điểm thuộc $\mathbb{N}^*$ đều là điểm cô lập nên không thể xét đạo hàm tại mọi điểm thuộc $\mathbb{N}^*$, dẫn đến không thể xét đạo hàm, đạo hàm cấp hai của hàm số f .

b.2. Cái cần quan sát

Học sinh có thực hiện được yêu cầu không? Nếu không thì họ giải thích như thế nào?

b.3. Các chiến lược có thể và cái có thể quan sát:

b.3.1. Chiến lược S1 – không kiểm tra điều kiện của định nghĩa

Học sinh không kiểm tra tính thỏa đáng của định nghĩa đạo hàm tại một điểm, hàm số xác định trên khoảng.

Câu a

Có thể học sinh thực hiện một trong hai cách

Cách 1

$$\Delta y = f(\Delta x + 1) - f(1)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 1 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Cách 2

$$f'(x) = (x)' = 1 \text{ nên } f'(1) = 1.$$

Câu b

$$f'(x) = (x)' = 1$$

Câu c

$$f'(x) = 1 \text{ nên } f''(x) = 0$$

b.3.2. Chiến lược S2 – kiểm tra điều kiện của định nghĩa

Học sinh kiểm tra tính thỏa đáng của định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm, hàm số phải xác định trên khoảng.

Cái có thể quan sát

Học sinh đối chiếu với giả thiết của định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm, hàm số cần lấy đạo hàm, đạo hàm cấp cao, hàm số phải được xác định trên khoảng trong khi hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{N}^*$ nên không thỏa điều kiện đó. Vì thế không thể xét đạo hàm của hàm số tại một điểm, đạo hàm của hàm số, đạo hàm cấp cao của hàm số trên $\mathbb{N}^*$.

Câu 2

a. Biến didactic và giá trị của biến

V1: Tập hợp làm cho nguyên hàm xác định: $[2 ; 6]$ hay là đoạn con của các đoạn $[2 ; 4]$, nửa khoảng $(4 ; 6]$

V2: Cách cho hàm số: một hay nhiều công thức.

b. Phân tích chi tiết

Câu này nhằm kiểm chứng quy tắc hợp đồng “Nếu $F(x)$ được xác định bằng hai công thức $F_1(x)$ và $F_2(x)$ và F_1, F_2 lần lượt là nguyên hàm của f_1, f_2 , thì F là nguyên hàm của hàm số f xác định bởi hai công thức $f_1(x)$ và $f_2(x)$ ”

b.1 Giá trị của biến được chọn và ảnh hưởng của các biến

V1 = “[2 ; 6]”

Nếu câu hỏi chỉ giới hạn trên các đoạn là con của [2 ; 4], (4 ; 6] thì f là nguyên hàm của g trên đoạn đó.

Nếu câu hỏi mở rộng trên cả tập xác định của hàm số f không là nguyên hàm của g vì $f'(4)$ không tồn tại.

V2 = “hai công thức”

Nếu các hàm số được cho bởi một công thức là đa thức thì học sinh dễ dàng nhận ra hàm này sẽ là nguyên hàm của hàm kia trên tập xác định của chúng.

Nếu hàm số được cho bằng hai công thức thì cách quy nạp của học sinh trong bài toán này là sai vì $f'(4)$ không tồn tại.

Cái cần quan sát

Học sinh có thực hiện được yêu cầu không? Nếu không thì họ giải thích như thế nào?

b.3. Các chiến lược có thể và cái có thể quan sát:

b.3.1. Chiến lược S1 – Không kiểm tra điều kiện định nghĩa

Học sinh không kiểm tra $f'(x) = g(x)$ trên [2 ; 6]

Cái có thể quan sát

$$f'(x) = \begin{cases} (x^3)' & , x \in [2; 4] \\ (\frac{x}{5})' & , x \in (4; 6] \end{cases} = \begin{cases} 3x^2 & , x \in [2; 4] \\ \frac{1}{5} & , x \in (4; 6] \end{cases} = g(x)$$

b.3.2. Chiến lược S2 – kiểm tra điều kiện của định nghĩa

Học sinh kiểm tra $f'(x) = g(x)$ trên [2 ; 6]

Cái có thể quan sát

$f'(4)$ không tồn tại nên f không là nguyên hàm của g trên [2 ; 6]

Câu 3

a. Biến didactic và giá trị của biến

V1: Tập hợp làm cho nguyên hàm xác định: khoảng con của tập xác định hay tập xác định.

V2: Tập xác định của hàm số: là khoảng con của $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$ hay $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$.

b. Phân tích chi tiết

Câu này nhằm kiểm chứng quy tắc hợp đồng “Nếu đạo hàm của hàm số F là hàm số f thì F là nguyên hàm của hàm số f ”

b.1 Giá trị của biến được chọn và ảnh hưởng của các biến

$V1 = \text{“tập xác định”}$

Nếu mệnh đề được phát biểu trên khoảng con của tập xác định thì mệnh đề nhận giá trị đúng.

Nếu mệnh đề được phát biểu trên tập xác định thì mệnh đề sai so với định nghĩa nguyên hàm, chỉ phát biểu trên khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

$V2 = \text{“}(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)\text{”}$

Nếu tập xác định của hàm số là khoảng con của $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$ thì mệnh đề đúng.

Nếu tập xác định là $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$ thì mệnh đề sai so với định nghĩa nguyên hàm, chỉ phát biểu trên khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

b.2. Cái cần quan sát

Học sinh khẳng định đúng hay sai và giải thích như thế nào?

b.3. Các chiến lược có thể và cái có thể quan sát:

b.3.1. Chiến lược S1 – nguyên hàm xác định

Học sinh không quan tâm định nghĩa nguyên hàm, định nghĩa chỉ phát biểu trên khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

Cái có thể quan sát

Vì $F'(x) = (\ln|x|)' = \frac{1}{x} = f(x)$ trên $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$

Nên $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$

b.3.2. Chiến lược S2 – nguyên hàm không xác định

Học sinh đối chiếu với định nghĩa nguyên hàm, định nghĩa chỉ phát biểu trên khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

Cái có thể quan sát

Theo định nghĩa, hàm số không có nguyên hàm trên $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$

Câu 4

a. Biến didactic và giá trị của biến

V: Cận dưới của tích phân: bằng 0 hay lớn hơn 0

b. Phân tích chi tiết

Câu này nhằm kiểm chứng quy tắc hợp đồng “Khi tính tích phân, học sinh không có trách nhiệm khảo sát tính liên tục của hàm số trên đoạn lấy tích phân”

b.1 Giá trị của biến được chọn và ảnh hưởng của các biến

V = “bằng 0”

Nếu cận dưới tích phân là 0 thì hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ không xác định tại 0 nên không liên tục trên

$[0 ; 1]$, dẫn đến $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ không tồn tại.

Nếu cận dưới tích phân là số $0 < a < 1$ thì hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ liên tục trên $[a ; 1]$ nên tích phân

$$\int_a^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

b.2. Cái cần quan sát

Học sinh có thực hiện được yêu cầu không? Học sinh sẽ giải thích như thế nào?

b.3. Các chiến lược có thể và cái có thể quan sát:

b.3.1. Chiến lược S1 – không kiểm tra điều kiện tồn tại của tích phân

Có thể học sinh phát hiện $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ và $\sqrt{x} \Big|_0^1 = 1$

Cái có thể quan sát

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Big|_0^1 = 1$$

b.3.2. Chiến lược S2 – kiểm tra điều kiện tồn tại của tích phân

Học sinh phát hiện hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ không xác định tại 0 và điều kiện của định nghĩa tích

phân, hàm số cần tính tích phân liên tục trên đoạn có hai đầu mút là hai cận của tích phân.

Cái có thể quan sát

Vì hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ không xác định tại 0 nên không liên tục trên $[0 ; 1]$, dẫn đến $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ không tồn tại.

Phân tích Posteriori

Câu 1

Bảng 1: Thống kê các trả lời câu 1 của học sinh

Câu trả lời	Số lượng	%
Chiến lược S1	223	98.7%
Không kiểm tra điều kiện của định nghĩa		

Chiến lược S2		
Kiểm tra điều kiện của định nghĩa	3	1.3%
Tổng	226	100%

Chiến lược S2 được $\frac{3}{226}$ (1.3%) học sinh chọn và giải thích, vì đồ thị của hàm số là tập hợp các điểm rời rạc nên hàm số không liên tục tại mọi điểm thuộc N^* . Vì thế hàm số đã cho không có đạo hàm tại mọi điểm thuộc N^* , điều này dẫn đến hàm số đó không tồn tại đạo hàm và đạo hàm cấp hai. Cơ sở để học sinh lập luận là dựa trên hai nhận xét sau:

- Hàm số liên tục trên một khoảng hoặc trên một đoạn có đồ thị là một đường liên nét, hàm số gián đoạn tại một điểm thì đồ thị của nó không phải là một đường liên nét.

[GK_{NC11},170]

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm x_0 .

[GK_{NC11},186]

Chiến lược S1 được $\frac{223}{226}$ (98.7%) học sinh chọn với các quả sau có thể đại diện sau đây:

Câu a

Cách 1

$$\Delta y = f(\Delta x + 1) - f(1)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 1 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Cách 2

$$f'(x) = (x)' = 1 \text{ nên } f'(1) = 1.$$

Câu b

$$f'(x) = (x)' = 1$$

Câu c

$$f'(x) = 1 \text{ nên } f''(x) = 0$$

Trên đây chúng tôi chỉ quan tâm đến số học sinh sử dụng chiến lược S1, còn việc tính đúng sai ở đây không phải là mục tiêu mà chúng tôi nhắm đến. Sự vượt trội của chiến lược S1 so với S2 cho thấy có rất ít học sinh kiểm tra điều kiện hàm số xác định trên khoảng khi thực hiện yêu cầu, kết quả này đã kiểm chứng được quy tắc hợp đồng đồng “Khi tính đạo hàm của hàm số tại một điểm, học sinh không có trách nhiệm kiểm tra điểm đang xét có thuộc khoảng xác định của hàm số hay không”.

Câu 2

Bảng 2: Thống kê các trả lời câu 2 của học sinh

Câu trả lời	Số lượng	%
Chiến lược S1 Không kiểm tra điều kiện của định nghĩa	210	92.9%
Chiến lược S2 Kiểm tra điều kiện của định nghĩa	6	2.7%
Không trả lời	10	4.4%
Tổng	226	100%

Chiến lược S1 được nhiều học sinh $\frac{210}{226}$ (92.9%) chọn, có thể được đại diện bằng kết quả sau đây:

$$f'(x) = \begin{cases} (x^3)', & x \in [2; 4] \\ (\frac{x}{5})', & x \in (4; 6] \end{cases} = \begin{cases} 3x^2, & x \in [2; 4] \\ \frac{1}{5}, & x \in (4; 6] \end{cases} = g(x)$$

Kiểu bài tập này hoàn toàn xa lạ với học sinh, không xuất hiện trong các SGK hiện hành. Đây có thể là lí do làm cho $\frac{10}{226}$ không trả lời. Kết quả thống kê cho thấy chiến lược S1 chiếm ưu thế hơn S2, điều này cho phép chúng tôi khẳng định, học sinh không qua tâm đến sự xuất hiện của khoảng, đoạn trong định nghĩa nguyên hàm nên bỏ qua việc nhiệm vụ tính $f'(4)$ thay vào đó là bằng việc vận dụng quy tắc hợp đồng “Nếu $F(x)$ được xác định bằng hai công thức $F_1(x)$ và $F_2(x)$ và F_1, F_2 lần lượt là nguyên hàm của f_1, f_2 , thì F là nguyên hàm của hàm số f xác định bởi hai công thức $f_1(x)$ và $f_2(x)$ ”.

Câu 3

Bảng 3: Thống kê các trả lời câu 3 của học sinh

Câu trả lời	Số lượng	%
Chiến lược S1 Nguyên hàm xác định	222	98.2%
Chiến lược S2 Nguyên hàm không xác định	4	1.8%
Tổng	226	100%

Chiến lược S1 được $\frac{222}{226}$ (98.2%) chọn, có thể được đại diện bởi kết quả sau:

$$\text{Vì } F'(x) = (\ln|x|)' = \frac{1}{x} = f(x) \text{ trên } (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

Nên $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$

Sự vượt trội của chiến lược S1 hơn S2 đã cho thấy, có một lượng khá đông học sinh không chú ý đến khoảng, đoạn trong định nghĩa nguyên hàm nên đã thừa nhận $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$. Kết quả này đã kiểm chứng được quy tắc hợp đồng “Nếu đạo hàm của hàm số F là hàm số f thì F là nguyên hàm của hàm số f ”.

Câu 4

Bảng 4: Thống kê các trả lời câu 4 của học sinh

Câu trả lời	Số lượng	%
Chiến lược S1 Không kiểm tra điều kiện tồn tại của tích phân	214	94.7%
Chiến lược S2 Kiểm tra điều kiện tồn tại của tích phân	12	5.3%
Tổng	226	100%

Chiến lược S1 được $\frac{214}{226}$ học sinh chọn với các kết quả được đại diện sau đây:

- $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Big|_0^1 = 1.$
- $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} dx = x^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = \sqrt{x} \Big|_0^1 = 1.$

Chiến lược S2 được $\frac{12}{214}$ (5.3%) học sinh chọn vì phát hiện hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ gián đoạn tại 0 nên không thỏa điều kiện liên tục trên $[0 ; 1]$ của định nghĩa tích phân. Sự vượt trội của chiến lược S1 so với S2 đã cho thấy phần lớn học sinh bỏ qua việc kiểm tra điều kiện hàm số liên tục trên đoạn có hai đầu mút là hai cận của tích phân và dường như các em cho rằng điều kiện đó người ra đề phải đảm bảo, các em chỉ có trách nhiệm xác định nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ là hàm $F(x) = \sqrt{x}$ (không cần biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập nào) và phải đưa ra được kết quả tính tích phân.

Phân tích trên đã cho thấy khi thực hiện các phép tính đạo hàm, nguyên hàm và tích phân, học sinh không quan tâm đến điều kiện hàm số xác định trên khoảng, đoạn dẫn đến nhiều bài toán không thỏa mãn điều kiện của các định nghĩa nhưng phần lớn các em đều ra được kết quả.

Kết luận thực nghiệm

Khoảng, đoạn trong các định nghĩa đạo hàm, nguyên hàm và tích phân được giáo viên xem như điều kiện ràng buộc và không thể thay bằng các tập hợp khác nên vai trò của chúng thường không được quan tâm đến. Ngoài ra, điều kiện hàm số xác định trên khoảng, đoạn trong các bài toán tính đạo hàm, nguyên hàm và tích phân được các giáo viên cho rằng, giả thiết của các bài toán đó phải đảm bảo. Các quan niệm trên đã ảnh hưởng không ít đến thái độ của học sinh, từ kết quả thực nghiệm đã cho thấy, các em không có trách nhiệm kiểm tra hàm số phải xác định trên khoảng hoặc đoạn theo điều kiện ràng buộc của các định nghĩa nhưng các em có trách nhiệm đưa ra được kết quả, dẫn đến nhiều bài toán không tồn tại nhưng học sinh vẫn tính được.

KẾT LUẬN

Thực hiện đề tài “Khái niệm khoảng, đoạn trong phép tính đạo hàm, nguyên hàm và tích phân”, chúng tôi đạt được các kết quả sau:

1. Trong chương I, chúng tôi đã phân tích được mối quan hệ thể chế giữa khái niệm giới hạn hàm số, đạo hàm, nguyên hàm và tích phân, cụ thể:

Trên $\mathbf{R}$ với mêtric thông thường, tập các điểm giới hạn (bao đóng) của khoảng (a, b) là đoạn $[a, b]$, tập các điểm giới hạn (bao đóng) của đoạn $[a, b]$ là chính nó nên ở bậc trung học phổ thông, việc xét giới hạn của hàm số tại một điểm thuộc khoảng, đoạn xác định của hàm số đó luôn đảm bảo điểm được xét là điểm giới hạn của khoảng, đoạn đó mà không cần phải đưa vào các khái niệm tôpô liên quan.

Các định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm, đạo hàm của hàm số, đạo hàm một phía, đạo hàm cấp cao đều được xây dựng trên cơ sở của định nghĩa giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm nên khoảng, đoạn trong các định nghĩa này cũng có vai trò tương tự như trong định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm.

Khi tính đạo hàm tại một điểm thông qua các số gia $\Delta x, \Delta y$. Các tác giả không giới thiệu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ là một hàm số. Đồng thời khoảng xác định của $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ và mối liên hệ với 0 cũng không đề cập.

Sự xuất hiện của khoảng, đoạn trong định nghĩa nguyên hàm đã hình thành đặc trưng cơ bản, các nguyên hàm chỉ sai khác một hằng số.

Các phân hoạch trong định nghĩa tích phân xác định đều có chung đặc trưng, giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trong các điểm chia luôn là hai đầu mút của đoạn $[a, b]$ đồng thời các điểm còn lại cũng thuộc đoạn này. Như vậy, mỗi phần tử của đoạn $[a, b]$ đều tham gia xây dựng nên định nghĩa tích phân xác định vì những phần tử đó có thể là điểm chia của một phân hoạch nào đó. Từ đó, cho thấy không thể thay thế đoạn trong định nghĩa tích phân xác định bởi các tập con khác của tập số thực $\mathbf{R}$.

2. Trong chương hai, chúng tôi nghiên cứu sự vận hành của khoảng, đoạn trong các định nghĩa đạo hàm, nguyên hàm và tích phân ở chương trình Toán phổ thông

Ở bậc THCS, hình biểu diễn của khoảng và nửa khoảng không bị chặn được sử dụng để biểu diễn cho tập nghiệm của các bất phương trình tương đương với bất phương trình dạng cơ bản. Đến THPT, khoảng, đoạn được định nghĩa tường minh. Sau định nghĩa, các tập hợp thường được thay thế bằng các kí hiệu tương ứng.

Khái niệm giới hạn hàm số tại một điểm được định nghĩa thông qua giới hạn của dãy số. Khoảng xuất hiện trong khái niệm này nhằm đảm bảo tồn tại một dãy số (x_n) trong tập hợp $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ thỏa mãn điều kiện $\lim x_n = x_0$.

Giả thiết hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng $(a ; b)$ trong định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm làm cho hàm số $y = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ xác định trên khoảng $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ thỏa mãn điều kiện ràng buộc của định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm.

Tương như sách M, các SGK hiện hành chỉ giới thiệu cách tính đạo hàm của hàm số tại một điểm thông qua các số gia $\Delta x, \Delta y$ nhưng không đề cập $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ là một hàm số, khoảng xác định và mối liên hệ với 0 cũng được các tác giả nhắc đến làm cho bước tính đạo hàm do các SGK cung cấp chỉ là những thao tác hình thức.

Việc bổ sung khái niệm hàm số đơn điệu trên một đoạn hoặc nửa khoảng đã giúp cho việc chứng minh một số bất đẳng thức, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số và chứng minh một vài định lý thuận tiện và dễ dàng hơn. Tuy nhiên vai trò của khoảng, đoạn trong một số bài toán không thể thay thế cho nhau, chẳng hạn: Nếu một hàm số đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng thì cũng đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên bao đóng của khoảng đó nhưng mệnh đề đảo thì không đúng.

Việc định nghĩa nguyên hàm của hàm số trên khoảng hoặc đoạn nhằm đảm bảo các nguyên hàm chỉ sai khác một hằng số. Giả thiết hàm số liên tục liên tục trên đoạn đã cho biết sự tồn tại nguyên hàm. Trong phương pháp đổi biến và tích phân từng phần của các SGK hiện hành, điều kiện này chỉ được phát biểu chung chung, chưa đảm bảo sự tồn tại nguyên hàm của các hàm số dưới dấu tích phân.

Giả thiết f liên tục trên đoạn $[a ; b]$ trong bài toán 1 dẫn đến khái niệm tích phân vừa làm cho đồ thị là một đường liền nét vừa đảm bảo sự tồn tại nguyên hàm của hàm số f trên đoạn đó và giả thiết hàm số liên tục trong phương pháp đổi biến và tích phân từng phần được chỉ ra một cách tường minh, đảm bảo tích phân tồn tại.

3. Trong chương III, kết quả thực nghiệm đã cho phép chúng tôi hợp thức hai giả thuyết nghiên cứu đặt ra ở cuối chương II.

4. Hướng mở của luận văn: Nghiên cứu lịch sử xuất hiện của các kí hiệu khoảng, đoạn và xây dựng một đồ án didactic để tiếp cận với các khái niệm khoảng, đoạn mà do điều kiện khách quan, luận văn này chưa thực hiện được.

PHỤ LỤC

Phụ lục 1. Phiếu câu hỏi dành cho giáo viên

Thưa quý thầy, cô,

Nhằm góp ý cho sách giáo khoa, góp phần nâng cao chất lượng dạy và học toán, mong quý thầy, cô vui lòng dành chút thời gian trả lời những câu hỏi dưới đây.

Tổng số năm mà quý thầy cô đã giảng dạy toán ở lớp 11 hoặc 12 (kể cả năm học này):

Dưới đây là lời giải của học sinh. Xin quý thầy, cô cho điểm (theo thang điểm 10) từng lời giải một và ghi ý kiến của mình về đề bài hoặc về lời giải

Câu 1

Cho hàm số $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Tính giới hạn của hàm số f khi x dần đến 0.

Bài làm

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Điểm:

Ý kiến:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & , |x| > 1 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Tính giới hạn của hàm số f khi x dần đến 0.

Bài làm

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Điểm:

Ý kiến:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a ; b)$ và có đạo hàm duy nhất tại điểm $x_0 \in (a,b)$ và $f'(x_0)=1$. Tính $f''(x_0)$

Bài làm

Vì $f'(x_0)=1$ nên $f''(x_0)=0$.

Điểm:

Ý kiến:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4

Cho hai hàm số $F(x) = \ln|x|$ và $f(x) = \frac{1}{x}$

Em hãy cho biết tính đúng sai của mệnh đề sau:

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$

Bài làm

Mệnh đề đúng vì $F'(x) = f(x)$ trên $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$ nên $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$

Điểm:

Ý kiến:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5

Em hãy cho biết tính đúng sai của mệnh đề sau:

Nếu K là khoảng hoặc nửa khoảng. f là hàm số liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K . F là nguyên hàm

của hàm số f trên K thì $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Bài làm

Trong định nghĩa tích phân (Giải Tích 12 nâng cao, trang 148), K là tập bất kì miễn là f là hàm số liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K . F là nguyên hàm của hàm số f trên K . Vì thế ta có quyền thay K bằng khoảng hoặc nửa khoảng tùy ý.

Điểm:

Ý kiến:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Phụ lục 2. Phiếu câu hỏi dành cho học sinh

Họ tên:..... Lớp

Câu 1.

Cho hàm số $f: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x$.

1) Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) Tìm đạo hàm của hàm số f

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số f

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2.

Cho hai hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x^3 & , x \in [2; 4] \\ \frac{x}{5} & , x \in (4; 6] \end{cases}$. Và $y = g(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x \in [2; 4] \\ \frac{1}{5} & , x \in (4; 6] \end{cases}$.

Hàm số f là nguyên hàm của hàm số g trên $[2 ; 6]$ đúng không? Tại sao?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3.

Cho hai hàm số $F(x) = \ln|x|$ và $f(x) = \frac{1}{x}$

Hãy giải thích tính đúng (sai) của mệnh đề sau đây:

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Tính $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) - Tôn Thân (Chủ biên) - Nguyễn Huy Đoan-Lê Văn Hồng - Trương Công Thành - Nguyễn Hữu Thảo, *Toán 8, tập 2*, NXB Giáo dục.
2. G.M.Fichtengon (1977), *Cơ sở giải tích toán học*, NXB Đại Học Miền Nam.
3. Đặng Minh Hải (2009), *Các tính chất của hàm số và mối liên hệ giữa chúng trong dạy học Toán phổ thông*, Luận văn thạc sỹ giáo dục học.
4. Trần văn Hạo (Tổng chủ biên) - Vũ Tuấn (Chủ biên) - Đào Ngọc Nam - Lê Văn Tiến-Vũ Viết Yên, *Đại số và giải tích 11*, NXB Giáo dục.
5. Trần văn Hạo (Tổng chủ biên)-Vũ Tuấn (Chủ biên)-Đào Ngọc Nam-Lê Văn Tiến-Vũ Viết Yên, *sách giáo viên Đại số và giải tích 11*, NXB Giáo dục.
6. Trần văn Hạo (Tổng chủ biên)-Vũ Tuấn (Chủ biên)-Lê Thị Thiên Hương-Nguyễn Tiến Tài-Cần Văn Tuất, *Giải tích 12*, NXB Giáo dục.
7. Trần văn Hạo (Tổng chủ biên)-Vũ Tuấn (Chủ biên)-Lê Thị Thiên Hương-Nguyễn Tiến Tài-Cần Văn Tuất, *sách giáo viên Giải tích 12*, NXB Giáo dục.
8. Lê Thị Thiên Hương – Nguyễn Anh Tuấn – Lê Anh Vũ, *Toán Cao cấp tập 1*, NxbGD.
9. Trần Lương Công Khanh (2002), *Nghiên cứu didactic về những khó khăn của học sinh khi tiếp thu khái niệm tích phân*, Luận văn thạc sỹ giáo dục học.
10. Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên)-Nguyễn Huy Đoan (chủ biên)-Nguyễn Xuân Liêm- Đặng Hùng Thắng-Trần Văn Vương, *Đại số 10 nâng cao*, NXB Giáo dục
11. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên)-Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên)-Nguyễn Xuân Liêm-Nguyễn Khắc Minh-Đặng Hùng Thắng, *Đại số và giải tích 11 nâng cao*, NXB Giáo dục.
12. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên)-Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên)-Nguyễn Xuân Liêm-Nguyễn Khắc Minh-Đặng Hùng Thắng, *sách giáo viên Đại số và giải tích 11 nâng cao*, NXB Giáo dục.
13. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên)-Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên)-Trần Phương Dung-Nguyễn Xuân Liêm-Đặng Hùng Thắng, *Giải tích 12 nâng cao*, NXB Giáo dục.
14. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên)-Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên)-Trần Phương Dung-Nguyễn Xuân Liêm-Đặng Hùng Thắng, *sách giáo viên Giải tích 12 nâng cao*, NXB Giáo dục.

15. Nguyễn Thế Thạch (chủ biên), *Hướng dẫn thực hiện chương trình sách giáo khoa lớp 12*, NXB Giáo dục.

16. Nguyễn Đình Trí (1995), *Toán học cao cấp*, NXB Giáo dục.

17. Vũ Tuấn – Phan Đức Thành – Ngô Xuân Sơn, *Giải tích toán học tập 1*, NXB Giáo dục.

Tiếng Anh

18. Brian S. Thomsn, *Rethinking the Elementary Real Analysis Course*.