BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

ĐỖ PHÚ HƯNG

KHẢO SÁT MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG BẰNG NGÔN NGỮ SỐ PHỨC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. TRẦN ĐẠO DÕNG

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **PGS.TS. TRẦN ĐẠO DÕNG**

Phản biện 1: **TS. Lê Hải Trung.**

Phản biện 2: **GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu.**

Luận văn được bảo vệ trước hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ ngành Phương pháp toán sơ cấp họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 28 tháng 05 năm 2011.

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Ta đã biết rằng các phương trình $x^2+1=0$, $x^2+4=0$ không có nghiệm thực. Một cách tổng quát các phương trình bậc hai $Ax^2+Bx+C=0$ với hệ số thực có biệt thức $\Delta<0$ đều không có nghiệm thực.

Sự phát triển của toán học, khoa học đòi hỏi phải mở rộng tập hợp các số thực thành một tập hợp số mới gọi là tập hợp các số phức, trên đó có các phép toán cộng và nhân với các tính chất tương tự phép toán cộng và nhân số thực sao cho các phương trình nói trên đều có nghiệm. Muốn thế, người ta đưa ra số i sao cho bình phương của i bằng -1. Khi đó i là một nghiệm của phương trình $x^2+1=0$ và $2i$ là một nghiệm của phương trình $x^2+4=0$, còn $1+i$ là một nghiệm của phương trình $x^2-2x+2=0$.

Các số $a+ib$ (a, b $\in$ R) gọi là các số phức.

Ta đã biết biểu diễn hình học các số thực bởi các điểm trên một trục số. Đối với các số phức, ta hãy xét mặt phẳng tọa độ Oxy. Mỗi số phức $z=a+ib$ (a, b $\in$ R) được biểu diễn bởi điểm M có tọa độ (a; b). Ngược lại, rõ ràng mỗi điểm M(a; b) biểu diễn một số phức là $z=a+ib$. Ta còn viết $M\left(a+ib\right)$ hay M(z). Mỗi số phức $M=a+ib$ cũng có thể đồng nhất với vectơ $\overrightarrow{OM}$ có điểm đầu là gốc tọa độ O, điểm cuối là M. Do đó, giữa số phức với hình học phẳng có liên quan mật thiết với nhau. Việc sử dụng số phức trong nghiên cứu, khảo sát hình học phẳng tỏ ra có nhiều thuận lợi, nhất là trong việc xem xét các vấn đề liên quan đến các phép biến hình của mặt phẳng cùng với hình học của chúng.

Với mong muốn tìm hiểu và khảo sát một số bài toán hình học phẳng thông qua ngôn ngữ số phức, đồng thời được sự gợi ý của: PGS. TS TRẦN ĐẠO DÕNG, tôi chọn đề tài ***“ Khảo sát một số bài toán hình học phẳng bằng ngôn ngữ số phức”*** làm đề tài nghiên cứu cho luận văn này.

2. Mục tiêu và nội dung nghiên cứu

Mục tiêu của đề tài là tìm hiểu số phức và đặc trưng của một số tính chất, đặc điểm hình học của số phức từ đó ứng dụng để khảo sát một số lớp bài toán hình học phẳng thông qua ngôn ngữ số phức.

3. Phương pháp nghiên cứu

- Tham khảo tài liệu và hệ thống hóa kiến thức.
- Thể hiện tường minh các kết quả nghiên cứu trong đề tài.
- Trao đổi, thảo luận với giáo viên hướng dẫn.

4. Đóng góp của đề tài

- Góp phần làm rõ ứng dụng của số phức trong hình học phẳng.
- Thể hiện ứng dụng của số phức trong việc giải một số bài toán về hình học phẳng.

5. Ý nghĩa khoa học

Thể hiện các kiến thức về số phức, góp phần làm rõ ứng dụng của số phức trong việc giải quyết các bài toán về hình học phẳng.

6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận, luận văn được chia thành 3 chương :

Chương 1 trình bày các kiến thức cơ sở về số phức như định nghĩa số phức, dạng đại số, hình học của số phức, các phép toán về số phức. Các nội dung trong chương này có liên quan đến việc nghiên cứu các chương tiếp theo.

Chương 2 trình bày về ứng dụng của số phức trong hình học phẳng. Để thực hiện được điều này, trước hết chúng tôi mô tả một số khái niệm của hình học phẳng qua ngôn ngữ số phức như góc định hướng, các phép biến hình trong mặt phẳng. Tiếp đó, chúng tôi thể hiện một số đặc trưng trong hình học phẳng qua ngôn ngữ số phức như phương trình đường thẳng, phương trình đường tròn. Điều kiện đồng quy, vuông góc, song song, thẳng hàng, giao điểm hai cát tuyến, giao điểm hai tiếp tuyến, chân đường vuông góc ở dây cung. Tọa vị của trọng tâm, trực tâm của tam giác.

Chương 3 tập trung khảo sát một số bài toán như bài toán chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức hình học, bài toán quỹ tích, bài toán chứng minh tính vuông góc, tính thẳng hàng, tính song song, tính đồng quy, bài toán dựng hình, bài toán liên quan đến các phép biến hình trong mặt phẳng.

Chương 1: KIẾN THỨC CƠ SỞ

Các kiến thức cơ sở về số phức được trình bày trong chương này được trích dẫn từ tài liệu [2], [5], [6], [7], [10].

1.1. Định nghĩa số phức:

Trong mặt phẳng ta chọn một hệ tọa độ vuông góc, thì mỗi điểm Z của mặt phẳng được xác định theo tọa độ (a, b) đối với hệ tọa độ đã cho. Thường người ta ký hiệu cặp số thực (a, b) ứng với một điểm Z trên mặt phẳng. Như vậy, với một hệ tọa độ cho trước thì tập hợp những điểm trên mặt phẳng và tập hợp các cặp số (a, b) là một quan hệ một- một. Mỗi điểm trên mặt phẳng tương ứng với một cặp số thực và dựa vào đó ta sẽ xây dựng một tập hợp những số phức với điểm trên mặt phẳng. Với mục đích đó, ta đưa vào định nghĩa các phép toán trên các cặp số thực sao cho các định luật của đại số vẫn còn đúng như trong trường hợp số thực:

1. Hai cặp số $z_1 = (a_1, b_1)$ và $z_2 = (a_2, b_2)$ bằng nhau nếu $a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$.
2. Nếu hai cặp số $z_1 = (a_1, b_1)$ và $z_2 = (a_2, b_2)$ thì tổng của chúng $z = z_1 + z_2$ là một cặp số $z = (a, b)$ sao cho $a = a_1 + a_2$ và $b = b_1 + b_2$.
3. Nếu cho hai cặp số $z_1 = (a_1, b_1)$ và $z_2 = (a_2, b_2)$ thì tích của chúng $z = z_1z_2$ gọi là một cặp số z = (a, b) sao cho $a = a_1a_2 - b_1b_2$ và $b = a_1b_2 + a_2b_1$.

Tập hợp tất cả những cặp số thực với các phép tính quan hệ bằng nhau, phép cộng và phép nhân như ở trên gọi là tập hợp các số phức, ký hiệu C.

Như vậy, cho một hệ tọa độ vuông góc trong mặt phẳng thì tập hợp các số phức có thể đồng nhất với những điểm trên mặt phẳng này.

Bây giờ, ta xét trường hợp đặc biệt là những điểm nằm trên trục hoành của hệ tọa độ, hay là những điểm có dạng (a,0), với a là số thực bất kỳ.

Do $(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1+a_2, 0)$ và $(a_1, 0)(a_2, 0) = (a_1a_2, 0)$ như là phép cộng và phép nhân những tọa độ ở trục hoành đối với các điểm này. Vì thế ta có thể đồng nhất các điểm trên trục hoành với số thực. Từ đó, thay vì phải viết (a, 0) ta chỉ viết a (ví dụ:(0, 0) = 0, (1, 0) = 1,…).

Ta xét một số phức đặc biệt dạng (0, 1). Tính (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1. Như vậy tồn tại một số phức bình phương bằng một số thực. Ta ký hiệu i = (0, 1). Khi đó, ta có $i^2 = -1$.

1.2. Biểu diễn đại số của số phức:

Ta đã thấy rằng tập hợp các số thực được đồng nhất với tập hợp con của số phức dạng (a, 0) = a, với a là một số thực. Số phức đặc biệt i = (0, 1) được gọi là đơn vị ảo.

Xét tích của một số thực b = (b, 0) với đơn vị ảo i = (0, 1). Khi đó ta có bi = (b, 0)(0, 1) = (0, b). Đây là một điểm nằm trên trục tung với tung độ bằng b. Thế còn một điểm bất kỳ thì sao ? Do định nghĩa phép cộng nên có thể biểu diễn z = (a, 0) + (0, b). Suy ra $z = a + ib$.

Một số phức viết dưới dạng $z = a + ib$ gọi là dạng đại số của số phức. Số thực a gọi là phần thực của z và được ký hiệu Re(z), còn số b gọi là phần ảo của z và được ký hiệu Im(z). Mặt phẳng chứa toàn bộ số phức gọi là mặt phẳng phức.

1.3. Dạng lượng giác của số phức:

Trên mặt phẳng cho hệ trục tọa độ vuông góc, sự biểu diễn số phức theo những điểm trên mặt phẳng cho ta dễ dàng nghiên cứu các phép toán trên số phức. Cho hai số phức dạng đại số $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, đó là hai điểm Z_1, Z_2 trong hệ tọa độ vuông góc ứng với số trên. Điểm O là tọa độ gốc.

Ta nối điểm Z_1, Z_2 với gốc O và xác định vectơ $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$. Sau đo dựng hình bình hành OZ_1ZZ_2.

Như vậy đỉnh thứ tư $z = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ biểu diễn tọa độ của số phức $z_1 + z_2$ như tổng của hai số phức đã cho.

Do đó tổng hai số phức có thể biểu diễn hình học như cộng hai véctơ trong mặt phẳng.

Bởi vì mỗi điểm z trên mặt phẳng tương ứng với một véctơ bán kính $\overrightarrow{OZ}$ và ta thấy ngay $\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2} = \overrightarrow{OZ}$, ta có nhận xét là khi xem số phức như là những điểm trên mặt phẳng với hệ tọa độ gốc O thì có thể xem số phức như là những vectơ trong mặt phẳng này. Chính điều nhận xét này cho phép ta áp dụng được số phức vào giải những bài toán trong hình học phẳng.

Số phức z có thể viết:

$$z = r\cos\varphi + \mathrm{i}r\sin\varphi = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Một số phức viết theo dạng trên người ta gọi là dạng lượng giác của số phức.

Cho hai số phức dưới dạng lượng giác $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ và $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$. Ta có tính chất sau:

1. Nếu z_1 trùng z_2 thì môđun của chúng bằng nhau và argumen của chúng φ_1, φ_2 khác nhau một số nguyên lần 2π.
2. Tích của hai số phức:
   $z = z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$.
3. Như vậy, tích z của hai số phức viết dưới dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, ở đó r là tích của r_1r_2 hai môđun của hai thừa số. $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$.

Do đó, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ và $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

1.4. Công thức Moa-vrơ (Moivre):

Cho một số phức bất kỳ dưới dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Khi đó, với n là một số nguyên dương bất kỳ, ta có: $z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$.

Công thức trên mang tên **Moa-vrơ.**

Công thức trên còn đúng với các số mũ nguyên âm. Thật vậy,

$$z^{-1} = \frac{1}{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = r^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r^{-n}\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right).$$

Suy ra:

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = [r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))]^n = r^{-n}[\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)].$$

1.5. Căn bậc n của số phức:

Cho số nguyên $n \geq 2$ và số phức α. Ta hãy tìm số phức z sao cho $z^n = \alpha$, tức là tìm nghiệm của phương trình $z^n - \alpha = 0$.

Rõ ràng khi $\alpha = 0$ thì z = 0 là nghiệm duy nhất.

Khi $\alpha \neq 0$, φ là $\arg\alpha$, ta có z phải khác 0 và

$$\begin{cases} |z|^n = |\alpha| \\ n\psi = \varphi + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|\alpha|} \\ \psi = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{k2\pi}{n}, k \in \end{cases}.$$

Vậy các căn bậc n của α là:

$$z_k = \sqrt[n]{|\alpha|}(\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n})), k = \overline{0, n-1}.$$

1.6. Biểu diễn hình học của số phức:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy, mỗi điểm M(a, b) cho tương ứng với số phức $z = a + ib$, tương ứng này là một song ánh từ tập các số phức C lên tập các điểm trên mặt phẳng Oxy. Điểm M(a, b) hay M(z) (hoặc $\overrightarrow{OM}$) được gọi là biểu diễn hình học hay dạng hình học của số phức $z = a + ib$. Mặt phẳng Oxy gọi là mặt phẳng phức.

Số phức $z = a + ib$ tương ứng với điểm M(z) được gọi là tọa vị của điểm M hoặc của vec tơ $\overrightarrow{OM}$ trong mặt phẳng phức.

Nếu z là tọa độ vị của điểm M thì môđun của z là khoảng cách từ M đến gốc tọa độ O, nghĩa là $|z| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = OM$.

Từ đây về sau, một điểm trong mặt phẳng sẽ được ký hiệu là một chữ in hoa còn tọa vị của nó được ký hiệu là chữ thường, chẳng hạn số phức a là tọa vị của điểm A.

Chương 2: ỨNG DỤNG CỦA SỐ PHỨC TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

Trong chương này, trước hết chúng tôi mô tả một số khái niệm của hình học phẳng qua ngôn ngữ số phức như góc định hướng, các phép biến hình trong mặt phẳng. Tiếp đó, chúng tôi thể hiện một số đặc trưng trong hình học phẳng qua ngôn ngữ số phức như phương trình đường thẳng, phương trình đường tròn, điều kiện đồng qui, vuông góc, song song, thẳng hàng, giao điểm hai cát tuyến, giao điểm hai tiếp tuyến, chân đường vuông góc ở dây cung, tọa vị của trọng tâm, trực tâm của tam giác. Các khái niệm và kết quả thể hiện trong chương này được trích dẫn từ tài liệu [2], [5], [6], [7].

2.1. Mô tả một số khái niệm của hình học phẳng thông qua ngôn ngữ số phức :

2.1.1. Góc định hướng:

2.1.2. Mô tả các phép biến hình phẳng bằng ngôn ngữ số phức:

a) Phép dời hình:

- *Phép tịnh tiến.*
- *Phép quay.*
- *Phép đối xứng trục.*

b) Phép vị tự:

2.2. Thể hiện một số đặc trưng trong hình học phẳng thông qua ngôn ngữ số phức:

2.2.1. Phương trình đường thẳng

2.2.1.1. Phương trình tổng quát

Trong phần trước ta thấy điều kiện cần và đủ để 3 điểm phân biệt z_0, z_1, z_2 nằm trên một đường thẳng là góc giữa hai vecto $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ và $\overrightarrow{Z_0Z_2}$ bằng 0 hoặc $\pm\pi$. Nói một cách khác tỉ số đơn V(z_0, z_1, z_2) là một số thực. Do tính chất của số phức ta có thể biểu diễn dưới dạng như sau :

$$\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z_0} - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}}.$$

Từ đẳng thức trên ta thấy ngay, một đường thẳng đi qua hai điểm z_1, z_2 là tập hợp các điểm Z sao cho:

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z} - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}},$$

hoặc là: $$(\overline{z_1} - \overline{z_2})z - (z_1 - z_2)\overline{z} + (z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2) = 0.$$

Vì nhãn của tất cả các điểm trên đường thẳng thỏa mãn chỉ đẳng thức trên, nên ta có thể gọi đó là phương trình đường thẳng.

2.2.1.2. Phương trình tham số:

Ba điểm Z, Z_1, Z_2 nằm trên một đường thẳng khi và chỉ khi tỷ số đơn V(z, z_1, z_2) $= \dfrac{z - z_2}{z_1 - z_2}$ là một số thực. Do đó với mỗi số thực λ, thì số phức $z = z_2 + \lambda(z_1 - z_2) = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$ là một nhãn của một điểm trên đường thẳng đi qua Z_1Z_2 và ngược lại.

Như vậy, khi λ chạy trên tập hợp số thực thì phương trình $z = z_2 + \lambda(z_1 - z_2) = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$ gọi là phương trình tham số của đường thẳng đi qua Z_1Z_2.

2.2.2. Phương trình đường tròn:

Chúng ta sẽ tìm điều kiện cần và đủ để 4 điểm Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 nằm trên một đường tròn. Nếu Z_0, Z_1,Z_2,Z_3 nằm trên đường tròn thì hiệu giữa góc định hướng $Z_0Z_2Z_1$ và $Z_0Z_3Z_1$ là 0 hoặc $\pm\pi$. Suy ra tỉ số:

$$\frac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)} = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3}$$ là một số thực.

Ngược lại, nếu tỉ số $\dfrac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)}$ là một số thực, thì z_0, z_1, z_2, z_3 là nhãn của những điểm trên đường tròn hoặc đường thẳng. Khi đó giá trị $\mathrm{W}(z_0, z_1, z_2, z_3) = \dfrac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)}$ được gọi là tỉ số kép của 4 điểm z_0, z_1, z_2, z_3 (theo thứ tự này).

Như vậy: Điều kiện cần và đủ cho 4 điểm Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 nằm trên đường thẳng hoặc đường tròn là tỉ số kép

$$\mathrm{W}(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)} = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3}$$ của nhãn z_0, z_1, z_2, z_3

là một số thực hoặc là: $$\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{\overline{z_0} - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} : \frac{\overline{z_0} - \overline{z_3}}{\overline{z_1} - \overline{z_3}}.$$

Từ phương trình trên, để một điểm Z nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $Z_1Z_2Z_3$ là phương trình sau thỏa mãn:

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{\overline{z} - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} : \frac{\overline{z} - \overline{z_3}}{\overline{z_1} - \overline{z_3}}.$$

Ta có thể gọi đây là phương trình đường tròn xác định bởi 3 điểm Z_1, Z_2, Z_3.

Khử mẫu số ta nhận được:

$$(z-z_2)(\overline{z}-\overline{z_3})(z_1-z_3)(\overline{z_1}-\overline{z_2})-(z-z_3)(\overline{z}-\overline{z_2})(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_3})=0$$

Trường hợp đặc biệt, tâm của đường tròn trùng với điểm gốc tọa độ và bán kính là 1, thì phương trình đường tròn có dạng $z\overline{z}=1$. Đường tròn này gọi là đường tròn đơn vị.

2.2.3. Điều kiện vuông góc, song song:

Có rất nhiều bài toán liên quan đến đường tròn khi ta chọn tọa độ vuông góc với gốc chính là tâm đường tròn đó và coi đường tròn là đường tròn đơn vị. Khi đó các công thức tính toán trở nên đơn giản, dễ nhớ và áp dụng được trong các bài toán cụ thể.

Như ta đã biết, sự vuông góc hoặc song song của hai đoạn thẳng Z_1Z_2 và U_1U_2 được biểu diễn bằng công thức:

$$(z_2-z_1)(\overline{u_2}-\overline{u_1})+(u_2-u_1)(\overline{z_2}-\overline{z_1})=0,$$

và

$$(z_2-z_1)(\overline{u_2}-\overline{u_1})=(u_2-u_1)(\overline{z_2}-\overline{z_1}).$$

Trong trường hợp Z_1, Z_2, U_1, U_2 đều nằm trên đường tròn đơn vị, thì những số phức liên hợp $\overline{z_1},\overline{z_2},\overline{u_1},\overline{u_2}$ có thể thay bằng $\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2},\frac{1}{u_1},\frac{1}{u_2}$.

Khi đó: $(z_2-z_1)\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_1}\right)+(u_2-u_1)\left(\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_1}\right)=0$.

Suy ra Z_1Z_2 và U_1U_2 vuông góc với nhau khi và chỉ khi $z_1z_2+u_1u_2=0$.

Tương tự điều kiện cần và đủ để hai đoạn trên song song là $z_1z_2=u_1u_2$.

2.2.4. Giao điểm hai cát tuyến:

Điều kiện để ba điểm A, B và U nằm trên một đường thẳng cho bởi phương trình:

$$\frac{u-a}{b-a}=\frac{\overline{u}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}.$$

Nếu A và B là những điểm nằm trên đường tròn đơn vị thì $\overline{a}=\frac{1}{a}$, $\overline{b}=\frac{1}{b}$.

Khi đó phương trình trên có thể viết dưới dạng $a+b=u+ab\overline{u}$.

Đây cũng là điều kiện cần và đủ để U nằm trên đường thẳng AB.

Nếu Z_1Z_2 và U_1U_2 là hai cung của đường tròn đơn vị cắt nhau thì giao điểm S của chúng cho bởi hệ: $\begin{cases} z_1+z_2=s+z_1z_2\overline{s} \\ u_1+u_2=s+u_1u_2\overline{s}. \end{cases}$

Từ đó ta có công thức tính nhãn s của giao điểm :

$$s=\frac{(z_1+z_2)u_1u_2-(u_1+u_2)z_1z_2}{u_1u_2-z_1z_2}$$

Do Z_1Z_2 và U_1U_2 không song song nên $u_1u_2-z_1z_2\neq 0$.

2.2.5. Giao điểm hai tiếp tuyến:

Bây giờ, cho hai điểm Z, U trên đường tròn đơn vị với điều kiện chúng không nằm trên cùng đường kính. Dựng hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn tại hai điểm đó và chúng cắt nhau tại S. Ta tìm cách biểu diễn nhãn s bởi z và u của hai điểm Z và U. Do SZ vuông góc với OZ và SU vuông góc với OU ta có

$$\frac{z-s}{z}+\frac{\overline{z}-\overline{s}}{\overline{z}}=0 \text{ và } \frac{u-s}{u}+\frac{\overline{u}-\overline{s}}{\overline{u}}=0.$$

Hay $(z-s)\overline{z}+(\overline{z}-\overline{s})z=0$ và $(u-s)\overline{u}+(\overline{u}-\overline{s})u=0$.

Suy ra $\bar{s}z + z\bar{s} = 2$ và $s\bar{u} + u\bar{s} = 2$.

Từ đó ta có $s = \dfrac{2zu}{z+u}$.

2.2.6. Chân đường vuông góc ở dây cung:

Ta đi tìm công thức cho nhãn chân đường vuông góc S hạ từ một điểm M xuống đường thẳng AB, với hai điểm A, B nằm trên đường tròn đơn vị.

Như các phần trước ta có công thức $a + b = s + ab\bar{s}$.

Mặt khác, do MS vuông góc với AB, ta có:

$$(m-s)\left(\bar{a}-\bar{b}\right)+\left(\bar{m}-\bar{s}\right)(a-b)=0$$

Từ đó suy ra $\bar{s} = \bar{m} - (m-s)\overline{ab}$, thế $\bar{s}$ vào $a + b = s + ab\bar{s}$.

Hay $s = \dfrac{1}{2}\left(a + b + m - ab\bar{m}\right)$.

2.2.7. Tọa độ vị của trọng tâm, trực tâm của tam giác:

Chương 3: CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

Trong chương này chúng tôi khảo sát một số bài toán hình học phẳng thể hiện qua ngôn ngữ số phức. Các bài toán này được tuyển chọn và phân loại từ các tài liệu [1], [2], [4], [5], [8], [9], [10].

3.1. Bài toán chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức hình học.

Bài toán 1:

Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh với mọi điểm M ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Với giá trị nào của điểm M thì tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 2:

Giả sử điểm D nằm trên cạnh BC của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $AB^2.DC + AC^2.BD - AD^2.BC = BC.DC.BD$.

Bài toán 3:

Chứng minh rằng tích các đường chéo của tứ giác nội tiếp bằng tổng của tích các cạnh đối.

Bài toán 4:

Hai đường tròn bán kính R và r tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm A. Qua A kẻ hai cát tuyến vuông góc với nhau MAM_1, NAN_1. Chứng minh $MM_1^2 + NN_1^2$ không đổi.

3.2. Bài toán quỹ tích.

Bài toán 5:

Cho đường tròn tâm O bán kính R, BC là dây cung cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài toán 6:

Cho hình thang ABCD (AB// CD) cạnh AB cố định, AD = m, DC = n: không đổi, G là giao điểm hai đường chéo. Tìm quỹ tích các điểm D, C, G.

Bài toán 7:

Cho tam giác đều ABC cạnh 2x. Tìm quỹ tích điểm M sao cho:

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 8x^2$.

b) $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$.

Bài toán 8:

Cho tam giác vuông OAB có hai cạnh góc vuông OA=2x, OB= x.

a) Xác định điểm K thỏa mãn điều kiện : $\overrightarrow{KO} - 2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

b) Tìm tập hợp điểm M sao cho:

$$\left|\overrightarrow{MO} - 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right| = 2\left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right|.$$

Bài toán 9:

Cho hình bình hành ABCD.

a) Chứng minh rằng: $\left(MA^2+MC^2\right)-\left(MB^2+MD^2\right)$ là hằng số, không phụ thuộc vị trí điểm M.
b) Tìm tập hợp điểm M sao cho: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=k^2$ (k là số thực).

Bài toán 10:

Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định, điểm A thay đổi sao cho trung tuyến BM có độ dài không đổi x. Tìm quỹ tích đỉnh A.

3.3. Bài toán dựng hình:

Bài toán 11:

Cho đường tròn tâm O, bán kính R và hai dây cung AB, CD. Tìm điểm X trên đường tròn sao cho $XA^2+XB^2=XC^2+XD^2$.

Bài toán 12:

Cho tam giác ABC. Hãy dựng tam giác $A_0B_0C_0$ sao cho tam giác A_0B_0C, B_0C_0A và C_0A_0B là những tam giác đều cùng hướng dương.

3.4. Bài toán chứng minh tính vuông góc, tính thẳng hàng, tính song song, tính đồng qui:

Bài toán 13:

Cho tam giác ABC, dựng phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân LAB, KAC (vuông tại L và K). Kẻ hình bình hành LBCM. Trên tia đối của tia AL lấy điểm N sao cho AN = AL. Chứng minh rằng tam giác KMN vuông cân.

Bài toán 14:

Cho tam giác ABC. Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, dựng hình vuông ABCD. Trong nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, dựng hình vuông BCFG. Chứng minh GA vuông góc với CD và GA = CD.

Bài toán 15:

Cho tam giác ABC, dựng phía ngoài tam giác ABC các hình bình hành ABDE, ACFG. Gọi H, K, L lần lượt là trung điểm của BE, BC, CG.

a) Chứng minh rằng tam giác HKL vuông cân.
b) Có nhận xét gì về vị trí đỉnh thứ 4 của hình vuông có 3 đỉnh H, K, L ?

Bài toán 16:

Cho đường tròn (O) và điểm M bất kỳ ở trong đường tròn. Qua M dựng hai dây cung AMB và CMD vuông góc với nhau. Gọi N là trung điểm của BD. Chứng minh MN $\perp$ AC.

Bài toán 17:

Về phía ngoài của tứ giác ABCD dựng các hình vuông ABEF, BCGH, CDKL, DAMN. Gọi P, Q, R, S lần lượt là tâm của các hình vuông trên. Chứng minh: PR = QS và $PR\perp QS$.

Bài toán 18:

Từ đỉnh A của hình vuông ABCD, ta vẽ hai tia Ax, Ay đi qua miền trong của hình vuông đó. Giả sử các điểm M, K là hình chiếu của B và D lên Ax; N, L tương ứng là hình chiếu của B và D lên Ay. Chứng minh rằng các đoạn thẳng KL, MN vuông góc với nhau và bằng nhau.

Bài toán 19:

Cho hình vuông ABCD. Điểm M là trung điểm của CD, điểm P nằm trên đường chéo AC sao cho $PC=3AP$. Chứng minh rằng: $BMP=90^0$.

Bài toán 20:

Cho ba hình vuông bằng nhau ABCD, BEFC, EPQF. Chứng minh rằng: $ACD+AFD+AQD=\frac{\pi}{2}$.

Bài toán 21:

Trên các cạnh AB và AC của tam giác đều ABC lấy các điểm E và D tương ứng sao cho $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|BE|}{|EA|} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng, nếu P là giao điểm của BD và CE thì $APC = 90^0$.

Bài toán 22:

Cho B_1 và B_2 lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh A_1 và A_2 xuống các cạnh đối diện trong tam giác $A_1A_2A_3$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$. Chứng minh rằng B_1B_2 vuông góc với OA_3.

Bài toán 23:

Cho hình vuông ABCD. Điểm M và N nằm tương ứng trên các đường chéo BD và cạnh BC sao cho $BM = \frac{2}{3}BD$ và $BN = \frac{1}{3}BC$. Chứng minh rằng $AMN = 90^0$.

Bài toán 24:

Cho hình chữ nhật ABCD. Từ một điểm K bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật hạ những đường thẳng vuông góc xuống AB, CD, AD và BC và cắt các cạnh này lần lượt tại P, Q, R, S. Chứng minh rằng PR vuông góc với QS và PS vuông góc với QR.

Bài toán 25:

Cho tam giác ABC $\left(BAC \neq 60^0\right)$, ở miền ngoài của tam giác ABC vẽ các tam giác đều ABD và ACE. Dựng hình bình hành AEFD. Chứng minh tam giác BFC là đều.

Bài toán 26:

Nếu AB và CD là hai đoạn thẳng cắt nhau và P, Q là những trung điểm tương ứng của các đoạn thẳng trên. Chứng minh rằng, nếu AB là phân

giác của góc CPD và $PA^2 = PB^2 = |PC|.|PD|$ thì CD là phân giác của góc AQB và $QC^2 = QD^2 = |QA|.|QB|$.

Bài toán 27:

Cho M là trọng tâm tam giác ABC, P là chân đường cao hạ từ A, còn Q là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và đường thẳng đi qua A đồng thời song song với BC.

Chứng minh rằng điểm M nằm trên đoạn PQ và $\frac{|QM|}{|MP|} = 2$.

Bài toán 28:

Chứng minh rằng các trung điểm của hai đáy của một hình thang, giao điểm của hai đường chéo và giao điểm của hai cạnh bên kéo dài thẳng hàng.

Bài toán 29:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến của (O) tại A, B, C theo thứ tự gặp các đường thẳng BC, CA, AB tại 3 điểm P, Q, R. Chứng minh P, Q, R thẳng hàng.

Bài toán 30:

Cho tam giác ABC, qua các đỉnh A, B, C vẽ ba đường thẳng song song với nhau, cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác lần lượt tại các điểm thứ hai D, E, F. Chứng minh trực tâm các tam giác ABF, BCD, CAE thẳng hàng.

Bài toán 31:

Từ đỉnh A của một tứ giác ABCD nội tiếp trên đường tròn, dựng các đường vuông góc với các cạnh AB và AD lần lượt cắt các cạnh CD và BC tại M và N. Chứng minh rằng M, N nằm trên đường thẳng đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD.

Bài toán 32:

Từ các đỉnh của hình bình hành ABCD hạ các đường vuông góc AE, BF, CG và DH xuống các đường chéo. Chứng minh EF // GH.

Bài toán 33:

Cho tam giác ABC với điểm D trên cạnh BC, một điểm M trên đoạn AD. Gọi L, K lần lượt là trung điểm của MB, MC. Tia DL cắt AB tại điểm P; tia DK cắt AC tại điểm Q. Chứng minh PQ // LK.

Bài toán 34:

Cho ngũ giác ABCDE, gọi K, L, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, DE. Lấy P,Q lần lượt là trung điểm của KL và MN.

Chứng minh rằng : PQ // AE và $PQ = \frac{AE}{4}$.

Bài toán 35:

Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp trong đường tròn (O). Từ M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA ta vẽ các đường thẳng vuông góc với các cạnh đối diện tương ứng. Chứng minh các đường thẳng này đồng quy.

Bài toán 36:

Cho tam giác ABC, các điểm A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Gọi M là điểm tùy ý trong tam giác, lấy M_1, M_2, M_3 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các điểm A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng các đường thẳng AM_1, BM_2, CM_3 đồng quy.

Bài toán 37:

Cho một tứ giác bất kỳ, chứng minh rằng hai đoạn thẳng nối liền các trung điểm của các cạnh đối nhau của tứ giác và đoạn thẳng nối liền trung điểm của hai đường chéo đồng quy tại một điểm.

Bài toán 38:

Cho tứ giác ngoại tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng những đường nối những điểm tiếp xúc của các cạnh đối diện và các đường chéo tứ giác cắt nhau tại một điểm.

Bài toán 39:

Cho tam giác ABC, gọi O là điểm bất kỳ trong tam giác, gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB, gọi L, M, N lần lượt là các trung điểm của AO, BO, CO. Chứng minh rằng DL, EM, FN đồng quy tại một điểm.

Bài toán 40:

Cho tam giác ABC trực tâm H, vẽ đường tròn đường kính CH, cắt các cạnh BC và AC tại P và Q. Chứng minh rằng những tiếp tuyến tại điểm P và Q đối với đường tròn cắt nhau tại điểm giữa của AB.

Bài toán 41:

Cho hình bình hành ABCD và $AB_1C_1D_1$ với B_1 thuộc cạnh AB, D_1 thuộc cạnh AD. Chứng minh các đường thẳng DB_1, BD_1, CC_1 đồng quy.

Bài toán 42:

Cho hai hình vuông cùng hướng OABC và $OA_1B_1C_1$ có một điểm chung O. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1 và CC_1 đi qua một điểm.

3.5. Bài toán về góc và khoảng cách:

Bài toán 43:

Qua trung điểm C của một dây cung tùy ý AB của một đường tròn ta dựng hai dây cung KL và MN tùy ý (K và M ở cùng phía đối với AB), Q là giao điểm của AB và KN, P là giao điểm của AB và ML.

Chứng minh rằng QC = CP.

Bài toán 44:

Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm của cạnh BC. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho BD = 2AD. Các đoạn thẳng AM và CD cắt nhau tại điểm I. Chứng minh rằng;

a) I là trung điểm của đoạn thẳng AM.
b) CI = 3DI.

Bài toán 45:

Cho điểm M và N là trung điểm của các cạnh AB và BC trên hình vuông ABCD. Đoạn thẳng CM và DN cắt nhau tại P. Chứng minh rằng đoạn AP có độ dài bằng cạnh hình vuông.

Bài toán 46:

Trên cạnh của một tam giác ABC dựng những tam giác đều BCA', ACB', ABC' sao cho A', B', C, C' nằm về một phía đối với đường thẳng AB. Chứng minh rằng nếu điểm M là trọng tâm của tam giác ABC' thì tam giác A'MB' là cân và góc ở đỉnh M bằng $\frac{2\pi}{3}$.

Bài toán 47:

Cho tứ giác ABCD, AD = BC, M và N là trung điểm của AB và CD. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của BC và AD với đường thẳng MN.

Chứng minh: $AEM = BFM$.

Bài toán 48:

Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Dựng các tam giác đều ABE, BCF thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ AC, gọi M, N là trung điểm của AF, CE. Chứng minh tam giác BMN là tam giác đều.

Bài toán 49:

Trên các cạnh của một tam giác bất kỳ ABC về phía ngoài dựng những tam giác đều ABC', BCA' và CAB'. Chứng minh rằng trọng tâm C_1, B_1 và A_1 của những tam giác mới dựng là đỉnh của một tam giác đều.

Bài toán 50: (IMO 1977)

Cho hình vuông ABCD. Dựng về phía trong hình vuông các tam giác đều ABK, BCL, CDM và DAN. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng KL, LM, MN, NK, BK, BL, CL, DM, DN và NA là đỉnh của một thập nhị giác đều.

3.6. Bài toán liên quan đến các phép biến hình trong mặt phẳng

Bài toán 51:

Cho ABCD, BNMK là hai hình vuông không giao nhau, E là trung điểm của AN. Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ B xuống đường thẳng CK. Chứng minh rằng các điểm E, F, B thẳng hàng.

Bài toán 52:(IMO 17, 1975)

Về phía ngoài của tam giác ABC, lần lượt dựng các tam giác ABR, BCP, CAQ sao cho $PBC = CAQ = 45^0$, $BCP = QCA = 30^0$, $ABR = RAB = 15^0$.

Chứng minh rằng: $QRP = 90^0$ và RQ = RP.

Bài toán 53: (IMO 1986)

Trong mặt phẳng cho tam giác $A_1A_2A_3$ và điểm P_0. Với mỗi $s \geq 4$ ta đặt $A_s = A_{s-3}$. Dựng dãy điểm P_0, P_1, …sao cho điểm P_{k+1} là ảnh của P_k với phép quay tâm A_{k+1} (k=0,1,2,…) một góc 120^0 theo chiều kim đồng hồ. Chứng minh rằng nếu $P_{1986} = P_0$ thì tam giác $A_1A_2A_3$ là tam giác đều.

KẾT LUẬN

Mỗi phương pháp giải bài tập chỉ thật sự mạnh với một lớp bài toán nào đó. Lớp bài toán đã xét trong luận văn chứng minh bằng cách khác có thể dễ hơn hoặc khó hơn cách chứng minh ở đây. Trong chứng minh bằng phương pháp thể hiện qua ngôn ngữ số phức ta phải luôn chọn một hệ tọa độ cho thuận tiện tính toán và nhiều khi trong chứng minh cũng dùng cách phân tích mà ta thường dùng, đã học.

Trong quá trình vận dụng, chúng tôi đã kết hợp với phương pháp tọa độ và phương pháp vectơ. Chính điều kết hợp này đã giúp cho việc chứng minh các bài toán hình học phẳng được thuận lợi hơn.

Luận văn: ***" Khảo sát một số bài toán hình học phẳng bằng ngôn ngữ số phức"*** đã thu được các kết quả sau:

1) Nghiên cứu vận dụng các kiến thức về số phức vào việc giải một số lớp bài toán trong hình học phẳng, chủ yếu tập trung vào các dạng sau:

a) Bài toán chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức hình học.
b) Bài toán quỹ tích, bài toán dựng hình.
c) Bài toán chứng minh tính vuông góc, tính thẳng hàng, tính song song,
tính đồng quy.
d) Bài toán liên quan đến các phép biến hình trong mặt phẳng.

Qua việc vận dụng số phức để giải lớp các bài toán hình học phẳng, một số bài toán được chứng minh đơn giản và ngắn gọn hơn các phương pháp khác đã có trước đó.

2) Luận văn còn có ý nghĩa thực tiễn là có thể làm tài liệu tham khảo cho giáo viên, học sinh khi dạy học số phức và hình học phẳng.

Chúng tôi hy vọng rằng các kết quả bước đầu về phương pháp giải các bài toán hình học phẳng qua ngôn ngữ số phức được trình bày trong luận văn này sẽ còn tiếp tục được mở rộng hơn nữa để có thể giải được nhiều lớp bài toán khác nhau trong hình học phẳng.

Mặc dù đã hết sức cố gắng và nghiêm túc trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học nhưng do thời gian và khả năng còn hạn chế nên tác giả rất mong nhận được ý kiến đóng góp của quý thầy giáo, cô giáo và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.