

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Nguyễn Quốc Cường

**KHÔI PHỤC MỘT LỚP HÀM NGUYÊN
VÀ ÁP DỤNG VÀO PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thành phố Hồ Chí Minh – 2011

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Nguyễn Quốc Cường

KHÔI PHỤC MỘT LỚP HÀM NGUYÊN
VÀ ỨNG DỤNG VÀO PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS. ĐẶNG ĐỨC TRỌNG

Thành phố Hồ Chí Minh - 2011

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin đặc biệt bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đến Thầy của tôi, PGS. TS. Đặng Đức Trọng về tất cả những sự hướng dẫn, góp ý, chỉ dạy, giúp đỡ, động viên, khích lệ rất nhiệt tình và tận tâm của Thầy trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành Luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn đến toàn thể Quý Thầy Cô trong Tổ Toán Giải tích của Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh đã giảng dạy tận tình, luôn khích lệ tôi trên con đường học tập và nghiên cứu Toán học.

Tôi xin chân thành cảm ơn Quý Thầy Cô phản biện đã đọc và góp ý để tôi hoàn chỉnh Luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các Thầy Cô trong Hội đồng chấm Luận văn đã đọc và cho tôi nhiều ý kiến quý báu để tôi thấy được những thiếu sót của mình.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và chân thành tới các thầy giáo, cô giáo trong Khoa Toán - Tin và Phòng Sau đại học Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh đã tận tình giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cho tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành Luận văn.

Tôi gửi lời cảm ơn chân thành tới các bạn bè, đồng nghiệp đã hỗ trợ, động viên và tạo điều kiện cho tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành Luận văn.

Tôi đặc biệt bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến gia đình tôi, đã luôn ở bên tôi, giúp đỡ, động viên, tạo điều kiện thuận lợi để tôi vượt qua mọi khó khăn trong quá trình học tập và hoàn thành Luận văn này.

Nguyễn Quốc Cường

MỤC LỤC

PHẦN MỞ ĐẦU

Việc khảo sát bài toán khôi phục hàm nguyên bất nguồn từ thực tế, trong các lĩnh vực điều khiển học, vật lý, kinh tế, y khoa, thăm dò, nhận dạng,... đặc biệt là các bài toán không chỉnh. Đây là lĩnh vực toán học hết sức thực tiễn, sâu rộng, được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu và đạt được nhiều thành tựu rất quan trọng. Trong quá trình giải bài toán khôi phục, các kết quả thu được đã có nhiều ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như phương trình đạo hàm riêng, xử lý tín hiệu, lý thuyết hệ thống, nhận dạng trong tình huống xấu nhất,...

Trong Luận văn này, chúng tôi trình bày bài toán khôi phục một lớp hàm nguyên từ các giá trị của chúng trên một tập hợp các điểm nguyên. Các kết quả này được áp dụng để kiểm tra hai bài toán liên quan đến phương trình truyền nhiệt: bài toán đầu tiên là việc giải một phương trình truyền nhiệt mà không có điều kiện đầu hoặc điều kiện cuối và bài toán thứ hai là việc xác định nguồn nhiệt của một bài toán nhiệt ngược thời gian. Cụ thể như sau:

Cho $\sigma > 0$, chúng tôi ký hiệu L^2_σ là không gian các hàm nguyên $f \in L^2(\mathbb{C})$ thỏa mãn

$$|f(z)| = \text{const} \cdot e^{\sigma|z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Do định lý Paley-Wiener (xem Rudin [18, Chương 19]), mỗi hàm $f \in L^2_\sigma$ có thể được biểu diễn như là biến đổi Fourier của một hàm $g \in L^2(-\sigma, \sigma)$, nghĩa là

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} g(t) e^{itz} dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Chúng tôi quan tâm đến một bài toán khôi phục một hàm trong L^2_σ từ các giá trị của nó trên một tập con đã biết của $\mathbb{C}$, vấn đề này đã được biết khi xem xét một số phương trình đạo hàm riêng.

Trước tiên, chúng ta hãy xem xét phương trình nhiệt

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q := (0, 1) \times (0, T), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = u(1, t) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $u \in C^1([0, T]; L^1(0, 1)) \cap L^2((0, T); H^2(0, 1))$ đã biết. Ở đây, chúng ta nhớ lại rằng,

$C^1([0, T]; L^1(0, 1))$ là không gian tất cả các hàm liên tục $f: [0, T] \rightarrow L^1(0, 1)$ có $f': [0, T] \rightarrow L^1(0, 1)$ liên tục và $L^2((0, T); H^2(0, 1))$ là không gian tất cả các hàm $f: (0, T) \rightarrow H^2(0, 1)$ thỏa mãn

$$\int_0^T \|f(t)\|_{H^2(0,1)}^2 dt < \infty.$$

Đây là một loại bài toán gọi là “*bài toán không có điều kiện đầu*”.

Năm 1935, Tikhonov [25] đã chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình truyền nhiệt thuần nhất

$$u_t - \Delta u = 0, \quad -\infty < t < \infty.$$

Năm 1990, Safarov [19] đã giải quyết bài toán thuần nhất này cho miền không bị chặn $x > 0$ và cho $0 < x < l$. Sau đó, phương trình truyền nhiệt không thuần nhất mà không có điều kiện đầu đã được xem xét bởi nhiều tác giả như Shmulev [23], Kirilich [13] và Guseinov [12]. Các tác giả này kiểm tra bài toán trong điều kiện $-\infty < t < \infty$ hoặc $-\infty < t < T$ và họ đòi hỏi một số giả thiết về điều kiện nhiệt độ tại $-\infty$ hoặc điều kiện tuần hoàn để bài toán giải được.

Trong Luận văn này, chúng tôi sẽ trình bày bài toán không thuần nhất trên một thời gian hữu hạn $0 < t < T$, việc làm này là hợp lý hơn cho các ứng dụng thực tế. Việc thiếu điều kiện đầu $u(., 0)$ được bù đắp bằng cách thêm điều kiện biên $u(1, .)$. Chúng tôi muốn chứng minh rằng bài toán (1) có nhiều nhất một nghiệm và giải nó bằng số.

Với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$, nhân vào hai vế của phương trình đầu tiên của (1) với $v(x) = \cos(\alpha x)$ và sử dụng tích phân từng phần, ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_t(x, t) \cos(\alpha x) dx - \int_0^1 u_{xx}(x, t) \cos(\alpha x) dx &= \int_0^1 f(x, t) \cos(\alpha x) dx, \\ \frac{d}{dt} \int_0^1 u(x, t) \cos(\alpha x) dx - \left[u_x(x, t) \cos(\alpha x) + \alpha u(x, t) \sin(\alpha x) \right] \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &+ \alpha^2 \int_0^1 u(x, t) \cos(\alpha x) dx = \int_0^1 f(x, t) \cos(\alpha x) dx, \\ \frac{d}{dt} F(u(., t))(\alpha) - \left[u_x(1, t) \cos \alpha + \alpha u(1, t) \sin \alpha - u_x(0, t) \cos 0 - \alpha u(0, t) \sin 0 \right] \\ &+ \alpha^2 F(u(., t))(\alpha) = F(f(., t))(\alpha). \end{aligned}$$

Do $u_x(0, t) = u_x(1, t) = u(1, t) = 0$ nên

$$\frac{d}{dt} F(u(., t))(\alpha) + \alpha^2 F(u(., t))(\alpha) = F(f(., t))(\alpha).$$

trong đó F là viết tắt của biến đổi Fourier Cosin trong $L^2(0, 1)$, nghĩa là

$$F(w)(z) := \int_0^1 w(x) \cos(zx) dx, \quad w \in L^2(0, 1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Từ phương trình $\frac{d}{dt}F(u(.,t))(\alpha) + \alpha^2 F(u(.,t))(\alpha) = F(f(.,t))(\alpha)$, ta suy ra

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha^2 t}F(u(.,t))(\alpha)\right) &= e^{\alpha^2 t}F(f(.,t))(\alpha), \\ \int_0^T \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha^2 t}F(u(.,t))(\alpha)\right)dt &= \int_0^T e^{\alpha^2 t}F(f(.,t))(\alpha)dt, \\ e^{\alpha^2 t}F(u(.,t))(\alpha)\Big|_{t=0}^{t=T} &= \int_0^T e^{\alpha^2 t}F(f(.,t))(\alpha)dt, \\ e^{\alpha^2 T}F(u(.,T))(\alpha) - F(u(.,0))(\alpha) &= \int_0^T e^{\alpha^2 t}F(f(.,t))(\alpha)dt.\end{aligned}$$

Do đó

$$F(u(.,T))(\alpha) = e^{-\alpha^2 T}F(u(.,0))(\alpha) + \int_0^T e^{\alpha^2(t-T)}F(f(.,t))(\alpha)dt. \quad (2)$$

Khó khăn của việc tìm $u(.,T)$ là bởi vì điều kiện đầu $u(.,0)$ không có sẵn. Tuy nhiên, từ (2), chúng tôi có một quan sát rất quan trọng rằng, khi $|\alpha| \rightarrow +\infty$ thì $e^{-\alpha^2 T} \rightarrow 0$ rất nhanh và thật là hợp lý để sử dụng xấp xỉ

$$F(u(.,T))(\alpha) \approx \int_0^T e^{\alpha^2(t-T)}F(f(.,t))(\alpha)dt. \quad (3)$$

Công thức (3) đưa ra một xấp xỉ tốt cho $F(u(.,T))(\alpha)$, nếu $|\alpha|$ đủ lớn. Bây giờ, mấu chốt của vấn đề là để khôi phục $F(u(.,T))(\alpha)$ cho $|\alpha|$ rất nhỏ. Vì vậy, chúng tôi gặp một bài toán khôi phục một hàm trong L_1^2 từ các giá trị của nó trên một tập hợp $(-\infty, -r] \cup [r, \infty)$, trong đó $r > 0$ là một số lớn.

Bây giờ, chúng ta hãy xem xét một bài toán truyền nhiệt khác gọi là “*bài toán nguồn nhiệt ngược thời gian*”. Đây là bài toán tìm một cặp hàm (u, f) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \varphi(t)f(x), & (x, t) \in Q = (0, 1) \times (0, T), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, T) = g(x), \end{cases} \quad (4)$$

trong đó $\varphi \in L^1(0, T)$ và $g \in L^2(0, 1)$ được cho trước.

Bài toán nguồn nhiệt ngược thời gian này là “*bài toán không chỉnh*”, nghĩa là nghiệm có thể không tồn tại và thậm chí nếu nó tồn tại thì nó có thể không phụ thuộc vào cách liên tục trên dữ liệu. Vì vậy, một cách xử lý số thông thường là không thể và một sự chỉnh hóa là cần thiết.

Bài toán tìm nguồn nhiệt dưới dạng $\varphi(t) f(x)$, trong đó một trong hai hàm φ và f không được biết, đã được kiểm tra trong một thời gian dài. Tính duy nhất và sự ổn định được xem xét bởi nhiều tác giả như Cannon-Esteva [5, 6], Yamamoto [31, 32], Yamamoto-Zou [33], Saitoh-Tuan-Yamamoto [20, 21] và Choulli-Yamamoto [7]. Tuy nhiên, sự chỉnh hóa bài toán đối với trường hợp không ổn định vẫn còn khó khăn. Sự chỉnh hóa bài toán cho trường hợp $f \equiv 1$ đã được kiểm tra bởi Wang-Zheng [29] và Shidfar-Zakeri-Neisi [22], trong khi trường hợp $\varphi \equiv 1$ được xem xét bởi Cannon [4], Wang-Zheng [30] và Farcas-Lesnic [11]. Gần đây, Trong-Long-Đinh [27] và Trong-Quan-Đinh [28] đã xem xét sự chỉnh hóa bài toán trong đó φ được cho trước và f là không được biết. Tuy nhiên, trong hai bài báo này, cả hai điều kiện đầu $u(., 0)$ và điều kiện cuối $u(., T)$ là bắt buộc. Yêu cầu này là ngặt và không tự nhiên. Trong Luận văn này, chúng tôi trình bày bài toán tương tự như trong [27], nhưng yêu cầu của nhiệt độ ban đầu được loại bỏ hoàn toàn.

Lưu ý rằng, nếu f đã được biết thì chúng ta có được một bài toán truyền nhiệt ngược thông thường. Vì vậy, chúng tôi sẽ chỉ tập trung vào việc tìm f .

Với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$, nhân vào hai vế của phương trình đầu tiên của (4) với $v(x) = \cos(\alpha x)$ và sử dụng tích phân từng phần, ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_t(x, t) \cos(\alpha x) dx - \int_0^1 u_{xx}(x, t) \cos(\alpha x) dx &= \int_0^1 \varphi(t) f(x) \cos(\alpha x) dx, \\ \frac{d}{dt} \int_0^1 u(x, t) \cos(\alpha x) dx - \left[u_x(x, t) \cos(\alpha x) + \alpha u(x, t) \sin(\alpha x) \right] \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &+ \alpha^2 \int_0^1 u(x, t) \cos(\alpha x) dx = \varphi(t) \int_0^1 f(x) \cos(\alpha x) dx, \\ \frac{d}{dt} F(u(., t))(\alpha) - \left[u_x(1, t) \cos \alpha + \alpha u(1, t) \sin \alpha - u_x(0, t) \cos 0 - \alpha u(0, t) \sin 0 \right] \\ &+ \alpha^2 F(u(., t))(\alpha) = F(f(., t))(\alpha). \end{aligned}$$

Do $u_x(0, t) = u_x(1, t) = u(1, t) = 0$ nên

$$\frac{d}{dt} F(u(., t))(\alpha) + \alpha^2 F(u(., t))(\alpha) = \varphi(t) F(f)(\alpha).$$

Từ phương trình trên, ta suy ra

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{\alpha^2 t} F(u(., t))(\alpha) \right) &= e^{\alpha^2 t} \varphi(t) F(f)(\alpha), \\ \int_0^T \frac{d}{dt} \left(e^{\alpha^2 t} F(u(., t))(\alpha) \right) dt &= \int_0^T e^{\alpha^2 t} \varphi(t) F(f)(\alpha) dt, \end{aligned}$$

$$e^{\alpha^2 t} F(u(.,t))(\alpha) \Big|_{t=0}^{t=T} = F(f)(\alpha) \int_0^T e^{\alpha^2 t} \varphi(t) dt,$$

$$e^{\alpha^2 T} F(u(.,T))(\alpha) - F(u(.,0))(\alpha) = F(f)(\alpha) \int_0^T e^{\alpha^2 t} \varphi(t) dt.$$

Do $u(x,T) = g(x)$ nên

$$F(g)(\alpha) - e^{-\alpha^2 T} F(u(.,0))(\alpha) = F(f)(\alpha) \int_0^T e^{\alpha^2(t-T)} \varphi(t) dt.$$

Vì vậy

$$F(g)(\alpha) - e^{-\alpha^2 T} F(u(.,0))(\alpha) = D(\varphi)(\alpha) F(f)(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

trong đó

$$D(\varphi)(\alpha) = \int_0^T e^{\alpha^2(t-T)} \varphi(t) dt.$$

Nếu $e^{-\alpha^2 T} |D(\varphi)(\alpha)| \rightarrow 0$ “đủ nhanh” khi $|\alpha| \rightarrow +\infty$ thì chúng ta có xấp xỉ

$$F(f)(\alpha) = \frac{F(g)(\alpha)}{D(\varphi)(\alpha)} - e^{-\alpha^2 T} \frac{F(u(.,0))(\alpha)}{D(\varphi)(\alpha)} \approx \frac{F(g)(\alpha)}{D(\varphi)(\alpha)}. \quad (6)$$

Vì vậy, chúng tôi gặp lại bài toán khôi phục một hàm trong L_1^2 , nghĩa là $F(f)$, từ giá trị của nó trên một tập hợp $(-\infty, -r] \cup [r, \infty)$, trong đó $r > 0$ là một số lớn.

Tóm lại, hai bài toán truyền nhiệt gợi ra cho chúng ta một “*bài toán công cụ*” của việc khôi phục những hàm trong L_σ^2 . Phần còn lại của Luận văn này được trình bày thành 4 Chương. Trong Chương 1, chúng tôi giới thiệu và trình bày một số kiến thức cơ bản, các ký hiệu, các không gian hàm được sử dụng trong Luận văn. Trong Chương 2, chúng tôi giới thiệu và trình bày sơ lược về hàm giải tích, hàm nguyên và các tính chất quan trọng của chúng được sử dụng trong Luận văn. Trong Chương 3, chúng tôi trình bày một số kết quả về “*bài toán công cụ*” của việc khôi phục những hàm trong L_σ^2 . Trong Chương 4, chúng tôi trở lại những bài toán truyền nhiệt và áp dụng các kết quả trong Chương 3 để giải quyết chúng. Một thực nghiệm bằng số cũng được trình bày trong Chương 4 để làm sáng tỏ hiệu quả phương pháp.

Chương 1: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Không gian định chuẩn và không gian Banach

Định nghĩa 1.1.1. (xem [15, tr. 3-4]) Cho K là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$. Tập hợp X khác rỗng cùng với hai ánh xạ (gọi là phép cộng và phép nhân vô hướng)

$$\begin{aligned} + : X \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto x + y \\ \cdot : K \times X &\rightarrow X \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

được gọi là một *không gian tuyến tính* (hoặc *không gian vector*) trên K nếu các tính chất sau thỏa mãn:

- (a) X cùng với phép cộng là một *nhóm Abel*, tức là:
 - (i) $x + y = y + x$ với mọi $x, y \in X$,
 - (ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ với mọi $x, y, z \in X$,
 - (iii) Tồn tại một phần tử 0 của X sao cho $0 + x = x + 0 = x$ với mọi $x \in X$,
 - (iv) Với mỗi phần tử x của X , tồn tại một phần tử $-x$ của X sao cho $x + (-x) = 0$.
- (b) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ với mọi $\lambda \in K$, và với mọi $x, y \in X$,
- (c) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ với mọi $\lambda, \mu \in K$, và với mọi $x \in X$,
- (d) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ với mọi $\lambda, \mu \in K$, và với mọi $x \in X$,
- (e) $1x = x$ với mọi $x \in X$.

Nếu $K = \mathbb{R}$ thì X được gọi là một *không gian tuyến tính thực*.

Nếu $K = \mathbb{C}$ thì X được gọi là một *không gian tuyến tính phức*.

Định nghĩa 1.1.2. (xem [16, tr. 8]) Cho $(X, +, \cdot)$ là một không gian vector trên $\mathbb{R}$. Một ánh xạ

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

được gọi là một *chuẩn* trên X nếu các tính chất sau thỏa với mọi $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R}$,

- (i) $\|x\| \geq 0$ và $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Không gian vector $(X, +, \cdot)$ với chuẩn $\|\cdot\|$ được gọi là *không gian định chuẩn* $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$, hay vắn tắt là $(X, \|\cdot\|)$, hay vắn tắt hơn là X , khi các phép toán, hàm chuẩn được ngầm hiểu và không thể nhầm lẫn.

Định nghĩa 1.1.3. (xem [16, tr. 10]) Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn và f là một ánh xạ từ tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}$ vào X . Đặt $x_n = f(n)$ với mọi n trong $\mathbb{N}$. Ta gọi $\{x_n\}$ là một dãy trong X .

Cho $\{x_n\}$ là một dãy các phần tử của một không gian định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$. Ta nói

(i) $\{x_n\}$ là dãy hội tụ (trong X) nếu tồn tại $x \in X$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, nghĩa là ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\|x_n - x\| < \varepsilon$, với mọi $n \geq n_0$. Khi đó, phần tử x , nếu có, thì duy nhất và được gọi là *giới hạn* của dãy $\{x_n\}$, ký hiệu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Ta cũng nói $x_n \rightarrow x$ khi $n \rightarrow \infty$.

(ii) $\{x_n\}$ là dãy *Cauchy* (trong X) nếu ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, với mọi $m, n \geq n_0$.

(iii) $\{x_n\}$ là dãy *bị chặn* (trong X) nếu ảnh của nó,

$$\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$$

là một tập con bị chặn của X .

Chú ý rằng, mọi dãy hội tụ đều là dãy Cauchy và mọi dãy Cauchy đều bị chặn. Chiều ngược lại không đúng cho trường hợp tổng quát.

Định nghĩa 1.1.4. (xem [9, tr. 10]) Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn và f là một ánh xạ từ tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}$ vào X và g là một ánh xạ đồng biến nghiêm cách từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$. Đặt $x_n = f(n)$ và $y_k = f \circ g(k)$ với mọi n và k trong $\mathbb{N}$. Ta gọi $\{y_k\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$ và được ký hiệu là $\{x_{n_k}\}$.

Định nghĩa 1.1.5. (xem [16, tr. 10-11]) Cho không gian định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$. Ta nói

(i) $(X, \|\cdot\|)$ là *đầy đủ* khi mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ.

(ii) $(X, \|\cdot\|)$ là *compact* khi mọi dãy trong X đều có một dãy con hội tụ (trong X).

Định nghĩa 1.1.6. (xem [16, tr. 52-53]) Với hai không gian định chuẩn $(X_1, +, \cdot, \|\cdot\|_1)$;

$(X_2, +, \cdot, \|\cdot\|_2)$, xét $X = X_1 \times X_2$. Ta có X trở thành một không gian vector với các phép toán trên X sinh bởi các phép toán trên X_1 và X_2 ,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2),$$

với mọi $x_1, y_1 \in X_1; x_2, y_2 \in X_2$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, hàm $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\|x\| = \sqrt{\|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2}, \text{ với } x = (x_1, x_2) \in X, \text{ trở thành một chuẩn trên } X.$$

Không gian định chuẩn X nhận được gọi là *không gian định chuẩn tích* của các không gian định chuẩn X_1 và X_2 .

Tương tự với n không gian định chuẩn $(X_i, +, \cdot, \|\cdot\|_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, tập $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$

với các phép toán cũng như hàm chuẩn sau

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{\|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2 + \dots + \|x_n\|_n^2},$$

được gọi là *không gian định chuẩn tích* của các không gian định chuẩn $(X_i, +, \cdot, \|\cdot\|_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Định nghĩa 1.1.7. (xem [9, tr. 10]) Ta nói một không gian định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$ là một *không gian Banach* nếu và chỉ nếu mọi dãy Cauchy của nó đều hội tụ.

1.2. Không gian Hilbert

(xem [16, tr. 155-156])

Định nghĩa 1.2.1. Cho H là một không gian vector trên $\mathbb{R}$. Một ánh xạ

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

được gọi là một *tích vô hướng* trên H nếu các tính chất sau thỏa,

$$(i) \langle \alpha x + \beta x', y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x', y \rangle, \text{ với mọi } \alpha, \beta \in \mathbb{R}; x, x', y \in H,$$

$$(ii) \langle x, \alpha y + \beta y' \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, y' \rangle, \text{ với mọi } \alpha, \beta \in \mathbb{R}; x, y, y' \in H,$$

$$(iii) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \text{ với mọi } x, y \in H, \text{ và}$$

$$(iv) \langle x, x \rangle \geq 0, \text{ với mọi } x \in H \text{ và } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Như vậy, một tích vô hướng trên H là một phiếm hàm song tuyến tính, đối xứng, xác định dương.

Từ tích vô hướng nêu trên, với $x \in H$, đặt

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Từ định nghĩa, với $x, y \in H$, ta có

$$0 \leq \langle x + ty, x + ty \rangle = |x|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2|y|^2$$

đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta suy ra

Bất đẳng thức Schwarz. Với mọi $x, y \in H$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

nên ta được

Bất đẳng thức tam giác. Với mọi $x, y \in H$,

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Hơn nữa, do

$$\left| \frac{x+y}{2} \right|^2 + \left| \frac{x-y}{2} \right|^2 = \left\langle \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2),$$

ta được

Bất đẳng thức hình bình hành. Với mọi $x, y \in H$,

$$\left| \frac{x+y}{2} \right|^2 + \left| \frac{x-y}{2} \right|^2 = \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2).$$

Đặc biệt, $|\cdot|$ là một chuẩn trên H và do đó H trở thành một không gian định chuẩn.

Định nghĩa 1.2.2. Khi không gian định chuẩn $(H, |\cdot|)$ đầy đủ, ta nói $(H, |\cdot|)$ là *không gian Hilbert*.

1.3. Không gian

L^p (xem [1, tr. 1-5]; xem [3, Chương 4]; xem [18, Chương 3])

1.3.1. Các định lý quan trọng của lý thuyết tích phân

Định lý 1.3.1.1. (Định lý hội tụ đơn điệu của Beppo Levi) Cho $\{f_n\}$ là dãy tăng các hàm khả tích (Lesbesgue) trên tập $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sao cho $\sup_n \int_{\Omega} f_n < \infty$. Khi đó, f_n hội tụ h.k.n trên Ω về một hàm f khả tích trên Ω và

$$\|f_n - f\|_1 \equiv \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Định lý 1.3.1.2. (Định lý hội tụ bị chặn của Lesbesgue) Cho $\{f_n\}$ là một dãy các hàm (thực hoặc phức) khả tích trên Ω . Giả sử

(i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ h.k.n trên Ω .

(ii) Tồn tại hàm g khả tích sao cho với mỗi n , $|f_n(x)| \rightarrow g(x)$ h.k.n trên Ω .

Khi đó f khả tích và

$$\|f_n - f\|_1 \equiv \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Hệ quả 1.3.1.3. Cho f là hàm đo được và g là hàm khả tích trên Ω . Ta có, nếu $|f_n(x)| \rightarrow g(x)$ h.k.n. trên Ω thì f khả tích trên Ω . Suy ra rằng, nếu $|f|$ khả tích thì f khả tích (đương nhiên chiều ngược lại cũng đúng).

Bổ đề 1.3.1.4. (Bổ đề Fatou) Giả sử $\{f_n\}$ là một dãy các hàm khả tích sao cho

(i) $f_n \geq 0$ h.k.n trên Ω , $\forall n$.

(ii) $\sup \int_{\Omega} f_n < \infty$.

Với mỗi $x \in \Omega$, ta đặt $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Khi đó, f khả tích trên Ω và

$$\int_{\Omega} f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n.$$

Giả sử $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^1$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ là hai tập mở và $F: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{C}$) là hàm đo được.

Định lý 1.3.1.5. (Tonelli) Giả sử

$$\int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty \text{ h.k.n. trên } \Omega_1$$

và

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty$$

Khi đó, F khả tích trên $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Định lý 1.3.1.6. (Fubini) Cho F khả tích trên $\Omega_1 \times \Omega_2$. Khi đó, với hầu hết x thuộc Ω_1

$$F(x, \cdot) \equiv y \text{ a } F(x, y) \text{ khả tích trên } \Omega_2$$

và

$$x \text{ a } \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \text{ khả tích trên } \Omega_1$$

Kết luận tương tự khi đổi vai trò x cho y , Ω_1 cho Ω_2 .

Hơn nữa, ta có

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy$$

1.3.2. Không gian

$$L^p, 1 \leq p \leq \infty$$

Định nghĩa 1.3.2.1. Cho $p \in \mathbb{I}$ với $1 \leq p < \infty$, ta định nghĩa

$$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{I} \text{ (hoặc } \mathbb{E} \text{); } f \text{ đo được và } |f|^p \text{ khả tích} \},$$

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{I} \text{ (hoặc } \mathbb{E} \text{); } f \text{ đo được và } \exists C, |f(x)| \leq C \text{ h.k.n} \},$$

và ký hiệu

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_\infty = \inf \{ C; |f(x)| \leq C \text{ h.k.n} \}.$$

Nhận xét 1.3.2.2. Nếu $f \in L^p(\Omega)$ thì $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ h.k.n $x \in \Omega$.

Thật vậy, có dãy $\{C_n\}$ hội tụ về $\|f\|_\infty$ sao cho $\forall n, |f(x)| \leq C_n$ h.k.n. trên Ω . Vì vậy, với mỗi n , $|f(x)| \leq C_n, \forall x \in \Omega \setminus E_n$, trong đó E_n là tập không đáng kể (có độ đo 0). Đặt $E = \bigcup_n E_n$ thì E là tập không đáng kể và với mỗi n , $|f(x)| \leq C_n, \forall x \in \Omega \setminus E$, suy ra $|f(x)| \leq C, \forall x \in \Omega \setminus E$.

Ta ký hiệu p' là số liên hợp của $p, 1 \leq p \leq \infty$, nghĩa là $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Định lý 1.3.2.3. (Bất đẳng thức Holder) Cho $f \in L^p$ và $g \in L^{p'}$ với $1 \leq p \leq \infty$. Khi đó $f \cdot g \in L^1$ và

$$\int |f \cdot g| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}.$$

Dựa vào bất đẳng thức Holder, người ta chứng minh được:

Định lý 1.3.2.4. L^p là một không gian vector và $\|\cdot\|_p$ là một chuẩn với $1 \leq p \leq \infty$.

Định lý 1.3.2.5. (Fischer-Riesz)

(i) L^p là không gian Banach với $1 \leq p \leq \infty$.

(ii) Giả sử $\{f_n\}$ là một dãy hội tụ về f trong không gian L^p ($1 \leq p \leq \infty$), nghĩa là,

$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Thế thì có dãy con $\{f_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ sao cho

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \text{ h.k.n}$$

$$\forall k, |f_{n_k}(x)| \leq h(x) \text{ h.k.n}$$

với h là một hàm trong L^p .

Với Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, ta ký hiệu $C^k(\Omega)$ là không gian các hàm số khả vi liên tục đến cấp k và $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$. Còn $C_c(\Omega)$ là không gian các hàm số f liên tục trên Ω sao cho giá (support) của f , tức là tập hợp

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

là compact chứa trong Ω , ký hiệu gạch ngang ở trên là bao đóng của tập hợp. Đặt

$$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

$$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

$L_{loc}^p(\Omega)$ là tập các hàm đo được trên Ω , khả tích trên mỗi tập compact $K \subset \Omega$.

Ta có kết quả sau đây về tính trù mật:

Định lý 1.3.2.6. Với $1 \leq p < \infty$ (lưu ý rằng $p \neq \infty$), thì $C_c^\infty(\Omega)$ trù mật trong $L^p(\Omega)$.

Định lý 1.3.2.7. (Riemann-Lesbesgue) Cho $f \in L^1(a; b)$, với $(a; b)$ là khoảng hữu hạn hoặc vô hạn của $\mathbb{R}$, thì ta có

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos Nx dx = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin Nx dx = 0$$

khi $N \rightarrow \infty$.

1.3.3. Tích chập

Định nghĩa 1.3.3.1. Cho hai hàm số f và g xác định trên $\mathbb{R}^n$ thì hàm số $f * g$ định bởi

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy,$$

với giả thiết là tích phân ở trên tồn tại, được gọi là tích chập của f và g .

Định lý 1.3.3.2. Giả sử $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ và $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ với $1 \leq p \leq \infty$. Khi đó, với mỗi $x \in \mathbb{R}^N$, hàm số $y \mapsto f(x-y)g(y)$ khả tích trên $\mathbb{R}^N$ và $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Hơn nữa,

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

1.4. Không gian Sobolev

(xem [3, Chương 8])

1.4.1. Không gian Sobolev $W^{1,p}$ và các tính chất cơ bản

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là một tập mở và $1 \leq p \leq \infty$.

Định nghĩa 1.4.1.1. Hàm $g \in L_{loc}(\Omega)$ được gọi là đạo hàm riêng suy rộng theo biến x_i của hàm $f \in L_{loc}(\Omega)$, ký hiệu $g = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ hay $g = D_i f$, nếu

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Nếu f có $D_i f$, $i = \overline{1, N}$, ta ký hiệu $\nabla f = (D_1 f, D_2 f, \dots, D_N f)$.

Định nghĩa 1.4.1.2. Với $1 \leq p \leq \infty$, ta ký hiệu $W^{1,p}(\Omega)$ là tập hợp các hàm $f \in L^p(\Omega)$ có mọi đạo hàm riêng suy rộng $D_i f \in L^p(\Omega)$, $i = \overline{1, N}$.

Trong $W^{1,p}(\Omega)$ ta xét chuẩn

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \|D_i f\|_{L^p}$$

hoặc chuẩn tương đương

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \left(\|f\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \|D_i f\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ khi } 1 \leq p < \infty.$$

Định nghĩa 1.4.1.3. Không gian $W^{1,2}(\Omega)$ được ký hiệu là $H^1(\Omega)$ và được trang bị tích vô hướng

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g dx + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N D_i f D_i g \right) dx$$

và chuẩn tương ứng

$$\|f\|_{H^1} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N |D_i f|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Định nghĩa 1.4.1.4. $W_0^{1,p}(\Omega)$ là bao đóng của $C_c^1(\Omega)$ trong $W^{1,p}(\Omega)$.

Ta ký hiệu $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Định lý 1.4.1.5. Không gian $W^{1,p}$ là không gian Banach với $1 \leq p \leq \infty$, khả li với $1 \leq p < \infty$, phản xạ với $1 < p < \infty$.

Định lý 1.4.1.6. (Đạo hàm của một tích)

Cho $f, g \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Khi đó $fg \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ và

$$D_i(fg) = (D_i f)g + f(D_i g).$$

Định lý 1.4.1.7. (Đạo hàm của hàm hợp) Cho $G \in C^1(\mathbb{R})$ thỏa $G(0) = 0$,

$$G'(t) \leq M, \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{và} \quad f \in W^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

Khi đó $G \circ f \in W^{1,p}(\Omega)$ và $D_i(G \circ f) = G'(f)D_i f$.

1.4.2. Không gian Sobolev $W^{m,p}$

Định nghĩa 1.4.2.1. Cho một số nguyên $m \geq 2$ và một số thực $1 \leq p \leq \infty$, ta định nghĩa bằng quy nạp

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in W^{m-1,p}(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \forall i = \overline{1, N} \right\}$$

hay ta cũng có thể định nghĩa một cách tương đương

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ sao cho} \right. \\ \left. \int_{\Omega} f D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}$$

Ta ký hiệu $D^\alpha f = g_\alpha$ và $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

Chú ý 1.4.2.2. Một đa chỉ số α là một bộ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ với $\alpha_i \geq 0$ nguyên, ta đặt

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad \text{và} \quad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \varphi.$$

Định lý 1.4.2.3. Không gian $W^{m,p}$ được trang bị bởi chuẩn

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \|f\|_{L^p} + \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p}$$

là một không gian Banach.

Định lý 1.4.2.4. Không gian $H^m(\Omega)$ được trang bị bởi tích vô hướng

$$\langle f, g \rangle_{H^m} = \langle f, g \rangle_{L^2} + \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_{L^2}$$

là một không gian Hilbert.

Ta chứng minh được rằng chuẩn của $W^{m,p}(\Omega)$ là tương đương với chuẩn

$$\|f\|_{L^p} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_{L^p}.$$

1.5. Biến đổi Fourier

(xem [1, tr. 56-68]; xem [8, Chương 6]; xem [10, Chương 4]; xem [18, Chương 9])

1.5.1. Biến đổi Fourier trong $L^1(\mathbb{R})$

Định nghĩa 1.5.1.1. Cho $f \in L^1(\mathbb{R})$, hàm F định bởi

$$F(f) = F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t) dt$$

được gọi là biến đổi Fourier của f .

Định lý 1.5.1.2. Cho $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Khi đó, ta có:

- (i) $F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g)$,
- (ii) $F(f * g) = F(f)F(g)$,
- (iii) $\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x)| \leq \|f\|_{L^1}$,
- (iv) $|F(x) - F(y)| \rightarrow 0$ khi $|x - y| \rightarrow 0$,
- (v) $F(x) \rightarrow 0$ khi $|x| \rightarrow \infty$.

Định lý 1.5.1.3. Với $r > 0$, đặt $f_r(t) = f(rt)$. Ta có

$$F(f_r) = F_r(x) = \frac{1}{r} F\left(\frac{x}{r}\right)$$

Định lý 1.5.1.4. Với $a \in \mathbb{R}$, đặt $f_a(t) = f(t + a)$. Ta có

$$F(f_a) = F_a(x) = e^{-iax} F(x)$$

Định lý 1.5.1.5. Cho $f \in L^1(\mathbb{R})$ thỏa $\text{supp } f \subset [-a, a]$. Ta có F là hàm giải tích trên $\mathbb{R}$.

Định lý 1.5.1.6. Cho dãy $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ hội tụ trong $L^1(\mathbb{R})$. Khi đó, dãy $\{F_n\}_{n=1,2,\dots}$ hội tụ đều trên

Định lý 1.5.1.7. Cho $f \in L^1(\mathbb{R})$ thỏa tính chất $f' \in L^1(\mathbb{R})$ và f liên tục tuyệt đối trên mọi khoảng hữu hạn. Khi đó $F'(x) = -ixF(x)$.

Định lý 1.5.1.8. Nếu f có đạo hàm bậc càng cao trong $L^1(\mathbb{R})$ thì F hội tụ về 0 càng nhanh khi $|x| \rightarrow \infty$, nghĩa là,

$$F(x) = \frac{|F^{(n)}(x)|}{|x|^n}.$$

Định lý 1.5.1.9. Cho $f \in L^1(\mathbb{R})$. Nếu f'' tồn tại và $f'' \in L^1(\mathbb{R})$ thì $F \in L^1(\mathbb{R})$.

Định lý 1.5.1.10. Cho $f \in L^1(\mathbb{R})$ bị chặn, liên tục và $F \in L^1(\mathbb{R})$. Khi đó ta có

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} F(x) dx.$$

1.5.2. Biến đổi Fourier trong $L^2(\mathbb{R})$

Định lý 1.5.2.1. (Plancherel) Với mọi $f \in L^2(\mathbb{R})$, $N > 0$, ta đặt

$$F_N\{f\}(x) = \int_{-N}^N e^{ixt} f(t) dt$$

Khi đó

(i) $F_N\{f\}$ hội tụ trong $L^2(\mathbb{R})$ đến một hàm $F\{f\}$ khi $N \rightarrow \infty$. Hơn nữa

$$\|F\{f\}\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f\|_{L^2}^2$$

(ii) Nếu $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ thì $F\{f\} = F(f)$ h.h trên $\mathbb{R}$.

(iii) Đặt

$$\phi_N(t) = \int_{-N}^N e^{-itx} F\{f\}(x) dx$$

thì ϕ_N hội tụ trong $L^2(\mathbb{R})$ đến f khi $N \rightarrow \infty$.

(iv) Toán tử F là một đẳng cấu từ $L^2(\mathbb{R})$ vào $L^2(\mathbb{R})$.

Hệ quả 1.5.2.2. Nếu $f \in L^2(\mathbb{R})$ và $F \in L^1(\mathbb{R})$ thì

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} F(x) dx \text{ với h.h } x.$$

Định lý 1.5.2.3. (Đẳng thức Parseval) Cho $f \in L^2(\mathbb{I})$. Ta có

$$\|F\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|f\|_{L^2}.$$

1.6. Đa thức Lagrange (xem [2])

Ký hiệu K là tập các số thực $\mathbb{I}$ hoặc tập các số phức $\mathbb{E}$ và $P_n(\mathbb{I})$ hoặc $P_n(\mathbb{E})$ là tập tất cả các đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng $n-1$. Cho n điểm phân biệt $t_i \in K$ và n giá trị $\alpha_i \in K, 1 \leq i \leq n$.

Ta tìm một đa thức thỏa

$$P_n(t_i) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

Để làm điều đó, ta giới thiệu các đa thức l_i

$$l_i(t) = l_i(t_1, \dots, t_n; t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \quad t \in K, i = 1, 2, \dots, n.$$

Rõ ràng $l_i \in P_n(K), i = 1, 2, \dots, n$ và

$$l_i(t_j) = 1 \text{ nếu } j = i, \quad l_i(t_j) = 0 \text{ nếu } j \neq i.$$

Các đa thức $l_i, i = 1, 2, \dots, n$ được gọi là các *đa thức Lagrange cơ bản*. Chúng có thể được viết dưới dạng khác.

Ta giới thiệu đa thức

$$w(t) = w(t_1, \dots, t_n; t) = \prod_{j=1}^n (t - t_j)$$

Khi đó

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (t - t_j) = \frac{w(t)}{t - t_i},$$

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (t_i - t_j) = \lim_{t \rightarrow t_i} \frac{w(t)}{t - t_i} = w'(t_i).$$

Điều đó cho phép ta viết

$$l_i(t) = \frac{w(t)}{w'(t_i)(t - t_i)}$$

Dễ thấy rằng, đa thức

$$p_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i l_i(t)$$

là đa thức duy nhất trong $P_n(K)$ thỏa $P_n(t_i) = \alpha_i, 1 \leq i \leq n$. Dạng $p_n(t)$ của đa thức nội suy được gọi là *dạng Lagrange*.

Bây giờ, nếu $f: K \rightarrow K$ là một hàm bất kỳ và $t_i \in K, i = 1, 2, \dots, n$ là các điểm nút phân biệt thì

$$L_n(f; t) = L_{t_1, \dots, t_n}(f; t) = \sum_{i=1}^n f(t_i) l_i(t), t \in K$$

là đa thức duy nhất trong $P_n(K)$ mà nó đồng nhất với f tại các điểm nút $t_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Hiển nhiên, nếu $p \in P_n(K)$ thì

$$L_n(p; t) \equiv p(t)$$

vì p được xác định duy nhất bởi các giá trị $p(t_i), i = 1, 2, \dots, n$ của nó.

Do đó, toán tử tuyến tính $L_n: K \rightarrow P_n(K)$ là lũy đẳng, nghĩa là $L_n^2 = L_n$. Vì vậy, nó là một phép chiếu, ta gọi là *phép chiếu nội suy Lagrange*.

1.7. Bài toán chỉnh và bài toán không chỉnh (xem [26])

Xét phương trình

$$Ax = y$$

với A là một toán tử liên tục (không nhất thiết tuyến tính) từ một không gian Banach X vào một không gian Banach Y và $x \in X$ được tìm từ y đã cho.

Ta nói phương trình $Ax = y$ biểu diễn một bài toán *chỉnh* theo nghĩa Hadamard nếu toán tử A có một toán tử ngược liên tục từ Y vào X , với X và Y là các không gian Banach. Nói cách khác, chúng ta đòi hỏi rằng:

- (i) Với bất kỳ $y \in Y$ có nhiều nhất một $x \in X$ thỏa $Ax = y$ (tính duy nhất nghiệm);
- (ii) Với bất kỳ $y \in Y$ tồn tại một nghiệm $x \in X$ thỏa $Ax = y$ (sự tồn tại nghiệm);
- (iii) $\|A^{-1}y_1 - A^{-1}y_2\|_X \rightarrow 0$ khi $\|y_1 - y_2\|_Y \rightarrow 0$ (tính ổn định nghiệm).

Nếu một trong ba điều kiện (i), (ii), (iii) không thỏa thì phương trình $Ax = y$ biểu diễn một bài toán *không chỉnh* theo nghĩa Hadamard.

1.8. Sự chỉnh hóa (xem [26])

Ý tưởng cơ bản trong việc giải bài toán $Ax = y$ là dùng sự chỉnh hóa, nghĩa là thay phương trình này bởi một phương trình “gần” với nó bao gồm cả một tham số nhỏ α để ta có thể giải

phương trình đã thay đổi một cách ổn định và nghiệm của nó là gần với nghiệm của phương trình ban đầu khi α là nhỏ.

Định nghĩa 1.8.1. Ta gọi $R(y, \delta)$ là toán tử chỉnh hóa của phương trình $Ax = y$ trong lân cận của y_{ex} nếu thỏa các tính chất sau:

- (i) Tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho $R(y, \delta)$ xác định với mọi $\delta \in [0; \delta_1]$ và mọi $y_\delta \in Y$ thỏa $\|y_{ex} - y_\delta\| \leq \delta$.
- (ii) Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta_0(\varepsilon, y_{ex}) \leq \delta_1$ sao cho $\|y_{ex} - y_\delta\| \leq \delta \leq \delta_0$ thì $\|x_{ex} - x_\delta\| < \varepsilon$ với $x_\delta = R(y_\delta, \delta)$.

Chú ý 1.8.2. Trong định nghĩa trên, $\{R(y_\delta, \delta)\}$ có thể là một tập hợp và x_δ là một phần tử bất kỳ của $\{R(y_\delta, \delta)\}$.

Trong nhiều trường hợp, ta sử dụng định nghĩa sau (bao hàm định nghĩa vừa nêu).

Định nghĩa 1.8.3. Ta gọi $R(y, \alpha)$ là toán tử chỉnh hóa của phương trình $Ax = y$ trong lân cận của y_{ex} nếu thỏa các tính chất sau:

- (i) Có một số $\delta_1 > 0$ sao cho $R(y, \alpha)$ xác định với mọi $\alpha > 0$ và với mọi $y \in Y$ thỏa $\|y - y_{ex}\| \leq \delta < \delta_1$.
- (ii) Có một hàm $\alpha = \alpha(\delta)$ sao cho với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta(\varepsilon) \leq \delta_1$ sao cho nếu $y_\delta \in Y$ và $\|y_\delta - y_{ex}\| \leq \delta(\varepsilon)$ thì $\|x_\alpha - x_{ex}\| < \varepsilon$, trong đó $x_\alpha = R(y_\delta, \alpha(\delta))$.

Theo định nghĩa 1.8.2 thì với $\delta \rightarrow 0$ thì $y_\delta \rightarrow y_{ex}$ trong Y , ta có $x_\alpha = R(y_\delta, \alpha(\delta)) \rightarrow x_{ex}$ nên x_α là nghiệm chỉnh hóa phụ thuộc liên tục vào thay đổi của vế phải. Vì vậy, vấn đề giải x_α trở thành xây dựng toán tử chỉnh hóa $R(y, \alpha)$.

Định lý 1.8.4. Với $\alpha > 0$ và $\bar{R}(y, \alpha): Y \times \mathbb{I}^+ \rightarrow X$ liên tục đối với y . Giả sử

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{R}(Ax, \alpha) = x$ với mọi $x \in X$ thì $\bar{R}(y, \alpha)$ là toán tử chỉnh hóa của phương trình $Ax = y$.

Chú ý 1.8.5. Số dương α được gọi là tham số chỉnh hóa.

Nếu trong Định lý 1.8.4, $\bar{R}(y, \alpha)$ là một dãy đếm được các toán tử thì ta có thể lấy các số tự nhiên n làm tham số chỉnh hóa và điều kiện trên trở thành

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{R}(Ax, n) = x \text{ với mọi } x \in X.$$

Chương 2: HÀM NGUYÊN

2.1. Hàm giải tích (xem [17])

Định nghĩa 2.1.1. Cho D là một tập mở khác rỗng trong $\mathcal{E}$. Hàm $f : D \rightarrow \mathcal{E}$ được gọi là *khả vi phức* ($\mathcal{E}$ – khả vi) tại $z_0 \in D$ nếu tồn tại hàm $f_1 : D \rightarrow \mathcal{E}$ liên tục tại z_0 và

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f_1(z_0) \text{ với mọi } z \in D$$

Hàm f_1 như thế, nếu tồn tại thì được xác định duy nhất bởi f :

$$f_1(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ với } z \in D \setminus \{z_0\}$$

và bằng cách đặt $h = z - z_0$ do tính liên tục của f_1 tại z_0 ta có:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f_1(z_0)$$

Số $f_1(z_0) \in \mathcal{E}$ được gọi là đạo hàm của hàm f (theo biến z) tại z_0 , ký hiệu là $f'(z_0)$ hoặc $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Định nghĩa 2.1.2. Cho D là tập mở khác rỗng trong $\mathcal{E}$. Hàm $f : D \rightarrow \mathcal{E}$ được gọi là *chỉnh hình* trên D nếu nó khả vi phức tại mọi điểm thuộc D .

Hàm f được gọi là chỉnh hình tại điểm $z_0 \in D$ nếu tồn tại một lân cận mở U của z_0 nằm trong D sao cho hàm $f|_U$ chỉnh hình trên U . Tập hợp các điểm mà tại đó hàm chỉnh hình luôn là tập mở trong $\mathcal{E}$. Một hàm chỉnh hình tại z_0 thì hàm đó khả vi phức tại z_0 nhưng hàm khả vi phức tại z_0 không nhất thiết chỉnh hình tại z_0 . Chẳng hạn, hàm $f(z) = z\bar{z}$ khả vi tại điểm $z = 0$ nhưng không chỉnh hình tại điểm này.

Hàm chỉnh hình còn được gọi là *hàm giải tích*.

Tập hợp các hàm chỉnh hình trong D được ký hiệu là $H(D)$.

Ta có các bao hàm thức $\mathcal{E} \subset H(D) \subset C(D)$. Bao hàm thức thứ nhất có được do các hàm hằng là các hàm khả vi phức trong toàn bộ $\mathcal{E}$.

Chú ý 2.1.3. Ta có thể mở rộng định nghĩa trên cho trường hợp D là tập mở khác rỗng tùy ý trong $\mathcal{E}_\infty$ và f là ánh xạ từ D vào $\mathcal{E}_\infty$. Khi z_0 hữu hạn và $f(z_0) = \infty$, ta nói f chỉnh hình tại z_0 nếu $\frac{1}{f(z)}$ chỉnh hình tại z_0 . Khi $z_0 = \infty$, ta nói f chỉnh hình tại z_0 nếu $f(\frac{1}{z})$ chỉnh hình tại 0.

Nếu không nói rõ ta hiểu hàm chỉnh hình với $D \subset \mathcal{E}$ và f hữu hạn.

Định lý 2.1.4. (Định lý Liouville) Nếu f là hàm chỉnh hình và bị chặn trên $\mathcal{E}$ thì f là hàm hằng.

Định lý 2.1.5. (D'Alembert-Gauss) Mọi phương trình đại số

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$$

có đúng n nghiệm nếu mỗi nghiệm được tính một số lần bằng đúng số bội của nó.

Định lý 2.1.6. Cho G là miền trong $\mathcal{E}$, $f: G \rightarrow \mathcal{E}$ là hàm chỉnh hình khác hằng. Khi đó, với mọi $a \in \mathcal{E}$ tập hợp (thór)

$$f^{-1}(a) := \{z \in G : f(z) = a\}$$

mà ta gọi là tập các a -điểm của f , là tập rời rạc và đóng (tương đối) trong G . Đặc biệt, với mọi tập compact $K \subset G$, mỗi tập $f^{-1}(a) \cap K$, $a \in \mathcal{E}$, là tập hữu hạn, dẫn đến $f^{-1}(a)$ là tập không quá đếm được, nghĩa là f có không quá đếm được các a -điểm trong G .

Định lý 2.1.7. (Định lý đồng nhất) Các mệnh đề sau về cặp f, g các hàm chỉnh hình trên miền $G \subset \mathcal{E}$ là tương đương

- (i) $f = g$
- (ii) Tập hợp $\{\omega \in G : f(\omega) = g(\omega)\}$ có một điểm giới hạn trong G .
- (iii) Có một $c \in G$ sao cho $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nhận xét 2.1.8. Từ định lý đồng nhất, ta có hai kết quả:

- (i) Nếu f là hàm chỉnh hình trên một miền D và bằng 0 trên một đĩa mở nào đó nằm trong D thì nó bằng 0 trên toàn bộ D ;
- (ii) Giả sử f và g là các hàm chỉnh hình trên miền D và $f(z_n) = g(z_n)$ trên một dãy điểm vô hạn các điểm phân biệt $\{z_n\} \subset D$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \in D$. Khi đó, $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in D$.

Đặc biệt, giả sử f là các hàm chỉnh hình trên miền D và $\{z_n\} \subset D$ là một dãy các điểm đôi một khác nhau, hội tụ đến điểm $z_0 \in D$. Nếu $f(z_n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $f \equiv 0$ trên D .

Định lý 2.1.9. (Định lý hội tụ Weierstrass) Cho D là tập mở khác rỗng trong $\mathcal{E}$, f_n là dãy các hàm chỉnh hình trong D hội tụ compact trong D về $f: D \rightarrow \mathcal{E}$. Khi đó, f chỉnh hình trong D và với mọi $k \in \mathbb{N}$, dãy các đạo hàm $f_n^{(k)}$ hội tụ compact trong D về $f^{(k)}$.

Ta giả sử mêtric trên $H(D)$ được cảm sinh từ mêtric trên $C(D, \mathcal{E})$. Khi đó, $H(D)$ là không gian con đóng của $C(D, \mathcal{E})$, $C(D, \mathcal{E})$ là không gian đủ.

Hệ quả 2.1.10. $H(D)$ là không gian mêtric đủ.

Định lý 2.1.11. Nếu với $f_n \in H(D)$, chuỗi $\sum f_n$ hội tụ chuẩn tắc trong D về $f \in H(D)$ thì với mỗi $k \in \mathbb{N}$, chuỗi $\sum f_n^{(k)}$ hội tụ chuẩn tắc trong D về $f^{(k)}$.

Một ánh xạ liên tục $f: X \rightarrow Y$ giữa các không gian tôpô X và Y được gọi là ánh xạ mở nếu ảnh $f(U)$ của mọi tập mở U của X là một tập con mở của Y .

Định lý 2.1.12. (Định lý ánh xạ mở) Cho D là tập mở khác rỗng trong $\mathbb{C}$. Nếu f chỉnh hình và không hằng địa phương trong D thì nó là ánh xạ mở từ D vào $\mathbb{C}$.

Nhận xét 2.1.13. Nếu f là ánh xạ chỉnh hình 1-1 trên tập mở khác rỗng D thì D và $f(D)$ đồng phôi.

Định lý 2.1.14. (Nguyên lý bảo tồn miền) Nếu f chỉnh hình và không đồng nhất bằng hằng số trong miền G thì ảnh $f(G)$ cũng là một miền.

Định lý 2.1.15. (Nguyên lý môđun cực đại) Cho f là hàm chỉnh hình trên miền G và $|f|$ có cực trị địa phương thì f là hàm hằng trên G .

Định lý 2.1.16. (Nguyên lý môđun cực đại cho miền bị chặn) Giả sử hàm f chỉnh hình trong miền bị chặn G và liên tục trên clG . Khi đó hoặc $f = \text{const}$ hoặc $|f(z)|$ chỉ đạt cực đại trên ∂D , nghĩa là

$$|f(z)| \leq |f|_{\partial G}, \forall z \in clG.$$

Định lý 2.1.17. (Định lý Weierstrass cho miền bị chặn) Cho G là một miền bị chặn, f_n là dãy các hàm liên tục trên $cl(G)$ và chỉnh hình trong G . Nếu dãy $f_n|_{\partial G}$ hội tụ đều trên ∂G , thì dãy f_n hội tụ đều trên clG và hàm giới hạn liên tục trên clG và chỉnh hình trong G .

Định lý 2.1.18. (Bổ đề Schwarz) Nếu $f: E = B(0,1) \rightarrow E = B(0,1)$ là một hàm chỉnh hình và $f(0) = 0$ thì

$$|f(z)| \leq |z| \text{ với mọi } z \in E \text{ và } |f'(0)| \leq 1.$$

Hơn nữa, nếu có $z_0 \in B(0,1) \setminus \{0\}$ sao cho $|f(z_0)| = |z_0|$ hay $|f'(0)| = 1$ thì có $\alpha: |\alpha| = 1$ sao cho $f(z) = \alpha z$ với mọi $z \in E$.

Định lý 2.1.19. (Định lý Hurwitz) Giả sử G là miền trong $\mathbb{C}$, dãy $f_n \in H(G)$ hội tụ compact trong G về f và f_n không có không điểm trong G . Khi đó, nếu f không là hàm hằng không thì f không có không điểm trong G .

Hệ quả 2.1.20. Nếu dãy hàm f_n chỉnh hình và đơn điệu trong miền G , hội tụ compact về f trong G thì f hoặc đơn điệu hoặc là hằng số.

Định lý 2.1.21. (Định lý Runge) Cho K là một tập con compact của $\mathbb{E}$ và A là một tập con của $\mathbb{E}_\infty \setminus K$ sao cho A gặp mỗi thành phần liên thông của $\mathbb{E}_\infty \setminus K$. Nếu f là hàm chỉnh hình trong mọi tập mở chứa K và $\varepsilon > 0$ thì có một hàm hữu tỷ $R(z)$ mà có cực điểm chỉ nằm trong A và sao cho

$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon \text{ với mọi } z \in K.$$

Hệ quả 2.1.22. Cho G là tập con mở của $\mathbb{E}$ và A là một tập con của $\mathbb{E}_\infty \setminus G$ sao cho A gặp mỗi thành phần liên thông của $\mathbb{E}_\infty \setminus G$. Đặt $R(G, A)$ là tập hợp các hàm hữu tỷ và với cực điểm nằm trong A và xem $R(G, A)$ như là không gian con của $H(G)$. Nếu $f \in H(G)$ thì có một dãy $\{R_n\}$ trong $R(G, A)$ sao cho $f = \lim R_n$. Nghĩa là $R(G, A)$ trù mật trong $H(G)$.

Trong hệ quả tiếp theo, ta xét $A = \{\infty\}$ và sử dụng kết quả rằng, một hàm hữu tỷ chỉ có cực điểm tại ∞ là hàm đa thức.

Hệ quả 2.1.23. Cho G là tập con mở của $\mathbb{E}$ sao cho $\mathbb{E}_\infty \setminus G$ liên thông. Khi đó, với mọi $f \in H(G)$ thì có một dãy các đa thức $\{p_n\}$ sao cho $f = \lim p_n$ trong $H(G)$.

2.2. Hàm nguyên với bậc hữu hạn (xem [14, tr. 1-7])

2.2.1. Hàm nguyên

Một hàm $f(z)$ giải tích trên toàn bộ mặt phẳng phức, nghĩa là nó được biểu diễn bởi một chuỗi lũy thừa có dạng:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$$

được gọi là một hàm nguyên.

Đây là một lớp hàm đơn giản nhất của các hàm giải tích mà có chứa tất cả các đa thức. Hàm nguyên được phân lớp dựa vào bậc của chúng, nghĩa là theo sự tăng của chúng khi $|z| \rightarrow \infty$. Một hàm nguyên có thể tăng theo các cách khác nhau, theo nhiều hướng khác nhau. Với sự đặc trưng tổng quát của sự tăng, ta giới thiệu hàm $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Theo nguyên lý cực đại, hàm này đơn điệu tăng.

Một đa thức có càng nhiều nghiệm thì tăng càng nhanh. Tính chất này cũng được mở rộng cho hàm nguyên nhưng phức tạp hơn nhiều. Mối liên hệ giữa sự tăng của một hàm giải tích và sự phân bố nghiệm của nó là nội dung chính của định lý về hàm nguyên.

Ta sẽ chỉ ra có một số định lý tương tự định lý đồng nhất. Các kết quả này phát biểu rằng, nếu hàm nguyên f “tăng đủ chậm” và nghiệm của nó “được sắp xếp một cách rất trù mật”, thì $f(z) \equiv 0$. Đây là những định lý về tính duy nhất tương tự với các định lý về tính duy nhất đơn giản nhất cho đa thức.

2.2.2. Bậc của hàm nguyên

Nếu $h(r) < \varphi(r)$ là đúng với các giá trị r đủ lớn, chúng ta gọi nó là bất đẳng thức tiệm cận và viết: $h(r) \overset{as}{<} \varphi(r)$.

Nếu bất đẳng thức trên đúng với dãy nào đó của các giá trị $r_n \rightarrow \infty$ thì ta sẽ viết: $h(r) \overset{n}{<} \varphi(r)$.

Một hàm nguyên $f(z)$ được gọi là hàm với bậc hữu hạn nếu

$$M_f(r) \overset{as}{<} \exp(r^k) = e^{r^k}, \text{ với } k > 0.$$

Bậc của hàm nguyên là chặn dưới lớn nhất của các giá trị k mà bất đẳng thức tiệm cận được thực hiện.

Ký hiệu bậc của một hàm nguyên f là $\rho = \rho_f$.

Từ định nghĩa của bậc ta có

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} \overset{n}{<} M_f(r) \overset{as}{<} e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Lấy logarithm theo cơ số e hai lần ta được

$$\rho - \varepsilon < \frac{\log \log M_f(r)}{\log r} < \rho + \varepsilon,$$

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}.$$

Định lý 2.2.2.1. Bậc của hàm nguyên được xác định bởi công thức

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \left(\frac{1}{|c_n|} \right)}$$

Cho một dãy số $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, chặn dưới lớn nhất của λ sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda}$ hội

tụ gọi là số mũ hội tụ.

Định lý 2.2.2.2. (Định lý Hadamard) (xem [14, tr. 18]) Số mũ hội tụ của các không điểm của một hàm nguyên không vượt quá bậc của hàm nguyên đó.

2.3. Định lý Paley-Wiener (xem [18, Chương 19])

Ký hiệu Π^+ là tập hợp tất cả các số phức $z = x + iy$ thỏa $y > 0$.

Định lý 2.3.1. Giả sử $f \in H(\Pi^+)$ và

$$\sup_{0 < y < \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx = C < \infty$$

Khi đó, tồn tại một hàm $F \in L^2(0, \infty)$ sao cho

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(t) e^{itz} dt, \quad z \in \Pi^+$$

và

$$\int_0^{\infty} |F(t)|^2 dt = C$$

Định lý 2.3.2. Giả sử A và C là các hằng số dương và f là một hàm nguyên sao cho

$$|f(z)| \leq C e^{A|z|}, \quad z \in \mathcal{E}$$

và

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Khi đó tồn tại một hàm $F \in L^2(-A, A)$ sao cho

$$f(z) = \int_{-A}^A F(t) e^{itz} dt, \quad z \in \mathcal{E}.$$

2.4. Không gian H^p (không gian Hardy) (xem [18, Chương 17])

2.4.1. Các không gian H^p và N

Định nghĩa 2.4.1.1. Ta định nghĩa f_r trên T như sau

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}), \quad 0 \leq r < 1$$

nếu f là hàm liên tục bất kỳ xác định trên U , và cho σ là độ đo Lebesgue trên T , được chuẩn hóa $\sigma(T)=1$. Theo đó, L^p – chuẩn được hiểu là $L^p(\sigma)$. Đặc biệt,

$$\|f_r\|_p = \left(\int_T |f_r|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty$$

$$\|f_r\|_\infty = \sup_\theta |f(re^{i\theta})|$$

và ta giới thiệu

$$\|f_r\|_0 = \exp \int_T \log^+ |f_r| d\sigma.$$

Định nghĩa 2.4.1.2. Nếu $f \in H(U)$ và $0 \leq p \leq \infty$, đặt

$$\|f\|_p = \left\{ \sup \|f_r\|_p : 0 \leq r < 1 \right\}$$

Nếu $0 < p \leq \infty$ thì H^p được định nghĩa là lớp tất cả các hàm $f \in H(U)$ với $\|f\|_p < \infty$.

Lớp N bao gồm tất cả các hàm $f \in H(U)$ mà $\|f\|_0 < \infty$.

Rõ ràng là $H^\infty \subset H^p \subset H^s \subset N$ nếu $0 < s < p < \infty$.

Nhận xét 2.4.1.3.

(i) Khi $p < \infty$, Định lý 17.3 và Định lý 17.5 (xem [18], tr. 336-337) cho thấy $\|f_r\|_p$ là hàm không giảm theo r , với mọi $f \in H(U)$.

Khi $p = \infty$, theo Định lý module cực đại ta có kết luận tương tự. Do đó

$$\|f\|_p = \lim_{r \rightarrow 1} \|f_r\|_p$$

(ii) Với $1 \leq p \leq \infty$, H^p là một không gian tuyến tính định chuẩn.

(iii) Có thể xem H^p là không gian con đóng của L^p và do đó nó là không gian Banach.

Định lý 2.4.1.4. Nếu $f \in H^p$ (hoặc $f \in N$), $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ là các không điểm của f trong U và

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) = \infty$$

thì

$$f(z) = 0, \text{ với mọi } z \in U.$$

2.4.2. Một số tính chất quan trọng của không gian H^p

Nếu $0 < p < \infty$ và $f \in H^p$ thì

(i) Giới hạn không tiếp xúc $f^*(e^{i\theta})$ tồn tại khắp nơi trên T và

$$f^* \in L^p(T),$$

$$(ii) \lim_{r \rightarrow 1} \|f^* - f_r\|_p = 0,$$

$$(iii) \|f^*\|_p = \|f\|_p.$$

2.4.3. Không gian H^2

Không gian H^2 có một cách tính chuẩn đơn giản như sau:

Định lý 2.4.3.1. Giả sử $f \in H(U)$ và

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

thì $f \in H^2$ nếu và chỉ nếu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Ngoài ra,

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý Parseval cho f_r với $r < 1$ ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \lim_{r \rightarrow 1} \int_T |f_r|^2 d\sigma = \|f\|_{L^2}^2.$$

Nhận xét 2.4.3.2.

(i) Một cách tự nhiên, không gian $H^2(U)$ được xem như một không gian con đóng của

$L^2(T)$ (gồm tất cả các hàm có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ với $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, là sự mở rộng tuyến tính đóng của các tập $\{e^{in\theta} : n \geq 0\}$).

Chú ý rằng, nếu $|z| < 1$ thì theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

Do đó, các chuỗi lũy thừa như vậy có bán kính hội tụ ít nhất là 1 và xác định một hàm giải tích trên U .

(ii) $H^2(U)$ là không gian Hilbert với tích trong xác định bởi

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b^n}$$

hay tương đương

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt.$$

Các hàm $e_n(z) = z^n$, $n \geq 0$ tạo thành cơ sở trực chuẩn của H^2 . Ta suy ra

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt.$$

Chương 3: KHÔI PHỤC HÀM NGUYÊN TRONG L^2_σ TỪ NHỮNG ĐIỂM NGUYÊN

3.1. Giới thiệu

Trong Chương này, chúng tôi chỉ trình bày một trường hợp đặc biệt của “*bài toán công cụ*”. Chính xác hơn, chúng tôi trình bày bài toán khôi phục một hàm trong L^2_σ từ các giá trị của nó trên một tập $\{n \in \mathbb{C}, |n| \geq r\}$, với $r > 0$ lớn.

Bài toán tìm kiếm một hàm nguyên từ các giá trị của nó trên một tập A đếm được là một bài toán điển hình trong lý thuyết hàm nguyên. Đặc biệt, trường hợp thú vị $A = \mathbb{C}$ đã được xem xét trong một thời gian dài (xem [14, Bài giảng 20]). Một định lý cổ điển (xem [14, Mục 20.2]) nói rằng, một hàm $f \in L^2_\pi$ có thể được xác định hoàn toàn từ các giá trị của nó trên tập $A = \mathbb{C}$ bởi biểu diễn

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) \frac{\sin(\pi(z-n))}{\pi(z-n)},$$

và

$$\|f\|_{L^2(i)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{C}} |f(n)|^2.$$

Tuy nhiên, nếu $A = \{n \in \mathbb{C}, |n| \geq r\}$ với $r > 0$ thì tính duy nhất của sự xác định của hàm $f \in L^2_\pi$ không còn đảm bảo. Ví dụ, hàm nguyên

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z}$$

thỏa mãn $f(n) = 0$ với mọi số nguyên $n \neq 0$. Do đó, thật là thú vị để xem xét việc xác định một hàm $f \in L^2_\sigma$ từ $\{f(n)\}_{n \in A}$ trong trường hợp $\sigma < \pi$.

3.2. Định lý ổn định

Khi $0 < \sigma < 2$, chúng ta có định lý ổn định sau đây. Đặc biệt, định lý này bao hàm kết quả tính duy nhất.

Định lý 3.2.1. (Ổn định) Cho $\sigma \in (0, 2)$ và $A = \{n \in \mathbb{C}, |n| > r\}$ với $r > 0$. Khi đó, tồn tại một hằng số $C = C(\sigma, r) > 0$ sao cho

$$\|f\|_{L^2(i)} \leq C \left(\sum_{n \in A} |f(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in L^2_\sigma.$$

Chú ý 3.2.2. Từ $\|f\|_{L^2(i)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^2$, định lý ổn định trên có thể được nói cách khác theo

ánh xạ

$$f \mapsto \left(\sum_{n \in A} |f(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

định nghĩa một chuẩn tương đương trong không gian $(L^2_\sigma, \|\cdot\|_{L^2(i)})$.

Ở đây, công cụ chính để chứng minh Định lý 3.2.1 là đa thức nội suy Lagrange. Nhớ lại rằng, nếu $B = \{x_1, \dots, x_p\}$ là một tập gồm p số phức phân biệt lẫn nhau thì đa thức nội suy Lagrange

$L[B; w]$ của ánh xạ $w: B \rightarrow \mathbb{C}$ là

$$L[B; w](z) = \sum_{j=1}^p \left(\prod_{k \neq j} \frac{z - x_k}{x_j - x_k} \right) w(x_j).$$

Ta cần bất đẳng thức nội suy sau đây:

Bổ đề 3.2.3. (Bất đẳng thức nội suy) Cho $\sigma_0 \in (0, 2)$. Khi đó, tồn tại $k \in \mathbb{N}$ và $C_0 > 0$ chỉ phụ thuộc vào σ_0 sao cho

$$\sup_{x \in [-r, r]} |f(x) - L[A_r^k, f]| \leq C_0 \|f\|_{L^2(i)} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{2kr}, \quad \forall f \in L^2_\sigma, r \in \mathbb{N},$$

trong đó $A_r^k = \{\pm(r+j) \mid j=1, 2, \dots, kr\}$.

Chứng minh. Cố định $x \in [-r, r]$ và đặt $x_j = r+j$ với $1 \leq j \leq kr$. Theo công thức số dư của đa thức nội suy Lagrange (xem, ví dụ, [2, mục 1.1, tr. 9]), tồn tại $\xi \in [-(k+1)r, (k+1)r]$ sao cho

$$f(x) - L[A_r^k, f](x) = \frac{1}{(2kr)!} \frac{d^{2kr} f}{dz^{2kr}}(\xi) \prod_{j=1}^{kr} (x^2 - x_j^2). \quad (3.1)$$

Vì $f \in L^2_\sigma$ nên chúng ta có biểu diễn

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} g(t) e^{itz} dt \quad \text{với } g \in L^2(-\sigma, \sigma).$$

Do đó

$$\left| \frac{d^{2kr} f}{dz^{2kr}}(\xi) \right| = \left| \int_{-\sigma}^{\sigma} g(t) (it)^{2kr} e^{it\xi} dt \right| \leq \|g\|_{L^1(-\sigma, \sigma)} \sigma^{2kr} \leq \|f\|_{L^2(-\sigma, \sigma)} \sigma^{2kr}, \quad (3.2)$$

ở đây, chúng ta đã sử dụng

$$\|g\|_{L^1(-\sigma,\sigma)} \leq \sqrt{2\sigma} \|g\|_{L^2(-\sigma,\sigma)} = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \|f\|_{L^2(i)} \leq \|f\|_{L^2(i)}.$$

Mặt khác, vì $|x| \leq x_j$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2kr)!} \prod_{j=1}^{kr} |x^2 - x_j^2| &\leq \frac{1}{(2kr)!} \prod_{j=1}^{kr} x_j^2 \\ &= \frac{(r+1)^2 (r+2)^2 \dots ((k+1)r)^2}{(2kr)!} =: \psi_k(r). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Chúng ta thấy rằng

$$\frac{\psi_k(r+1)}{\psi_k(r)} = \frac{(k+1)^2 ((k+1)r+1)^2 \dots ((k+1)r+k)^2}{(2kr+1) \dots (2kr+2k)} \rightarrow \frac{(k+1)^{2(k+1)}}{(2k)^{2k}}$$

khi $r \rightarrow +\infty$.

Bởi vì

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right) \ln(k+1) - \ln(2k) \rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) < -\ln(\sigma_0) \text{ khi } k \rightarrow +\infty,$$

chúng ta có thể chọn $k > 0$ phụ thuộc vào σ_0 sao cho

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right) \ln(k+1) - \ln(2k) < -\ln(\sigma_0).$$

Bất đẳng thức sau cùng tương đương với

$$\frac{(k+1)^{2(k+1)}}{(2k)^{2k}} < \frac{1}{(\sigma_0)^{2k}}.$$

Điều xảy ra từ

$$\frac{\psi_k(r+1)}{\psi_k(r)} \rightarrow \frac{(k+1)^{2(k+1)}}{(2k)^{2k}} < \frac{1}{(\sigma_0)^{2k}} \text{ khi } r \rightarrow +\infty,$$

là

$$\psi_k(r) \leq \frac{C_0}{(\sigma_0)^{2kr}}, \quad \forall r = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

với $C_0 > 0$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào σ_0 .

Từ (3.1), (3.2), (3.3) và (3.4), chúng ta nhận được kết quả mong muốn.

Bây giờ, chúng ta đã sẵn sàng để chứng minh định lý 3.2.1.

Chứng minh định lý 3.2.1. Trước tiên, chúng ta chứng minh tính duy nhất và khi đó có được sự ổn định.

Bước 1. Chúng ta chứng minh rằng, nếu $f \in L^2_\sigma$ và $f(n) = 0$ với mọi $n \in A$ thì $f \equiv 0$.

Thật vậy, chọn $\sigma_0 \in (\sigma, 2)$ và k, C_0 như trong Bổ đề 3.2.3. Cố định $x \in \mathbb{I}$. Khi đó $A_s^k \subset A$ với $s > |x|$ đủ lớn. Điều xảy ra từ Bổ đề 3.2.3 là

$$|f(x)| = |f(x) - L[A_s^k, f](x)| \leq C_0 \|f\|_{L^2(\mathbb{I})} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{2ks} \rightarrow 0 \text{ khi } s \rightarrow +\infty.$$

Do đó $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{I}$, và vì vậy $f \equiv 0$.

Bước 2. Giả sử ngược lại, có một dãy $\{f_m\} \subset L^2_\sigma$ thỏa mãn

$$\|f_m\|_{L^2(\mathbb{I})} = 1 \text{ và } \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n \in A} |f_m(n)|^2 = 0.$$

Vì $f_m \in L^2_\sigma$ nên tồn tại $g_m \in L^2(-\sigma, \sigma)$ sao cho

$$f_m(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} g_m(t) e^{itz} dt, \quad \|g_m\|_{L^2(-\sigma, \sigma)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f_m\|_{L^2(\mathbb{I})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Điều xảy ra từ sự bị chặn của dãy $\{g_m\}$ trong $L^2(-\sigma, \sigma)$ là có một dãy con $\{g_{m_k}\}$ hội tụ yếu về một hàm $g_0 \in L^2(-\sigma, \sigma)$. Vì vậy,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_{m_k}(n) = f_0(n), \quad \forall n \in \mathbb{C}, \text{ trong đó } f_0(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} g_0(t) e^{itz} dt.$$

Mặt khác, $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_{m_k}(n) = 0$ với mọi $n \in A$. Vì vậy, $f_0(n) = 0$ với mọi $n \in A$, và chúng ta suy ra từ Bước 1 là $f_0 \equiv 0$. Như vậy, $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_{m_k}(n) \rightarrow 0$ với mọi $n \in \mathbb{C}$, và do đó

$$\|f_{m_k}\|_{L^2(\mathbb{I})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{C}} |f_{m_k}(n)|^2 = \sum_{|n| < r} |f_{m_k}(n)|^2 + \sum_{n \in A} |f_{m_k}(n)|^2 \rightarrow 0$$

khi $k \rightarrow +\infty$. Điều mâu thuẫn này hoàn thành việc chứng minh.

3.3. Bất đẳng thức nội suy

Bây giờ, chúng ta dễ dàng nhận được bất đẳng thức nội suy trong Bổ đề 3.2.3 cho trường hợp đặc biệt $\sigma = 1$.

Định lý 3.3.1. (Bất đẳng thức nội suy) Cho $f \in L^2_1$ và $w: A_r \rightarrow \mathbb{C}$, trong đó

$A_r = \{\pm(r+j), j=1,2,\dots,4r\}$ với số nguyên $r > 0$. Khi đó, ta có

$$\sup_{x \in [-r, r]} |f(x) - L[A_r; w](x)| \leq \|f\|_{L^2(i)} e^{-\frac{r}{2}} + 8re^{3.96r} \max_{n \in A_r} |f(n) - w(n)|.$$

Chứng minh. Cố định $x \in [-r, r]$ và đặt $m = 4r$, $x_j = r + j$ với $1 \leq j \leq m$. Chúng ta sẽ sử dụng bất đẳng thức tam giác

$$|f(x) - L[A_r; w](x)| \leq |f(x) - L[A_r; f](x)| + |L[A_r; (f - w)](x)| \quad (3.5)$$

Trước hết, chúng ta ước lượng $|f(x) - L[A_r; w](x)|$. Sử dụng (3.1), (3.2), (3.3) trong chứng minh Bổ đề 3.2.3 đối với $k = 4$ chúng ta nhận được

$$|f(x) - L[A_r; f](x)| \leq \|f\|_{L^2(i)} \psi_4(r), \quad (3.6)$$

trong đó

$$\psi_4(r) = \frac{(r+1)^2 (r+2)^2 \dots (5r)^2}{(8r)!}.$$

Bằng cách tính toán trực tiếp, chúng ta có $\psi_4(1) = \frac{5}{14} < e^{-\frac{1}{2}}$, và

$$\frac{\psi_4(r+1)}{\psi_4(r)} = \frac{25[(5r+1)(5r+2)(5r+3)(5r+4)]^2}{(8r+1)(8r+2)\dots(8r+8)} < \frac{5^{10}}{8^8} < e^{-\frac{1}{2}}$$

vì

$$\begin{aligned} & 5^8 (8r+1)(8r+2)\dots(8r+8) - 8^8 [(5r+1)(5r+2)(5r+3)(5r+4)]^2 \\ &= 3276800000000r^7 + 11345920000000r^6 + 16117760000000r^5 \\ &+ 12084267520000r^4 + 5110135040000r^3 + 1199880928000r^2 \\ &+ 141123408000r + 6086323584 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Dẫn đến $\psi_4(r) < e^{-\frac{r}{2}}$ với mọi $r \geq 1$. Vì vậy, (3.5) trở thành

$$|f(x) - L[A_r; f](x)| \leq \|f\|_{L^2(i)} e^{-\frac{r}{2}} \quad (3.7)$$

Tiếp theo, chúng ta ước lượng $|L[A_r; f - w](x)|$. Ta có

$$\begin{aligned} |L[A_r; f - w](x)| &= \sum_{j=1}^m \left(\prod_{k \neq j} \frac{x^2 - x_k^2}{x_j^2 - x_k^2} \right) \frac{x + x_j}{2x_j} (f(x_j) - w(x_j)) \\ &+ \sum_{j=1}^m \left(\prod_{k \neq j} \frac{x^2 - x_k^2}{x_j^2 - x_k^2} \right) \frac{x + x_j}{-2x_j} (f(-x_j) - w(-x_j)). \end{aligned}$$

Vì $|x| \leq x_j$ với $1 \leq j \leq m$, nên đẳng thức trên dẫn đến

$$|L[A_r; f - w](x)| \leq 2\delta \sum_{j=1}^m \left(\prod_{k \neq j} \frac{|x^2 - x_k^2|}{|x_j^2 - x_k^2|} \right) \leq 2\delta m \max_{1 \leq j \leq m} \left(\prod_{k \neq j} \frac{x_k^2}{|x_j^2 - x_k^2|} \right), \quad (3.8)$$

trong đó $\delta = \max_{n \in A_r} |f(n) - w(n)|$.

Với mọi $1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} \prod_{k \neq j} \frac{x_k^2}{|x_j^2 - x_k^2|} &= \frac{2}{x_j} \cdot \frac{\prod_{k=1}^m x_k^2}{\prod_{k \neq j} |x_j - x_k| \cdot \prod_{k=1}^m (x_j + x_k)} \\ &= \frac{2}{r+j} \cdot \frac{(r+1)^2 (r+2)^2 \dots (5r)^2}{(j-1)!(4r-j)!(2r+j+1) \cdot (2r+j+2) \dots (6r+j)} \\ &\leq \frac{4(r+1)^2 (r+2)^2 \dots (5r)^2}{(2r-1)!(6r+1)!} =: \tilde{\psi}(r) \end{aligned}$$

vì

$$\begin{aligned} &2(r+j) \times (j-1)!(4r-j)! \times (2r+j+1) \cdot (2r+j+2) \dots (6r+j) \\ &\geq (2r+1) \times (2r-1)!(2r)! \times (2r+2) \cdot (2r+3) \dots (6r+1) \\ &= (2r-1)!(6r+1)! \end{aligned}$$

Bằng cách tính toán trực tiếp, ta có $\tilde{\psi}(1) < e^{3.96}$, và

$$\frac{\tilde{\psi}(r+1)}{\tilde{\psi}(r)} = \frac{25[(5r+1)(5r+2)(5r+3)(5r+4)]^2}{2r(2r+1)(6r+2)(6r+3) \dots (6r+7)} < \frac{5^{10}}{2^2 \cdot 6^6} < e^{3.96}$$

vì

$$\begin{aligned} &5^8 \cdot 2r(2r+1)(6r+2) \dots (6r+7) - 2^2 \cdot 6^6 \cdot [(5r+1) \dots (5r+4)]^2 \\ &= 72900000000r^7 + 265680000000r^6 + 394065000000r^5 \\ &\quad + 302946030000r^4 + 125967060000r^3 + 26004042000r^2 \\ &\quad + 1698012000r - 107495424 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Do đó $\tilde{\psi}(r) < e^{3.96r}$ với mọi $r \geq 1$. Bởi vậy, (3.8) trở thành

$$|L[A_r; f - w](x)| \leq 8re^{3.96r} \delta. \quad (3.9)$$

Từ bất đẳng thức (3.7) và (3.9), chúng ta nhận được kết quả mong muốn.

Hệ quả 3.3.2. Giả sử rằng $f \in L^2_1$ và $\lim_{n \in \mathbb{C}, |n| \rightarrow \infty} f(n)e^{4|n|} = 0$. Khi đó, $f \equiv 0$.

Chứng minh. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, sử dụng Định lý 3.3.1 cho $w \equiv 0$ và $r > |x|$, ta có

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} e^{-\frac{r}{2}} + 8re^{3.96r} \max_{n \in A_r} |f(n)| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} e^{-\frac{r}{2}} + 8re^{-0.04r} \max_{n \in A_r} |f(n)e^{4|n|}| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

khi $r \rightarrow \infty$.

Vì vậy $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và do đó $f \equiv 0$.

Chương 4: ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT

4.1. Giới thiệu

Trong Chương này, chúng tôi quay trở lại trình bày bài toán truyền nhiệt (1) và (4). Mục đích của chúng tôi là chứng minh tính duy nhất nghiệm của mỗi bài toán và hiển thị một chương trình tính toán nghiệm bằng số.

4.2. Các kết quả nghiên cứu về bài toán (1)

Định lý 4.2.1. (Tính duy nhất) Với mỗi $f \in L^1(Q)$, hệ thống (1) có nhiều nhất một nghiệm

$$u \in C^1([0, T]; L^1(0, 1)) \cap L^2((0, T); H^2(0, 1)).$$

Chứng minh. Giả sử rằng u_1 và u_2 là hai nghiệm của (1) tương ứng với cùng một dữ liệu f .

Khi đó, $u = u_1 - u_2$ thỏa mãn (1) tương ứng với $f = 0$.

Từ (2) ta có

$$\begin{aligned} |F(u(., T))(n)| e^{4|n|} &= |F(u(., 0))(n)| e^{-n^2 T + 4|n|} \\ &\leq \|u(., 0)\|_{L^1(0, 1)} e^{-n^2 T + 4|n|} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

khi $|n| \rightarrow \infty$.

Điều xảy ra từ Hệ quả 3.3.2 là $u(., T) \equiv 0$. Tất nhiên, chúng ta có thể thay thế T bởi bất kỳ $t \in (0, T)$ để có được $u(., t) \equiv 0$. Vì vậy $u_1 \equiv u_2$.

Lưu ý rằng, sự tồn tại nghiệm không được xem xét ở đây. Thay vào đó, chúng tôi giả định rằng, có một nghiệm chính xác

$$u \in C^1([0, T]; L^1(0, 1)) \cap L^2((0, T); H^2(0, 1))$$

của hệ thống (1) tương ứng với dữ liệu chính xác $f_0 \in L^1(Q)$. Mục đích của chúng tôi trong định lý tiếp theo là xây dựng một nghiệm số xấp xỉ $u(., T)$ từ một dữ liệu được cho gần $f_\varepsilon \in L^1(Q)$ và thỏa mãn $\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^1(Q)} \leq \varepsilon$.

Với $x \in \mathbb{R}$, chúng ta sẽ ký hiệu bởi $\lceil x \rceil$ các số nguyên trong khoảng $(x, x + 1]$.

Định lý 4.2.2. (Nghiệm số) Giả sử rằng $u_0(., T) \in H^2(0, 1)$. Định nghĩa

$$H_{\varepsilon}(y) = \int_0^T \int_0^1 f_{\varepsilon}(x, t) e^{y^2(t-T)} \cos(yx) dx dt, \quad y \in \mathbb{I},$$

$$r_{\varepsilon} = \left\lceil \frac{2}{9} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right\rceil, \quad M_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}},$$

$$A_{\varepsilon} = \left\{ \pm(r_{\varepsilon} + j) \mid j = 1, 2, \dots, 4\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \right\},$$

$$F_{\varepsilon}(n) = \begin{cases} L[A_{\varepsilon}; H_{\varepsilon}], & 0 \leq n\pi < r_{\varepsilon}, \\ H_{\varepsilon}(n\pi), & r_{\varepsilon} \leq n\pi < M_{\varepsilon}, \end{cases}$$

$$v_{\varepsilon}(x) = F_{\varepsilon}(0) + 2 \sum_{1 \leq n \leq M_{\varepsilon}} F_{\varepsilon}(n) \cos(n\pi x).$$

Khi đó, chúng ta có sai số ước lượng

$$\|v_{\varepsilon} - u_0(., T)\|_{H^1(0,1)} \leq C_0 \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{9}},$$

trong đó C_0 là viết tắt của một hằng số chỉ phụ thuộc vào u_0 .

Chứng minh. Ký hiệu nghiệm chính xác $u_0(., T)$ bởi v_0 cho ngắn gọn. Từ đây, chúng ta sử dụng C_0 như là một hằng số phổ dụng mà chỉ phụ thuộc vào u_0 và T .

Bước 1. So sánh $F(v_0)(n\pi)$ và $F(v_{\varepsilon})(n\pi)$ với $0 \leq n\pi \leq M_{\varepsilon}$.

Cho $y \in \mathbb{I}$, $|y| \geq r_{\varepsilon}$. Điều xảy ra từ (2) là

$$|F(v_0)(y) - H_0(y)| = e^{-y^2 T} |F(u_0(., 0))(y)| \leq C_0 \varepsilon$$

do

$$e^{-y^2 T} \leq e^{6T^2 - \frac{9}{2}|y|} \leq e^{6T^2 - \frac{9}{2}r_{\varepsilon}} \leq e^{6T^2} \varepsilon.$$

Hơn nữa

$$|H_0(y) - H_{\varepsilon}(y)| \leq \varepsilon.$$

Do đó

$$|F(v_0)(y) - H_{\varepsilon}(y)| \leq |F(v_0)(y) - H_0(y)| + |H_0(y) - H_{\varepsilon}(y)| \leq C_0 \varepsilon.$$

Đặc biệt, chúng ta có

$$|F(v_0)(n\pi) - F(v_{\varepsilon})(n\pi)| \leq C_0 \varepsilon \quad \text{nếu } r_{\varepsilon} \leq n\pi \leq M_{\varepsilon}, \quad (4.1)$$

và

$$\max_{n \in A_{\varepsilon}} |F(v_0)(n) - H_{\varepsilon}(n)| \leq C_0 \varepsilon.$$

Chúng ta suy diễn từ bất đẳng thức trên và Định lý 3.3.1 rằng, nếu $0 \leq y \leq r_{\varepsilon}$ thì

$$\left| F(v_0)(y) - L[A_\varepsilon; H_\varepsilon](y) \right| \leq \|F(v_0)\|_{L^2(0,1)} e^{-\frac{r_\varepsilon}{2}} + 8r_\varepsilon e^{3.96r_\varepsilon} C_0 \varepsilon.$$

Chọn $y = n\pi$ và sử dụng $e^{-\frac{2}{9}} \leq e^{r_\varepsilon} \leq e\varepsilon^{-\frac{2}{9}}$, chúng ta nhận được

$$\left| F(v_0)(n\pi) - F(v_\varepsilon)(n\pi) \right| \leq C_0 \varepsilon^{\frac{1}{9}} \text{ nếu } 0 \leq n\pi \leq r_\varepsilon. \quad (4.2)$$

Bước 2. Áp dụng đẳng thức Parseval-Plancherel, ta có

$$\begin{aligned} & \|v_0 - v_\varepsilon\|_{H^1(0,1)}^2 \\ &= \left| F(v_0)(0) - F(v_\varepsilon)(0) \right|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (1 + n^2 \pi^2) \left| F(v_0)(n\pi) - F(v_\varepsilon)(n\pi) \right|^2 \\ &\leq 4\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left| F(v_0)(n\pi) - F(v_\varepsilon)(n\pi) \right|^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Điều xảy ra từ (4.2) là

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq n\pi < r_\varepsilon} n^2 \left| F(v_0)(n\pi) - F(v_\varepsilon)(n\pi) \right|^2 \\ &\leq r_\varepsilon \max_{0 \leq n\pi < r_\varepsilon} \left\{ n^2 \left| F(v_0)(n\pi) - F(v_\varepsilon)(n\pi) \right|^2 \right\} \\ &\leq r_\varepsilon \cdot r_\varepsilon^2 \left(C_0 \varepsilon^{\frac{1}{9}} \right)^2 = C_0^2 r_\varepsilon^3 \varepsilon^{\frac{2}{9}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Tương tự, sử dụng (4.1), chúng ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{r_\varepsilon \leq n\pi < M_\varepsilon} n^2 \left| F(v_0)(n\pi) - F(v_\varepsilon)(n\pi) \right|^2 \\ &\leq M_\varepsilon \max_{r_\varepsilon \leq n\pi < M_\varepsilon} \left\{ n^2 \left| F(v_0)(n\pi) - F(v_\varepsilon)(n\pi) \right|^2 \right\} \\ &\leq M_\varepsilon \cdot M_\varepsilon^2 (C_0 \varepsilon)^2 = C_0^2 \sqrt{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Vì $v_0 \in H^2(0,1)$ và $v_0'(0) = v_0'(1) = 0$, chúng ta có

$$F(v_0)(n\pi) = -\frac{1}{n\pi} \int_0^1 v_0'(x) \sin(n\pi x) dx = -\frac{1}{n^2 \pi^2} \int_0^1 v_0''(x) \cos(n\pi x) dx.$$

Đẳng thức Parseval-Plancherel đưa đến

$$\|v_0''\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \pi^4 \left| F(v_0)(n\pi) \right|^2$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
\sum_{n\pi > M_\varepsilon} n^2 |F(v_0)(n\pi) - F(v_\varepsilon)(n\pi)|^2 &= \sum_{n\pi > M_\varepsilon} n^2 |F(v_0)(n\pi)|^2 \\
&\leq \frac{1}{M_\varepsilon^2} \sum_{n\pi > M_\varepsilon} n^4 |F(v_0)(n\pi)|^2 \\
&\leq \frac{1}{M_\varepsilon^2 \pi^4} \|v_0''\|_{L^2(0,1)}^2 \\
&\leq C_0 \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Từ (4.3), (4.4), (4.5) và (4.6), chúng ta kết luận rằng

$$\|v_0 - v_\varepsilon\|_{H^1(0,1)}^2 \leq C_0 r_\varepsilon^3 \varepsilon^{\frac{2}{9}} \leq C_0^2 \left(\ln(\varepsilon^{-1})\right)^3 \varepsilon^{\frac{2}{9}}.$$

Chúng minh được hoàn thành.

Chú ý 4.2.3. Nếu điều kiện $v_0 := u(., T) \in H^2(0, 1)$ được quy về $v_0 \in H^1(0, 1)$, chúng ta có

$$\|v_0 - v_\varepsilon\|_{L^2} \leq C_0 \left(\ln(\varepsilon^{-1})\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{9}}.$$

Việc chứng minh thậm chí đơn giản hơn với một số thay đổi nhỏ trong Bước 2.

4.3. Các kết quả nghiên cứu về bài toán (4)

Chúng tôi trở lại xem xét bài toán (4). Nhớ lại rằng, xấp xỉ (6) chỉ có được nếu $e^{-\alpha^2 T} / |D(\varphi)(\alpha)| \rightarrow 0$ “đủ nhanh” khi $|\alpha| \rightarrow +\infty$, trong đó

$$D(\varphi)(\alpha) = \int_0^T e^{\alpha^2(t-T)} \varphi(t) dt.$$

Để giữ cho $D(\varphi)(\alpha) \rightarrow 0$ “từ từ” khi $|\alpha| \rightarrow +\infty$, chúng ta sẽ cần một điều kiện yếu (H) trên φ .

Điều kiện (H). $\varphi \in L^1(0, T)$ và $\liminf_{t \rightarrow T^-} \varphi(t) > 0$ hoặc $\limsup_{t \rightarrow T^-} \varphi(t) < 0$ đúng.

Chú ý 4.3.1. Lớp hàm thỏa mãn (H) là rất lớn. Ví dụ, điều kiện này đúng nếu φ liên tục tại $t = T$ và $\varphi(T) \neq 0$.

Bổ đề 4.3.2. Nếu φ thỏa mãn (H) thì $\liminf_{|\alpha| \rightarrow \infty} \alpha^2 |D(\varphi)(\alpha)| > 0$.

Chứng minh. Giả sử rằng $\liminf_{t \rightarrow T^-} \varphi(t) > 0$. Khi đó, tồn tại $\lambda \in (0, T)$ và $C_0 > 0$ sao cho $\varphi(t) > C_0$ với mọi $t \in (\lambda, T)$.

Do đó

$$\begin{aligned}
|D(\varphi)(\alpha)| &\geq \int_{\lambda}^T e^{\alpha^2 T(t-T)} \varphi(t) dt - \left| \int_0^{\lambda} e^{\alpha^2(t-T)} \varphi(t) dt \right| \\
&\geq \int_{\lambda}^T e^{\alpha^2(t-T)} C_0 dt - \int_0^{\lambda} e^{\alpha^2(\lambda-T)} |\varphi(t)| dt \\
&\geq C_0 \frac{1 - e^{\alpha^2(\lambda-T)}}{\alpha^2} - e^{\alpha^2(\lambda-T)} \|\varphi\|_{L^1(0,T)}.
\end{aligned}$$

Nhân cả hai phía của bất đẳng thức trên với α^2 và sau đó cho $|\alpha| \rightarrow \infty$, chúng ta có được kết quả mong muốn.

Định lý 4.3.3. (Tính duy nhất) Giả sử rằng φ thỏa mãn (H) và $g \in L^2(0,1)$. Khi đó, hệ thống (4) có nhiều nhất một nghiệm

$$(u, f) \in (C^1([0,T]; L^1(0,1)) \cap L^2((0,T); H^2(0,1)), L^2(0,1)).$$

Chứng minh. Cho (u_1, f_1) và (u_2, f_2) là hai nghiệm. Đặt $u = u_1 - u_2$ và $f = f_1 - f_2$. Khi đó (u, f) là một nghiệm của (4) tương ứng với φ và $g \equiv 0$.

Do đó, (5) trở thành

$$e^{-\alpha^2 T} F(u(.,0))(n) = D(\varphi)(\alpha) \cdot F(f)(\alpha), \quad \alpha \in \mathfrak{i} \quad (4.7)$$

Đặc biệt, chọn $\alpha = n \in \mathfrak{C}$, ta có

$$\left| e^{4|n|} F(f)(n) \right| \cdot \left| n^2 D(\varphi)(n) \right| = n^2 e^{-n^2 T + 4|n|} \|F(u(.,0))\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Mặt khác, $\liminf_{|n| \rightarrow \infty} |n^2 D(\varphi)(n)| > 0$ do Bổ đề 4.3.2.

Do đó

$$e^{4|n|} |F(f)(n)| = 0 \rightarrow 0 \text{ khi } |n| \rightarrow \infty.$$

Điều xảy ra từ Hệ quả 3.3.2 là $f \equiv 0$.

Vì vậy, phương trình (4.7) trở thành

$$F(u(.,0))(\alpha) = 0 \text{ với mọi } \alpha \in \mathfrak{i},$$

và do đó $u(.,0) \equiv 0$.

Như đã biết, phương trình truyền nhiệt thuần nhất với điều kiện đầu tầm thường $u(.,0) \equiv 0$ chỉ có nghiệm tầm thường $u \equiv 0$.

Do đó $(u_1, f_1) = (u_2, f_2)$.

Bài toán (4) mà chúng tôi đề cập là bài toán không chỉnh một cách khắt khe, và do đó sự chỉnh hóa là cần thiết.

Giả sử rằng

$$(u_0, f_0) \in (C^1([0, T]; L^1(0, 1)) \cap L^2((0, T); H^2(0, 1)), L^2(0, 1))$$

là nghiệm chính xác của (4) tương ứng với dữ liệu chính xác (φ_0, g_0) , trong đó φ_0 thỏa mãn (H) và $g_0 \in L^2(0, 1)$.

Cho sẵn dữ liệu $(\varphi_\varepsilon, g_\varepsilon) \in (L^1(0, T), L^2(0, 1))$ thỏa mãn

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\|_{L^1(0, T)} \leq \varepsilon \text{ và } \|g_\varepsilon - g_0\|_{L^2(0, 1)} \leq \varepsilon.$$

Mục đích của chúng tôi là xây dựng, từ $(\varphi_\varepsilon, g_\varepsilon)$, một nghiệm chỉnh hóa f_ε xấp xỉ f_0 . Chúng ta sẽ sử dụng một chương trình tương tự như trong Định lý 4.2.2.

Định lý 4.3.4. (Sự chỉnh hóa) Giả sử rằng $f_0 \in H^1(0, 1)$. Định nghĩa

$$H_\varepsilon(y) = \begin{cases} \frac{F(g_\varepsilon)(y)}{D(\varphi_\varepsilon)(y)}, & D(\varphi_\varepsilon)(y) \neq 0, \\ 0, & D(\varphi_\varepsilon)(y) = 0, \end{cases}$$

$$r_\varepsilon = \left\lceil \frac{2}{9} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right\rceil, \quad M_\varepsilon = \pi^2 \sqrt[6]{\frac{1}{\varepsilon}},$$

$$A_\varepsilon = \{ \pm(r_\varepsilon + j) \mid j = 1, 2, \dots, 4r_\varepsilon \},$$

$$F_\varepsilon(n) = \begin{cases} L[A_\varepsilon; H_\varepsilon], & 0 \leq n\pi < r_\varepsilon, \\ H_\varepsilon(n\pi), & r_\varepsilon \leq n\pi < M_\varepsilon, \end{cases}$$

$$f_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(0) + 2 \sum_{1 \leq n \leq M_\varepsilon} F_\varepsilon(n) \cos(n\pi x).$$

Khi đó, chúng ta có sai số ước lượng

$$\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(0, 1)} \leq C_0 \sqrt{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)} \varepsilon^{\frac{1}{9}},$$

trong đó C_0 là viết tắt của một hằng số chỉ phụ thuộc vào dữ liệu chính xác.

Chứng minh. Ý tưởng chính của chứng minh là tương tự như một phần của Định lý 4.2.2.

Bước 1. So sánh $F(v_0)(n\pi)$ và $F(v_\varepsilon)(n\pi)$ với $0 \leq n\pi \leq M_\varepsilon$.

Đầu tiên, chúng ta xét $y \in \mathbb{I}$ sao cho $r_\varepsilon \leq |y| \leq M_\varepsilon$. Cho $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, do Bổ đề 4.3.2 chúng ta có

$$|D(\varphi_0)(y)| \geq \frac{C_1}{y^2} \quad (4.8)$$

với $C_1 > 0$ là một hằng số chỉ phụ thuộc vào φ_0 , và

$$\begin{aligned} |D(\varphi_\varepsilon)(y)| &\geq |D(\varphi_0)(y)| - |D(\varphi_0)(y) - D(\varphi_\varepsilon)(y)| \\ &\geq \frac{C_1}{y^2} - \varepsilon \geq \frac{C_1}{2y^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Điều xảy ra từ (5) và (4.8) là

$$\begin{aligned} |F(f_0)(y) - H_0(y)| &= e^{-y^2 T} \left| \frac{F(u(.,0)(y))}{D(\varphi_0)(y)} \right| \\ &\leq \frac{y^2 e^{-y^2 T}}{C_1} \|F(u(.,0))\|_{L^\infty} \leq C_0 \varepsilon \end{aligned} \quad (4.10)$$

do $e^{-|y|} \leq e^{-|r_\varepsilon|} \leq e^{\frac{2}{9}}$.

Hơn nữa, sử dụng (4.8), (4.9), chúng ta có ước lượng từ sự tính toán trực tiếp

$$|H_0(y) - H_\varepsilon(y)| = \left| \frac{F(g_0)(y)}{D(\varphi_0)(y)} - \frac{F(g_\varepsilon)(y)}{D(\varphi_\varepsilon)(y)} \right| \leq C_0 y^4 \varepsilon. \quad (4.11)$$

Sử dụng (4.10), (4.11) và bất đẳng thức tam giác, chúng ta có

$$|F(f_0)(y) - H_0(y)| \leq C_0 y^4 \varepsilon \text{ nếu } r_\varepsilon \leq |y| \leq M_\varepsilon.$$

Đặc biệt, chúng ta có

$$|F(f_0)(n\pi) - F(f_\varepsilon)(n\pi)| \leq C_0 M_\varepsilon^4 \varepsilon = C_0 \pi^8 \varepsilon^{\frac{1}{3}} \text{ nếu } r_\varepsilon \leq n\pi \leq M_\varepsilon, \quad (4.12)$$

và

$$\max_{n \in A_\varepsilon} |F(f_0)(n) - H_\varepsilon(n)| \leq C_0 (5r_\varepsilon)^4 \varepsilon.$$

Điều xảy ra từ Định lý 3.3.1 và bất đẳng thức trên là nếu $0 \leq y \leq r_\varepsilon$ thì

$$|F(f_0)(y) - L[A_\varepsilon; H_\varepsilon](y)| \leq \|F(f_0)\|_{L^2(0,1)} e^{\frac{r_\varepsilon}{2}} + 8r_\varepsilon e^{3.96r_\varepsilon} C_0 (5r_\varepsilon)^4 \varepsilon.$$

Chọn $y = n\pi$ và sử dụng $e^{-\frac{2}{9}} \leq e^{r_\varepsilon} \leq e\varepsilon^{\frac{2}{9}}$, chúng ta nhận được

$$|F(f_0)(n\pi) - F(f_\varepsilon)(n\pi)| \leq C_0 \varepsilon^{\frac{1}{9}} \text{ nếu } 0 \leq n\pi \leq r_\varepsilon. \quad (4.13)$$

Bước 2. Áp dụng đẳng thức Parseval-Plancherel, ta có

$$\|f_0 - f_\varepsilon\|_{L^2(0,1)}^2$$

$$= \left| F(f_0)(0) - F(f_\varepsilon)(0) \right|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| F(v_0)(n\pi) - F(v_\varepsilon)(n\pi) \right|^2. \quad (4.14)$$

Chúng ta có

$$\sum_{0 \leq n\pi \leq r_\varepsilon} \left| F(v_0)(n\pi) - F(v_\varepsilon)(n\pi) \right|^2 \leq C_0 r_\varepsilon e^{\frac{2}{9}} \quad (4.15)$$

do (4.12) và

$$\sum_{r_\varepsilon \leq n\pi \leq M_\varepsilon} \left| F(v_0)(n\pi) - F(v_\varepsilon)(n\pi) \right|^2 \leq C_0 \sqrt{\varepsilon} \quad (4.16)$$

do (4.13). Cuối cùng

$$\begin{aligned} \sum_{n\pi > M_\varepsilon} \left| F(f_0)(n\pi) - F(f_\varepsilon)(n\pi) \right|^2 &= \sum_{n\pi > M_\varepsilon} \left| F(f_0)(n\pi) \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{M_\varepsilon^2} \sum_{n\pi > M_\varepsilon} n^2 \pi^2 \left| F(f_0)(n\pi) \right|^2 \\ &\leq \|f'\|_{L^2}^2 \varepsilon^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Từ (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), chúng ta kết luận rằng

$$\|f_0 - f_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq C_0^2 r_\varepsilon e^{\frac{2}{9}} \leq C_0^2 \ln(\varepsilon^{-1}) \varepsilon^{\frac{2}{9}}.$$

Chúng minh được hoàn thành.

Chú ý 4.3.5. Sai số ước lượng trong Định lý 4.3.4, là $\sqrt{\ln(\varepsilon^{-1})} \varepsilon^{\frac{1}{9}}$, là một cải tiến đáng kể so với sai số ước lượng trong định lý chỉnh hóa thứ hai của [27], đó là $\sqrt{\ln(\varepsilon^{-1})} \varepsilon^{\frac{1}{9}}$. Hơn nữa, trong [27] các tác giả đã phải đòi hỏi thêm điều kiện đầu $u(., 0)$.

4.4. Thực nghiệm số

Để thấy hiệu quả của phương pháp, chúng ta hãy xem xét một ví dụ cho bài toán nguồn nhiệt ngược (4). Chọn $T=1$ và dữ liệu chính xác

$$\varphi_0(t) = e^{t-1}, \quad g_0(x) = 2x^3 - 3x^2 - \cos(\pi x).$$

Khi đó, nghiệm chính xác của (4) là

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= e^{t-1} (2x^3 - 3x^2 - \cos(\pi x)), \\ f_0(x, t) &= 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6 - (1 + \pi^2) \cos(\pi x). \end{aligned}$$

Với mỗi số nguyên $n \geq 1$, hãy xem xét các dữ liệu bị nhiễu

$$\varphi_n(t) = \varphi_0(t), \quad g_n(x) = g_0(x) + \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \frac{\sin^2(n\pi x)}{n}.$$

Khi đó, nghiệm bị nhiễu tương ứng với dữ liệu bị nhiễu là

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x, t) + e^{t-1} \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \frac{\sin^2(n\pi x)}{n}, \\ \tilde{f}_n(x) &= f_0(x) + \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \frac{(4n^2\pi^2 + 1)\sin^2(n\pi x) - 2n^2\pi^2}{n} \end{aligned}$$

Chúng ta thấy rằng

$$\|g_n - g_0\|_{L^2(0,1)} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty$$

nhưng

$$\|\tilde{f}_n - f_0\|_{L^2(0,1)} = \frac{\sqrt{16\pi^4 n^4 + 8\pi^2 n^2 + 3}}{\sqrt{3n}} \rightarrow +\infty \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Do đó, nếu n lớn thì là một sai số nhỏ của dữ liệu gây ra một sai số lớn của nghiệm. Vì vậy, bài toán là không chỉnh và sự chỉnh hóa là cần thiết.

Bây giờ, chúng ta sử dụng chương trình trong Định lý 4.3.4 đối với $\varepsilon = n^{-1}$ để tính toán nghiệm chỉnh hóa. Tương ứng với $\varepsilon_k = 10^{-k}$, chúng ta có được nghiệm chỉnh hóa sau đây

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon_1}(x) &= -0.448859 - 5.513525 \cos(\pi x) + 0.546463 \cos(3\pi x), \\ f_{\varepsilon_2}(x) &= -0.5007813 - 5.513525 \cos(\pi x) + 0.546463 \cos(3\pi x) + 0.195325 \cos(5\pi x), \\ f_{\varepsilon_3}(x) &= -0.512356 - 5.513525 \cos(\pi x) + 0.546463 \cos(3\pi x) + 0.195325 \cos(5\pi x) \\ &\quad + 0.099459 \cos(7\pi x) + 0.060117 \cos(9\pi x). \end{aligned} \quad \text{Sai số}$$

giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác được xác định bởi Bảng 4.1.

Hình 4.1 đưa ra một so sánh trực quan giữa nghiệm chỉnh hóa tương ứng với $\varepsilon = \varepsilon_1 := 10^{-1}$ và nghiệm chính xác.

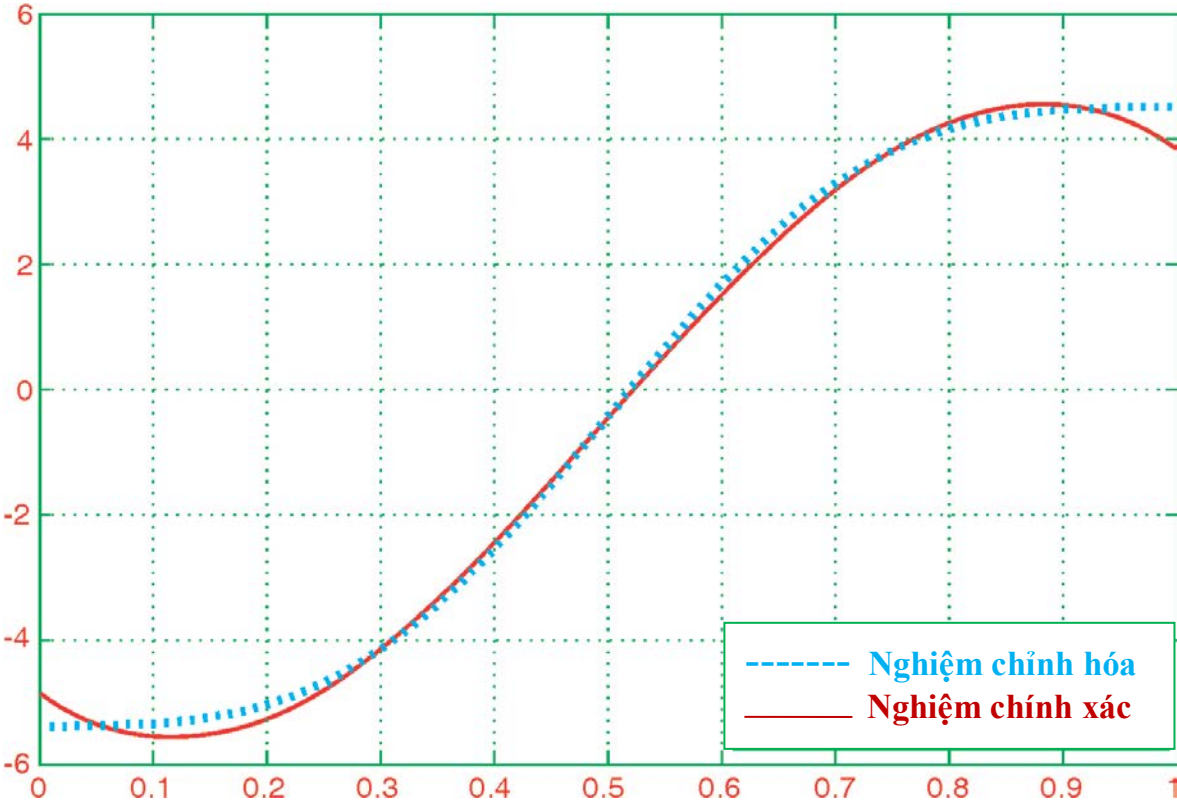
Lưu ý rằng, nghiệm bị nhiễu tương ứng với $\varepsilon = \varepsilon_1 := 10^{-1}$ gây ra một sai số lớn

$$\|\tilde{f}_{\varepsilon_1} - f_0\|_{L^2} \approx 227.9865.$$

$\varepsilon = n^{-1}$	$\ f_0 - f_\varepsilon\ _{L^2}$	$\frac{\ f_0 - f_\varepsilon\ _{L^2}}{\ f_0\ _{L^2}}$
$\varepsilon_1 = 10^{-1}$	0.1742974617	0.04409277801
$\varepsilon_2 = 10^{-2}$	0.09321430861	0.02358082429
$\varepsilon_3 = 10^{-3}$	0.04569371374	0.01155933515

$\varepsilon_4 = 10^{-4}$	0.02675238031	0.006767664629
$\varepsilon_5 = 10^{-5}$	0.01374434647	0.003476966399

Bảng 4.1. Sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác.



Hình 4.1. Nghiệm chỉnh hóa f_{ε_1} và nghiệm chính xác.

KẾT LUẬN

Luận văn của chúng tôi trình bày bài toán khôi phục trong lý thuyết hàm nguyên. Cụ thể là khôi phục một lớp hàm nguyên từ các giá trị của chúng trên một tập hợp các điểm nguyên. Các kết quả này được áp dụng để kiểm tra hai bài toán liên quan đến phương trình truyền nhiệt: bài toán đầu tiên là việc giải một phương trình truyền nhiệt mà không có điều kiện đầu hoặc điều kiện cuối, và bài toán thứ hai là việc xác định nguồn nhiệt của một bài toán nhiệt ngược thời gian.

Các kết quả trình bày trong Luận văn này không mới, tất cả đều được phát biểu và chứng minh hoặc định hướng trong một số tài liệu tham khảo. Điều mà Luận văn đã thực hiện được là trình bày và chứng minh một cách chi tiết hơn. Đồng thời, đã vận dụng được một số kết quả ở một số tài liệu tham khảo với sự nhiệt tình giúp đỡ và góp ý của Thầy hướng dẫn.

Qua Luận văn này, bản thân tôi đã học tập được rất nhiều điều bổ ích với công tác nghiên cứu khoa học và hiểu được sâu sắc những kiến thức mà bản thân đã được lãnh nhận từ tất cả Quý Thầy Cô tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán Giải tích khóa 19 đã truyền thụ trong suốt quá trình học tập.

Mặc dù, tôi đã có nhiều cố gắng trong học tập và nghiên cứu, nhưng do thời gian hạn chế và kiến thức bản thân còn rất nhiều giới hạn, tác giả Luận văn chưa đưa ra được nhiều ứng dụng thực tiễn bằng các thực nghiệm số và đây cũng là hạn chế của Luận văn.

Hướng phát triển của Luận văn là nghiên cứu bài toán khôi phục trong Lý thuyết hàm giải tích.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Đ. Đ. Áng, T. L. Cường, H. B. Lân, N. V. Nhân, *Biến đổi tích phân*, Nxb Giáo dục, 2001.
- [2] P. Borwein and T. Erdelyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1995.
- [3] H. Brezis (Người dịch: N. H. Nghĩa, N. T. Long), *Giải tích hàm - Lý thuyết và Ứng dụng*, Nxb Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2002.
- [4] J. R. Cannon, Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data, *SIAM J. Numer. Anal.* **5** (1968), 275-286.
- [5] J. R. Cannon and S. P. Esteva, Some stability estimates for a heat source in terms of over specified data in the 3-D heat equation, *J. Math. Anal. Appl.* **147** (2) (1990), 363-371.
- [6] J. R. Cannon and S. P. Esteva, Uniqueness and stability of 3D heat source, *Inverse Problems* **7** (1) (1991), 57-62.
- [7] M. Choulli and M. Yamamoto, Conditional stability in determining a heat source, *J. Inverse Ill-Posed Problems* **12** (3) (2004), 233-243.
- [8] P. Duchateau và D. W. Zachmann, *Theory and problems of Partial Differential Equations*, Mc Graw-Hill.
- [9] D. M. Đức, *Giải tích hàm*, Nxb Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2005.
- [10] G. Evans, J. Blackledge and P. Yardley, *Analytic Methods for Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [11] A. Farcas and D. Lesnic, The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable, *J. Engrg. Math.* **54** (4) (2006), 375-388.
- [12] R. V. Guseinov, Problem without initial conditions for the heat equation, *Mat. Zametki*, **76** (6) (2004), 824-832, translation in *Math. Notes* **76** (5-6) (2004), 770-777.
- [13] V. M. Kirilich and A. D. Myshkis, A boundary value problem without initial conditions for a linear one-dimensional system of hyperbolic-type equations, *Differentsial'nye Uravneniya* **28** (3) (1992), 463-469, 548-549; translation in *Differential Equations* **28** (3) (1992), 393-399.
- [14] B. Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*, Trans. Math. Monographs, Vol.150, AMS, Providence, Rhode Island, 1996.
- [15] N. X. Liêm, *Giải tích hàm*, Nxb Giáo dục, 1997.
- [16] P. H. Quân, Đ. H. Tâm, Đ. N. Thanh, Đ. Đ. Trọng, *Giáo trình Giải tích hàm*, 2011.
- [17] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, 1995.

- [18] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [19] D. Safarov, Problem without initial conditions for nonclassical system, *Differentsial'nye Uravneniya i Primenen.* **45** (1990), 59-67.
- [20] S. Saitoh, V. K. Tuan, and M. Yamamoto, Reverse convolution inequalities and applications to inverse heat source problems, *JIPAM. J. Inequal. Pure. Appl. Math.* **3** (5) (2002), Article 80 (electronic).
- [21] S. Saitoh, V. K. Tuan, and M. Yamamoto, Convolution inequalities and applications, *JIPAM. J. Inequal. Pure. Appl. Math.* **4** (3) (2003), Article 50 (electronic).
- [22] A. Shidfar, A. Zakeri, and A. Neisi, A two-dimensional inverse heat conduction problem for estimating heat source, *Int. J. Math. Math. Sci.* (10) (2005), 1933-1941.
- [23] I. I. Shmulev, Bounded solutions of boundary-value problems without initial conditions for parabolic equations and inverse boundary-value problems, *Dokl. Akad. Nauk SSSR [Soviet Math. Dokl.]*, **142** (1) (1962), 46-49.
- [24] P. T. Tào, *Giáo trình Matlab*, Nxb Đại học Đà Nẵng, 2004.
- [25] A. N. Tikhonov, Uniqueness theorems for the heat equation, *Math. Sb. [Math. USSR-Sb.]*, **42** (2) (1935), 199-216.
- [26] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin (Translation Editor: Fritz John), *Solution of Ill-Posed Problem*, V. H. Winston & Sons, Washington D.C, 1977.
- [27] D. D. Trong, N. T. Long, and P. N. Dinh Alain, Nonhomogeneous heat equation: Identification and regularization for the inhomogeneous term, *J. Math. Anal. Appl.* **312** (2005), 93-104.
- [28] D. D. Trong, P. H. Quan, and P. N. Dinh Alain, Determination of a two-dimensional heat source: Uniqueness, regularization and error estimate, *J. Comput. Appl. Math.* **191** (1) (2006), 50-67.
- [29] P. Wang and K. Zheng, Determination of the source/sink term in a heat equation, *Fourth Mississippi State Conference on Differential Equations and Computational Simulations, Electronic J. Diff. Equations*, Conference 03 (1999), 119-125.
- [30] P. Wang and K. Zheng, Reconstruction of spacial heat source in heat conduction problems, *Appl. Anal.* **85** (5) (2006), 459-465.
- [31] M. Yamamoto, Conditional stability in determination of force terms of heat equations in a rectangle, *Math. Comput. Modelling* **18** (1) (1993), 79-88.

- [32] M. Yamamoto, Conditional stability in determination of densities of heat source in a bounded domain, *Control and estimation of distributed parameter systems: nonlinear phenomena* (Vorau, 1993), 359-370, *Internat. Ser. Numer. Math.* **118**, Birkhauser, Basel, 1994.
- [33] M. Yamamoto and J. Zou, Simultaneous reconstruction of the initial temperature and heat radiative coefficient, *Inverse Problems* **17** (4) (2001), 1181-1202.