

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Nguyễn Thị Mộng Tuyền

LỚP CÁC MD5-ĐẠI SỐ
VỚI IDEAL DẪN XUẤT KHÔNG GIAO HOÁN VÀ
CÁC MD5-NHÓM TƯƠNG ỨNG

Chuyên ngành: **Hình học và Tô pô**

Mã số: **60 46 10**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS. LÊ ANH VŨ

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của **PGS. TS Lê Anh Vũ**, người thầy kính yêu đã nhiệt tình giúp tác giả tiếp cận với lý thuyết biểu diễn nhóm Lie, đại số Lie và nhiều kiến thức quan trọng khác trong suốt quá trình tác giả học cao học. Từ đó, tác giả đã giải quyết được bài toán của mình để hoàn thành luận văn tốt nghiệp. Tác giả xin chân thành tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy, người thầy luôn tận tâm và nghiêm khắc đã giúp tác giả trưởng thành rất nhiều về mặt tri thức.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn:

Quý Thầy trong hội đồng phản biện đã dành thời gian đọc luận văn và cho nhiều nhận xét hữu ích.

Quý Thầy Cô khoa Toán Tin ở trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh đã truyền đạt cho tác giả những kiến thức quý báu, và cần thiết để tác giả nâng cao trình độ chuyên môn, phương pháp làm việc hiệu quả trong quá trình học tập cũng như giảng dạy.

Quý Thầy Cô ở Phòng Khoa học Công nghệ và Sau Đại học, Thư viện của trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh đã giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn tại trường.

Quý Thầy Cô khoa Tiểu học Mầm non, khoa Toán học, Ban giám hiệu trường Đại học Đồng Tháp đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả đi học, nghiên cứu và làm luận văn.

Các tác giả của các tài liệu mà tác giả đã tham khảo.

Cuối cùng, xin chân thành cảm ơn gia đình, thầy cô, đồng nghiệp và các bạn học viên cao học đã động viên giúp đỡ tác giả trong thời gian học tập và làm luận văn.

TP. Hồ Chí Minh, tháng 8 năm 2010

Nguyễn Thị Mộng Tuyền

MỤC LỤC

LỜI CẢM TẠ.....	2
MỤC LỤC.....	3
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU.....	4
MỞ ĐẦU	5
Chương 1 :LỚP CÁC MDn-NHÓM VÀ MDn-ĐẠI SỐ.....	8
1.1.Nhóm Lie.....	8
1.2.Đại số Lie.....	9
1.2.1.Khái niệm cơ bản về đại số Lie.....	9
1.2.2.Đại số Lie con và ideal.....	11
1.2.3.Đồng cấu đại số Lie.....	12
1.2.4.Biểu diễn chính quy của đại số Lie.....	13
1.2.5.Đại số Lie giải được và đại số Lie lũy linh.....	13
1.3.Sự liên hệ giữa nhóm Lie và đại số Lie.....	14
1.3.1.Đại số Lie tương ứng với một nhóm Lie đã cho.....	14
1.3.2.Nhóm Lie liên thông đơn liên tương ứng với đại số Lie.....	15
1.3.3.Ảnh xạ mũ exponent.....	16
1.4.Biểu diễn phụ hợp và K-biểu diễn lớp MD-nhóm và MD-đại số.....	16
1.4.1.K-biểu diễn của một nhóm Lie.....	16
1.4.2.Các MDn-nhóm và MDn-đại số.....	18
CHƯƠNG 2 : LỚP CÁC MD5-ĐẠI SỐ VỚI IDEAL DẪN XUẤT GIAO HOÁN	19
2.1.Định lý về sự phân loại.....	19
2.2.Một số bổ đề.....	22
2.3.Chứng minh định lý 2.1.....	24
CHƯƠNG 3: MD5-ĐẠI SỐ VỚI IDEAL DẪN XUẤT KHÔNG GIAO HOÁN.....	37
3.1. Một vài bổ đề.....	37
3.2. MD5-đại số với ideal dẫn xuất không giao hoán.....	39
3.2.1. Một vài ví dụ về MD5-đại số với ideal dẫn xuất thứ nhất không giao hoán 3-chiều.....	39
3.2.2. MD5-đại số với ideal dẫn xuất không giao hoán 4 chiều.....	41
3.3. Bức tranh hình học các K-quỹ đạo của các MD5-nhóm tương ứng với các MD5-đại số đã xét.....	45
3.3.1. Phương pháp mô tả các K-quỹ đạo.....	45
3.3.1.1. Khái niệm K-quỹ đạo của nhóm Lie.....	45
3.3.1.2. Một số bổ đề.....	46
3.3.2. Bức tranh hình học các K-quỹ đạo của các MD5-nhóm liên thông đơn liên mà các MD5-đại số tương ứng có ideal dẫn xuất thứ nhất không giao hoán 3 chiều.....	47
KẾT LUẬN.....	50
TÀI LIỆU THAM KHẢO	51

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

$Aut(V)$: Nhóm các tự đẳng cấu trên không gian vector V .

$Aut(\mathcal{G})$: Nhóm các tự đẳng cấu tuyến tính trên $\mathcal{G}$.

$b(n, \mathbb{K})$: Không gian các ma trận tam giác trên trường $\mathbb{K}$.

$\mathbb{C}$: Trường số phức.

$C^\infty(V)$: Không gian các hàm khả vi vô hạn lần trên đa tạp V .

$End(V)$: Không gian các đồng cấu trên đa tạp V .

$\exp$: Ánh xạ mũ $\exp$.

G : Nhóm Lie.

$\mathcal{G}^*$: Không gian đối ngẫu của đại số Lie $\mathcal{G}$.

$GL(n, \mathbb{R})$: Nhóm tuyến tính tổng quát cấp n hệ số thực.

$\mathfrak{gl}(V)$: Đại số Lie tuyến tính tổng quát.

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$: Đại số Lie các ma trận cấp n trên $\mathbb{K}$.

$Lie(G)$: Đại số Lie của nhóm Lie G .

$Mat(n, \mathbb{R})$: Tập hợp các ma trận vuông cấp n hệ số thực.

$n(n, \mathbb{K})$: Không gian các ma trận tam giác trên chặt chẽ cấp n trên trường $\mathbb{K}$.

$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$: Không gian các ma trận cấp n có vết bằng không trên trường $\mathbb{K}$.

$\mathbb{R}$: Trường số thực.

$tr(A)$: Vết của ma trận A .

$Z(\mathcal{G})$: Tâm của đại số Lie $\mathcal{G}$.

Ω_F : Quỹ đạo Kirillov qua F .

MỞ ĐẦU

Vấn đề mà chúng tôi quan tâm có nguồn gốc từ bài toán mô tả cấu trúc các C^* -đại số bằng phương pháp K -hàm tử.

Năm 1943, I. Gelfand và A. Naimark đưa ra khái niệm C^* -đại số. Các C^* -đại số nhanh chóng tìm thấy nhiều ứng dụng trong Toán học cũng như trong Vật lý, Cơ học. Tuy nhiên, chính vấn đề mô tả cấu trúc C^* -đại số trong trường hợp tổng quát lại rất phức tạp và cho đến nay vẫn còn là bài toán mở.

Năm 1974, Đỗ Ngọc Diệp đã sử dụng các K -hàm tử đồng điều Brown-Douglas-Fillmore (còn gọi là K -hàm tử BDF) để đặc trưng C^* -đại số $C^*(\text{Aff } \mathbb{R})$ của nhóm các phép biến đổi Affine trên đường thẳng thực $\mathbb{R}$. Bởi thế phương pháp mô tả cấu trúc C^* -đại số bằng các K -hàm tử BDF còn được gọi là phương pháp của Đỗ Ngọc Diệp. Năm 1975, J. Rosenberg đã sử dụng phương pháp này để mô tả C^* -đại số $C^*(\text{Aff } \mathbb{C})$ của nhóm các phép biến đổi Affine trên đường thẳng phức $\mathbb{C}$ và C^* -đại số của một vài nhóm Lie giải được khác. Năm 1977, Đỗ Ngọc Diệp đã cải tiến phương pháp của mình để đặc trưng các C^* -đại số kiểu I bằng các mở rộng lặp nhiều tầng. Đến lúc này, các K -hàm tử BDF dường như không còn thích hợp với việc mô tả C^* -đại số của các nhóm Lie khác cũng như các C^* -đại số khác nữa. Một cách tự nhiên nảy sinh hai vấn đề lớn.

- **Vấn đề 1:** Tổng quát hóa các K -hàm tử BDF theo cách nào đó để có thể mô tả được một lớp rộng hơn các C^* -đại số.
- **Vấn đề 2:** Tìm lớp các C^* -đại số hoặc lớp các nhóm Lie mà C^* -đại số của chúng có khả năng mô tả được bằng các K -hàm tử mở rộng.

Năm 1980, G. G. Kasparov đã nghiên cứu vấn đề thứ nhất và thành công trong việc tổng quát hóa các K -hàm tử BDF thành các K -song hàm tử toán tử (còn gọi là các KK -hàm tử) vừa đồng điều vừa đối đồng điều. Ngay sau đó, Kasparov đã sử dụng các KK -hàm tử của mình để mô tả C^* -đại số $C^*(H_3)$ của nhóm Heisenberg H_3 .

Vấn đề thứ hai có liên quan mật thiết với một phương pháp nổi tiếng và đóng vai trò then chốt trong lý thuyết biểu diễn nhóm Lie – đó là phương pháp quỹ đạo do Kirillov khởi xướng vào năm 1962. Năm 1980, chính phương pháp quỹ đạo của Kirillov đã gợi ý để Đỗ Ngọc Diệp đề nghị xét lớp các MD -đại số và MD -nhóm. Lớp này rất đơn giản về phương diện phân tầng các K -quỹ đạo, nên nói chung C^* -đại số của chúng có thể mô tả được nhờ các KK -hàm tử.

Giả sử G là một nhóm Lie thực giải được n chiều (n là số tự nhiên dương). G được gọi là một MDn -nhóm nếu các K -quỹ đạo của nó hoặc không chiều hoặc có số chiều là một hằng số k (chẵn) nào đó không vượt quá n . Khi $k = n$ thì G còn được gọi là một $\overline{MDn}$ -nhóm. Đại số Lie(G) của mỗi MDn -nhóm (tương ứng $\overline{MDn}$ -nhóm) được gọi là một MDn -đại số (tương ứng $\overline{MDn}$ -đại số). Rõ ràng lớp các $\overline{MD}$ là con của MD . Đến đây, một bài toán lớn được đặt ra là phân loại các MD -đại số đồng thời mô tả C^* -đại số của các MD -nhóm bằng phương pháp KK -hàm tử.

Năm 1984, Hồ Hữu Việt đã phân loại triệt để các $\overline{MDn}$ -đại số. Lớp này chỉ gồm các đại số Lie giao hoán $\mathbb{R}^n$, đại số Lie(Aff $\mathbb{R}$) và đại số Lie(Aff $\mathbb{C}$). Ngay sau đó, Hồ Hữu Việt đã dùng phương pháp KK -hàm tử để mô tả $C^*(\widetilde{\text{Aff}\mathbb{C}})$ của $\widetilde{\text{Aff}\mathbb{C}}$, ở đó $\widetilde{\text{Aff}\mathbb{C}}$ là phủ phổ dụng của nhóm Aff $\mathbb{C}$. Như vậy, cùng với các kết quả có trước của Đỗ Ngọc Diệp và Rosenberg, bài toán đối với các $\overline{MD}$ -đại số và $\overline{MD}$ -nhóm xem như đã được giải quyết triệt để.

Thế còn các MD -đại số và MD -nhóm thì sao? Đáng tiếc là đối với chúng, vấn đề trở nên phức tạp hơn nhiều. Chú ý rằng mọi nhóm (tương ứng đại số) Lie thực giải được không quá 3-chiều đều là MD -nhóm (tương ứng, MD -đại số), hơn nữa chúng đã được liệt kê hết từ lâu trong lý thuyết đại số Lie. Bởi vậy, chúng ta chỉ cần bắt đầu từ các MDn -nhóm với $n \geq 4$.

Trong các năm 2005 - 2007, Lê Anh Vũ đã phân loại (chính xác đến đẳng cấu đại số Lie) tất cả các $MD5$ -đại số với ideal dẫn xuất giao hoán ba và bốn chiều. Năm 2008, Lê Anh Vũ và Kar Ping Shum đã phân loại tất cả các $MD5$ -đại số với ideal dẫn xuất giao hoán chiều không quá bốn.

Ngoài ra, chúng ta quan tâm nghiên cứu các MD -nhóm và MD -đại số còn do sự kiện quan trọng sau đây: đối với mỗi MD -nhóm, họ các K -quỹ đạo chiều cực đại của nó tạo thành phân lá đo được theo nghĩa của A. Connes. Các phân lá này được gọi là các MD -phân lá liên kết với các MD -nhóm đã xét. Phân lá là khái niệm xuất xứ từ lý thuyết các phương trình vi phân nhưng kể từ công trình của G. Reed năm 1952, lý thuyết các phân lá đã trở thành một nhánh thuộc lĩnh vực Tôpô – Hình học và nhanh chóng phát triển. Năm 1982, nghiên cứu các đa tạp phân lá, A. Connes đưa ra khái niệm phân lá đo được và gắn mỗi phân lá đo được với một C^* -đại số mà được gọi là C^* -đại số của phân lá đó. Lập tức nảy sinh câu hỏi là liệu các C^* -đại số phân lá có thích hợp với phương

pháp *KK-hàm tử* hay không? Câu trả lời là khẳng định. Năm 1985, A. M. Torpe đã dùng các *KK-hàm tử* để mô tả thành công C^* -đại số của các phân lá Reed trên xuyên 2-chiều. Đến đây, lại xuất hiện thêm bài toán mô tả C^* -đại số của các *MD-phân lá*.

Đây là những lí do cơ bản để chúng tôi quan tâm nghiên cứu lớp các *MD-đại số* và *MD-nhóm*. Cụ thể, trước hết chúng tôi sẽ tìm hiểu về lớp *MD5-đại số* với ideal dẫn xuất giao hoán mà Lê Anh Vũ và Kar Ping Shum đã phân loại rồi dựa vào kỹ thuật của họ và cải tiến (nếu cần), chúng tôi sẽ giới thiệu một vài *MD5-đại số* với ideal dẫn xuất không giao hoán và xét các *MD5-nhóm* tương ứng cùng một số vấn đề liên quan. Bởi thế, đề tài của chúng tôi mang tên “**lớp các MD5-đại số với ideal dẫn xuất không giao hoán và các MD5-nhóm tương ứng**”.

Nội dung của luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương nội dung và phần kết luận. Cụ thể:

Phần mở đầu: Nêu xuất xứ của vấn đề và đặt bài toán nghiên cứu.

Chương 1: Giới thiệu các khái niệm cơ bản về nhóm Lie, đại số Lie, K-biểu diễn của nhóm Lie và lớp các MD-nhóm, MD-đại số.

Chương 2: Chương này trình bày chi tiết về định lý phân loại các MD5-đại số với ideal dẫn xuất giao hoán đã được Lê Anh Vũ và Kar Ping Shum trình bày trong [Vu-Sh] và chứng minh một số trường minh định lý này.

Chương 3: Đưa ra ba MD5-đại số với ideal dẫn xuất thứ nhất không giao hoán 3 chiều và mô tả bức tranh hình học của các MD5-đại số này. Phần cuối của chương là trình bày mệnh đề chứng tỏ rằng không tồn tại một MD5-đại số nào với ideal dẫn xuất thứ nhất 4 chiều không giao hoán.

Phần kết luận: Đưa ra những nhận xét và những vấn đề mở cần phải tiếp tục nghiên cứu.

Chương 1 :LỚP CÁC MDn-NHÓM VÀ MDn-ĐẠI SỐ

Chương này chủ yếu đưa ra những cơ sở lý thuyết cho các kết quả nghiên cứu ở các chương sau, trong đó giới thiệu đối tượng nghiên cứu là lớp các MD5-nhóm và MD5-đại số mà chúng ta quan tâm. Trước hết, chúng ta sẽ nhắc lại các khái niệm cơ bản nhất về nhóm Lie và đại số Lie (thực). Nhiều mệnh đề, định lý được phát biểu nhưng không chứng minh. Độc giả nào quan tâm đến chứng minh hoặc muốn tìm hiểu sâu về các khái niệm xin xem các tài liệu [Bo], [Ki], [Ha-Sch].

1.1.Nhóm Lie.

Định nghĩa 1.1. Tập hợp G được gọi là một nhóm Lie nếu các điều kiện sau thỏa mãn:

- (i) G là một nhóm Lie.
- (ii) G là đa tạp khả vi.
- (iii) Phép toán nhóm $G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy^{-1}$ khả vi.

Ta không cần chú ý đến lớp khả vi của đa tạp G , vì rằng theo định lý Gleason-Montgomery-Zippin, trên mọi nhóm Lie lớp $\mathbb{C}^0$ (tức là đa tạp tôpô) có thể đưa vào đa tạp lớp $\mathbb{C}^\infty$ tương thích với cấu trúc nhóm.

Tùy vào đa tạp khả vi thực hay phức mà nhóm Lie được gọi là nhóm Lie thực hay phức. Nhóm Lie được G gọi là giao hoán nếu phép toán nhóm giao hoán. Chiều của nhóm Lie G chính là chiều của đa tạp khả vi G .

Vì nhóm Lie vừa có cấu trúc nhóm vừa là đa tạp khả vi nên có thể đưa nhiều công cụ của đại số, giải tích, tôpô, hình học vi phân,... để nghiên cứu cấu trúc của nhóm Lie.

Ví dụ 1.1

- a. Đường thẳng thực $\mathbb{R}$ với phép toán (+) thông thường là một nhóm Lie giao hoán.
- b. Đường tròn đơn vị S^1 với phép toán (.) (có thể xem S^1 là tập hợp các số phức có môđun bằng 1) là một nhóm Lie giao hoán.
- c. Tập hợp $GL(n, \mathbb{R})$ các ma trận vuông cấp n không suy biến với phép toán nhân ma trận cũng là một nhóm Lie (không giao hoán khi $n \geq 2$). Đặc biệt, khi $n = 1$ thì $GL(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$.
- d. Nếu G_1, G_2 là các nhóm Lie thì tích $G_1 \times G_2$ cũng là một nhóm Lie. Tương tự cho tích của nhiều nhóm Lie. Những trường hợp đặc biệt thường gặp là các nhóm Lie với phép cộng $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, xuyên n -chiều $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$.

e. Nhóm các phép biến đổi affine của đường thẳng thực $\mathbb{R}$ với tôpô tự nhiên chính là một nhóm Lie. Nhóm này được ký hiệu là $\text{aff } \mathbb{R}$. Cụ thể, nhóm $\text{aff } \mathbb{R} = \{(a, b) / a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$.

1.2. Đại số Lie.

1.2.1. Khái niệm cơ bản về đại số Lie.

Định nghĩa 1.2. Một không gian vector $\mathcal{A}$ trên trường $\mathbb{K}$ được gọi là một đại số trên $\mathbb{K}$ (hay $\mathbb{K}$ -đại số) nếu trên $\mathcal{A}$ có thêm phép nhân

$$\begin{aligned} (\cdot): \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

sao cho các tiên đề sau đây thỏa mãn:

(A₁) Phép nhân kết hợp: $(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in \mathcal{A}$

(A₂) Phép nhân song tuyến tính:

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)y = \lambda_1(x_1 y) + \lambda_2(x_2 y)$$

$$x(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1(xy_1) + \lambda_2(xy_2)$$

với $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, x_1, x_2, y_1, y_2, x, y \in \mathcal{A}$

Tùy vào trường $\mathbb{K}$ thực hay phức mà đại số $\mathcal{A}$ được gọi là đại số thực hay phức. Đại số $\mathcal{A}$ là giao hoán hay có đơn vị nếu phép nhân giao hoán hay có đơn vị. Số chiều của đại số $\mathcal{A}$ là số chiều của không gian vector $\mathcal{A}$.

Định nghĩa 1.3. Giả sử $\mathbb{K}$ là một trường nào đó. Một không gian vector $\mathcal{Q}$ trên trường $\mathbb{K}$ được gọi là một đại số Lie trên trường $\mathbb{K}$ (hay $\mathbb{K}$ -đại số Lie) nếu trên $\mathcal{Q}$ đã cho một phép nhân $[\cdot, \cdot]$ (được gọi là móc Lie),

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]: \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} &\rightarrow \mathcal{Q} \\ (x, y) &\mapsto [x, y] \end{aligned}$$

sao cho các tiên đề sau được thỏa mãn:

(L₁) Song tuyến tính:

$$[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] = \lambda_1[x_1, y] + \lambda_2[x_2, y]$$

$$[x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2] = \lambda_1[x, y_1] + \lambda_2[x, y_2]$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, x_1, x_2, y_1, y_2, x, y \in \mathcal{Q}$$

(L₂) Phản xứng: $[x, x] = 0, \forall x \in \mathcal{Q}$

(L₃) Thỏa mãn đồng nhất thức Jacobi:

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0, \forall x,y,z \in \mathcal{G}$$

Số chiều của đại số Lie $\mathcal{G}$ chính là số chiều của không gian vector $\mathcal{G}$. Khi trường $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ (hay phức $\mathbb{C}$) thì $\mathcal{G}$ được gọi là đại số Lie thực (hay phức).

Cho $\mathcal{G}$ là một không gian hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{K}$. Giả sử số chiều của $\mathcal{G}$ là n . Cấu trúc đại số Lie trên $\mathcal{G}$ có thể được cho bởi móc Lie của từng cặp vector thuộc cơ sở $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ đã chọn trước trên $\mathcal{G}$ như sau:

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Các hệ số c_{ij}^k , $1 \leq i < j \leq n$ được gọi là các hằng số cấu trúc của đại số Lie $\mathcal{G}$ trong cơ sở được chọn.

Nhận xét 1.1

(i) Nếu trường $\mathbb{K}$ có đặc số khác 2 thì ta dễ dàng kiểm tra được tiên đề (L_2) của định nghĩa 1.3 tương đương với (L_2') :

$$[x,y] = -[y,x], \quad \forall x,y \in \mathcal{G}$$

(ii) Nếu $[x,y] = 0, \forall x,y \in \mathcal{G}$, thì ta nói móc Lie là tầm thường và đại số Lie là giao hoán. Trên phép toán Lie nói chung phép nhân không giao hoán và không kết hợp.

Nội dung của luận văn chỉ đề cập và nghiên cứu các đại số Lie thực nên nếu không sợ nhầm lẫn thì ta vẫn dùng thuật ngữ đại số Lie để chỉ đại số Lie thực.

Ví dụ 1.2.

a. Không gian $\mathbb{R}^n$ với móc Lie $[x,y] \equiv 0$ (tầm thường) hiển nhiên là một đại số Lie. Đại số Lie mà móc Lie tầm thường, được gọi là đại số Lie giao hoán.

b. Không gian $\mathbb{R}^3$ với tích có hướng thông thường là một đại số Lie thực 3 chiều.

c. Cho $\mathcal{A}$ là một đại số trên trường $\mathbb{K}$. Với mọi cặp $(x,y) \in \mathcal{A}$, ta định nghĩa $[x,y] = xy - yx$, khi đó $\mathcal{A}$ trở thành một đại số Lie. Nói riêng, đại số Lie $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$ các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{K}$ là một đại số Lie với móc Lie $[A,B] = AB - BA, \forall A,B \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$, và được kí hiệu là $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

d. Đặc biệt, xét đại số các toán tử tuyến tính $\text{End}(V)$ trên $\mathbb{K}$ -không gian vector V . Khi đó, $\text{End}(V)$ trở thành đại số Lie với móc Lie được xác định như sau: $[A,B] = A \circ B - B \circ A, \forall A,B \in \text{End}(V)$. Đại số Lie này được gọi là đại số Lie tuyến tính tổng quát và được kí hiệu là $\mathfrak{gl}(V)$.

e. Cho $\mathcal{A}$ là một đại số trên trường $\mathbb{K}$. Toán tử tuyến tính $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ được gọi là toán tử vi phân trên $\mathcal{A}$ nếu:

$$\varphi(xy) = \varphi(x).y - x.\varphi(y)$$

Kí hiệu $Der(\mathcal{A})$ là tập hợp tất cả các toán tử vi phân trên $\mathcal{A}$. Khi đó $Der(\mathcal{A})$ trở thành một đại số trên $\mathbb{K}$ với phép toán hợp thành là phép nhân ánh xạ. $Der(\mathcal{A})$ sẽ trở thành một đại số Lie trên $\mathbb{K}$ với móc Lie được định nghĩa là:

$$[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1 \circ \varphi_2 - \varphi_2 \circ \varphi_1$$

$Der(\mathcal{A})$ gọi là đại số Lie các toán tử vi phân trên.

1.2.2. Đại số Lie con và ideal.

Định nghĩa 1.4.

(i) Không gian con $\mathcal{H}$ của đại số Lie $\mathcal{G}$ được gọi là đại số Lie con của $\mathcal{G}$, nếu $[x, y] \in \mathcal{H}$ với mọi $x, y \in \mathcal{H}$.

(ii) Không gian con $\mathcal{I}$ của đại số Lie $\mathcal{G}$ được gọi là ideal của $\mathcal{G}$ nếu $[x, y] \in \mathcal{I}$ với mọi $x \in \mathcal{G}$ và $y \in \mathcal{I}$.

Ví dụ 1.3.

(i) Xét đại số Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, kí hiệu

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) / \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0 \right\}$$

là không gian các ma trận vuông cấp n có vết bằng không (trong đó vết của ma trận vuông là tổng của các phần tử trên đường chéo chính) trong $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

$$\mathfrak{b}(n, \mathbb{K}) = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) / a_{ij} = 0, 1 \leq j < i \leq n \right\}$$

là không gian các ma trận tam giác trên trong $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

$$\mathfrak{n}(n, \mathbb{K}) = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) / a_{ij} = 0, 1 \leq j \leq i \leq n \right\}$$

là không gian các ma trận tam giác trên chặt chẽ trong $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Khi đó $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$, $\mathfrak{b}(n, \mathbb{K})$ và $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ đều là các đại số Lie con của $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Đặc biệt, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ là một ideal của $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ và $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ là một ideal của $\mathfrak{b}(n, \mathbb{K})$.

(ii) Đại số Lie các toán tử vi phân $Der(\mathcal{A})$ là đại số Lie con của $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.

(iii) Kí hiệu $Z(\mathcal{G})$ là tập hợp tất cả các phần tử giao hoán với $\mathcal{G}$, tức là $Z(\mathcal{G}) = \{x \in \mathcal{G} \mid [x, y] = 0, \forall y \in \mathcal{G}\}$ (được gọi là tâm của đại số Lie $\mathcal{G}$). Rõ ràng $Z(\mathcal{G})$ là một ideal của $\mathcal{G}$.

Nhận xét 1.2. Từ (i) của nhận xét 1.1, ta không cần phân biệt giữa ideal trái và phải. Và rõ ràng, một ideal thì luôn là một đại số con, nhưng nói chung điều ngược lại thì không đúng.

1.2.3. Đồng cấu đại số Lie.

Định nghĩa 1.5. Cho $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ là hai $\mathbb{K}$ -đại số Lie. Đồng cấu đại số Lie là ánh xạ $\mathbb{K}$ -tuyến tính $\varphi: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ sao cho φ bảo toàn móc Lie, tức là:

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \quad (\forall x, y \in \mathcal{G}_1)$$

Nếu φ là đẳng cấu tuyến tính thì đồng cấu đại số Lie φ được gọi là đẳng cấu đại số Lie.

Mệnh đề 1.1. Nếu $\varphi: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ là một đồng cấu đại số Lie thì:

- (i) Hạt nhân $\text{Ker} \varphi$ của φ là một ideal trong $\mathcal{G}_1$.
- (ii) Ảnh đồng cấu $\text{Im} \varphi$ là một đại số Lie con của $\mathcal{G}_2$.
- (iii) $\mathcal{G}_1 / \text{Ker} \varphi \cong \text{Im} \varphi$.

Nhận xét 1.3.

(i) Các đại số Lie trên trường $\mathbb{K}$ lập thành một phạm trù với các cấu xạ chính là các đồng cấu đại số Lie.

(ii) Mỗi đồng cấu đại số Lie $\varphi: \mathcal{G}_1 \rightarrow \text{End}(V)$ ($\text{End}(V)$ là đại số Lie các toán tử tuyến tính trên không gian vector V) được gọi là biểu diễn tuyến tính của $\mathcal{G}_1$ trong không gian vector V . Để đơn giản thì đôi khi người ta dùng thuật ngữ “biểu diễn” thay cho thuật ngữ “biểu diễn tuyến tính”. Khi φ là một đơn cấu thì φ được gọi là biểu diễn khớp.

Định lý 1.1 (định lý Ado)

Mọi đại số Lie hữu hạn chiều đều có ít nhất một biểu diễn tuyến tính khớp hữu hạn chiều.

Định lý quan trọng này nói lên rằng, có thể quy tất cả các phép chứng minh của đại số Lie về trường hợp đại số Lie ma trận.

1.2.4. Biểu diễn chính quy của đại số Lie

Cho $\mathcal{G}$ là một đại số Lie. Với mỗi $x \in \mathcal{G}$, kí hiệu ad_x là toán tử trong $Der(\mathcal{G})$ được xác định bởi: $ad_x(y) = [x, y]; \forall y \in \mathcal{G}$.

Khi đó ad_x là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ và ta thu được biểu diễn tuyến tính của $\mathcal{G}$ trong chính $\mathcal{G}$ như sau:

$$\begin{aligned} ad : \mathcal{G} &\rightarrow End(\mathcal{G}) \\ x &\mapsto ad_x \end{aligned}$$

Biểu diễn này được gọi là biểu diễn chính quy của $\mathcal{G}$. Hạt nhân của biểu diễn này là $Ker(ad) = \{x \in \mathcal{G} / ad_x \equiv 0\}$ chính là tâm của $\mathcal{G}$.

Ví dụ 1.4: Xét đại số Lie $\mathcal{G} = \mathbb{R}^3$ với móc Lie là tích có hướng thông thường. Khi đó biểu diễn chính quy của $\mathcal{G}$ được cho bởi ma trận như sau:

$$ad = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

Dễ thấy rằng, tâm của $\mathcal{G}$ là tầm thường, do đó biểu diễn ở đây là khớp. Nói cách khác, đại số Lie $\mathcal{G} = \mathbb{R}^3$ với móc Lie là tích có hướng thông thường đẳng cấu với đại số Lie các ma trận thực phản xứng cấp 3.

1.2.5. Đại số Lie giải được và đại số Lie lũy linh.

Cho $\mathcal{G}$ là $\mathbb{K}$ -đại số Lie. Với $n \in \mathbb{N}$, Đặt:

$$\mathcal{G}^0 = \mathcal{G}, \mathcal{G}^1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}], \mathcal{G}^2 = [\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^1], \dots, \mathcal{G}^n = [\mathcal{G}^{n-1}, \mathcal{G}^{n-1}]$$

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}, \mathcal{G}_1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}], \mathcal{G}_2 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}_1], \dots, \mathcal{G}_n = [\mathcal{G}, \mathcal{G}_{n-1}] \quad (n \geq 2)$$

Mệnh đề 1.2. Các khẳng định sau đây là đúng:

(i) $\mathcal{G}_k, \mathcal{G}^k$ là các ideal của $\mathcal{G}$ ($k = 1, 2, \dots$)

(ii) $\mathcal{G} \supset \mathcal{G}^1 \supset \mathcal{G}^2 \supset \dots \supset \mathcal{G}^n \supset \dots$

$$|| \quad \cap \quad \cap$$

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2 \supset \dots \supset \mathcal{G}_n \supset \dots$$

(iii) Nếu $\dim \mathcal{G} < +\infty$ thì $\exists n \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\mathcal{G}^n = \mathcal{G}^{n+1} = \dots = \overset{kh}{\mathcal{G}^\infty}$$

$$\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_{n+1} = \dots = \mathcal{G}_{\infty}^{kh}$$

Định nghĩa 1.6. Đại số Lie $\mathcal{G}$ gọi là giải được (tương ứng, lũy linh) nếu $\mathcal{G}^{\infty} = \{0\}$ (tương ứng, $\mathcal{G}_{\infty} = \{0\}$). Chỉ số n nhỏ nhất để các đẳng thức xảy ra được gọi là hạng của đại số Lie giải được (tương ứng, lũy linh) $\mathcal{G}$.

Ví dụ 1.5:

$$b(n, \mathbb{K}) = \{A = (a_{ij}) \in gl(n, \mathbb{K}) / a_{ij} = 0, 1 \leq j < i \leq n\} \text{ (đại số các ma trận tam giác trên)}$$

là một đại số Lie giải được.

$$n(n, \mathbb{K}) = \{A = (a_{ij}) \in gl(n, \mathbb{K}) / a_{ij} = 0, 1 \leq j \leq i \leq n\} \text{ (đại số Lie các ma trận tam giác trên mà các phần tử trên đường chéo chính bằng 0)}$$

là một đại số Lie lũy linh.

Định lý 1.2 (Định lý Lie)

Cho φ là biểu diễn tuyến tính hữu hạn chiều của đại số Lie giải được $\mathcal{G}$ trong không gian vectơ V trên trường đóng đại số $\mathbb{K}$. Khi đó φ tương đương với biểu diễn tam giác trên, tức là $\varphi(x) = T(n, \mathbb{K}), \forall x \in \mathcal{G}$.

Hệ quả 1.1

Nếu $\mathcal{G}$ là đại số Lie giải được thì $\mathcal{G}^1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ là đại số Lie lũy linh.

Định lý 1.3 (Định lý Engel)

Đại số Lie $\mathcal{G}$ là lũy linh khi và chỉ khi với mọi $\forall x \in \mathcal{G}$, ad_x là toán tử lũy linh (tức là tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $(ad_x)^n = 0$).

Đại số Lie giải được mặc dù có cấu trúc không quá phức tạp nhưng cho đến nay thì việc phân loại chúng vẫn là một bài toán mở.

1.3. Sự liên hệ giữa nhóm Lie và đại số Lie.

1.3.1. Đại số Lie tương ứng với một nhóm Lie đã cho.

Cho G là một nhóm Lie. Ta ký hiệu $T_e(G)$ là không gian tiếp xúc của G tại điểm đơn vị $e \in G$. Không gian này thường được ký hiệu là $\mathcal{G}$. Khi đó $\mathcal{G}$ trở thành một đại số Lie với móc Lie được xác định bởi toán tử như sau:

$$[X, Y] = XY - YX, \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}$$

$$\text{Tức là: } [X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}, \quad \forall f \in C^{\infty}(G)$$

Trong đó $C^{\infty}(G)$ là đại số các hàm trơn trên G nhận giá trị thực.

Như vậy, mỗi nhóm G sẽ xác định duy nhất một đại số Lie $\mathfrak{g}$ và $\mathfrak{g}$ được gọi là đại số Lie của (hay tương ứng với) G .

Ngoài cách định nghĩa trên, ta còn có thể xem đại số $\mathfrak{g}$ như là đại số Lie con các trường vector bất biến trái trên G . Cách xây dựng đại số $\mathfrak{g}$ như sau:

Gọi $X(G)$ là đại số Lie các trường vector khả vi trên G . Khi đó với mọi $X, Y \in X(G)$, ta có:

$$(X + Y)_g = X_g + Y_g, \quad \forall g \in G$$

$$(\lambda X)_g = \lambda X_g, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \forall g \in G$$

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \quad \forall f \in C^\infty(G)$$

Với mọi $g \in G$. Đặt $L_g : G \rightarrow G, x \mapsto gx$ là phép tịnh tiến trái theo g , $R_g : G \rightarrow G, x \mapsto xg$ là phép tịnh tiến phải theo g , thì L_g và R_g là các vi phôi trên G , đồng thời cảm sinh thành các ánh xạ $L_{g*} : T(G) \rightarrow T(G)$, $R_{g*} : T(G) \rightarrow T(G)$ trên không gian tiếp xúc $T(G)$ của G .

Định nghĩa 1.7.

(i) Trường vector X được gọi là bất biến trái nếu $L_{g*}(X) = X, \forall g \in G$. Điều này tương đương với: $L_{g*}(X)_x = X_{gx}, \forall x, g \in G$.

(ii) Trường vector X được gọi là bất biến phải nếu $R_{g*}(X) = X, \forall g \in G$. Điều này tương đương với: $R_{g*}(X)_x = X_{xg}, \forall x, g \in G$.

Gọi $\mathfrak{g} = \{X \in X(G) / X \text{ là trường vector bất biến trái}\}$, thì $\mathfrak{g}$ là đại số Lie con của $X(G)$ và gọi là đại số Lie của nhóm Lie G , $\mathfrak{g} \cong T_e(G)$.

1.3.2. Nhóm Lie liên thông đơn liên tương ứng với đại số Lie.

Với cách xây dựng như trên thì ta thấy, mỗi nhóm Lie sẽ xác định được một đại số Lie duy nhất. Ngược lại thì ta có định lý sau:

Định lý 1.4:

(i) Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie thực bất kì. Khi đó luôn tồn tại duy nhất nhóm Lie liên thông đơn liên $\tilde{G}$ sao cho đại số Lie của $\tilde{G}$ chính là $\mathfrak{g}$.

(ii) Nếu G là một nhóm Lie liên thông nhận $\mathfrak{g}$ làm đại số Lie thì tồn tại nhóm con chuẩn tắc rời rạc D của $\tilde{G}$ sao cho $G = \tilde{G}/D$.

Nhóm Lie G được gọi là giải được (tương ứng, lũy linh) nếu đại số Lie $\mathfrak{g}$ của nó giải được (tương ứng, lũy linh).

1.3.3. Ánh xạ mũ exponent.

Cho G là nhóm Lie, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ là đại số Lie của G .

Mệnh đề 1.3.

Với mỗi $X \in \mathfrak{g}$, tồn tại duy nhất nhóm con $\{x(t) | t \in \mathbb{R}\}$ trong G sao cho:

- (i) $x(0) = e_G$
- (ii) $x(t+s) = x(t)x(s), \forall t, s \in \mathbb{R}$
- (iii) $x'(0) = X (= X_e)$

và gọi là nhóm con 1-tham số xác định trên G .

Khi đó:

- o $\exp(X) \stackrel{dn}{=} x(1) \in G, \exp(tX) \stackrel{dn}{=} x(t) \in G$
- o $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G, X \mapsto \exp(X)$

Định lý 1.5. (về tính chất ánh xạ exp)

- (i) Ánh xạ exp là vi phân địa phương.
- (ii) Ánh xạ exp có tính tự nhiên:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{f \text{ (đồng cấu nhóm Lie)}} & G_2 \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{f_*} & \mathfrak{g}_2 \end{array} \quad f \circ \exp = \exp \circ f_*$$

Nếu exp vi phân (toàn cục) thì G gọi là nhóm exponential.

Hệ quả 1.2. Có một song ánh giữa tập các biểu diễn tuyến tính hữu hạn chiều của các đại số Lie và các nhóm liên thông đơn liên.

1.4. Biểu diễn phụ hợp và K-biểu diễn lớp MD-nhóm và MD-đại số.

1.4.1. K-biểu diễn của một nhóm Lie.

Cho G là nhóm Lie tùy ý và $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ là đại số Lie của G . Ký hiệu $\mathfrak{g}^*$ là không gian đối ngẫu của đại số Lie $\mathfrak{g}$. Với mỗi $g \in G$, ta có tự đẳng cấu: $A_{(g)}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ được xác định như sau:

$$A_{(g)}(x) := g.x.g^{-1}, \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Tự đẳng cấu trên cảm sinh ánh xạ sau:

$$A_{(g)_*} = (L_g \cdot R_{g^{-1}}): \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$$

$$X \mapsto A_{(g)_*}(X) := \frac{d}{dt} [g \cdot \exp(tX) g^{-1}]|_{t=0}$$

được gọi là ánh xạ tiếp xúc của $A_{(g)}$.

Định nghĩa 1.8: Tác động

$$Ad: G \rightarrow Aut(\mathcal{Q})$$

$$g \mapsto Ad(g) := A_{(g)_*} = (L_g \cdot R_{g^{-1}})_*$$

được gọi là biểu diễn phụ hợp của G trong $\mathcal{Q}$.

Định nghĩa 1.9: Tác động (được cảm sinh bởi biểu diễn phụ hợp Ad của G trong $\mathcal{Q}$)

$$K: G \rightarrow Aut(\mathcal{Q}^*)$$

$$g \mapsto K(g) := K_{(g)}$$

sao cho

$$\langle K_{(g)}F, X \rangle := \langle F, Ad(g^{-1})X \rangle; (F \in \mathcal{Q}^*, X \in \mathcal{Q})$$

được gọi là biểu diễn đối phụ hợp hay K-biểu diễn của G trong $\mathcal{Q}^*$.

Ở đây $\langle F, X \rangle$, $F \in \mathcal{Q}^*$, $X \in \mathcal{Q}$ là chỉ giá trị của dạng tuyến tính $F \in \mathcal{Q}^*$ tại trường vector (bất biến trái) $X \in \mathcal{Q}$.

Định nghĩa 1.10: Mỗi quỹ đạo của K-biểu diễn của G trong $\mathcal{Q}^*$ được gọi là K-quỹ đạo hay quỹ đạo Kirillov của G (trong $\mathcal{Q}^*$).

Vậy, mỗi $F \in \mathcal{Q}^*$, K-quỹ đạo chứa F định nghĩa trên được cho bởi:

$$\Omega_F := (K_{(g)}F / g \in G)$$

Mỗi K-quỹ đạo của một nhóm Lie G tùy ý luôn là một G -đa tạp vi phân thuần nhất với số chiều chẵn và trên đó có thể đưa vào một cấu trúc symplectic tự nhiên tương thích với tác động của G .

Để xác định số chiều của các K-quỹ đạo Ω_F với mỗi $F \in \mathcal{Q}^*$, ta xét dạng song tuyến tính phản xứng B_F trên $\mathcal{Q}$.

$$B_F(X, Y) := \langle F, [X, Y] \rangle; \forall X, Y \in \mathcal{Q}$$

Ký hiệu *cái ổn định* của F trên biểu diễn đối phụ hợp của G trong $\mathcal{Q}^*$ là G_F và $\mathcal{Q}_F := Lie(G_F)$, tức là $G_F = \{g \in G \mid K_{(g)}F = F\}$.

Khi đó ta có kết quả sau

Mệnh đề 1.4. *Hạt nhân của B_F và số chiều của Ω_F được cho bởi hệ thức sau:*

$$\text{Ker} B_F = \mathcal{Q}_F \text{ và } \dim \Omega = \dim \mathcal{Q} - \dim \mathcal{Q}_F.$$

Ký hiệu $\mathcal{O}(G)$ là tập hợp các K-quỹ đạo của G và trang bị trên đó tôpô thương của tôpô tự nhiên trong $\mathcal{Q}^*$. Nói chung thì tôpô thu được khá “xấu”, nó có thể không tách thậm chí không nửa tách.

1.4.2. Các MDn-nhóm và MDn-đại số.

Giả sử G là một nhóm Lie thực giải được, $\mathcal{Q}$ là đại số Lie của G và $\mathcal{Q}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathcal{Q}$.

Định nghĩa 1.11. (Xem [Di], chương 4, định nghĩa 1.1) *Một MDn-nhóm là một nhóm Lie thực giải được n-chiều sao cho các K-quỹ đạo của nó hoặc là không chiều hoặc là có số chiều cực đại. Đại số Lie của MDn-nhóm được gọi là MDn-đại số.*

Mệnh đề sau đây là điều kiện cần để một đại số Lie thực giải được là một MD-đại số.

Mệnh đề 1.5. (Xem [So-Vi], định lý 4) *Giả sử $\mathcal{Q}$ là một MD-đại số. Khi đó $\mathcal{Q}^2 = [[\mathcal{Q}, \mathcal{Q}], [\mathcal{Q}, \mathcal{Q}]]$ là đại số con giao hoán trong $\mathcal{Q}$.*

Chú ý rằng điều kiện cần nêu trên không là điều kiện đủ. Tuy nhiên, để phân loại các MD-đại số ta chỉ cần xét các đại số Lie giải được với $\mathcal{Q}^2$ giao hoán. Nói riêng, có thể xét lớp con các đại số Lie giải được với $\mathcal{Q}^2$ triệt tiêu, tức là ideal dẫn xuất thứ nhất giao hoán.

Như đã nói ở phần mở đầu, toàn bộ lớp các MD4-đại số đã được liệt kê đầy đủ vào năm 1984 bởi Đào Văn Trà (xem[Trà]), tuy nhiên các tác giả chỉ mới dừng lại ở liệt kê thô mà không xét đến tính đẳng cấu giữa các đại số Lie. Năm 1990, Lê Anh Vũ liệt kê triệt để (chính xác đến đẳng cấu đại số Lie) các MD4-đại số đó (xem[Vu]). Nói một cách vắn tắt là bài toán liệt kê và phân loại các MD4-đại số coi như đã giải quyết trọn vẹn.

Tuy nhiên khi $n = 5$ thì mọi tính toán đều trở nên phức tạp hơn nhiều. Để đơn giản thì Lê Anh Vũ chỉ xét lớp con các MD5-đại số có ideal dẫn xuất giao hoán k chiều (với $k < 5$) và đã đạt được nhiều kết quả quan trọng. Từ năm 2003 đến năm 2006, Lê Anh Vũ đã liệt kê và phân loại các lớp con của các MD5-đại số bất khả phân có ideal dẫn xuất giao hoán với số chiều bé hơn hoặc bằng 4.

Trong các chương sau, chúng tôi sẽ giới thiệu lại các MD5-đại số bất khả phân có ideal dẫn xuất giao hoán với số chiều bé hơn hoặc bằng 4, đồng thời đưa ra một vài ví dụ về các MD5-đại số có ideal dẫn xuất không giao hoán với số một chiều cố định.

CHƯƠNG 2 : LỚP CÁC MD5-ĐẠI SỐ VỚI IDEAL DẪN XUẤT GIAO HOÁN

2.1. Định lý về sự phân loại.

Định lý 2.1. (Xem [Vu-Sh], định lý 3.1) Giả sử $\mathcal{G}$ là một MD5-đại số với $\mathcal{G}^1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ giao hoán. Khi đó các khẳng định sau là đúng.

(i) Nếu $\mathcal{G}$ khả phân, thì $\mathcal{G}^1 = \mathcal{H} \oplus \mathbb{R}$, ở đây $\mathcal{H}$ là MD4-đại số.

(ii) Nếu $\mathcal{G}$ bất khả phân, thì ta có thể chọn một cơ sở thích hợp $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ của $\mathcal{G}$ sao cho $\mathcal{G}$ đẳng cấu với một và chỉ một trong các đại số Lie sau:

1. $\mathcal{G}^1 = \mathbb{R}.X_5 \equiv \mathbb{R}$.

$$\mathcal{G}_{5,1} : [X_1, X_2] = [X_3, X_4] = X_5; \text{ còn các móc Lie khác là tầm thường.}$$

2. $\mathcal{G}^1 = \mathbb{R}.X_4 \oplus \mathbb{R}.X_5 \equiv \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{G}_{5,2,1} : [X_1, X_2] = X_4, [X_2, X_3] = X_5; \text{ còn các móc Lie khác là tầm thường.}$$

3. $\mathcal{G}^1 = \mathbb{R}.X_3 \oplus \mathbb{R}.X_4 \oplus \mathbb{R}.X_5 \equiv \mathbb{R}^3$, $ad_{X_1} = 0$, $ad_{X_2} \in \text{End}(\mathcal{G}^1) \equiv \text{Mat}_3(\mathbb{R})$; $[X_1, X_2] = X_3$.

3.1. $\mathcal{G}_{5,3,1(\lambda_1, \lambda_2)}$:

$$ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0.$$

3.2. $\mathcal{G}_{5,3,2(\lambda)}$:

$$ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

3.3. $\mathcal{G}_{5,3,3(\lambda)}$:

$$ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

3.4. $\mathcal{G}_{5,3,4}$:

$$ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.5. $\mathcal{G}_{5,3,5(\lambda)}$:

$$ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

3.6. $\mathcal{G}_{5,3,6(\lambda)}$:

$$ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

3.7. $\mathcal{G}_{5,3,7}$:

$$ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.8. $\mathcal{G}_{5,3,8(\lambda,\varphi)}$:

$$ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \varphi \in (0, \pi).$$

4. $\mathcal{G}^1 = \mathbb{R}.X_2 \oplus \mathbb{R}.X_3 \oplus \mathbb{R}.X_4 \oplus \mathbb{R}.X_5 \cong \mathbb{R}^4$, $ad_{X_1} \in \text{End}(\mathcal{G}^1) \cong \text{Mat}_4(\mathbb{R})$.

4.1. $\mathcal{G}_{5,4,1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$:

$$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1.$$

4.2. $\mathcal{G}_{5,4,2(\lambda_1,\lambda_2)}$:

$$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

4.3. $\mathcal{G}_{5,4,3(\lambda)}$:

$$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

4.4. $\mathcal{G}_{5,4,4(\lambda)}$:

$$ad_{x_1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

4.5. $\mathcal{G}_{5,4,5}$:

$$ad_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.6. $\mathcal{G}_{5,4,6(\lambda_1, \lambda_2)}$:

$$ad_{x_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

4.7. $\mathcal{G}_{5,4,7(\lambda)}$:

$$ad_{x_1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

4.8. $\mathcal{G}_{5,4,8(\lambda)}$:

$$ad_{x_1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

4.9. $\mathcal{G}_{5,4,9(\lambda)}$:

$$ad_{x_1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

4.10. $\mathcal{G}_{5,4,10}$:

$$ad_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.11. $\mathcal{G}_{5,4,11}(\lambda_1, \lambda_2, \varphi) :$

$$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \varphi \in (0, \pi)$$

4.12. $\mathcal{G}_{5,4,12}(\lambda, \varphi) :$

$$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \varphi \in (0, \pi).$$

4.13. $\mathcal{G}_{5,4,13}(\lambda, \varphi) :$

$$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \varphi \in (0, \pi).$$

4.14. $\mathcal{G}_{5,4,14}(\lambda, \mu, \varphi) :$

$$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\mu \\ 0 & 0 & \mu & \lambda \end{pmatrix}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mu > 0, \varphi \in (0, \pi)$$

Để chứng minh định lý 2.1 ta cần một số bổ đề sau:

2.2. Một số bổ đề.

Bổ đề 2.1. Cho $X, Y \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^1, X \neq Y$, ad_X, ad_Y là các toán tử trong $\mathcal{G}^1$. Khi đó $ad_X \circ ad_Y = ad_Y \circ ad_X$.

Chứng minh. Sử dụng đồng nhất thức Jacobi đối với X, Y và phần tử tùy ý $Z \in \mathcal{G}^1$, ta có

$$\begin{aligned} & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \\ \Leftrightarrow & [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = 0 \\ \Leftrightarrow & ad_X \circ ad_Y(Z) = ad_Y \circ ad_X(Z); \forall Z \in \mathcal{G}^1 \\ \Leftrightarrow & ad_X \circ ad_Y = ad_Y \circ ad_X. \end{aligned}$$

□

Bổ đề 2.2. (Xem 8.[Di], chương 2, mệnh đề 2.1) Cho $\mathcal{G}$ là một MD-đại số với $F \in \mathcal{G}^*$ không triệt tiêu hoàn toàn trong $\mathcal{G}^1$, tức là, tồn tại $U \in \mathcal{G}^1$ sao cho $\langle F, U \rangle \neq 0$. Khi đó K-quỹ đạo Ω_F có số chiều cực đại.

Chứng minh. Giả sử Ω_F không phải là một K-quỹ đạo có số chiều cực đại, nghĩa là, $\dim \Omega_F = 0$. Khi đó ta có

$$\dim \mathcal{G}_F = \dim \mathcal{G} - \dim \Omega_F = \dim \mathcal{G}$$

Vì vậy, $\text{Ker} B_F = \mathcal{G}_F = \mathcal{G} \supset \mathcal{G}^1$ và F triệt tiêu trong $\mathcal{G}^1$. Điều này mâu thuẫn với giả thuyết của bổ đề. Do đó, Ω_F phải là K-quỹ đạo có số chiều cực đại.

□

Bổ đề 2.3. Lấy F là một phần tử tùy ý của $\mathcal{G}^*$. Khi đó, $\dim \Omega_F = \text{rank}(B)$, ở đó $B = (b_{ij})_5 := \left(\langle F, [X_j, X_i] \rangle \right), 1 \leq i, j \leq 5$ là ma trận của dạng song tuyến tính đối xứng B_F trong cơ sở $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ của $\mathcal{G}$.

Chứng minh. Lấy $U = aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 + eX_5 \in \mathcal{G}$, ta luôn có

$$\mathcal{G}_F = \text{Ker} B_F = \{U \in \mathcal{G} / \langle F, [U, X_i] \rangle = 0; i = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Bằng tính toán đơn giản, ta có

$$U \in \mathcal{G}_F \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Do đó, $\dim \Omega_F = \dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{G}_F = \text{rank}(B)$.

□

Bổ đề 2.4. Nếu $\mathcal{G}$ là một đại số Lie thực giải được 5 chiều có ideal dẫn xuất thứ nhất $\mathcal{G}^1 \cong \mathbb{R}^4$ thì $\mathcal{G}$ là MD5-đại số.

Chứng minh. Lấy $\mathcal{G}$ là một đại số Lie thực giải được 5 chiều sao cho $\mathcal{G}^1$ là đại số Lie giao hoán 4 chiều. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $\mathcal{G}^1 = \mathbb{R}.X_2 \oplus \mathbb{R}.X_3 \oplus \mathbb{R}.X_4 \oplus \mathbb{R}.X_5 \cong \mathbb{R}^4$, $ad_{X_1} = (a_{ij})_4 \in \text{End}(\mathcal{G}^1) \cong \text{Mat}_4(\mathbb{R})$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq 4$.

Lấy $F = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^* + \alpha_4 X_4^* + \alpha_5 X_5^* \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ là một phần tử tùy ý trong $\mathcal{Q}^*$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$. Khi đó, ma trận B của dạng song tuyến tính B_F trong cơ sở $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ của $\mathcal{Q}$ là

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\sum_{i=2}^5 a_{i2}\alpha_i & -\sum_{i=2}^5 a_{i3}\alpha_i & -\sum_{i=2}^5 a_{i4}\alpha_i & -\sum_{i=2}^5 a_{i5}\alpha_i \\ \sum_{i=2}^5 a_{i2}\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{i=2}^5 a_{i3}\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{i=2}^5 a_{i4}\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{i=2}^5 a_{i5}\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rõ ràng, $\text{rank}(B) \in \{0, 2\}$. Do đó, theo bổ đề 2.3, Ω_F là quỹ đạo có số chiều 0 hoặc 2, tức là, $\mathcal{Q}$ là MD5-đại số. $\square$

Bây giờ ta chứng minh định lý phân loại.

2.3. Chứng minh định lý 2.1.

Rõ ràng khẳng định (i) của định lý 2.1 là đúng. Chúng ta chỉ cần chứng minh khẳng định (ii). Giả sử $\mathcal{Q}$ là một MD5-đại số bất khả phân với cơ sở $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ và ideal dẫn xuất thứ nhất $\mathcal{Q}^1$ là giao hoán. Khi đó $\dim \mathcal{Q}^1 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

1. $\dim \mathcal{Q}^1 = 1$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\mathcal{Q}^1 = \mathbb{R}.X_5 \cong \mathbb{R}$. Khi đó ta có 2 trường hợp sau:

1.1. Giả sử tồn tại $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ sao cho $[X_i, X_5] \neq 0$, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $[X_4, X_5] = aX_5 (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

$$\text{Đặt } X_4' = \frac{1}{a}X_4, \text{ ta có } [X_4', X_5] = X_5$$

Bây giờ, đặt $[X_i, X_5] = a_i X_5, [X_i, X_4] = b_i X_5, i = 1, 2, 3$ và ta thay đổi

$$X_i' = X_i - a_i X_4 + b_i X_5$$

$$\text{Khi đó } [X_i', X_5] = 0; [X_i', X_4] = 0$$

Do đó, ngay từ đầu ta có thể giả sử $[X_i, X_4] = [X_i, X_5] = 0, i = 1, 2, 3$

Cuối cùng, đặt $[X_i, X_j] = c_{ij} X_5, c_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i < j \leq 3$, sử dụng đồng nhất thức Jacobi ta có

$$\begin{aligned}
& \left[\left[X_i, X_j \right], X_4 \right] + \left[\left[X_j, X_4 \right], X_i \right] + \left[\left[X_4, X_i \right], X_j \right] = 0 \\
& \Leftrightarrow \left[\left[X_i, X_j \right], X_4 \right] = 0 \\
& \Leftrightarrow c_{ij} \left[X_5, X_4 \right] = 0 \\
& \Leftrightarrow c_{ij} X_5 = 0 \\
& \Leftrightarrow c_{ij} = 0 \quad (1 \leq i < j \leq 3)
\end{aligned}$$

Khi đó $\left[X_i, X_j \right] = 0, \quad (1 \leq i < j \leq 3)$

Điều này chứng tỏ $\mathcal{G}$ khả phân, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy trường hợp này không xảy ra.

1.2. Giả sử $\left[X_i, X_5 \right] = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$

Khi đó tồn tại $\left[X_i, X_j \right] \neq 0, \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j$, không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $\left[X_3, X_4 \right] = c_{34} X_5$.

Ta thay $X'_3 = \frac{1}{c_{34}} X_3$, ta được $\left[X'_3, X_4 \right] = X_5$

Nên từ đầu ta có thể giả sử $\left[X_3, X_4 \right] = X_5$

Bây giờ, giả sử $\left[X_i, X_3 \right] = a_i X_5, \left[X_i, X_4 \right] = b_i X_5, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$

Đặt $X'_i = X_i + a_i X_4 - b_i X_3$

Khi đó $\left[X'_i, X_3 \right] = 0; \left[X'_i, X_4 \right] = 0$

Vì thế ta có thể giả sử $\left[X_i, X_3 \right] = \left[X_i, X_4 \right] = 0, i = 1, 2$

Vậy, ta phải có $\left[X_1, X_2 \right] = c_{12} X_5, \quad c_{12} \in \mathbb{R}^*$

Tóm lại, ta có thể giả sử

$$\mathcal{G}_{5,1}: \left[X_1, X_2 \right] = \left[X_3, X_4 \right] = X_5 \left[X_i, X_3 \right] = \left[X_i, X_4 \right] = 0, i = 1, 2$$

Khi đó $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}_{5,1}$

2. $\dim \mathcal{G}^1 = 2$, không mất tính tổng quát, ta giả sử $\mathcal{G}^1 = \mathbb{R}.X_4 \oplus \mathbb{R}.X_5 \cong \mathbb{R}^2$,

$$ad_{X_1}, ad_{X_2}, ad_{X_3} \in \text{End}(\mathcal{G}^1) \cong \text{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

2.1. $\left[X_i, X_j \right] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq 3$

Nếu tồn tại $ad_{X_i} = 0$, thì $\mathcal{G}$ khả phân điều này mâu thuẫn. Do đó $ad_{X_i} \neq 0, i = 1, 2, 3$.

Bây giờ, chúng ta chứng tỏ rằng bằng cách thay đổi cơ sở thích hợp, ta được $ad_{X_2} = 0$.

Thật vậy, giả sử $ad_{X_i} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, 3$. Đầu tiên, giả sử rằng $a_3 \neq 0$. Đặt

$$X'_i = X_i - \frac{a_i}{a_3} X_3, \text{ khi đó } ad_{X'_i} = \begin{pmatrix} 0 & b'_i \\ c'_i & d'_i \end{pmatrix}, \text{ do đó ta có thể giả sử } ad_{X_i} = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}, i = 1, 2. \text{ Theo bổ}$$

đề 2.1 ta có $ad_{X_1} \circ ad_{X_2} = ad_{X_2} \circ ad_{X_1}$, kéo theo $ad_{X_2} = k.ad_{X_1}, k \in \mathbb{R}^*$. Ta thay đổi

$$X'_2 = X_2 - k X_1, \text{ ta được } ad_{X'_2} = 0. \text{ Do đó ta có thể giả sử } ad_{X_2} = 0 \text{ (vô lí), nên } a_3 = 0. \text{ Tiếp}$$

theo, nếu $d_3 \neq 0$, bằng cách lập luận tương tự ta thu được điều vô lí. Cuối cùng, giả sử rằng

$$a_3 = d_3 = 0, b_3^2 + c_3^2 \neq 0, \text{ theo bổ đề 2.1 thì } ad_{X_i} \circ ad_{X_3} = ad_{X_3} \circ ad_{X_i}, (i = 1, 2), \text{ kéo theo}$$

$$ad_{X_i} = k_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k_i \in \mathbb{R}^*, i = 1, 2. \text{ Nói riêng, } ad_{X_2} = k.ad_{X_1}, k = \frac{k_1}{k_2}. \text{ Ta lại thay } X'_2 = X_2 - k X_1,$$

thì $ad_{X'_2} = 0$ (vô lí). Do đó trường hợp 2.1 không thể xảy ra.

2.2. Giả sử rằng tồn tại $[X_i, X_j] \neq 0, 1 \leq i, j \leq 3$ và $ad_{X_i} = 0, i = 1, 2, 3$

Khi đó $\mathcal{Q}^1 = \langle [X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3] \rangle$, và do $rank \{[X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3]\}$ là 2, không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $\{[X_1, X_2], [X_2, X_3]\}$ là cơ sở của $\mathcal{Q}^1$.

$$\text{Đặt } [X_1, X_2] = aX_4 + bX_5, [X_2, X_3] = cX_4 + dX_5 \text{ với } D := \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

Bằng cách thay đổi cơ sở như sau:

$$X_4 = \frac{1}{D}(dX'_4 - bX'_5), X_5 = \frac{1}{D}(-cX'_4 + X'_5)$$

Ta thu được: $[X_1, X_2] = X'_4, [X_2, X_3] = X'_5$. Do đó, ta có thể giả sử $[X_1, X_2] = X_4, [X_2, X_3] = X_5$

Bây giờ, ta đặt $[X_1, X_3] = \alpha X_4 + \beta X_5$ và đổi cơ sở như sau:

$$X'_1 = X_1 - \beta X_2, X'_2 = X_2, X'_3 = -\alpha X_2 + X_3$$

$$\text{Ta được } [X'_1, X'_2] = X_4, [X'_1, X'_3] = 0, [X'_2, X'_3] = X_5$$

Vậy, ta có thể giả sử

$$\mathcal{Q}_{5,2,1}: [X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = 0, [X_2, X_3] = X_5$$

Bây giờ, ta chứng minh $\mathcal{Q} \cong \mathcal{Q}_{5,2,1}$

$$\text{Lấy } F = \alpha X_1^* + \beta X_2^* + \gamma X_3^* + \delta X_4^* + \sigma X_5^* \in \mathcal{Q}^*, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma \in \mathbb{R}$$

$$\text{và } U = aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 + eX_5 \in \mathcal{Q}, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$$

Nhắc lại rằng $\mathcal{Q}_F = \text{Ker} B_F = \{U \in \mathcal{Q} \mid \langle F, [U, X_i] \rangle = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$

Khi đó $U \in \mathcal{Q}_F \Leftrightarrow \langle F, [U, X_i] \rangle = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\Leftrightarrow B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bằng tính toán trực tiếp ta thu được ma trận B của dạng song tuyến tính B_F như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\delta & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rõ ràng $\text{rank} B = \begin{cases} 0, & \text{khi } \delta = \sigma = 0 \\ 2, & \text{khi } \delta^2 + \sigma^2 \neq 0 \end{cases}$, suy ra $\dim \Omega_F = \text{rank} B$

Vậy $\mathcal{Q} \cong \mathcal{Q}_{5,2,1}$.

2.3. Giả sử rằng tồn tại $[X_i, X_j] \neq 0$, và $\text{ad}_{X_k} \neq 0, 1 \leq i \neq j \leq 3, 1 \leq k \leq 3$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $\text{ad}_{X_3} \neq 0$. khi đó ad_{X_3} thuộc một trong các dạng Jordan sau:

- ad_{X_3} có dạng đường chéo, nghĩa là

$$\text{ad}_{X_3} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$$

không mất tính tổng quát, giả sử $\lambda_1 \neq 0$, ta đổi cơ sở $X'_3 = \frac{1}{\lambda_1} X_3$ ta được $\text{ad}_{X'_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

$$\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

- Ma trận ad_{X_3} không có dạng đường chéo, nhưng có duy nhất giá trị riêng thực λ (bội 2).

- Nếu $\lambda = 0$ thì $\text{ad}_{X_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Nếu $\lambda \neq 0$, ta đặt $X'_3 = \frac{1}{\lambda_1} X_3$ ta được $\text{ad}_{X_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Ma trận ad_{X_3} có dạng đường chéo nhưng có giá trị riêng phức. Trong trường hợp này, nó có hai giá trị riêng phức liên hợp với nhau, nghĩa là $\det(ad_{X_3}) > 0$. Khi đó ta thay đổi

$X'_3 = \frac{1}{\sqrt{\det(ad_{X_3})}} X_3$, ta được $\det(ad_{X'_3}) = 1$. Suy ra dạng chính tắc Jordan thực của $ad_{X'_3}$ là:

$$ad_{X'_3} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \varphi \in (0, \pi), \text{ (tức là } ad_{X'_3} \in SO(2, \mathbb{R}) \text{)}.$$

Nói chung, ta có thể thay đổi cơ sở của $\mathcal{G}^1$ sao cho toán tử ad_{X_3} có ma trận biểu diễn là một trong các dạng ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \varphi \in (0, \pi).$$

2.3a. Giả sử rằng $ad_{X_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Lập luận tương tự trường hợp 2.1, ta thu được

$ad_{X_1} = ad_{X_2} = 0$. Áp dụng đồng nhất thức Jacobi, ta được $[X_1, X_2] = aX_5, a \in \mathbb{R}$.

Mặt khác, đặt $[X_i, X_3] = a_i X_4 + b_i X_5, a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$.

Nếu $a = 0$, bằng cách thay đổi $X'_i = X_i + b_i X_4$ ta thu được $[X'_i, X_3] = a_i X_4, i = 1, 2$. Do đó ta có thể giả sử rằng $[X_i, X_3] = a_i X_4, i = 1, 2; a_1^2 + a_2^2 \neq 0$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a_2 \neq 0$. Bây giờ, ta thay đổi cơ sở như sau:

$$X'_1 = X_1 + \frac{a_1}{a_2} X_2, X'_2 = \frac{1}{a_2} X_2$$

thì $[X'_i, X_3] = 0, [X'_2, X_3] = X_4$, suy ra $\mathcal{G}$ khả phân, điều này mâu thuẫn. Do đó, $a \neq 0$.

Bằng cách lập luận tương tự, ta thu được

$$\mathcal{G}_{5,2,2(\lambda)}: [X_1, X_2] = [X_3, X_4] = X_5, [X_2, X_3] = \lambda X_4, 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nhưng $\mathcal{G}_{5,2,2(\lambda)}$ không là MD5-đại số, bây giờ ta chứng minh điều này.

$$\text{Lấy } F = \alpha X_1^* + \beta X_2^* + \gamma X_3^* + \delta X_4^* + \sigma X_5^* \in \mathcal{G}^*, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma \in \mathbb{R}$$

và $U = aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 + eX_5 \in \mathcal{G}, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

$$\text{Nhắc lại rằng } \mathcal{G}_F = \text{Ker } B_F = \{U \in \mathcal{G} \mid \langle F, [U, X_i] \rangle = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{Khi đó } U \in \mathcal{G}_F \Leftrightarrow \langle F, [U, X_i] \rangle = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\Leftrightarrow B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bằng tính toán trực tiếp ta thu được ma trận B của dạng song tuyến tính B_F như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & -\lambda\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\delta & 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dễ thấy } \text{rank} B = \begin{cases} 0, & \text{khi } \delta = \sigma = 0 \\ 2, & \text{khi } \sigma = 0, \delta \neq 0 \\ 4, & \text{khi } \sigma \neq 0 \end{cases}$$

Theo bổ đề 2.3 thì $\dim \Omega_F = \text{rank} B$, suy ra $\mathcal{Q}_{5,2,2(\lambda)}$ không là MD5-đại số.

$$2.3b. \text{ Giả sử rằng } ad_{x_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Bằng cách lập luận tương tự ta cũng có $ad_{x_1} = ad_{x_2} = 0$.

• Nếu $\lambda \neq 0$, áp dụng đồng nhất thức Jacobi ta được $[X_1, X_2] = 0$. Giả sử

$$[X_i, X_3] = a_i X_4 + b_i X_5, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \quad \text{Đặt } X'_i = X_i + a_i X_4 + \frac{b_i}{\lambda} X_5, \quad \text{ta thu được}$$

$[X_i, X_3] = 0, i = 1, 2$. Khi đó $\mathcal{Q}$ khả phân, điều này mâu thuẫn.

• Nếu $\lambda = 0$, $ad_{x_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bằng cách lập luận tương tự 2.3a ta thu được

$$\mathcal{Q}_{5,2,3}: [X_1, X_2] = X_5, [X_3, X_4] = X_4$$

Theo bổ đề 2.3, 2.4 và bằng tính toán trực tiếp ta chứng tỏ được rằng $\mathcal{Q}_{5,2,3}$ không là MD5-đại số. Vậy trường hợp này không xảy ra.

$$2.3c. \text{ Giả sử rằng } ad_{x_3} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \varphi \in (0, \pi) \right\}. \text{ Ta lập luận tương tự như trên}$$

trường hợp này cũng không xảy ra.

3. $\dim \mathcal{Q}^1 = 3$. Ta luôn có thể chọn được một cơ sở thích hợp để

$$\mathcal{Q}^1 = \mathbb{R}.X_3 \oplus \mathbb{R}.X_4 \oplus \mathbb{R}.X_5 \cong \mathbb{R}^3, \quad ad_{x_1}, ad_{x_2} \in \text{End}(\mathcal{Q}^1) \cong \text{Mat}_3(\mathbb{R}). \text{ Rõ ràng } ad_{x_1}, ad_{x_2}$$

không đồng thời triệt tiêu bởi vì $\mathcal{G}^1 \cong \mathbb{R}^3$, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $ad_{x_2} \neq 0$. Khi đó ma trận biểu diễn ad_{x_2} là một trong các dạng Jordan sau.

$$\bullet ad_{x_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}; \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^*, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$$

$$\text{Ta thay } X_2' = \frac{1}{\lambda_3} X_2, \text{ ta được } ad_{X_2'} = \begin{pmatrix} \lambda_1' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \lambda_1', \lambda_2' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \lambda_1' \neq \lambda_2' \neq 0, \text{ với}$$

$$\lambda_1' = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \lambda_2' = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.$$

$$\bullet ad_{x_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*, \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\text{Ta thay } X_2' = \frac{1}{\lambda_1} X_2, \text{ ta được } ad_{X_2'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$\bullet ad_{x_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*, \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\text{Ta thay } X_2' = \frac{1}{\lambda_2} X_2, \text{ ta được } ad_{X_2'} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\bullet ad_{x_2} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Ta thay } X_2' = \frac{1}{\lambda} X_2, \text{ ta được } ad_{X_2'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bằng cách làm tương tự ta có,

$$\bullet ad_{x_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$$

Suy ra $ad_{x_2'} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• $ad_{x_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*, \lambda_1 \neq \lambda_2$

Suy ra $ad_{x_2'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

• $ad_{x_2} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}^*$

Suy ra $ad_{x_2'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• $ad_{x_2} = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, b > 0, \lambda \in \mathbb{R}^*$

Ta thay $X_2' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} X_2$, ta được $ad_{x_2'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \lambda' \end{pmatrix}$,

$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in \mathbb{R}^*, \varphi = \arccos a \in (0, \pi)$.

Tóm lại, nếu thay đổi cơ sở phù hợp thì ma trận biểu diễn ad_{x_2} là một trong các dạng Jordan sau:

• $ad_{x_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

• $ad_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

• $ad_{x_2} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

- $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in \mathbb{R}^*, \varphi = \arccos a \in (0, \pi).$

Giả sử rằng $[X_1, X_2] = mX_3 + nX_4 + pX_5; m, n, p \in \mathbb{R}$

- Nếu $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

Ta thay $X_1' = X_1 + \frac{n}{\lambda_2} X_4 + pX_5$, bằng tính toán trực tiếp ta được

$$[X_1', X_2] = mX_3, m \in \mathbb{R}.$$

- Nếu $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

Ta thay $X_1' = X_1 + nX_4 + \frac{p}{\lambda} X_5$, ta được $[X_1', X_2] = mX_3, m \in \mathbb{R}$

- Nếu $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta thay $X_1' = X_1 + nX_4 + pX_5$, ta được $[X_1', X_2] = mX_3, m \in \mathbb{R}$

- Nếu $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ta thay $X_1' = X_1 + nX_4 + pX_5$, ta được $[X_1', X_2] = mX_3, m \in \mathbb{R}$

- Nếu $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta thay $X_1' = X_1 + (n-p)X_4 + pX_5$, ta được $[X_1', X_2] = mX_3, m \in \mathbb{R}$

- Nếu $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

Ta thay $X_1' = X_1 - nX_3 + nX_4 + \frac{p}{\lambda}X_5$, ta được $[X_1', X_2] = mX_3, m \in \mathbb{R}$

- Nếu $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ta thay $X_1' = X_1 + (p-n)X_3 + (n-p)X_4 + pX_5$, ta được $[X_1', X_2] = mX_3, m \in \mathbb{R}$

- Nếu $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}^*, \varphi \in (0, \pi)$

Ta thay $X_1' = X_1 + n \sin \varphi X_3 + n \cos \varphi X_4 + \frac{p}{\lambda}X_5$, ta được $[X_1', X_2] = mX_3, m \in \mathbb{R}$.

Tóm lại, ta có thể chọn cơ sở phù hợp để $[X_1, X_2] = mX_3, m \in \mathbb{R}$

Ta có 3 trường hợp với mỗi ma trận biểu diễn ad_{X_2} .

3.1. $[X_1, X_2] = 0$ (tức là $m = 0$) và $ad_{X_1} = 0$

Thì $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathbb{R}.X_1$, $\mathcal{H}$ là đại số con của $\mathcal{G}$ sinh bởi $\{X_2, X_3, X_4, X_5\}$, tức là $\mathcal{G}$ khả phân. Do đó trường hợp này không xảy ra.

3.2. $[X_1, X_2] = 0$ (tức là $m = 0$) và $ad_{X_1} \neq 0$

3.2a. Giả sử $ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

Theo bổ đề 3.1 và tính toán trực tiếp ta được $ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$;

$$\mu, \nu, \xi \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \mu^2 + \nu^2 + \xi^2 \neq 0$$

Nếu $\xi \neq 0$, đặt $X_1' = X_1 - \xi X_2$ ta được

$$ad_{X_1'} = \begin{pmatrix} \mu' & 0 & 0 \\ 0 & \nu' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mu' = \mu - \xi\lambda_1, \nu' = \nu - \xi\lambda_2$$

Do đó, ta có thể giả sử rằng

$$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mu, \nu \in \mathbb{R}, \mu^2 + \nu^2 \neq 0$$

Theo bổ đề 2.2, 2.3 và lập luận tương tự trường hợp 2.3a ta cũng chứng tỏ được $\mathcal{G}$ không là MD5-đại số. Vậy trường hợp này không xảy ra.

3.2b. Lập luận tương tự cho các giá trị còn lại của ad_{X_2} , ta cũng thấy rằng trường hợp 3.2b cũng không xảy ra.

$$3.3. [X_1, X_2] \neq 0 \quad (m \neq 0)$$

Ta thay $X_1' = \frac{1}{m} X_1$, ta được $[X_1', X_2] = X_3$. Do đó, ta có thể giả rằng $[X_1, X_2] = X_3$. Lập luận tương tự như trường hợp 3.2a, trường hợp $ad_{X_1} \neq 0$ là không xảy ra. Do đó $ad_{X_1} = 0$. Vì vậy việc phân loại đại số Lie $\mathcal{G}$ phụ thuộc vào giá trị của ad_{X_2} . Do đó $\mathcal{G}$ phải đẳng cấu với một trong các đại số Lie sau:

$$- \mathcal{G}_{5,3,1(\lambda_1, \lambda_2)}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$$

$$- \mathcal{G}_{5,3,2(\lambda)}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$- \mathcal{G}_{5,3,3(\lambda)}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$- \mathcal{G}_{5,3,4}$$

$$- \mathcal{G}_{5,3,5(\lambda)}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$- \mathcal{G}_{5,3,6(\lambda)}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$- \mathcal{G}_{5,3,7}$$

$$- \mathcal{G}_{5,3,8}(\lambda, \varphi), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \varphi \in (0, \pi)$$

Do các giá trị ad_{x_2} là khác nhau nên các đại số Lie không đẳng cấu với nhau.

Bây giờ, ta chứng minh các đại số Lie trên là MD5-đại số.

$$\bullet \mathcal{G}_{5,3,1}(\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$$

Lập luận tương tự trường hợp 2.2 và bằng tính toán trực tiếp ta thu được ma trận B của dạng song tuyến tính B_F như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & -\lambda_1\gamma & -\lambda_2\delta & -\sigma \\ 0 & \lambda_1\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Để thấy } rankB = \begin{cases} 0, & \text{khi } \delta = \sigma = \gamma = 0 \\ 2, & \text{khi } \gamma^2 + \sigma^2 + \delta^2 \neq 0 \end{cases}$$

Theo bổ đề 2.3 thì $\dim \Omega_F = rankB$, suy ra $\mathcal{G}_{5,3,1}(\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$ là MD5-đại số.

$$\bullet \mathcal{G}_{5,3,2}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Lập luận tương tự trên và bằng tính toán trực tiếp ta thu được ma trận B là:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & -\gamma & -\delta & -\lambda\sigma \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\sigma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Để thấy } rankB = \begin{cases} 0, & \text{khi } \delta = \sigma = \gamma = 0 \\ 2, & \text{khi } \gamma^2 + \sigma^2 + \delta^2 \neq 0 \end{cases}$$

Theo bổ đề 2.3 thì $\dim \Omega_F = rankB$, suy ra $\mathcal{G}_{5,3,2}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ là MD5-đại số.

4. $\dim \mathcal{G}^1 = 4$, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $\mathcal{G}^1 = \mathbb{R}.X_2 \oplus \mathbb{R}.X_3 \oplus \mathbb{R}.X_4 \oplus \mathbb{R}.X_5 \cong \mathbb{R}^4$, $ad_{x_1} \in End(\mathcal{G}^1) \cong Mat_4(\mathbb{R})$.

Theo bổ đề 2.4 và cách làm tương tự trường hợp (3) đối với các dạng chuẩn tắc của ma trận ad_{x_1} , ta có thể đổi cơ sở một cách thích hợp để được 14 dạng chuẩn tắc khác nhau của ad_{x_1} như đã liệt kê ở định lý 2.1. Hơn nữa, các dạng chuẩn tắc của ad_{x_1} là khác nhau, nên các đại số tương ứng với các ma trận biểu diễn của ad_{x_1} cũng không đẳng cấu với nhau.

Cuối cùng theo bổ đề 2.3 và bằng tính toán trực tiếp thì tất cả các đại số Lie liệt kê ở định lý 2.1 là MD5-đại số.

Định lý được chứng minh. $\square$

*** Nhận xét:**

Nhớ lại rằng mỗi đại số Lie thực $\mathcal{G}$ xác định duy nhất một nhóm G liên thông, đơn liên sao cho $\text{Lie}(G) = \mathcal{G}$. Do đó ta thu được 24 họ MD5-nhóm liên thông, đơn liên tương ứng với các MD5-đại số bất khả phân trong định lý 2.1. Để thuận tiện, ta dùng kí hiệu các chỉ số để phân loại các MD5-đại số cho chính MD5-nhóm tương ứng, ví dụ $G_{5,3,1(\lambda)}$ là MD5-nhóm liên thông, đơn liên tương ứng với $\mathcal{G}_{5,3,1(\lambda)}$. Tất cả các nhóm này đều là MD5-nhóm bất khả phân.

CHƯƠNG 3: MD5-ĐẠI SỐ VỚI IDEAL DẪN XUẤT KHÔNG GIAO HOÁN

Trong chương 2, chúng tôi đã phát biểu và chứng minh một cách tường minh định lý “Lớp các MD5-đại số với ideal dẫn xuất giao hoán” của Lê Anh Vũ và Kar Ping Shum. Để hướng đến việc hoàn thành phân loại lớp các MD5-đại số, chúng tôi đã tìm và đưa ra một vài ví dụ về các MD5-đại số với ideal dẫn xuất không giao hoán 3 chiều, mô tả bức tranh hình học của chúng và chứng minh được rằng không tồn tại một MD5-đại số nào với ideal dẫn xuất không giao hoán 4 chiều. Trước tiên, chúng ta xét một số bổ đề sau:

3.1. Một vài bổ đề.

Bổ đề 3.1. Cho đại số Lie $\mathcal{Q}$. Nếu $Z \in \mathcal{Q}'$ thì $\text{trace}(ad_Z) = 0$

chứng minh. Do $Z \in \mathcal{Q}'$, nên Z là tổ hợp tuyến tính của các móc Lie $[X, Y]$ với $X, Y \in \mathcal{Q}$.

Do đó để chứng minh $\text{trace}(ad_Z) = 0$, ta chỉ cần chứng minh $\text{trace}(ad_{[X, Y]}) = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}\text{trace}(ad_{[X, Y]}) &= \text{trace}([ad_X, ad_Y]) \\ &= \text{trace}(ad_X.ad_Y - ad_Y.ad_X) \\ &= 0\end{aligned}$$

Bổ đề 3.2. Cho $\mathcal{Q}$ là đại số Lie 5 chiều, $\mathcal{Q}^1$ là ideal dẫn xuất thứ nhất hai chiều của $\mathcal{Q}$ thì $\mathcal{Q}^1$ giao hoán.

Chứng minh. Cho $\mathcal{Q} = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$ là đại số Lie 5-chiều, $\mathcal{Q}^1$ là ideal dẫn xuất thứ nhất 2-chiều, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\mathcal{Q}^1 = \langle X_4, X_5 \rangle$.

Giả sử

$$[X_4, X_5] = \alpha X_4 + \beta X_5, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Khi đó

$$ad_{X_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & \alpha \\ * & * & * & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (* \text{ là các phần tử không cần quan tâm đến})$$

Theo bổ đề 3.1 ta có $\text{trace}(ad_{X_4}) = 0$, suy ra $\beta = 0$

Tương tự

$$ad_{X_5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\alpha & 0 \\ * & * & * & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Theo bổ đề 3.1 ta có $trace(ad_{X_5}) = 0$, suy ra $\alpha = 0$. Do đó $[X, Y] = 0$, suy ra $\mathcal{Q}^1$ giao hoán. □

Hệ quả 3.1. Nếu $\mathcal{Q}$ là MD5-đại số có ideal dẫn xuất thứ nhất $\mathcal{Q}^1$ không giao hoán, thì số chiều của $\mathcal{Q}^1$ là 3 hoặc 4.

Bổ đề 3.3. $[\mathcal{Q}^2, \mathcal{Q}] \subset \mathcal{Q}^2$

Chứng minh. Giả sử $Z \in [\mathcal{Q}^2, \mathcal{Q}]$, Z là tổ hợp tuyến tính của các móc Lie $[X, Y]$ với $X \in \mathcal{Q}^2, Y \in \mathcal{Q}$. Để chứng minh $Z \in \mathcal{Q}^2$ ta cần chứng minh $[X, Y] \in \mathcal{Q}^2 \in [\mathcal{Q}^1, \mathcal{Q}^1]$, do $X \in \mathcal{Q}^2$ nên X là tổ hợp tuyến tính của các phần tử dạng $[X_1, X_2]$, $X_1, X_2 \in \mathcal{Q}^1$. Vì vậy ta cần chứng minh $[[X_1, X_2], Y] \in \mathcal{Q}^2$. Áp dụng đồng nhất thức Jacobi đối với X_1, X_2, Y ta có kết quả cần chứng minh. □

Bổ đề 3.4. Cho $\mathcal{Q}$ là MD5-đại số. Nếu $\mathcal{Q}$ có ideal dẫn xuất thứ nhất 4-chiều không giao hoán thì $\dim \Omega_F = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}, \forall F \in \mathcal{Q}^*$

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{Q}$ là MD5-đại số, $\mathcal{Q}^1$ là ideal dẫn xuất 4 chiều không giao hoán không mất tính tổng quát, ta giả sử $\mathcal{Q} = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$, $\mathcal{Q}^1 = \langle X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$, $\mathcal{Q}^2 \subset \langle X_3, X_4, X_5 \rangle$. Theo mệnh đề 1.5 thì $\mathcal{Q}^2$ giao hoán.

$$\text{Với } F = \alpha X_1^* + \beta X_2^* + \gamma X_3^* + \delta X_4^* + \sigma X_5^* \in \mathcal{Q}^*$$

Xét các trường hợp sau:

$$\bullet \gamma = \delta = \sigma = 0$$

$$\text{Vì } [\mathcal{Q}^1, \mathcal{Q}^1] = \mathcal{Q}^2 \text{ nên } \langle F, [X_i, X_j] \rangle = 0, i, j \in \{2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{Bây giờ, giả sử } [X_i, X_j] = \sum_{l=2}^5 C_{ij}^l X_l \quad (i < j)$$

Suy ra ma trận của dạng song tuyến tính B_F là:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\beta C_{12}^2 & -\beta C_{13}^2 & -\beta C_{14}^2 & -\beta C_{15}^2 \\ -\beta C_{12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta C_{13}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta C_{14}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta C_{15}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trong đó $C_{12}^2, C_{13}^2, C_{14}^2, C_{15}^2$ không đồng thời bằng 0, vì nếu $C_{12}^2 = C_{13}^2 = C_{14}^2 = C_{15}^2 = 0$ thì

$[X_i, X_j] \in \mathcal{Q}^2, \forall i, j$. Trong trường hợp này nếu $\beta \neq 0$ thì $\text{rank} B = 2$.

- $F = 0$, dễ thấy $\text{rank} B = 0$

Vì $\mathcal{Q}$ là MD5-đại số nên $\dim \Omega_F = \text{rank} B = 0 \vee 2, \forall F \in \mathcal{Q}^*$. $\square$

* Sau đây là một số nhận xét có liên quan:

Nhận xét 3.1. Một ma trận vuông thực, phản xứng có hạng chẵn.

Nhận xét 3.2. Với A, B, C, E, F là các số thực, ma trận phản xứng T như sau:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -A & -B & -C \\ A & 0 & -E & -F \\ B & E & 0 & -G \\ C & F & G & 0 \end{pmatrix}$$

Khi đó ta có $\det T = 0 \Leftrightarrow AG + CE = BF$.

Nhận xét 3.3. Phép đổi cơ sở biến một đại số Lie hữu hạn chiều thành một đại số Lie đẳng cấu với nó.

3.2. MD5-đại số với ideal dẫn xuất không giao hoán

Ta biết rằng, đại số Lie một chiều là giao hoán, do đó theo mệnh đề 1.5 và hệ quả 3.1 ta chỉ cần xét các đại số Lie có ideal dẫn xuất thứ nhất không giao hoán 3-chiều, 4-chiều và ideal dẫn xuất thứ hai giao hoán.

3.2.1. Một vài ví dụ về MD5-đại số với ideal dẫn xuất thứ nhất không giao hoán 3-chiều.

Mệnh đề 3.1. Các đại số Lie với ideal dẫn xuất thứ nhất $\mathcal{Q}^1$ không giao hoán 3-chiều và ideal dẫn xuất thứ hai $\mathcal{Q}^2$ giao hoán 1-chiều sau đây đều là các MD5-đại số:

(i) $\widetilde{\mathcal{Q}}_{5,,3,1}$:

$$\begin{aligned} [X_2, X_3] &= X_4 \\ [X_2, X_4] &= X_3 \\ [X_3, X_4] &= X_5 \end{aligned}$$

(ii) $\widetilde{\mathcal{Q}}_{5,,3,2}$:

$$\begin{aligned}[X_2, X_3] &= X_4 \\ [X_2, X_4] &= -X_3 \\ [X_3, X_4] &= X_5\end{aligned}$$

(iii) $\widetilde{\mathcal{Q}}_{5,,3,3}$:

$$\begin{aligned}[X_1, X_3] &= X_3, & [X_2, X_3] &= X_4 \\ [X_1, X_4] &= X_4, & [X_2, X_4] &= -X_3 \\ [X_1, X_5] &= 2X_5, & [X_3, X_4] &= X_5\end{aligned}$$

Chứng minh:

(i) Lấy $F = \alpha X_1^* + \beta X_2^* + \gamma X_3^* + \delta X_4^* + \sigma X_5^* \in \widetilde{\mathcal{Q}}_{5,,3,1}^*$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma \in \mathbb{R}$

và $U = aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 + eX_5 \in \widetilde{\mathcal{Q}}_{5,,3,1}$, $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

Nhắc lại rằng

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_{5,,3,1_F} = \text{Ker} B_F = \left\{ U \in \widetilde{\mathcal{Q}}_{5,,3,1} \mid \langle F, [U, X_i] \rangle = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5 \right\}$$

Khi đó $U \in \widetilde{\mathcal{Q}}_{5,,3,1_F} \Leftrightarrow \langle F, [U, X_i] \rangle = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\Leftrightarrow B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bằng tính toán trực tiếp ta thu được ma trận B của dạng song tuyến tính B_F như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & -\gamma & 0 \\ 0 & \delta & 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & \gamma & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rõ ràng $\text{rank} B = \begin{cases} 0, & \text{khi } \gamma = \delta = \sigma = 0 \\ 2, & \text{khi } \gamma^2 + \delta^2 + \sigma^2 \neq 0 \end{cases}$, suy ra $\dim \Omega_F = \text{rank} B$

Vậy $\widetilde{\mathcal{Q}}_{5,,3,1}$ là MD5-đại số.

(ii) Lập luận tương tự ta sẽ chứng minh được $\widetilde{\mathcal{Q}}_{5,,3,2}$, $\widetilde{\mathcal{Q}}_{5,,3,3}$ là các MD5-đại số.

□

3.2.2. MD5-đại số với ideal dẫn xuất không giao hoán 4 chiều.

Mệnh đề 3.2. Không tồn tại MD5-đại số có ideal dẫn xuất không giao hoán 4 chiều.

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{Q}$ là MD5-đại số 5 chiều với ideal dẫn xuất thứ nhất $\mathcal{Q}^1$ không giao hoán 4 chiều, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\mathcal{Q} = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$ và

$\mathcal{Q}^1 = \langle X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$. Ta xét các trường hợp của ideal dẫn xuất thứ hai như sau:

1. $\dim \mathcal{Q}^2 = 1$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\mathcal{Q}^2 = \langle X_5 \rangle$

Xét các móc Lie sau:

$$[X_1, X_2] = \sum_{i=2}^5 a_i X_i, \quad [X_2, X_3] = e_5 X_5, \quad [X_3, X_4] = h_5 X_5$$

$$[X_1, X_3] = \sum_{i=2}^5 b_i X_i, \quad [X_2, X_4] = f_5 X_5, \quad [X_3, X_5] = l_5 X_5$$

$$[X_1, X_4] = \sum_{i=2}^5 c_i X_i, \quad [X_2, X_5] = g_5 X_5, \quad [X_4, X_5] = k_5 X_5$$

$$[X_1, X_5] = \sum_{i=2}^5 d_i X_i,$$

Do $X_2, X_3, X_4 \in \mathcal{Q}^1$, theo bổ đề 3.1 ta có

$$\begin{aligned} \text{trace}(ad_{X_2}) &= \text{trace}(ad_{X_3}) = \text{trace}(ad_{X_4}) = 0 \\ \Leftrightarrow l_5 &= k_5 = g_5 = 0 \end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng bổ đề 3.3, ta có $d_2 = d_3 = d_4 = 0$

Lấy

$$U = aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 + fX_5$$

$$F = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + \delta X_4 + \sigma X_5$$

Ta nhớ lại rằng, $\mathcal{Q}_F = \text{Ker} B_F = \{U \in G \mid \langle F, [U, X_i] \rangle = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$,

(B_F là dạng song tuyến tính trên $\mathcal{Q}$)

Khi đó

$$U \in \mathcal{Q}_F \Leftrightarrow \langle F, [U, X_i] \rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\Leftrightarrow B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ f \end{pmatrix} = 0$$

Bằng tính toán trực tiếp ta thu được ma trận B như sau

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -A & -B & -C & -D \\ A & 0 & -E & -F & 0 \\ B & E & 0 & -G & 0 \\ C & F & G & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

với

$$A = a_2\beta + a_3\gamma + a_4\delta + a_5\sigma$$

$$B = b_2\beta + b_3\gamma + b_4\delta + b_5\sigma$$

$$C = c_2\beta + c_3\gamma + c_4\delta + c_5\sigma$$

$$D = d_5\sigma, E = e_5\sigma, F = f_5\sigma, G = h_5\sigma$$

Dựa vào bổ đề 3.4 và nhận xét 2, ta có

$$AG + CE = BF \Leftrightarrow a_i h_5 + c_i e_5 = b_i f_5, \quad i = 2, 3, 4$$

Do ma trận $\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ khả nghịch, suy ra $h_5 = e_5 = f_5 = 0$ điều này mâu thuẫn vì

$\dim \mathcal{Q}^2 = 1$. Vậy trường hợp này không xảy ra

2. $\dim \mathcal{Q}^2 = 2$, không mất tính tổng quát ta giả sử $\mathcal{Q}^2 = \langle X_4, X_5 \rangle \cong \mathbb{R}^2$

Xét các móc Lie sau:

$$[X_1, X_2] = \sum_{i=2}^5 a_i X_i, \quad [X_2, X_3] = e_4 X_4 + e_5 X_5, \quad [X_3, X_4] = h_4 X_4 + h_5 X_5$$

$$[X_1, X_3] = \sum_{i=2}^5 b_i X_i, \quad [X_2, X_4] = f_4 X_4 + f_5 X_5, \quad [X_3, X_5] = l_4 X_4 + l_5 X_5$$

$$[X_1, X_4] = \sum_{i=2}^5 c_i X_i, \quad [X_2, X_5] = g_4 X_4 + g_5 X_5$$

$$[X_1, X_5] = \sum_{i=2}^5 d_i X_i$$

Theo bổ đề 3.3, ta có $c_2 = c_3 = d_2 = d_3 = 0$

Tương tự trường hợp 1, bằng cách tính toán trực tiếp ma trận của dạng song tuyến tính B_F trên $\mathcal{Q}$ như sau:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -A & -B & -C & -D \\ A & 0 & -E & -F & -G \\ B & E & 0 & -H & -L \\ C & F & H & 0 & 0 \\ D & G & L & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

với

$$A = a_2\beta + a_3\gamma + a_4\delta + a_5\sigma$$

$$B = b_2\beta + b_3\gamma + b_4\delta + b_5\sigma$$

$$C = c_4\delta + c_5\sigma, \quad G = g_4\delta + g_5\sigma$$

$$D = d_4\delta + d_5\sigma, \quad H = h_4\delta + h_5\sigma$$

$$E = e_4\delta + e_5\sigma, \quad L = l_4\delta + l_5\sigma$$

$$F = f_4\delta + f_5\sigma$$

Xét ma trận B , theo bổ đề 3.2 và nhận xét 2 bỏ dòng 5 và cột 5 ta được

$$AH + CE = BF \Leftrightarrow \begin{cases} a_2h_4 = b_2f_4 \\ a_2h_5 = b_2f_5 \\ a_3h_4 = b_3f_4 \\ a_3h_5 = b_3f_5 \end{cases}$$

Do ma trận $\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ khả nghịch (*), suy ra $h_4 = h_5 = f_4 = f_5 = 0$

Tương tự bỏ dòng 4, cột 4 của ma trận B , ta có

$$AL + DE = BG \Leftrightarrow \begin{cases} a_2l_4 = b_2g_4 \\ a_2l_5 = b_2g_5 \\ a_3l_4 = b_3g_4 \\ a_3l_5 = b_3g_5 \end{cases},$$

và từ (*) suy ra $l_4 = l_5 = g_4 = g_5 = 0$

Điều này mâu thuẫn, vì $\mathcal{Q}^2 \cong \mathbb{R}^2$. Vậy trường hợp này không xảy ra

3. $\dim \mathcal{Q}^2 = 3$, không mất tính tổng quát ta giả sử $\mathcal{Q}^2 = \langle X_3, X_4, X_5 \rangle \cong \mathbb{R}^3$

Xét các móc Lie sau:

$$[X_1, X_2] = \sum_{i=2}^5 a_i X_i, \quad [X_2, X_3] = e_3 X_3 + e_4 X_4 + e_5 X_5$$

$$[X_1, X_3] = \sum_{i=2}^5 b_i X_i, \quad [X_2, X_4] = f_3 X_3 + f_4 X_4 + f_5 X_5$$

$$[X_1, X_4] = \sum_{i=2}^5 c_i X_i, \quad [X_2, X_5] = g_3 X_3 + g_4 X_4 + g_5 X_5$$

$$[X_1, X_5] = \sum_{i=2}^5 d_i X_i$$

Theo bổ đề 3.3, ta có $b_2 = c_2 = d_2 = 0$

Do X_4, X_5 có vai trò như nhau, nên bằng phép biến đổi cơ sở thích hợp ta có thể giả sử ngay từ đầu $g_3 = 0$. Do $\mathcal{Q}^1 = \langle X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$ nên $a_2 \neq 0$. Bằng cách đổi cơ sở thích hợp, ta thu được $a_2 = 1, a_3 = a_4 = a_5 = 0$.

Khi đó ma trận B của dạng song tuyến tính B_F trên $\mathcal{G}$ là

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -A & -B & -C & -D \\ A & 0 & -E & -F & -G \\ B & E & 0 & 0 & 0 \\ C & F & 0 & 0 & 0 \\ D & G & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

với

$$\begin{aligned} A &= a_2\beta, & E &= e_3\gamma + e_4\delta + e_5\sigma \\ B &= b_3\gamma + b_4\delta + b_5\sigma, & F &= f_3\gamma + f_4\delta + f_5\sigma \\ C &= c_3\gamma + c_4\delta + c_5\sigma, & G &= g_4\delta + g_5\sigma \\ D &= d_3\gamma + d_4\delta + d_5\sigma \end{aligned}$$

3.1. Nếu $f_3 \neq 0$, bằng cách đổi cơ sở thích hợp có thể xem $f_3 = 1, f_4 = f_5 = 0$

Ta thay $X'_1 = X_1 - c_3X_2$ thì $[X'_1, X_4] = c_4X_4 + c_5X_5$, nên từ đầu ta có thể giả sử

$$[X_1, X_4] = c_4X_4 + c_5X_5 \text{ tức } c_3 = 0.$$

Bây giờ, xét ma trận B . Theo nhận xét 2 và bổ đề 3.4 thì

$$BF = CE \Leftrightarrow \begin{cases} b_3 = 0 \\ b_4 = c_4e_3 \\ b_5 = c_5e_3 \\ e_4c_4 = 0 \\ c_5e_4 + c_4e_5 = 0 \\ c_5e_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_3 = b_4 = b_5 = c_4 = c_5 = 0$$

Áp dụng đồng nhất thức Jacobi cho X_1, X_2, X_4 , ta được $X_3 = 0$ mâu thuẫn. Vậy trường hợp này không xảy ra.

3.2. Nếu $f_3 = 0 \Rightarrow e_3 \neq 0$

Ta thay $X'_3 = \frac{1}{e_3}X_3$, $X'_1 = X_1 - b_3X_2$ ta được $[X_2, X'_3] = X_3 + e'_4X_4 + e'_5X_5$,

$$[X'_1, X'_3] = b'_4X_4 + b'_5X_5$$

Nên từ đầu ta có thể giả sử $[X_2, X_3] = X_3 + e_4X_4 + e_5X_5, [X_1, X_3] = b_4X_4 + b_5X_5$

tức $e_3 = 1, b_3 = 0$

Xét ma trận B của song tuyến tính B_F trên $\mathcal{G}$, ta có

$$BF = CE \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = 0 \\ b_4 f_4 = c_4 e_4 \\ b_5 f_5 = c_5 e_5 \\ b_5 f_4 + b_4 f_5 = c_5 e_4 + c_4 e_5 \\ c_4 e_3 + c_3 e_4 = 0 \\ c_5 e_3 + c_3 e_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = 0 \\ b_4 f_4 = 0 \\ b_5 f_5 = 0 \\ b_5 f_4 + b_4 f_5 = 0 \\ c_3 = c_4 = c_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_3 = c_4 = c_5 = b_4 = b_5 = 0$$

Áp dụng đồng nhất thức Jacobi với X_1, X_2, X_4 ta được

$$\begin{cases} f_5 d_3 = 0 \\ f_4 = f_5 d_4 \\ f_5 = f_5 d_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_3 = 0 \\ d_5 = 1 \end{cases}$$

Áp dụng đồng nhất thức Jacobi với X_1, X_2, X_3 ta được $X_3 + A(X_4, X_5) = 0$ (trong đó $A(X_4, X_5)$ là biểu thức của X_4 và X_5) mâu thuẫn vì $\{X_3, X_4, X_5\}$ độc lập tuyến tính, trường hợp này không xảy ra.

Vậy cả 3 trường hợp điều không thỏa mãn. Suy ra không tồn tại MD5-đại số nào có ideal dẫn xuất thứ nhất không giao hoán 4 chiều. $\square$

3.3. Bức tranh hình học các K-quỹ đạo của các MD5-nhóm tương ứng với các MD5-đại số đã xét.

3.3.1. Phương pháp mô tả các K-quỹ đạo.

3.3.1.1. Khái niệm K-quỹ đạo của nhóm Lie.

Cho G là một nhóm Lie liên thông đơn liên và $\mathcal{G}$ là đại số Lie của nó, $\mathcal{G}^*$ là không gian đối ngẫu của đại số Lie $\mathcal{G}$. Thì K-biểu diễn của G trong $\mathcal{G}^*$ được cho bởi

$$\langle K_{(g)}F, X \rangle := \langle F, \text{Ad}(g^{-1})X \rangle; \quad (\forall g \in G, \forall F \in \mathcal{G}^*, \forall X \in \mathcal{G})$$

Khi đó, ứng với mỗi F trong $\mathcal{G}^*$, K-quỹ đạo Ω_F của G đi qua F được xác định bởi:

$$\Omega_F = \{K_{(g)}F / g \in G\}$$

Đối với mỗi nhóm Lie G , chúng ta quan tâm đến bài toán mô tả các K-quỹ đạo Ω_F của G , $\forall F \in \mathcal{G}^*$. Như đã biết, luật nhóm của G chưa được cho một cách tường minh mà chỉ biết rõ cấu trúc của đại số Lie $\mathcal{G}$ của G nên ta gặp rất nhiều khó khăn trong quá trình nghiên cứu nhóm Lie G . Trong khi đó ánh xạ mũ $\exp_G : \mathcal{G} \rightarrow G$ và tính chất tự nhiên của nó lại rất có ích cho chúng ta trong quá trình nghiên cứu nhóm Lie.

Ký hiệu $\exp_G : \mathcal{G} \rightarrow G$ là ánh xạ mũ của G và $\exp_G : \text{End}_{\mathbb{R}} \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}} \mathcal{G}$ là ánh xạ mũ của nhóm Lie $\text{Aut}_{\mathbb{R}} \mathcal{G}$ các tự đẳng cấu $\mathbb{R}$ -tuyến tính của $\mathcal{G}$.

Nhắc lại rằng vi phân $Ad_* = ad : \mathcal{G} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}} \mathcal{G}$ của biểu diễn phụ hợp của G trong $\mathcal{G}$ được xác định bởi công thức đơn giản:

$$ad_U(X) = [U, X], \forall U, X \in \mathcal{G}$$

Tính tự nhiên của ánh xạ mũ được thể hiện bởi hình vuông giao hoán sau:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & \text{Aut}_{\mathbb{R}} \mathcal{G} \\ \exp_G \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{ad} & \text{End}_{\mathbb{R}} \mathcal{G} \end{array} \quad Ad \cdot \exp_G = \exp \cdot ad$$

Với mỗi $U \in \mathcal{G}$, và mỗi $F \in \mathcal{G}^*$, ta hãy xác định phần tử trong $\mathcal{G}^*$ ký hiệu là F_U như sau:

$$\langle F_U, X \rangle = \langle F, \exp(ad_U) X \rangle, \forall X \in \mathcal{G}.$$

3.3.1.2. Một số bổ đề.

Bổ đề 3.5. Nếu gọi Ω_F là K-quỹ đạo của G qua F thì ta luôn có bao hàm thức:

$$\Omega_F \supset \{F_U / U \in \mathcal{G}\}$$

Đặc biệt, nếu $\exp_G$ là toàn ánh thì đẳng thức xảy ra.

Chứng minh. Với mỗi $U \in \mathcal{G}$, đặt $g = \exp_G(-U) \in G$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \langle F_U, X \rangle &= \langle F, \exp(ad_U) X \rangle = \langle F, Ad(\exp_G(U)) X \rangle \\ &= \langle F, Ad(g^{-1}) X \rangle = \langle K_{(g)} F, X \rangle, \forall X \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

Do đó, $F_U = K_{(g)} F$ và nói riêng $F_U \in \Omega_F$. Tức là $\{F_U / U \in \mathcal{G}\} \subset \Omega_F$.

Nếu giả thiết thêm $\exp_G$ là toàn ánh. Theo tính chất toàn ánh ta có: Với mỗi $g \in G$ luôn tồn tại $U_o \in \mathcal{G}$, để $g^{-1} = \exp_G(U_o)$. Khi đó

$$\begin{aligned} \langle K_{(g)} F, X \rangle &= \langle F, Ad(g^{-1}) X \rangle = \langle F, Ad(\exp_G(U_o)) X \rangle \\ &= \langle F, \exp(ad_{U_o}) X \rangle = \langle F_{U_o}, X \rangle, \forall X \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

Do đó $K_{(g)} F = F_{U_o}$ và $\{F_U / U \in \mathcal{G}\} \supset \Omega_F$, nghĩa là có đẳng thức

$$\Omega_F = \{F_U / U \in \mathcal{G}\}.$$

□

Để tiện cho việc sử dụng trong phần sau, ta sẽ ký hiệu $\Omega_F(\mathcal{G})$ thay cho tập $\{F_U / U \in \mathcal{G}\}$. Như vậy bao hàm thức trên có thể được viết là:

$$\Omega_F(\mathcal{G}) \subset \Omega_F, \forall F \in \mathcal{G}^*$$

Một điều kiện đủ để đẳng thức xảy ra là $\exp_G : \mathcal{G} \rightarrow G$ là toàn ánh. Thực ra, trong nhiều trường hợp một điều kiện yếu hơn tính toàn ánh của $\exp_G$ cũng là đủ để có đẳng thức $\Omega_F = \Omega_F(\mathcal{G})$. Cụ thể là:

Bổ đề 3.6. Giả sử G liên thông. Nếu họ các $\Omega_F(\mathcal{G})$, $\forall F \in \mathcal{G}^*$ lập thành một phân hoạch của $\mathcal{G}^*$ và mọi $\Omega_{F'}(\mathcal{G})$, $\forall F' \in \mathcal{G}^*$ đều cùng mở hoặc cùng đóng (tương đối) trong Ω_F , $\forall F \in \mathcal{G}^*$. Khi đó, $\Omega_F(\mathcal{G}) = \Omega_F, \forall F \in \mathcal{G}^*$.

Mệnh đề 3.3. Giả sử G là nhóm Lie thực giải được, đơn liên, hữu hạn chiều và $\mathcal{G}$ là đại số Lie của nó. Khi đó các khẳng định sau đây là tương đương:

- (i) Ánh xạ $\exp_G : \mathcal{G} \rightarrow G$ là vi phôi giải tích (hay G là nhóm exponential).
- (ii) Với $\forall X \in \mathcal{G}$, ad_X không có giá trị riêng phức (trong $\mathbb{C}$) thuần ảo nào.

Hệ quả 3.2. Nếu G là nhóm Lie thực giải được, liên thông hữu hạn chiều với đại số Lie $\mathcal{G}$ của nó có tính chất (ii) trong mệnh đề 3.3 thì ánh xạ mũ $\exp_G : \mathcal{G} \rightarrow G$ là toàn ánh.

3.3.2. Bức tranh hình học các K-quỹ đạo của các MD5-nhóm liên thông đơn liên mà các MD5-đại số tương ứng có ideal dẫn xuất thứ nhất không giao hoán 3 chiều.

Giả sử G là một trong các nhóm $\widetilde{\mathcal{G}}_{5,,3,1}$, $\widetilde{\mathcal{G}}_{5,,3,2}$, $\widetilde{\mathcal{G}}_{5,,3,3}$. Ký hiệu $\mathcal{G}$ là đại số Lie của nhóm G và $\mathcal{G}^*$ là không gian đối ngẫu của đại số Lie $\mathcal{G}$. Mỗi $U \in \mathcal{G}$ có tọa độ (a, b, c, d, e) trong cơ sở $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ và mỗi $F \in \mathcal{G}^*$ có tọa độ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma)$ trong cơ sở đối ngẫu $(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ của $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$. Cuối cùng ta ký hiệu Ω_F là K-quỹ đạo chứa F của G trong $\mathcal{G}^* \equiv \mathbb{R}^5$.

Mệnh đề 3.4. K-quỹ đạo Ω_F chứa F của nhóm $G = \widetilde{\mathcal{G}}_{5,,3,1}$ được mô tả như sau:

- (i) Nếu $\lambda = \delta = \sigma = 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, \beta, 0, 0, 0)\}$: quỹ đạo là 0-chiều.
- (ii) Nếu $\lambda = \delta = 0, \sigma \neq 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, \beta, z, t, \sigma)\}$: quỹ đạo là 2-chiều.
- (iii) Nếu $\lambda = 0, \delta \neq 0, \sigma = 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, y, z, \delta, 0)\}$: quỹ đạo là 2-chiều.
- (iv) Nếu $\lambda \neq 0, \delta = \sigma = 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, y, \gamma, t, 0)\}$: quỹ đạo là 2-chiều.
- (v) Nếu $\lambda \neq 0, \delta \neq 0, \sigma = 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, y, z, t, 0)\}$: quỹ đạo là 2-chiều.
- (vi) Nếu $\lambda^2 + \delta^2 \neq 0, \sigma \neq 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, y, z, t, \sigma)\}$: quỹ đạo là 2-chiều.

Chứng minh. Giả sử với mỗi U có tọa độ $(a, b, c, d, e) \in \mathcal{G}$, ta có

- $[U, X_1] = 0.$
- $[U, X_2] = -dX_3 - cX_4.$
- $[U, X_3] = bX_4 - dX_5.$
- $[U, X_4] = bX_3 + cX_5.$
- $[U, X_5] = 0.$

Suy ra ma trận của ánh xạ ad_U là:

$$ad_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & b & 0 \\ 0 & -c & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & c & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận ad_U chỉ có giá trị riêng là 0 (bội 5). Từ đó ta được

$$\exp(ad_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 1 & b & 0 \\ 0 & -c & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -d & c & 1 \end{pmatrix}$$

Do vậy, tọa độ $F_x \in \mathcal{G}^*$ như sau:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta - d\gamma - c\delta \\ z = \gamma + b\delta - d\sigma \\ t = b\gamma + \delta + c\sigma \\ s = \sigma \end{cases}$$

Theo bổ đề 3.5 và hệ quả 3.2, ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bằng tính toán và lập luận tương tự, ta hoàn toàn có thể mô tả bức tranh các K-quỹ đạo của các MD5-nhóm còn lại. Do đó, ta có các mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.4. K-quỹ đạo Ω_F chứa F của nhóm $G = \widetilde{G}_{5,3,2}$ được mô tả như sau:

- Nếu $\lambda = \delta = \sigma = 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, \beta, 0, 0, 0)\}$: quỹ đạo là 0-chiều.
- Nếu $\lambda = \delta = 0, \sigma \neq 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, \beta, z, t, \sigma)\}$: quỹ đạo là 2-chiều.
- Nếu $\lambda = 0, \delta \neq 0, \sigma = 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, y, z, \delta, 0)\}$: quỹ đạo là 2-chiều.
- Nếu $\lambda \neq 0, \delta = \sigma = 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, y, \gamma, t, 0)\}$: quỹ đạo là 2-chiều.

(v) Nếu $\lambda \neq 0, \delta \neq 0, \sigma = 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, y, z, t, 0)\}$: quỹ đạo là 2-chiều.

(vi) Nếu $\lambda^2 + \delta^2 \neq 0, \sigma \neq 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, y, z, t, \sigma)\}$: quỹ đạo là 2-chiều.

Mệnh đề 3.5. K-quỹ đạo Ω_F chứa F của nhóm $G = \widetilde{G}_{5,3,3}$ được mô tả như sau:

(i) Nếu $\lambda = \delta = \sigma = 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, \beta, 0, 0, 0)\}$: quỹ đạo là 0-chiều.

(ii) Nếu $\lambda^2 + \delta^2 \neq 0, \sigma = 0$ thì $\Omega_F = \{F(x, y, z, t, 0)\}$: quỹ đạo là 4-chiều.

(iii) Nếu $\sigma \neq 0$ thì $\Omega_F = \{F(x, y, \gamma, t, s)\}$: quỹ đạo là 4-chiều.

KẾT LUẬN

Trước hết ta khẳng định rằng, các MD5-đại số đã được phân loại triệt để (chính xác đến đẳng cấu đại số Lie), và kết quả nhận được 24 họ MD5-đại số với ideal dẫn xuất giao hoán và 3 họ MD5-đại số với ideal dẫn xuất không giao hoán. Đồng thời, bức tranh hình học các K-quỹ đạo của 27 họ MD5-nhóm liên thông đơn liên tương ứng cũng được mô tả một cách tường minh. Qua đó, ta nhận được 24 họ MD5-phân lá đo được.

Trong luận văn này, tác giả đã trình bày lại chi tiết định lý phân loại của Lê Anh Vũ và Kar Ping Shum và chứng minh một cách tường minh định lý này. Đồng thời, luận văn còn đưa ra 3 họ MD5 đại số với ideal dẫn xuất 3 chiều không giao hoán, mô tả bức tranh hình học của chúng và chứng minh rằng không tồn tại một MD5-đại số nào với ideal dẫn xuất 4 chiều không giao hoán.

Dựa trên các phương pháp đã sử dụng và các kết quả nêu trên, gợi cho ta các hướng cần nghiên cứu tiếp sau này.

- Phân loại tôpô các MD5-phân lá còn lại. Mô tả kiểu tô pô phân lá và các C^* -đại số liên kết với các MD5-phân lá.
- Cũng với hướng nghiên cứu trên, nhưng đối với các MD n -nhóm và MD n -đại số với $n \geq 6$.

Sau cùng, do hạn chế về kiến thức, thời gian,... nên nội dung của luận văn đã dừng lại trong khuôn khổ nhất định. Tác giả rất hy vọng sẽ được tiếp tục nghiên cứu các vấn đề trên. Mặc dù đã cố gắng nhiều trong soạn thảo, nhưng những thiếu sót là không tránh khỏi, tác giả rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và bạn đọc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng việt

1. [Tra] Đào Văn Trà (1984), “Về một lớp các đại số Lie số chiều thấp”, *tuyển tập các báo cáo tại Hội thảo Khoa học Viện Toán học Việt Nam lần thứ 12 tại Hà Nội*.
2. [Vu1] Lê Anh Vũ (1987), “Phân lá tạo bởi các K -quỹ đạo chiều cực đại của nhóm kim cương thực”, *Tạp chí Toán học*, số 3, tr. 7 – 10.
3. [Vu2] Lê Anh Vũ (1990), *Không gian phân lá tạo bởi các K -quỹ đạo chiều cực đại của lớp nhóm Lie MD_4* , Luận án phó tiến sĩ khoa học Toán Lý, Viện Toán học Việt Nam, Hà Nội.
4. [Vu-Tri] Lê Anh Vũ, Nguyễn Công Trí (2005), “Vài ví dụ về MD_5 -đại số và các MD_5 -phân lá đo được liên kết với các MD_5 -nhóm tương ứng”, *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư Phạm Tp.HCM*, số 8 (42), TP.HCM.
5. [Vu3] Lê Anh Vũ (2006), *Về một lớp con các MD_5 -đại số và phân lá tạo bởi các K -quỹ đạo chiều cực đại của các MD_5 -nhóm tương ứng*, Đề tài nghiên cứu khoa học cấp Bộ, MS: B2005.23.70, Tp.HCM.
6. [Tha] Dương Minh Thành (2006), *Về một lớp con các MD_5 -đại số và phân lá tạo bởi các K -quỹ đạo chiều cực đại của các MD_5 -nhóm liên thông tương ứng*, Luận văn Thạc sĩ Toán học, MS: 60 46 10, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Tp.HCM.
7. [Hoa] Dương Quang Hòa (2007), *Các MD_5 -đại số với ideal dẫn xuất giao hoán 4 chiều và các phân lá tạo bởi các K -quỹ đạo chiều cực đại của các MD_5 -nhóm liên thông tương ứng*, Luận văn Thạc sĩ Toán học, MS: 60 46 10, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Tp.HCM.

Tiếng Anh

8. [Di] Do Ngoc Diep (1975), “The Structure of the Group C^* -algebras of the Group of Affine transformations of the straight link”, *Funkt. Anal. i Priloz*, pp. 63-64.
9. [Di] Do Ngoc Diep (1999), *Method of Noncommutative Geometry for Group C^* -algebras*, Chapman and Hall/ CRC Press Research Notes in Mathematics Series, 416, (1999).
10. [Ha-Sch] M. Hausner and J. T. Schwartz (1968), *Lie Group – Lie Algebra*, Gordon and Breach, Sci. Publisher, New York – London – Paris.
11. [Ki] A. A. Kirillov (1976), *Elements of the Theory of Representations*, Springer – Verlag, Berlin – Heidenberg – New York.

12. [Vu4] Le Anh Vu (1990), “On the structure of the C^* -algebra of the foliation Formed by the K -orbits of Maximal Dimension of the real Diamond Group”, *J.Operator* 24, pp. 227 – 238.
13. [Vu5] Le Anh Vu (1990), “On the foliations Formed by Generic K -orbits of the MD4-Groups”, *Acta Math. Vietnam*, (2), pp. 39 – 55.
14. [Vu6] Le Anh Vu (1993), “Foliations Formed by Orbits of Maximal Dimension in the Co-adjoint Representation of a Class of Solvable Lie Groups, Vest. Moscow Uni., *Math. Bullentin*, Vol. 48 (3), p.p. 24 – 27.
15. [Vu7] Le Anh Vu (2003), “Foliations Formed by K -orbits of Maximal Dimension of some MD5-Groups”, *East – West Journal of Mathematics*, Vol. 5 (2), pp. 159 – 168, Bangkok, Thailand.
16. [Vu8] Le Anh Vu (2006), “On a Subclass of 5-dimensional Solvable Lie Algebras Which Have 3-dimensional Commutative Derived Ideal”, *East – West Journal of Mathematics*, Vol. 7 (1), pp. 13 – 22, Bangkok, Thailand.
17. [Vu-Sh] Le Anh Vu, Kar Ping Shum (2008), “Classification of 5-dimensional MD-algebras having commutative derived ideals”, *World Scientific Publishing Co*, pp 351-371.
18. [Vu-Tha] Le Anh Vu, Duong Minh Thanh (2006), “The Geometry of K -orbits of the Subclass of MD5-Groups and Foliations Formed by Their Generic K -orbits”, *Contributions in Mathematics and Applications (Proceedings of the International Conference in Mathematics and Applications, Decenber 2005, Bangkok, Thailand)*, pp. 1 – 16, Bangkok Thailand.

Tiếng Pháp

19. [Bo] N.Bourbaki (1972), *Groupes et Algégres de Lie*, Hermann Paris.
20. [So-Vi] V. M. Son et H. H. Viet, “Sur la structure des C^* -algebres d’une Classe de Groupes de Lie”, *J.Operator* (11),p.p. 77 – 99.