BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

DƯƠNG QUỐC HÙNG

LUẬT SỐ LỚN
VÀ ĐỊNH LÝ DE MOIVRE-LAPLACE

Chuyên ngành : Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số : 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - 2011.

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **PGS.TS. Trần Văn Ân**

Phản biện 1: **PGS.TSKH. Trần Quốc Chiến**

Phản biện 2: **PGS.TS. Huỳnh Thế Phùng**

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 22 tháng 10 năm 2011.

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin – Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

Mục lục

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Ra đời từ thế kỷ 17, lý thuyết xác suất nghiên cứu qui luật của các hiện tượng ngẫu nhiên. Dựa vào các thành tựu của lý thuyết xác suất, thống kê toán xây dựng các phương pháp ra quyết định trong điều kiện thông tin không đầy đủ. Các định lý giới hạn và luật số lớn là một trong những kết quả quan trọng và lý thú của lý thuyết xác suất. Ý nghĩa của chúng không chỉ là những kết quả đẹp về mặt toán học mà còn là cơ sở cho các lập luận của thống kê toán học khi làm việc với đám đông.

Ngày nay trong các lĩnh vực kinh tế, chính trị, quân sự, hóa học, thực nhiệm, sinh học, kỹ thuật . . . đều cần đến xác suất và thống kê mà luật số lớn và định lý De Moivre-Laplace đóng một vai trò quan trọng. Xuất phát từ nhu cầu phát triển và ứng dụng, chúng tôi quyết định chọn đề tài với tên: **Luật số lớn và định lý De Moivre-Laplace** để tiến hành nghiên cứu.

2. Mục đích nghiên cứu

- Hệ thống lại các khái niệm cơ bản của lý thuyết xác suất, luật số lớn và các tính chất của chúng.

- Chứng minh chặt chẽ, chi tiết về luật số lớn và định lý De Moivre-Laplace. Đồng thời đưa ra các ví dụ áp dụng thực tế của luật số lớn và định lý De Moivre-Laplace.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Đối tượng nghiên cứu: đề tài nghiên cứu về luật số lớn và định lý De Moivre-Laplace.

- Phạm vi nghiên cứu: nghiên cứu các tài liệu về xác suất trong và ngoài nước.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Thu thập các bài báo khoa học, các tài liệu của các tác giả nghiên cứu liên quan đến luật số lớn và định lý De Moivre-Laplace.
- Tham khảo thêm các tài liệu trên mạng Internet.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Luận văn được trình bày có hệ thống với các chứng minh chặt chẽ, chi tiết về luật số lớn và định lý De Moivre-Laplace. Bên cạnh đó, luận văn còn đưa ra các ví dụ áp dụng thực tế của luật số lớn và định lý De Moivre-Laplace. Nên luận văn này góp phần tạo ra được một tài liệu tham khảo cho sinh viên sư phạm và hệ cử nhân toán.

6. Cấu trúc của luận văn

Luận văn được trình bày thành ba chương:

Chương 1 với nhan đề **Biến ngẫu nhiên và xác suất**. Trong chương này, trước tiên chúng tôi trình bày một số kiến thức tổng quan về biến ngẫu nhiên và xác suất.

Chương 2 với nhan đề **Luật số lớn**. Trong chương này, chúng tôi trình bày về luật số lớn và một số ví dụ minh họa cũng như các áp dụng của nó.

Chương 3 với nhan đề **Định lý De Moivre-Laplace**, nhằm trình bày định lý De Moivre-Laplace và một số ứng dụng của định lý này.

Chương 1

BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ XÁC SUẤT

1.1 Biến ngẫu nhiên

1.1.1 σ-đại số và đại số

Giả sử Ω là một tập tùy ý khác $\emptyset$. Ký hiệu $\mathcal{P}(\Omega)$ là tập hợp gồm tất cả các tập con của Ω.

Định nghĩa 1.1. Lớp $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ được gọi là một *đại số* nếu thỏa mãn các điều kiện sau:
i. $\Omega \in \mathcal{A}$.
ii. Nếu $A \in \mathcal{A}$, thì $\bar{A} \in \mathcal{A}$ (ký hiệu $\bar{A}$ là phần bù của tập A trong Ω).
iii. Nếu $A, B \in \mathcal{A}$, thì $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Định nghĩa 1.2. Lớp $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ được gọi là *σ-đại số* nếu nó là đại số và với mọi $A_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, 3, \ldots$ ta có $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Định lý 1.1. *Cho trước một lớp tập hợp $\mathcal{M} \neq \emptyset,\ \mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$; bao giờ cũng tồn tại một đại số duy nhất $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ bao hàm $\mathcal{M}$ và chứa trong tất cả các đại số khác bao hàm $\mathcal{M}$. Đại số $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ được gọi là đại số sinh ra bởi $\mathcal{M}$.*

Định lý 1.2. *Cho trước một lớp tập hợp $\mathcal{M} \neq \emptyset,\ \mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$; bao giờ cũng tồn tại một σ-đại số duy nhất sinh ra bởi $\mathcal{M}$, ký hiệu $\sigma(\mathcal{M})$.*

Định nghĩa 1.3. *Một phân hoạch* hữu hạn $\mathrm{C} = \{A_i, i \in I\}$ là một họ các tập con khác $\emptyset$, rời nhau từng cặp của Ω, và hợp của chúng là Ω.

Định lý 1.3. *Đại số $\mathcal{A}$ sinh bởi phân hoạch hữu hạn* C *của* Ω *gồm tất cả các hợp của các họ con có thể có của* C.

Định nghĩa 1.4. Giả sử $\Omega = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ và $\mathcal{C}$ là lớp các khoảng dạng $[a; b)$ với $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, ở đây quy ước $[-\infty; b) = (-\infty; b)$. Khi đó, $\sigma(\mathcal{C})$ được gọi là σ-đại số *Borel* của $\mathbb{R}$, ký hiệu là $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Mỗi phần tử của $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ được gọi là một tập *Borel.*

Nhận xét 1.1. *Rõ ràng :* $[a; b], (a; b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Hơn nữa,* σ*-đại số sinh bởi các đoạn thẳng mở (đóng) cũng chính bằng* σ*-đại số Borel.*

1.1.2 Ánh xạ đo được

Định nghĩa 1.5. Cặp $(\Omega, \mathcal{F})$, trong đó $\Omega \neq \emptyset$ bất kỳ, còn $\mathcal{F}$ là một σ-đại số các tập con của Ω được gọi là một *không gian đo được.*

1- Các tập $\{\omega\} \subset \Omega, \{\omega\} \in \mathcal{F}$ được gọi là *các biến cố sơ cấp.*

2- Các phần tử $A \in \mathcal{F}$ được gọi là *các biến cố,* Ω được gọi là *biến cố chắc chắn,* $\emptyset$ được gọi là *biến cố không thể.* Nếu $A \cap B = \emptyset$, thì ta nói A và B là các *biến cố xung khắc.*

Định nghĩa 1.6. Giả sử $(\Omega, \mathcal{F})$ và $(E, \mathcal{B})$ là hai không gian đo được. Ánh xạ $f : \Omega \longrightarrow E$ được gọi là $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$*-đo được* (nếu không có nhầm lẫn ta viết tắt là đo được) hay còn được gọi là phần tử ngẫu nhiên hay *biến ngẫu nhiên* nhận giá trị trong E nếu $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, với mọi $A \in \mathcal{B}$.

Định lý 1.4. *Giả sử* $h : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (G, \mathcal{G})$; $g : (G, \mathcal{G}) \longrightarrow (E, \mathcal{B})$ *là các ánh xạ đo được. Khi đó ánh xạ hợp* $g \circ h$ *là phần tử ngẫu nhiên trên* $(\Omega, \mathcal{F})$ *với giá trị trong* $(E, \mathcal{B})$.

Định lý 1.5. *Cho* $\mathcal{C}$ *là một lớp các tập con của* Ω. *Đặt* $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ *là* σ*-đại số sinh ra bởi* $\mathcal{C}$. *Giả sử* $(E, \mathcal{E})$ *là không gian đo được. Ánh xạ* $f : E \longrightarrow \Omega$ *là* $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$*-đo được khi và chỉ khi* $f^{-1}(C) \in \mathcal{E}$, *với mỗi* $C \in \mathcal{C}$.

1.1.3 Biến ngẫu nhiên

Giả sử $(\Omega, \mathcal{F})$ là không gian đo được đã cho, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$, $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.

Định nghĩa 1.7. Biến ngẫu nhiên X nhận giá trị trên $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ được gọi là một *đại lượng ngẫu nhiên,* nếu X nhận giá trị trên $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ thì X được gọi là một *đại lượng ngẫu nhiên suy rộng.*

Định lý 1.6. *Giả sử $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

a) X là một đại lượng ngẫu nhiên;
b) $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$;
c) $\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$;
d) $\{\omega : a \leq X(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$, với mọi $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$.

Chú ý 1.1. Cho không gian đo được $(\Omega, \mathcal{F})$, $A \subset \Omega$. Ta thấy rằng $\mathbb{I}_A$ là đại lượng ngẫu nhiên khi và chỉ khi $A \in \mathcal{F}$. *Tổng quát,* nếu $A_i \in \mathcal{F}, i \in I$ (I là tập không quá đếm được) và $\sum\limits_{i \in I} A_i = \Omega$ thì với $(x_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}$, hàm $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $X(\omega) = \sum\limits_{i \in I} x_i \mathbb{I}_{A_i}(\omega)$ cũng là đại lượng ngẫu nhiên và được gọi là *đại lượng ngẫu nhiên rời rạc.* Khi I hữu hạn thì X được gọi là *đại lượng ngẫu nhiên đơn giản.*

Định nghĩa 1.8. Hàm $\varphi : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ được gọi là *hàm Borel,* nếu nó là $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-đo được, nghĩa là $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *với mỗi* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Định nghĩa 1.9. Ánh xạ $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) :\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là *vector ngẫu nhiên n chiều nếu* $\overrightarrow{X}^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, với mọi $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Trong đó $\overrightarrow{X}^{-1}(B) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i^{-1}(B_i),\ B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, với $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Vector ngẫu nhiên $\overrightarrow{X}$ có 2 loại: *vector ngẫu nhiên rời rạc (liên tục)* nếu $X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ là các đại lượng ngẫu nhiên rời rạc (liên tục).

Mệnh đề 1.1. $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *là vector ngẫu nhiên n chiều* khi và chỉ khi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các đại lượng ngẫu nhiên.

Định lý 1.7. *Cho $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là vector ngẫu nhiên n chiều và g là một hàm Borel. Khi đó $Y = g(\overrightarrow{X})$ là một đại lượng ngẫu nhiên.*

* **Lưu ý.** Định lý trên được mở rộng như sau: *Nếu $g : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ là hàm Borel và $\overrightarrow{X}$ là vector ngẫu nhiên n chiều, thì $g(\overrightarrow{X})$ là vector ngẫu nhiên m chiều.*

Hệ quả 1.1. *1. Nếu X là một đại lượng ngẫu nhiên, thì với mọi $\alpha > 0$, ta có $|X|^\alpha$ là một đại lượng ngẫu nhiên.*

2. Nếu X, Y là các đại lượng ngẫu nhiên. Khi đó $X \pm Y$, $X.Y$, $\max\{X, Y\}$, $\min\{X, Y\}$ là các đại lượng ngẫu nhiên và nếu $Y(\omega)$ không triệt tiêu, thì $\dfrac{X}{Y}$ cũng là một đại lượng ngẫu nhiên.

Định lý 1.8. *Giả sử $(X_n)_{n\geq 1}$ là dãy đại lượng ngẫu nhiên và hữu hạn trên Ω. Khi đó*

$$\sup_n X_n,\ \inf_n X_n,\ \limsup_n X_n,\ \liminf_n X_n$$

là các đại lượng ngẫu nhiên. Đặc biệt nếu $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$, thì X cũng là một đại lượng ngẫu nhiên.

Định lý 1.9. *Giả sử X là một đại lượng ngẫu nhiên xác định trên không gian đo được $(\Omega, \mathcal{F})$. Khi đó:*

a) Tồn tại dãy đại lượng ngẫu nhiên rời rạc hội tụ đều đến X.

b) Nếu $X \geq 0$, thì tồn tại dãy đại lượng ngẫu nhiên đơn giản $(X_n)_{n\geq 1}$ sao cho $X_n \uparrow X$.

1.2 Độ đo xác suất

1.2.1 Không gian xác suất

Định nghĩa 1.10. Gọi $\mathcal{F}$ là lớp các tập con của Ω. Một ánh xạ $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là *một hàm tập hợp (hay hàm tập).*

Định nghĩa 1.11. Hàm tập hợp P xác định trên σ-đại số $\mathcal{A}$ được gọi là *độ đo xác suất* nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $P(A) \geq 0$, với mọi $A \in \mathcal{A}$.

b) $P(\Omega) = 1$.

c) Nếu $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ với mọi $i, j \in \mathbb{N}^*$, thì $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Định nghĩa 1.12. Nếu P là một độ đo xác suất trên một σ-đại số $\mathcal{A}$ các tập con của Ω thì ta gọi bộ ba $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ là một *không gian xác suất.*

Định lý 1.10. *Cho P là một độ đo xác suất trên σ-đại số $\mathcal{A}$. Khi đó ta có:*

1) P liên tục trên, tức là nếu $A_n \in \mathcal{A}, n = 1, 2, \ldots$ là dãy không giảm $(A_n \subset A_{n+1})$ và $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, thì $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

2) P liên tục dưới, tức là nếu $A_n \in \mathcal{A}, n = 1, 2, \ldots$ là dãy không tăng $(A_n \subset A_{n-1})$ và $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, thì $P(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

3) P liên tục tại không, tức là nếu $A_n \in \mathcal{A}, A_n \supset A_{n+1}, n = 1, 2, \ldots$ và $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

1.2.2 Các tính chất sơ cấp của xác suất

Định lý 1.11. *Cho $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là một không gian xác suất. Ta có:*

1) $P(\emptyset) = 0$.

2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

3) Nếu $A \subset B$, thì $P(A) \leq P(B)$.

4) $P(A) \leq 1$.

5) Nếu $A, B \in \mathcal{F}$, thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

6) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \quad (A, B \in \mathcal{F})$.

7) $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

8) $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) - P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} [P(A_n) - P(B_n)]$ nếu $A_n \supset B_n, n = 1, 2, \ldots$.

1.2.3 Phân phối xác suất và hàm phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên

Định nghĩa 1.13. Cho đại lượng ngẫu nhiên $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Với mỗi $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ta đặt $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$ và gọi P_X là *phân phối xác suất* của đại lượng ngẫu nhiên X.

Định nghĩa 1.14. Hàm số $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $F_X(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ được gọi là *hàm phân phối xác suất* của đại lượng ngẫu nhiên X.

Nếu xem $F(x) \equiv F_X(x)$, thì hàm $F(x)$ có các tính chất sau:

Định lý 1.12. *i) $F(x)$ là hàm đơn điệu không giảm, nghĩa là nếu $x \leq y$, thì $F(x) \leq F(y)$.*

ii) $F(x)$ là hàm liên tục bên trái (tức là $F(x-0) = F(x)$) *và có giới hạn phải tại mọi điểm.*

iii) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Định nghĩa 1.15. Hàm phân phối $F_X(x)$ được gọi là *rời rạc* nếu nó có dạng:

$$F(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i,$$

trong đó $P(x_i) = p_i > 0$, $\sum\limits_i p_i = 1$ và miền giá trị $S = \{x_i : 1 \leq i < \infty\}$ là tập không quá đếm được của $\mathbb{R}$.

Hàm phân phối $F_X(x)$ được gọi là *liên tục tuyệt đối* nếu có một hàm Borel $f_X(x) \geq 0$ sao cho:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hàm $f_X(x)$ được gọi là *hàm mật độ* của X.

Đại lượng ngẫu nhiên X được gọi là *đại lượng ngẫu nhiên rời rạc (có phân phối rời rạc)* nếu hàm phân phối xác suất của nó là hàm rời rạc.

Đại lượng ngẫu nhiên X được gọi là có *phân phối xác suất liên tục tuyệt đối (đại lượng ngẫu nhiên liên tục)* nếu hàm phân phối xác suất của nó là hàm liên tục tuyệt đối.

Định nghĩa 1.16. Cho $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là một vector ngẫu nhiên. Khi đó $F_{\overrightarrow{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ được gọi là *hàm phân phối xác suất của vector ngẫu nhiên $\overrightarrow{X}$* nếu với mọi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta có:

$$F_{\overrightarrow{X}}(x) = P(\overrightarrow{X} < x) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n).$$

Ở đây ta xét trường hợp vector ngẫu nhiên 2 chiều (tức là cặp đại lượng ngẫu nhiên (X, Y)), còn trường hợp n chiều thì chúng ta qui nạp lên.

Định nghĩa 1.17. Giả sử (X, Y) là vector ngẫu nhiên rời rạc. Với mọi điểm (x_i, y_j) là những điểm tập trung xác suất của vector ngẫu nhiên (X, Y), ta ký hiệu $f_{(X,Y)}(x_i, y_j) = p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$. Khi đó hàm $f_{(X,Y)} : X \times Y \to \mathbb{R}$ cho bởi công thức trên được gọi là *hàm mật độ xác suất* của vector ngẫu nhiên (X, Y).

Định nghĩa 1.18. Giả sử (X, Y) là vector ngẫu nhiên liên tục tuyệt đối. Vector ngẫu nhiên (X, Y) được gọi là có *phân phối đồng thời liên tục tuyệt đối* nếu hàm phân phối đồng thời của nó có dạng:

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u, v)dudv$$

Hàm $f_{(X,Y)}(x, y)$ được gọi là *hàm mật độ* của vector ngẫu nhiên (X, Y), và ta có $f_{(X,Y)}(x, y) = \dfrac{\delta^2 F_{(X,Y)}(x, y)}{\delta x \delta y}$.

* **Một số ví dụ.** Phân phối nhị thức, phân phối Poisson, phân phối chuẩn.

1.2.4 Tính độc lập theo xác suất

Cho $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là một không gian xác suất cố định.

Định nghĩa 1.19. Cho $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ là các lớp các tập đo được của $\mathcal{F}$. Ta nói $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ *độc lập* nếu với mọi $A \in \mathcal{E}$, với mọi $B \in \mathcal{E}'$, ta có $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Định nghĩa 1.20. Cho X, Y là các đại lượng ngẫu nhiên trên $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ta nói các đại lượng ngẫu nhiên X, Y *độc lập* nếu $\sigma(X), \sigma(Y)$ độc lập.

Dãy các đại lượng ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 1}$ được gọi là *độc lập* nếu $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \ldots$ độc lập.
(ở đây $\sigma(X) = \left\{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$ là σ-đại số sinh bởi X.)

Định lý 1.13. *Các mệnh đề sau tương đương:*

1. X, Y độc lập

2. Với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ta có $F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x).F_Y(y)$

3. Với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ta có $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x).f_Y(y)$

4. Với mọi $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ta có $P[X(\omega) \in A, Y(\omega) \in B] = P[X(\omega) \in A].P[Y(\omega) \in B]$.

Định lý 1.14. *Cho $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ là hai σ-đại số con của $\mathcal{F}$, tập $\mathcal{E} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}$. Khi đó $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$.*

Định lý 1.15. *Nếu các σ-đại số con $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ độc lập nhau từng đôi một thì, $\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ độc lập với $\mathcal{F}_3$.*

Nhận xét 1.2. Ta có thể mở rộng định lý trên như sau: *Nếu $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ độc lập, thì $\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ độc lập với $\mathcal{F}_3, ..., \mathcal{F}_n$, và $\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup ... \cup \mathcal{F}_k)$ độc lập với $\sigma(\mathcal{F}_{k+1} \cup ... \cup \mathcal{F}_n)$.*

Định lý 1.16. *Cho f, g là các hàm Borel. Nếu X, Y là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập, thì $f(X), g(Y)$ cũng độc lập.*

* **Lưu ý.** Ta có thể mở rộng định lý trên như sau: *Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập, thì*

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_k) \text{ và } g(X_{k+1}, \ldots, X_n) \text{ độc lập.}$$

Định lý 1.17. *Giả sử X_1, X_2, X_3 là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập nhau từng đôi một. Khi đó $\sigma(X_1, X_2)$ độc lập với $\sigma(X_3)$.*

Nhận xét 1.3. Ta có định lý mở rộng như sau: *Nếu $X_1, X_2, ..., X_n$ độc lập, thì $\sigma(X_1, X_2, ..., X_k)$ độc lập với $\sigma(X_{k+1}, ..., X_n)$.*

1.3 Các đặc trưng số của đại lượng ngẫu nhiên

1.3.1 Kỳ vọng

Định nghĩa 1.21. Giả sử X là một đại lượng ngẫu nhiên rời rạc với miền giá trị $S = \{x_i : i \in \mathbb{N}^*\}$ và $p_i = P[X = x_i]$. Khi đó nếu chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i.p_i$ hội tụ tuyệt đối, nghĩa là $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|.p_i < +\infty$, thì $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i.p_i$ được gọi là *kỳ vọng* của X và ký hiệu là $E(X)$.

Ta có: $\quad E(X) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i.p_i.$

Định nghĩa 1.22. Giả sử X là một đại lượng ngẫu nhiên liên tục tuyệt đối có hàm mật độ $f_X(x)$. Nếu tích phân $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)dx$ hội tụ tuyệt đối, thì giá trị của tích phân đó được gọi là *kỳ vọng* của X và ký hiệu là $E(X)$.

Ta có $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)dx.$

Định nghĩa 1.23. Giả sử X là một đại lượng ngẫu nhiên rời rạc và φ là một hàm thực bất kỳ cho trước. Khi đó nếu $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|.p_i < \infty$, thì giá trị $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i).p_i$ được gọi là *kỳ vọng của hàm của một đại lượng ngẫu nhiên rời rạc* và ký hiệu là $E[\varphi(X)]$.

Nếu X là một đại lượng ngẫu nhiên liên tục và φ là một hàm Borel bất kỳ cho trước. Khi đó nếu $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|.f_X(x)dx < \infty$, thì giá trị $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).f_X(x)dx$ được gọi là *kỳ vọng của hàm của một đại lượng ngẫu nhiên liên tục.*

Định nghĩa 1.24. Giả sử (X, Y) là một vector ngẫu nhiên rời rạc có phân phối đồng thời $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ và $\varphi(X, Y)$ là hàm của một vector ngẫu nhiên. Khi đó nếu $\sum\limits_i \sum\limits_j |\varphi(x_i, y_j)|.p_{ij} < \infty$, thì giá trị $\sum\limits_i \sum\limits_j \varphi(x_i, y_j).p_{ij}$ được gọi là *kỳ vọng của hàm của một vector ngẫu nhiên rời rạc* và ký hiệu là $E[\varphi(X, Y)]$.

Tương tự, nếu (X, Y) là một vector ngẫu nhiên liên tục thì

$$E[\varphi(X, Y)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y).f_{(X,Y)}(x, y)dxdy$$

được gọi là *kỳ vọng của hàm của một vector ngẫu nhiên liên tục.*

Đặc biệt $E(X.Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf_{(X,Y)}(x, y)dxdy.$

Định lý 1.18. *Giả sử $X, Y \geq 0$ hoặc $E|X| < \infty$, $E|Y| < \infty$. Khi đó ta có các tính chất cơ bản sau:*

1) $E(C) = C$, với C là hằng số.

2) $|EX| \leq E|X|$.
3) Nếu $X \leq Y$, *thì* $EX \leq EY$.
4) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$.
5) $E(k.X) = k.E(X)$, k *là hằng số.*
6) $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ *nếu* X, Y *độc lập.*

Định nghĩa 1.25. Hàm g xác định trên tập lồi A được gọi là *hàm lồi trên* A nếu với mọi $x, y \in A$ và $\lambda \in [0; 1]$, ta có:

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y).$$

Hàm g được gọi là *hàm lõm trên* A nếu $-g$ là hàm lồi trên A.

Định lý 1.19. *Giả sử* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *là hàm lồi,* X *là một đại lượng ngẫu nhiên cho trước với* $E|X|$ *và* $E|g(X)|$ *hữu hạn. Khi đó*

$$Eg(X) \geq g(EX).$$

Bất đẳng thức này được gọi là bất đẳng thức Jensen.

Định lý 1.20. *Giả sử* $X \geq 0$ *là một đại lượng ngẫu nhiên cho trước với* $E|X|^k < \infty$, $k \in \mathbb{N}^*$. *Khi đó*

$$E(X) \leq (E(X^2))^{1/2} \leq (E(X^3))^{1/3} \leq \dots$$

1.3.2 Phương sai

Định nghĩa 1.26. Nếu đại lượng ngẫu nhiên X tồn tại giá trị $E(X - EX)^2$, thì đại lượng này được gọi là *phương sai* của X và ký hiệu là $Var(X)$. Khi đó ta có :

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - EX)^2 p_i \quad (\text{nếu } X \text{ có phân phối rời rạc})$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x)dx \quad (\text{nếu } X \text{ có phân phối liên tục})$$

Định lý 1.21. *Phương sai có các tính chất sau:*
1) $Var(C) = 0$, *với* C *là hằng số.*
2) $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$.
3) $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$, *nếu* X, Y *độc lập.*
4) $Var(k.X) = k^2.Var(X)$.

Chương 2

LUẬT SỐ LỚN

2.1 Các bất đẳng thức ngẫu nhiên

2.1.1 Bất đẳng thức Chebyshev

Định lý 2.1. *Cho X là đại lượng ngẫu nhiên có phương sai $VarX$ hữu hạn. Với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có bất đẳng thức sau:*

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{VarX}{\varepsilon^2}.$$

Bất đẳng thức này được gọi là bất đẳng thức Chebyshev.

2.1.2 Bất đẳng thức Markov.

Định lý 2.2. *Giả sử X là đại lượng ngẫu nhiên có $X \geq 0$ và X có kỳ vọng hữu hạn. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, ta có:*

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} EX.$$

Bất đẳng thức này được gọi là bất đẳng thức Markov.

Chú ý 2.1. Trong trường hợp tổng quát, ta có phát biểu sau: *Nếu $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm đơn điệu không giảm và X là một đại lượng ngẫu nhiên. Khi đó với mỗi $a \in \mathbb{R}$, $g(a) > 0$ và $Eg(X)$ hữu hạn, ta có:*

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{g(a)} Eg(X). \tag{2.1}$$

2.1.3 Bất đẳng thức Chernoff.

Định lý 2.3. *Cho X là một đại lượng ngẫu nhiên có $E(e^{aX}) < \infty$. Khi đó:*

$$P(X \geq x) \leq \frac{1}{e^{ax}} Ee^{aX} \ (a > 0).$$

2.2 Sự hội tụ của dãy đại lượng ngẫu nhiên.

Định nghĩa 2.1. Dãy đại lượng ngẫu nhiên (X_n) được gọi là *hội tụ theo xác suất* tới đại lượng ngẫu nhiên X, nếu với mọi $\varepsilon > 0$, ta có:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Khi đó ta ký hiệu là $X_n \xrightarrow{P} X$.

Định nghĩa 2.2. Dãy đại lượng ngẫu nhiên (X_n) được gọi là *hội tụ hầu chắc chắn* tới đại lượng ngẫu nhiên X, nếu tồn tại tập A có xác suất không sao cho

$$X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega) \quad \textit{với } \omega \notin A,$$

hay $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$.

Khi đó ta ký hiệu là $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$

Định nghĩa 2.3. Dãy đại lượng ngẫu nhiên (X_n) được gọi là *hội tụ theo trung bình bậc p* $(0 < p < \infty)$ đến đại lượng ngẫu nhiên X, nếu:

$$\lim_{n\to\infty} E\,|X_n - X|^p = 0.$$

Khi đó ta ký hiệu là $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$

Định lý 2.4. *Các mệnh đề sau tương đương:*

1. $X_n \xrightarrow{h.c.c} 0$
2. *Với mọi* $\varepsilon > 0$, *thì* $\lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega)| < \varepsilon\}) = 1$
3. *Với mọi* $\varepsilon > 0$, *thì* $P(\overline{\lim_n} \{\omega : |X_n(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0$.

Định lý 2.5. *Nếu dãy đại lượng ngẫu nhiên (X_n) là đơn điệu tăng (giảm) và $X_n \xrightarrow{P} X$, thì $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$.*

Định lý 2.6. $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$ *khi và chỉ khi* $\sup\limits_{k \geq n} |X_k - X| \xrightarrow{P} 0$ *khi* $n \to \infty$.

Định lý 2.7. *Quan hệ giữa các loại hội tụ :*

1. Nếu $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$, *thì* $X_n \xrightarrow{P} X$.

2. Nếu $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} X$, *thì* $X_n \xrightarrow{P} X$.

Định nghĩa 2.4. Dãy (X_n) được gọi là *dãy cơ bản theo xác suất (tương ứng h.c.c , theo trung bình bậc p)* nếu với $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta có $P(|X_n - X_m| > \varepsilon) \to 0$ *khi* $m, n \to \infty$ (tương ứng $P(\sup\limits_{k,l \geq n} |X_k - X_l| > \varepsilon) \to 0,\ E|X_n - X_m|^p \to 0$).

Bổ đề 2.1. (**Bổ đề Borel - Cantelli**) *Giả sử* $(A_n)_{n \geq 1}$ *là dãy biến cố bất kỳ. Khi đó:*

a) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, *thì* $P(\limsup\limits_n A_n) = 0$.

b) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ *và* (A_n) *độc lập, thì* $P(\limsup\limits_n A_n) = 1$.

ở đây $\limsup\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$.

Hệ quả 2.1. *Giả sử* (ε_n) *là dãy số dương giảm đến* 0 $(\varepsilon_n \downarrow 0)$. *Khi đó nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon_n) < \infty$, *thì* $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$.

Hệ quả 2.2. *Giả sử* $\varepsilon_n > 0$ *với mọi số tự nhiên* $n \geq 1$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$.

Khi đó nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n) < \infty$, *thì dãy* (X_n) *hội tụ h.c.c đến đại lượng ngẫu nhiên* X *nào đó, hữu hạn h.c.c .*

Hệ quả 2.3. *Nếu dãy* (X_n) *cơ bản theo xác suất, thì có thể rút ra được một dãy con* (X_{n_k}) *hội tụ h.c.c đến đại lượng ngẫu nhiên* X *nào đó.*

Định lý 2.8. *Dãy các đại lượng ngẫu nhiên* (X_n) *hội tụ theo xác suất khi và chỉ khi nó là dãy cơ bản theo xác suất.*

Định lý này được gọi là tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ theo xác suất.

Định lý 2.9. *Dãy các đại lượng ngẫu nhiên* $(X_n)_{n \geq 1}$ *hội tụ h.c.c khi và chỉ khi dãy* $(X_n)_{n \geq 1}$ *là dãy cơ bản theo nghĩa h.c.c .*

Định lý này được gọi là tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ h.c.c.

2.3 Luật số lớn

2.3.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.5. Cho $(X_n)_{n\geq 1}$ là dãy đại lượng ngẫu nhiên, nếu tồn tại dãy số $(a_n)_{n\geq 1}$ và hàm đối xứng $\eta_n = f_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ thỏa mãn với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n - a_n| < \varepsilon) = 1,$$

thì dãy $(X_n)_{n\geq 1}$ được gọi là tuân theo *luật số lớn dạng yếu đối với hàm đối xứng η_n.*

2.3.2 Luật số lớn dạng yếu

Bây giờ xét $f_n(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ và $a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i$, ta có:

Định nghĩa 2.6. Dãy các đại lượng ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ được gọi là tuân theo luật số lớn (dạng yếu) nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

Định lý 2.10. (**Định lý Chebyshev**) *Giả sử (X_n) là dãy các đại lượng ngẫu nhiên độc lập từng đôi một, có phương sai đồng bị chặn (tức là $VarX_i \leq C < +\infty$, với mọi i). Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, ta có:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Hệ quả 2.4. (**Định lý Bernoulli**) *Giả sử m là số lần xuất hiện biến cố A trong dãy n phép thử độc lập với xác suất xuất hiện biến cố A trong mỗi phép thử là p. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, ta có:*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon) = 1.$$

Hệ quả 2.5. (**Định lý Poisson**) *Gọi μ là số lần xảy ra biến cố A trong n phép thử độc lập đầu tiên, p_k là xác suất xảy ra biến cố A trong lần thử thứ k. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có:*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{\mu}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i| < \varepsilon) = 1.$$

Hệ quả 2.6. (**Định lý Markov**) *Giả sử dãy đại lượng ngẫu nhiên (X_n) thỏa mãn*

$$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \longrightarrow 0, \qquad khi\ n \to \infty.$$

Khi đó, dãy (X_n) tuân theo luật số lớn dạng yếu.

Định lý 2.11. *Giả sử X là một đại lượng ngẫu nhiên cho trước với $EX = \mu$ và $E|X| < \infty$. Khi đó ta có:*

i. $\lim\limits_{n\to\infty} n.P(|X| > n) = 0.$

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} EX'^2 = 0$, *trong đó* $X' = X.\mathbb{I}_{(|X|\leq n)}$.

Định lý 2.12. *Giả sử $(X_i)_{i\geq 1}$ là dãy đại lượng ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với $EX_i = \mu$ và $E|X_i| < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó ta có:*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu \quad với\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Định lý 2.13. (**Điều kiện cần và đủ cho luật số lớn**) *Cho dãy đại lượng ngẫu nhiên tùy ý $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$. Điều kiện cần và đủ để dãy đại lượng ngẫu nhiên này thỏa mãn hệ thức:*

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k| < \varepsilon\} = 1, \quad với\ mọi\ \varepsilon > 0 \tag{2.2}$$

là

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - EX_k)\right]^2}{n^2 + \left[\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - EX_k)\right]^2}\right) = 0. \tag{2.3}$$

2.3.3 Luật mạnh số lớn.

Định nghĩa 2.7. Dãy các đại lượng ngẫu nhiên (X_n) được gọi là tuân theo *luật mạnh số lớn* nếu:

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{h.c.c} 0.$$

ở đây $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Hoặc tổng quát hơn: nếu tồn tại hai dãy số $(a_n), (b_n)$ và (b_n) là dãy số dương tăng đến ∞ sao cho $\dfrac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{h.c.c} 0$.

Định lý 2.14. (**Luật mạnh số lớn Kolmogorov**) *Giả sử (X_n) là dãy các đại lượng ngẫu nhiên độc lập và (b_n) là dãy số thực dương tăng đến ∞. Khi đó nếu:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{VarX_n}{b_n^2} < \infty \tag{2.4}$$

thì $\dfrac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow{h.c.c} 0$.

Để chứng minh luật mạnh số lớn kolmogorov, trước hết ta cần chứng minh một số tính chất quan trọng sau.

Định lý 2.15. (**Định lý Kolmogorov**) *Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ là dãy các đại lượng ngẫu nhiên độc lập sao cho với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$ thỏa mãn:*

$$P(|S_n - S_k| \geq a) \leq p < 1.$$

Khi đó

$$P(\max_{k \leq n} |S_k| \geq x) \leq \frac{1}{1-p} P(|S_n| > x - a)$$

Định lý 2.16. *Giả sử (X_n) là dãy các đại lượng ngẫu nhiên độc lập. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ hội tụ hầu chắc chắn khi và chỉ khi chuỗi đó hội tụ theo xác suất.*

Định lý 2.17. (**Định lý Kolmogorov-Khinchine**) *Giả sử dãy (X_n) độc lập, $EX_n = 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} EX_n^2 < \infty$, thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ hội tụ hầu chắc chắn.*

Định lý 2.18. *Cho* $(b_n)_{n\geq 1}$ *là dãy số dương tăng đến* ∞. *Khi đó nếu:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{VarX_n}{b_n^2} < \infty$$

thì chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n - EX_n}{b_n} \text{ hội tụ hầu chắc chắn.} \tag{2.5}$$

Bổ đề 2.2. (**Bổ đề Kronecker**) *Giả sử* $(x_n)_{n\geq 1}$ *là dãy các số thực và* $(b_n)_{n\geq 1}$ *là dãy các số thực dương tăng đến* ∞. *Khi đó nếu chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *hội tụ, thì*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}.\sum_{k=1}^{n} b_k.x_k = 0.$$

****Cuối cùng ta đi vào chứng minh luật mạnh số lớn Kolmogorov:***

Rõ ràng $\dfrac{S_n - ES_n}{b_n} = \dfrac{1}{b_n}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k.(\dfrac{X_k - EX_k}{b_k})$.

Với mọi $k \in \mathbb{N}^*, \omega \in \Omega$, ta đặt $x_k = \dfrac{X_k(\omega) - EX_k}{b_k}$. Suy ra

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k(\omega) - EX_k}{b_k}.$$

Khi đó theo điều kiện (2.4) và từ (2.5), ta thu được chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{X_k - EX_k}{b_k}$ hội tụ h.c.c. Nên tồn tại tập A có $P(A) = 0$ sao cho chuỗi số

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k(\omega) - EX_k}{b_k} \text{ hội tụ với } \omega \notin A.$$

Khi đó từ *bổ đề Kronecker*, ta suy ra :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k.\left(\frac{X_k(\omega) - EX_k}{b_k}\right) = 0, \quad \text{với } \omega \notin A.$$

Vậy

$$\frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow{h.c.c} 0.$$

Hệ quả 2.7. *Nếu dãy các đại lượng ngẫu nhiên độc lập $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ thỏa mãn điều kiện:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{VarX_n}{n^2} < \infty,$$

thì nó sẽ tuân theo luật mạnh số lớn.

Hệ quả 2.8. *Gọi m_A là số lần xuất hiện biến cố A trong dãy n phép thử Bernoulli và p là xác suất để biến cố A xuất hiện trong mỗi phép thử. Khi đó ta có:*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{m_A}{n} = p\right) = 1.$$

Hệ quả 2.9. *Nếu dãy đại lượng ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ độc lập, có cùng phân phối với kỳ vọng $EX_i = \mu$; $i = 1, 2, \ldots n, \ldots$ và phương sai $VarX_i = \sigma^2$ hữu hạn, thì*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mu\right) = 1.$$

Hệ quả 2.10. *Nếu dãy đại lượng ngẫu nhiên (X_n) độc lập có phương sai đồng bị chặn, thì dãy (X_n) sẽ tuân theo luật mạnh số lớn.*

Định lý 2.19. *Giả sử $(X_n)_{n\geq 1}$ là dãy đại lượng ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với $EX_n = \mu$ và $E(X_i^4) < \infty$. Khi đó*

$$\frac{S_n}{n} - \mu \longrightarrow 0 \ h.c.c$$

trong đó $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Định lý 2.20. *Giả sử (X_n) là dãy các đại lượng ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối. Khi đó*

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \quad h.c.c,\ \mu \in \mathbb{R}$$

khi và chỉ khi $E|X_1| < \infty$ và $\mu = EX_1$.

Chương 3

ĐỊNH LÝ DE MOIVRE-LAPLACE

3.1 Định lý De Moivre-Laplace

Định lý 3.1. *Cho $X_1, X_2, \dots$ là dãy các đại lượng ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = q = 1 - p$ và ở đây $EX_i = p$, $VarX_i = p(1-p)$ với mọi $i \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có:*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x) = P(X < x) \text{ với } X \sim \mathcal{N}(0;1).$$

Trong đó: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n;p)$, $\mathcal{N}(0;1)$ là phân phối chuẩn chuẩn tắc.

Định lý 3.2. (**Định lý giới hạn địa phương De Moivre-Laplace**) *Khi $n \to \infty$, ta có:*

$$P(S_n^* = x) : \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \longrightarrow 1 \tag{3.1}$$

với điều kiện x thuộc khoảng hữu hạn $[a;b]$ nào đó và ở đây $S_n^* = \dfrac{S_n - ES_n}{\sqrt{VarS_n}}$.

Định lý 3.3. (**Định lý giới hạn tích phân De Moivre-Laplace**) *Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy,$$

hay là với mọi a, b thỏa điều kiện $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, ta có:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

3.2 Một số ứng dụng của định lý De Moivre-Laplace.

Ta xét n phép thử *Bernoulli* độc lập với xác suất thành công trong mỗi phép thử là p. Gọi A là biến cố thành công. Khi đó $n(A) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ là số lần xảy ra biến cố A trong n phép thử *Bernoulli.* Dưới đây là một vài ứng dụng quan trọng của định lý De Moivre-Laplace:

1) *Với n đủ lớn và p không quá gần 0 và không quá gần 1, ta có thể xem phân phối nhị thức xấp xỉ phân phối chuẩn.* Khi đó ta có:

$$P(X = k) = C_n^k . p^k . q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} . f(t)$$

với $t = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ và $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{t^2}{2}}$ là hàm mật độ của phân phối $\mathcal{N}(0, 1)$.

2) *Theo định lý De Moivre-Laplace, ta có:*

$$P(k_1 \leq X < k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

với $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ là hàm phân phối $\mathcal{N}(0, 1)$. Khi đó

$$P\left(\left|\frac{n(A)}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon . \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon . \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Vì $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, nên

$$P\left(\left|\frac{n(A)}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2.\Phi\left(\varepsilon . \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 \approx 2.\varphi\left(\varepsilon . \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

với $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (Tích phân Laplace).

3) ứng dụng trong việc chọn kích cỡ mẫu thử n bằng cách dùng *bất đẳng thức Chebyshev và định lý De Moivre-Laplace.*

*** Vấn đề chọn cỡ mẫu.**

Trong thực tế ta thường quan tâm đến bài toán: *cho trước ε và α. Tìm n nhỏ nhất sao cho*

$$P\left(|\frac{n(A)}{n} - p| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \alpha.$$

Trong đó, ε được gọi là sai số, $1-\alpha$ được gọi là độ tin cậy. Theo *bất đẳng thức Chebyshev* thì ta cần chọn:

$$n = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2\alpha}\right] + 1$$

Theo *Định lý De Moivre-Laplace*, thì ta cần chọn:

$$n = \left[\frac{x_\alpha^2}{4\varepsilon^2}\right] + 1.$$

Với x_α: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{x_\alpha}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \alpha$. (Ký hiệu $[x]$ là phần nguyên của x).

Đặt

$$n_1(\alpha) = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2\alpha}\right], \quad n_2(\alpha) = \left[\frac{x_\alpha^2}{4\varepsilon^2}\right].$$

Ta thu được:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{n_1(\alpha)}{n_2(\alpha)} = +\infty.$$

KẾT LUẬN

Luận văn đã thu được một số kết quả chính sau:

1. Trình bày một cách hệ thống các khái niệm cơ bản của lý thuyết xác suất, luật số lớn, các tính chất của chúng và đưa ra một số ví dụ minh họa.

2. Chứng minh chặt chẽ, chi tiết về luật số lớn và định lý De Moivre-Laplace.

3. Đưa ra các ví dụ áp dụng thực tế của luật số lớn và định lý De Moivre-Laplace.