BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

PHẠM TƯỜNG BẢO NGUYÊN

LÝ THUYẾT CHỌN MICHAEL VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. Lê Hoàng Trí

Phản biện 1: ………………………………………

Phản biện 2: ……………………………………....

Luận văn sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày…. tháng …. năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin – Học liệu, Đại học Đà Nẵng

- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Cho X, Y là các không gian tôpô, ký hiệu 2^Y là họ tất cả các tập con khác rỗng của Y. Một hàm $\Phi : X \to 2^Y$ được gọi là giá . Vấn đề đặt ra là với điều kiện nào của các không gian X, Y và của hàm Φ thì tồn tại một hàm liên tục f : X $\to$ Y mà f(x) $\in$ Φ(x), $\forall$x $\in$ X. Hàm f được gọi là một phép chọn liên tục của Φ.

Việc tồn tại phép chọn liên tục của các giá với giá trị là các tập lồi của một không gian metric tuyến tính được nghiên cứu bởi Michael. Lý thuyết này được gọi là lý thuyết chọn của Michael. Nó có nhiều ứng dụng quan trọng trong Giải tích hàm, tôpô và lý thuyết điểm bất động, nhất là trong việc mở rộng định lý thác triển của Tietze – Urysohn.

Định lý Tietze – Urysohn phát biểu rằng “ Cho X là một không gian metric, A là một tập con đóng bất kỳ của X, f : A → R là một hàm liên tục. Khi đó sẽ tồn tại một hàm liên tục F: X → R mà là một thác triển của f ”. Dugundji mở rộng kết quả này bằng cách thay tập hợp số thực R bằng một không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương E tùy ý. Sử dụng lý thuyết chọn của Michael, ta có thể thay không gian metric X bởi một không gian tôpô chuẩn tắc và không gian tôpô tuyến tính X phải được giả thiết thêm là khả metric đầy đủ.

Cho một không gian tôpô X, ta nói rằng X có tính chất điểm bất động nếu mỗi hàm liên tục f:X → X đều tồn tại một phần tử x$\in$X sao cho f(x) = x. Định lý điểm bất động của Schauder phát biểu rằng mỗi tập lồi compact trong một không gian tuyến tính định chuẩn đều có tính chất điểm bất động. Bằng cách sử dụng lý thuyết chọn của Michael, ta cũng có thể mở rộng Định lý này cho các ánh xạ đa trị (Định lý Kakutani).

Vì vậy vấn đề đặt ra của luận văn nay là tìm hiểu lý thuyết trên và các ứng dụng của nó. Do đó, tôi chọn đề tài **" LÝ THUYẾT CHỌN MICHAEL VÀ ỨNG DỤNG"** làm luận văn tốt nghiệp thạc sĩ của mình.

2. Mục đích nghiên cứu

Luận văn "**LÝ THUYẾT CHỌN MICHAEL VÀ ỨNG DỤNG**" nhằm thể hiện vai trò của lý thuyết chọn Michael trong việc mở rộng định lý thác triển của Dugundji, mở rộng định lý Tietze – Urysohn và mở rộng định lý về điểm bất động của Schauder.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

3.1. Đối tượng nghiên cứu

- Các tập lồi, các ánh xạ liên tục, các giá nửa liên tục dưới, các ánh xạ tuyến tính liên tục, các không gian tôpô, các không gian metric tuyến tính.

3.2. Phạm vi nghiên cứu Nghiên cứu trong các tài liệu sau :

- SELECTED TOPICS IN INFINITE-DIMENTIONAL TOPOLOGY của các tác giả "Czeslaw Bessaga và Aleksander Pelczynski"
- Infinite - Dimensional Topology của tác giả J. van Mill
- Tôpô đại cương – Độ đo và tích phân của Nguyễn Xuân Liêm.
- Và các sách chuyên đề về giải tích hàm, về lý thuyết chọn Michael.

4. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu chủ yếu của luận văn là khảo sát, nghiên cứu, phân tích, tổng hợp và làm sáng tỏ các kết quả khoa học trong các bài báo về lý thuyết chọn Michael.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Mở rộng các định lý Tiezte – Urysohn, định lý Dugundji.

Mở rộng định lý điểm bất động của Schauder.

6. Cấu trúc của luận văn

Luận văn gồm phần mở đầu, ba chương, phần kết luận:

Chương 1- MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ.

Chương 2 - LÝ THUYẾT CHỌN CỦA MICHAEL.

Chương 3- CÁC ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT CHỌN MICHAEL

CHƯƠNG 1
MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Không gian Tôpô và ánh xạ

1.1.1. Không gian Tôpô

Một không gian tôpô là một cặp (X, $\mathscr{T}$) bao gồm một tập X và một lớp $\mathscr{T}$ của các tập con của X thoả mãn các điều kiện sau:

(i) $\emptyset \in \mathscr{T}$ và $X \in \mathscr{T}$;

(ii) $U, V \in \mathscr{T}$ kéo theo $U \cap V = \mathscr{T}$;

(iii) Nếu $U_c \in \mathscr{T}$ với mọi $c \in C$ thì $\bigcup_{c \in C} U_c \in \mathscr{T}$

Ta thừa nhận thêm tiên đề tách Hausdorff:

(iv) Nếu $x, y \in X$, $x \neq y$ thì tồn tại những tập rời nhau $U, V \in \mathscr{T}$ sao cho $x \in U$ và $y \in V$.

Lớp $\mathscr{T}$ được gọi là tôpô của không gian (X, $\mathscr{T}$), các phần tử của $\mathscr{T}$ được gọi là tập mở. Một tập $B \subset X$ đóng nếu $X \setminus B \in \mathscr{T}$. Với bất kỳ $A \subset X$, ta ký hiệu clA là bao đóng của A. Nghĩa là tập đóng nhỏ nhất chứa A, phần trong và biên của A là các tập hợp: $\mathrm{int}A = X \setminus \mathrm{cl}\,(X \setminus A)$,

$$\partial A = \mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}\,(X \setminus A).$$

Không gian tôpô (X, $\mathscr{T}$) còn được ký hiệu là X.

Một tập hợp con A của một không gian tôpô (X, $\mathscr{T}$) thường được xem như là một không gian tôpô với tôpô tương đối:

(1) $\mathscr{T}|\, A = \{U \cap A : U \in \mathscr{T}\}$

1.1.2. Ánh xạ

Cho X và Y là các không gian tôpô, một hàm $f : X \rightarrow Y$ là liên tục nếu $f^{-1}(V)$ mở với mọi tập mở $V \subset Y$. Các hàm liên tục đó được hiểu là các ánh xạ. Từ định nghĩa của tôpô tương đối $\mathscr{T}| A$ suy ra rằng hàm $f : X \rightarrow Y$ liên tục khi và chỉ khi có sự hạn chế của f. Nghĩa là hàm $f_1 : X \rightarrow f(X)$ sao cho $f_1(x) = f(x)$ với mọi $x \in X$ là liên tục.

1.1.3. Phép biến đổi tôpô

Một phép biến đổi tôpô hay phép đồng phôi giữa các không gian tôpô X và Y là hàm liên tục song ánh $f : X \longrightarrow Y$ sao cho hàm nghịch f^{-1} cũng liên tục.

Không gian X và Y được gọi là có thể biến đổi tôpô hay đồng phôi, ký hiệu X□Y nếu tồn tại một phép biến đổi tôpô giữa chúng.

Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ là một phép nhúng biến đổi tôpô hay phép nhúng đồng phôi (viết tắt là phép nhúng) nếu sự hạn chế của f là một phép biến đổi tôpô giữa X và f(X).

Giả sử X, Y là các không gian tôpô và $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$.

Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là một phép biến đổi tôpô giữa các cặp (X, X_1) và (Y, Y_1), với điều kiện f là một phép biến đổi tôpô của X trên Y và $f(X_1) = Y_{1.}$

1.1.4. Sự co rút

Cho $A \subset X$. Ta ký hiệu $i_A : A \rightarrow X$ là ánh xạ bao hàm $i_A(a) = a$ với $a \in A$.

Mỗi ánh xạ $r: X \rightarrow A$ sao cho $r \circ i_A = e_A$ gọi là sự co rút của X trên A.

1.1.5. Tập hợp trù mật

Một tập hợp con A của một không gian tôpô X được gọi là trù mật nếu clA = X. Không gian X được gọi là tách được hay khả ly nếu tồn tại một tập trù mật đếm được trong nó.

1.1.6. Liên thông

Một không gian tôpô X là liên thông nếu những tập hợp trong X mà đóng và mở đồng thời chỉ là X và □. Những tập liên thông cực đại của không gian tôpô được gọi là các thành phần liên thông.

1.1.7. Không gian chính quy

Một không gian tôpô X là chính quy, nếu với mỗi tập đóng $A \subset X$ và với mỗi điểm $x \in X \setminus A$, thì tồn tại các tập mở rời nhau $U, V \subset X$ sao cho $x \in U$ và $A \subset V$. Không gian X là hoàn toàn chính quy nếu với mỗi tập đóng $A \subset X$ và với mỗi điểm $x \in X \setminus A$ thì tồn tại một hàm lấy giá trị thực liên tục f được xác định trên X sao cho $A \subset f^{-1}(0)$ và $x \in f^{-1}(1)$.

1.1.8. Không gian chuẩn tắc

Một không gian tôpô X là chuẩn tắc nếu với hai tập con đóng rời nhau A, B bất kỳ của X thì có những lân cận rời nhau.

1.1.9. Không gian compact

Một không gian tôpô X là compact, nếu mỗi phủ mở của X đều có phủ con hữu hạn.

Mỗi ảnh liên tục của một [tập hợp] không gian compact là compact.

Một ánh xạ đơn ánh với một miền xác định compact là một phép nhúng.

Một không gian tôpô X là compact địa phương nếu với mỗi điểm $x \in X$ có một lân cận compact.

1.2. Không gian metric và không gian metric đầy đủ

1.2.1. Không gian metric

Một metric trên một tập A là một hàm không âm d(x, y) được xác định với x, y $\in$ A sao cho các điều kiện sau thoả mãn:

(i) d(x, x) = 0 và d(x, y) = 0 kéo theo x = y (với x, y $\in$ A)

(ii) d(x, y) = d(y, x) với x, y $\in$ A;

(iii) d(x, y) + d(y, z) $\leq$ d(x, z) với x, y, z $\in$ A.

Tôpô $\mathscr{T}$ mà cơ sở của nó là tập hợp các hình cầu metric.

B(y, ε) = { x $\in$ A : d(x, y) < ε } , với y $\in$ A, ε > 0 } , được gọi là sinh ra bởi d. Hay metric d tương thích với tôpô $\mathscr{T}$, hay d là một metric của không gian tôpô (A, $\mathscr{T}$).

Một không gian tôpô X được gọi là metric hoá được nếu tồn tại một metric mà sinh ra tôpô của X.

1.2.2. Không gian metric đầy đủ

Cho X là một không gian tôpô metric hoá được, cho d là một metric trên X sinh ra tôpô này và cho (x_n) là một dãy các phần tử của X. Khi đó:

(x_n) hội tụ về x_o, ký hiệu : $\lim_n x_n = x_o$ nếu dãy các số thực (d(x_n, x_o)) có giới hạn bằng 0.

Cho d là một metric trên tập X. Một dãy (x_n) của X được gọi là dãy Cauchy đối với d (viết tắt là dãy : d - Cauchy) nếu thoả mãn điều kiện sau:

(*) Với mỗi ε > 0, □k $\in$ N sao cho d(x_n, x_k) < ε với n $\geq$ k.

Một không gian tôpô thừa nhận một metric đầy đủ tương thích với tôpô được gọi là metic hoá được đầy đủ.

Một không gian metric [đầy đủ] là một cặp (X, d) với X là một tập hợp và d là một metric [đầy đủ] trên X.

Cho (X, d) là một không gian metric, A, B $\subset$X và x $\in$ X. Ta có:

d(x, A) = $\inf_{y\in A} d(x,y)$: khoảng cách giữa điểm và tập hợp.

d(A, B) = $\inf\{d(x,y): x\in A, y\in B\}$: khoảng cách giữa hai tập hợp.

diam A = $\sup\{d(x,y): x, y\in A\}$: đường kính của một tập hợp.

Cho (X, d) và (X', d') là các không gian metric. Một đơn ánh g : X→X' được gọi là một phép nhúng đẳng cự [phép đẳng cự] nếu:

d(x, y) = d'(g(x), g(y)) với x, y $\in$ X [và g(X) = X'].

Các không gian metric (X, d) và (X', d') được gọi là đẳng cự nếu tồn tại một phép đẳng cự giữa X và X'.

Mệnh đề 1.1. Nếu X là một không gian tôpô metric hóa [đầy đủ] thì tồn tại một metric [đầy đủ] d của X sao cho d(x, y) $\leq$ 1 với mọi x, y $\in$ X, với d tương thích với tôpô đã cho trên X.

Mệnh đề 1.2. (*Hausdorff*) Với mỗi không gian metric X = (X, d), thì tồn tại một phép nhúng đẳng cự g của X vào một không gian metric đầy đủ Y sao cho clg(X) = Y. Không gian Y là duy nhất trên một phép đẳng cự.

Mệnh đề 1.3. (*Cantor*) Nếu không gian metric (X, d) đầy đủ và A_n với n $\in$ N, là các tập con đóng của X sao cho $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ và $\lim_n diam A_n$ = 0, khi đó giao $\bigcap_{n\in N} A_n$ là tập hợp một điểm.

Định lý 1.1. (*Baire*) Cho X là không gian metric đầy đủ và A_n là tập con trù mật của X có kiểu $\mathcal{G}_\delta$, với n $\in$ N. Khi đó giao $\bigcap_{n\in N} A_n$ trù mật trong X. (Với $\mathcal{G}_\delta$ là họ gồm tất cả các tập có dạng là giao đếm được của các tập mở).

Hệ quả 1.1. Nếu X là không gian metric đầy đủ và X = $\bigcup_{n\in N} B_n$, với mỗi B_n đóng, khi đó ít nhất một tập hợp B_n có phần tử trong không rỗng.

Định lý 1.2. (*Lavrentiev [1]*) Cho X và Y là các không gian metric đầy đủ và cho A $\subset$X, B $\subset$Y. Khi đó mỗi phép biến đổi tôpô giữa A và B có thể được mở rộng thành phép biến đổi tôpô f_1 giữa những tập hợp A_1 và B_1 của kiểu $\mathcal{G}_\delta$ với A $\subset$ A_1 $\subset$ X, B $\subset B_1 \subset$Y.

Hệ quả 1.2. *(Sierpinski [2])* Cho X là một không gian metric. Khi đó các điều kiện sau tương đương:

(a) X là metric hoá đầy đủ;

(b) tồn tại một phép nhúng f của X vào một không gian metric đủ Y sao cho f(X) là của kiểu $\mathcal{G}_\delta$ trong Y;

(c) với mỗi phép nhúng f của X vào một không gian metric đủ Y, f(X) là của kiểu $\mathcal{G}_\delta$ trong Y.

Một không gian (hoặc một tập con của một không gian) thoả mãn điều kiện (c) được gọi là một tuyệt đối $\mathcal{G}_\delta$.

Mệnh đề 1.4. Cho (X, d) là một không gian metric đầy đủ và A là tập con đóng của X. Khi đó A là compact khi và chỉ khi, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một ε – lưới hữu hạn trong X đối với A. Đặc biệt X là compact khi và chỉ khi

(*) với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một ε – lưới hữu hạn đối với X.

Một tập con của một không gian metric thoả (*) được gọi là hoàn toàn bị chặn.

Mệnh đề 1.5. Một không gian metric X là compact khi và chỉ khi mỗi dãy các điểm của X chứa một dãy con hội tụ.

Từ Mệnh đề 1.5 kéo theo rằng mỗi metric đối với một không gian tôpô compact metric hoá là đầy đủ.

Mệnh đề 1.6. *(Nguyên lý phép co rút)* Cho (X, □) là một không gian metric đủ và f : X $\rightarrow$ Y là phép co rút ngặt, nghĩa là tồn tại k $\in$ (0; 1) sao cho □(f(x), f(y)) ≤ k□ (x, y) với mọi x, y $\in$ X. Khi đó, tồn tại duy nhất x_o $\in$ X sao cho $f(x_o) = x_o$.

Hệ quả 1.3. Nếu X là không gian Banach và f : X → X là phép co rút ngặt, khi đó ánh xạ F: X → X được định nghĩa bởi F(x) = x + f(x) là phép biến đổi tôpô của X trên chính nó.

1.3. Các phép toán trên không gian tôpô

1.3.1. Hợp rời rạc

Giả sử rằng ta có $\{X_c\}_{c\in C}$ là họ các không gian tôpô. Chúng ta xem các không gian X_c là các cặp rời nhau. Không gian Y = $\underset{c\in C}{\oplus} X_c$ được gọi là hợp rời rạc của các không gian X_c, được định nghĩa là $\bigcup\limits_{c\in C} X_c$ với tôpô : một tập hợp U $\subset$ Y mở khi và chỉ khi U ∩ X_c mở trong X_c với mỗi c $\in$ C.

Một không gian tôpô là hợp rời rạc của các không gian một điểm được gọi là không gian tôpô rời rạc.

1.3.2. Tích Descartes

Cho họ các không gian tôpô $\{X_c\}_{c\in C}$.

Tích Cartesian của họ $\{X_c\}_{c\in C}$, được ký hiệu $\prod\limits_{c\in C} X_c$ **,** là không gian mà mỗi phần tử của nó có dạng x = $\{x_c\}_{c\in C}$, với $x_c \in X_c$, với tôpô tích được sinh bởi các tập hợp cơ sở bao gồm:

$$V(c_1, \ldots, c_k; U_{c_1}, \ldots, U_{c_k}) = \left\{x = \{x_c\}_{c\in C} : x_{c_i} \in U_{c_i}, i = 1, \ldots, k\right\}$$

tương ứng với các tập hợp con hữu hạn $\{c_1, \ldots, c_k\} \subset C$ và với các tập hợp của các tập mở $U_{c_1} \subset X_{c_1}, \ldots, U_{c_k} \subset X_{c_k}$.

Với mỗi $c_o \in C$, toạ độ c_o ánh xạ $p_{c_o}: \prod_{c\in C} X_c \to X_{c_o}$ được định nghĩa bởi $p_{c_o}(\{x_c\}_{c\in C}) = x_{c_o}$. Nếu $\{X_c\}_{c\in C}$ và $\{Y_c\}_{c\in C}$ là hai họ của các không gian tôpô, và f_c : $X_c \to Y_c$ là ánh xạ thì f = $\prod_{c\in C} f_c$, được gọi là tích Cartesian của các ánh xạ, được định nghĩa bởi $f(\{x_c\}_{c\in C}) = \{f_c(x_c)\}_{c\in C}$.

Nếu X là không gian tôpô và g_c: X → Y_c là ánh xạ, thì f = $\prod_{c\in C} g_c$: $\prod_{c\in C} X_c \to \prod_{c\in C} Y_c$, với tất cả các không gian X_c là các bản sao của không gian X, và g = $\{g_c\}_{c\in C}$: X → $\prod_{c\in C} Y_c$ được định nghĩa bởi g(x) = $\{g_c(x_c)\}_{c\in C}$. Từ định nghĩa tôpô tích, các hàm số trên là liên tục.

Khi tập hợp các chỉ số C là hữu hạn và C = {1, 2, …, n}, ta ký hiệu:

$\prod_{c\in C} X_c = X_1 \times \ldots \times X_n$, $\prod_{c\in C} f_c = f_1 \times \ldots \times f_n$, $\{g_c\}_{c\in C} = (g_1, \ldots, g_n)$, $X^C = X^n$.

Với không gian tôpô X bất kỳ, ta định nghĩa Δ : X → X × X, với Δ(x)=(x, x). Δ được gọi là ánh xạ đường chéo, và Δ(X), là một tập hợp con của X × X, được gọi là đường chéo của X.

Nếu X và Y là các không gian tôpô, a ∈ X, b ∈ Y, khi đó:

a × : Y → X × Y và × b : X → X × Y

là các ánh xạ được định nghĩa bởi a × (y) = (a, y) và × b(x) = (x, b).

Mệnh đề 1.7. Nếu X_c, c ∈ C, là các không gian compact, thì $\prod_{c\in C} X_c$ là compact. Nếu X_c, c ∈ C, là các không gian metric đầy đủ, và cardC ≤ $\square_o$ thì $\prod_{c\in C} X_c$ là một không gian metric đầy đủ.

1.3.3. Không gian thương

Cho X là một không gian tôpô và r là một quan hệ tương đương trên X. X/r là ký hiệu tập hợp của các lớp $[x] = \{y \in X : yrx\}$.

Cho $\varphi : X \to X/r$ là phép chiếu chính tắc, nghĩa là $\varphi(x) = [x]$.

Ký hiệu : $\mathscr{T} = \{ U \subset X/r : \varphi^{-1}(U)$ mở trong X}. Khi đó $\mathscr{T}$ là một tôpô trên X/r.

Cặp $(X/r, \mathscr{T})$, được ký hiệu ngắn gọn là X/r, được gọi là không gian thương của X bởi quan hệ r.

1.4. Không gian tuyến tính và các tập hợp lồi – không gian tôpô tuyến tính

X ký hiệu một không gian tuyến tính. Với mỗi $A, B \subset X$, $L \subset R$, ta ký hiệu: $A + B = \{x + y: x \in A, y \in B\}$, $L \cdot A = \{tx : t \in L, x \in A \}$,

$-A = \{-1\}\cdot A$, $A - B = A + (-B)$.

Trong trường hợp của tập hợp một điểm ta sẽ viết tắt các ký hiệu này như sau: $x + A$, $L \cdot x$, $t \cdot A$, …

Một tập hợp $U \subset X$ được gọi là hấp thu, nếu $R^+ \cdot U = X$.

Với bất kỳ $x, y \in X$, ta ký hiệu $(x; y) = x + (0; 1) \cdot (y - x)$ là đoạn mở giữa x và y, $[x; y) = (x; y)$ □ $\{x\}$ và $[x; y] = [x; y)$ □ $\{y\}$ là đoạn nửa mở và đoạn đóng. Tập hợp $x + R^+ \cdot y$ được gọi là tia phát xạ từ x theo phương của y. Nếu $y = 0$ thì tia suy biến thành tập hợp một điểm $\{x\}$.

Tổ hợp tuyến tính $t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n$ ($t_i \in R$, $x_i \in X$) được gọi là tổ hợp lồi, nếu $t_i \geq 0$ với $i = 1, \ldots, n$ và $t_1 + \ldots + t_n = 1$. Cho trước tập $A \subset X$. Các ký hiệu: spanA và convA

tương ứng ký hiệu cho các tập hợp của tổ hợp tuyến tính của các phần tử của A và tập hợp của tất cả các tổ hợp tuyến tính lồi của các phần tử của A. Hai tập hợp này được gọi là bao tuyến tính và bao lồi của A.

Tập hợp A $\subset$ X là lồi khi và chỉ khi A = convA. Điều này tương đương với tính chất: x, y $\in$ A kéo theo [x, y] $\subset$ A. Nếu A lồi khi đó A + A = 2 · A

Bất kỳ hàm g : X → R thoả mãn điều kiện:

$g(x + y) \leq g(x) + g(y)$, $g(tx) = tg(x)$ với x, y $\in$ X, t $\in$ R^+

thì được gọi là một phiếm hàm tuyến tính dưới trên X. Một phiếm hàm tuyến tính dưới g là tuyến tính với điều kiện g(x + y) = g(x) + g(y) với mọi x, y $\in$ X. Một giả chuẩn (hoặc một nửa chuẩn) là một phiếm hàm tuyến tính dưới g nếu thoả mãn điều kiện: $g(tx) = |t| \cdot g(x)$ với t $\in$ R, x $\in$ X.

Cho X và Y là các không gian tuyến tính. Một hàm T : X → Y sao cho T(ax + bx') = aT(x) + bT(x') với mọi x, x' $\in$ X; a, b $\in$ R, được gọi là một toán tử tuyến tính.

Một không gian tôpô tuyến tính X được trang bị một tôpô sao cho các toán tử tuyến tính (x, y) → x + y và (t, x) → tx là liên tục. Không gian tôpô tuyến tính X và Y được gọi là đẳng cấu nếu tồn tại một toán tử tuyến tính T của X sang Y mà nó là phép biến đổi tôpô. Khi đó toán tử T được gọi là một phép đẳng cấu.

Mệnh đề 1.8. Nếu g là một phiếm hàm tuyến tính dưới trên X, khi đó tập hợp $U_g = \{x \in X : g(x) < 1\}$ là hấp thu và lồi. Ngược lại, nếu U là tập hợp con hấp thu và lồi bất kỳ của X, thì hàm:

(1) $g_U(x) = \inf\{t > 0 : x \in t \cdot U\}$ là một phiếm hàm tuyến tính dưới.

Hơn nữa, $g_{U_g} = g$ với mỗi phiếm hàm tuyến tính dưới g.

Hàm (1) được gọi là hàm cỡ của tập U. Ta thấy rằng những giả chuẩn là hàm cỡ của các tập lồi hấp thu đối xứng đối với zero.

Định lý 1.3. Giả sử rằng X là một không gian tuyến tính, Y là một không gian con tuyến tính của X và g là một phiếm hàm tuyến tính được định nghĩa trên X, f là một phiếm hàm tuyến tính được xác định trên Y sao cho $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in Y$. Khi đó phiếm hàm f được thác triển thành phiếm hàm F được xác định trên X sao cho:

(2) $F(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in X$.

Mệnh đề 1.9. Nếu X là một không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương và $0 \neq x_o \in X$, khi đó tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục F được xác định trên X sao cho $F(x_o) = 1$.

Định lý 1.4. *(Nguyên lý ánh xạ mở Schauder - Banach)* Nếu X và Y là các không gian metric tuyến tính đầy đủ và T là toán tử liên tục tuyến tính từ X lên Y, khi đó T mở, nghĩa là ảnh của mỗi tập mở trong X là tập mở trong Y.

Hệ quả 1.4. Nếu X và Y là các không gian metric tuyến tính đầy đủ và T là toán tử liên tục song ánh từ X lên Y, khi đó nghịch đảo $T^{-1} : Y \to X$ là một toán tử tuyến tính liên tục.

Hệ quả 1.5. Nếu X và Y là các không gian metric tuyến tính đầy đủ và $T : X \to Y$ là một toán tử tuyến tính sao cho đồ thị $\{(x, T(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ là đóng trong $X \times Y$, khi đó T là liên tục.

1.5. Phủ, phân hoạch đơn vị, paracompact

Cho $\mathcal{A}$ là một họ các tập con của một không gian tôpô X.

$\mathcal{A}$ gọi là mở (đóng) nếu mỗi phần tử của $\mathcal{A}$ là mở (đóng).

$\mathcal{A}$ gọi là hữu hạn địa phương (rời rạc) nếu mỗi điểm của X có một lân cận mà lân cận này giao với không quá hữu hạn các phần tử của $\mathcal{A}$. (không quá một phần tử của $\mathcal{A}$)

$\mathscr{A}$ là sigma (σ) rời rạc nếu $\mathscr{A}$ có thể được biểu diễn thành hợp đếm được của các họ con rời rạc.

$\mathscr{A}$ là hình sao hữu hạn nếu mỗi phần tử của $\mathscr{A}$ giao với không quá hữu hạn các phần tử còn lại.

Cho Z là tập con của X. Ta nói rằng một họ $\mathscr{A}$ của những tập con của X là phủ của Z hoặc $\mathscr{A}$ phủ Z nếu $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \supset Z$.

Họ $\mathscr{A}$ được gọi là một phủ mở của Z hoặc phủ đóng, hoặc phủ hữu hạn địa phương hoặc phủ rời rạc hoặc phủ sigma rời rạc hoặc phủ sao hữu hạn nếu $\mathscr{A}$ phủ Z và tập hợp $\mathscr{A}$ có thuộc tính trên.

Định lý 1.5. Mỗi phủ mở của một không gian metric thì có một phủ mở hữu hạn địa phương và sigma rời rạc làm mịn nó.

Hệ quả 1.6. Mỗi không gian compact là paracompact.

Hệ quả 1.7. Mỗi không gian metric là paracompact.

1.6. Mối quan hệ giữa các paracompact và sự tồn tại của điều kiện đủ của các phân hoạch đơn vị

Một họ $\mathscr{B}$ của các hàm liên tục không âm trên một không gian tôpô X được gọi là một "phân hoạch đơn vị hữu hạn địa phương" nếu với mỗi x $\in$ X thì tồn tại một lân cận U(x) và một tập hợp con hữu hạn $\mathscr{B}$(x) của $\mathscr{B}$ sao cho:

(i) $\sum_{b\in\mathscr{B}(x)} b(y)$ = 1 với y $\in$ U(x)

(ii) b(y) = 0 với y $\in$ U(x) và b $\in$ $\mathscr{B} \setminus \mathscr{B}(x)$.

Rõ ràng $\mathscr{B}$ là một phân hoạch đơn vị hữu hạn địa phương, khi đó tập hợp:

$\mathscr{U}_{\mathscr{B}} = \{b^{-1}((0,1])\}_{b\in\mathscr{B}}$ là phủ mở hữu hạn địa phương của X.

Một phân hoạch đơn vị hữu hạn địa phương $\mathscr{B}$ được gọi là nội tiếp trong một phủ $\mathscr{V}$ của X nếu tồn tại hàm V → b_V từ $\mathscr{V}$ vào $\mathscr{B}$ sao cho: cl b_V^{-1}((0, 1]) ⊂ V.

Định lý 1.6. Mỗi không gian tôpô Hausdorff X là paracompact nếu và chỉ nếu mỗi phủ mở $\mathscr{U}$ của X đều có một phân hoạch đơn vị hữu hạn địa phương nội tiếp trong $\mathscr{U}$.

Bổ đề 1.1. Cho A và B là các tập con đóng rời nhau của một không gian tôpô paracompact X và mỗi x ∈ B, tồn tại các tập mở U_x và V_x mà:

$$A \subset U_x,\ x \in V_x,\ U_x \cap V_x = \square.$$

Khi đó, tồn tại các tập mở U và V mà: A ⊂ U , B ⊂ V và U ∩ V = □.

Bổ đề 1.2. Nếu $\mathscr{W}$ là họ các tập mở hữu hạn địa phương thì :

$$\bigcup_{W\in\mathscr{W}} \overline{W} = \overline{\bigcup_{W\in\mathscr{W}} W}.$$

Mệnh đề 1.10. Mỗi không gian tôpô paracompact là chuẩn tắc.

Bổ đề 1.3. Mỗi phủ mở $\mathscr{U}$ của một không gian tôpô paracompact X có một phủ mở hữu hạn địa phương $\mathscr{W}$ của X mà $\{\overline{W}\}_{W\in\mathscr{W}}$ làm mịn $\mathscr{U}$ và một phủ mở $\{V_U\}_{U\in\mathscr{U}}$ của X mà $\overline{V_U} \subset U$ với mọi U ∈ $\mathscr{U}$.

Mệnh đề 1.11. Với mỗi phủ mở $\mathscr{U}$ của một không gian tôpô paracompact X đều tồn tại một phân hoạch đơn vị hữu hạn địa phương nội tiếp phủ $\mathscr{U}$.

1.7. Công thức Dugundji mở rộng

Bổ đề 1.4. Cho A là một tập con đóng thật sự của một không gian metric X (□ ≠ A ≠ X), d là một metric trên X. Khi đó tồn tại một họ $\{U_s, a_s\}_{s\in S}$ sao cho:

(1) $U_s \subset X \setminus A$, $a_s \in A$ (□$s \in S$),

(2) $\{U_s\}_{s\in S}$ là một phủ mở hữu hạn địa phương của X \ A,

(3) nếu $x \in U_s$, thì $d(x, a_s) \leq 2d(x, A)$ với □$s \in S$.

Định nghĩa. Nếu A là một tập con đóng thật sự của một không gian metric X (□ $\neq A \neq X$) với d là một metric trên X. Khi đó mỗi họ bất kỳ $\{U_s, a_s\}_{s\in S}$ thỏa mãn các điều kiện (1), (2), (3) của bổ đề 1.4, được gọi là một hệ thống Dugundji cho X \ A.

Định lý 1.7. Cho A là một tập con đóng khác rỗng của một không gian metric X và E là một không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương. Khi đó, mỗi ánh xạ liên tục $f : A \to E$ đều có một thác triển liên tục $L(f) : X \to E$ sao cho $L(f)(X) \subset \mathrm{conv} f(A)$.

1.8. Các định lý về điểm bất động cho các hàm liên tục

Cho X là một không gian tôpô, X được gọi là có tính chất điểm bất động nếu với mỗi hàm liên tục f từ X vào X đều có ít nhất một phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = x$. Ta có các định lý sau:

Định lý 1.8. Cho X là một không gian tôpô có tính chất điểm bất động và Y là một không gian tôpô đồng phôi với X. Khi đó Y cũng có tính chất điểm bất động.

Định lý 1.9. Cho X là một không gian tôpô có tính chất điểm bất động và A là một co rút của X. Khi đó A cũng có tính chất điểm bất động.

Định lý 1.10. Mỗi quả cầu đơn vị đóng trong không gian R^n đều có tính chất điểm bất động.

Định lý 1.11. Mỗi không gian thuộc lớp AR (tức là không gian tôpô khả metric và có tính chất co rút tuyệt đối), compact đều có tính chất điểm bất động.

Định lý 1.12. Mỗi tập lồi, compact trong một không gian tuyến tính định chuẩn bất kỳ đều có tính chất điểm bất động.

CHƯƠNG 2
LÝ THUYẾT CHỌN CỦA MICHAEL

2.1. Các định nghĩa liên quan đến lý thuyết chọn của Michael

Cho X và Y là các không gian tôpô, ký hiệu 2^Y là họ tất cả các tập con khác rỗng của Y. Một hàm $\Phi : X \to 2^Y$ được gọi là giá . Nếu Φ(x) là tập con đóng compact của Y với mỗi x $\in X$, thì Φ được gọi là một giá đóng compact. Nếu Y là một không gian metric và Φ(x) là một tập con đầy đủ của Y với x $\in X$, thì Φ được gọi là giá đầy đủ. Nếu Y là một không gian tuyến tính và Φ(x) lồi với x $\in X$, thì Φ được gọi là giá lồi. Nếu với mỗi tập con mở U $\subset$ Y, tập hợp: Φ^{-1}(U) = $\{x \in X : \Phi(x) \cap U \neq \varnothing\}$ mở , thì giá Φ được gọi là giá nửa liên tục dưới.

Một hàm f : X → Y được gọi là một phép chọn cho một giá $\Phi : X \to 2^Y$ nếu f(x) $\in$ $\Phi(x), \forall x \in X$.

2.2. Định lý chọn của Michael

Định lý sau được gọi là định lý chọn của Michael:

Định lý 2.1. Cho X là một không gian tôpô paracompact và E là một không gian metric tuyến tính lồi địa phương. Cho $\Phi : X \to 2^E$ là một giá nửa liên tục dưới lồi, đầy đủ. Khi đó Φ thừa nhận một phép chọn liên tục.

2.3. Các kết quả liên quan đến lý thuyết chọn của Michael

Ở đây l_1(A) được xác định như sau:

Cho A là một tập bất kỳ (có thể là tập hữu hạn hay vô hạn)

$$l_1(A) = \left\{ x = (x_a)_{a\in A} \,/\, \exists \sup_{\substack{A' \subset A \\ A' \text{là tập hữu hạn}}} \sum_{a\in A'} |x_a| \right\}$$

thì $l_1(A)$ là một không gian vectơ, □x = $(x_a)_{a\in A} \in$ $l_1(A)$, ta đặt:

$\|x\| = \sup_{\substack{A' \subset A \\ A' \text{là tập hữu hạn}}} \sum_{a\in A'} |x_a|$ thì $\|\,.\,\|$ là một chuẩn trên $l_1(A)$ và $l_1(A)$ là một không gian Banach. Ta có định lý sau:

Định lý 2.2. Cho X là một không gian tôpô Hausdorff. Khi đó các điều kiện sau tương đương:

(i) X là paracompact;

(ii) bất kỳ giá nửa liên tục dưới lồi, đóng từ X vào không gian Frechet bất kỳ thừa nhận một hàm chọn liên tục;

(iii) bất kỳ giá nửa liên tục dưới lồi, đóng từ X vào không gian $l_1(A)$ bất kỳ thừa nhận một hàm chọn liên tục.

CHƯƠNG 3

CÁC ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT CHỌN MICHAEL

3.1. Ứng dụng của lý thuyết chọn Michael vào việc phân tích các không gian Frechet thành tích các không gian Frechet

Mỗi không gian Frechet là một không gian metric tuyến tính đầy đủ, lồi địa phương. Ta có các mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.1. *(Mệnh đề Bartle –Graves)* Cho u: E → X là một toán tử tuyến tính liên tục toàn ánh từ một không gian Frechet E lên một không gian Frechet X. Khi đó, tồn tại một hàm liên tục f : X → E sao cho uf = id_X và f(0) = 0. Do đó, tồn tại một phép đồng phôi h: E $\xrightarrow[vào]{}$ keru × X được xác định bởi:

(1) $h(e) = (e – fu(e), u(e))$ với $e \in E$

Và ta có $p_2h = u$; $h(e) = (e, 0)$ với $e \in$ keru

với p_2 : keru × X → X là phép chiếu tự nhiên lên thành phần thứ hai.

Hệ quả 3.1. Cho E_o là một không gian con tuyến tính đóng của không gian Frechet E. Cho u : E → E/E_o ký hiệu là phép chiếu chính tắc. Khi đó tồn tại một phép đồng phôi h: E $\xrightarrow[vào]{}$ $E_o \times E/E_o$ sao cho:

$p_2h = u$; $h(e_o) = (e_o, 0)$ với $e_o \in E_o$.

với $p_2 : E_o \times E/E_o \to E/E_o$ là phép chiếu tự nhiên lên thành phần thứ hai.

Hệ quả 3.2. Cho X là một không gian Banach khả ly vô hạn chiều. Khi đó tồn tại một không gian tuyến tính con đóng Z của không gian l_1 sao cho l_1 đồng phôi với $Z \times X$.

Mệnh đề 3.1. *(Michael)* Cho E và X là một không gian metric tuyến tính đầy đủ. Cho $u : E \to X$ là một toàn ánh tuyến tính sao cho $\ker u = E_o$ là một không gian Frechet. Khi đó tồn tại một ánh xạ liên tục $f : X \to E$ sao cho $uf = id_X$ và $f(0) = 0$.

3.2. Ứng dụng của lý thuyết chọn Michael vào các phức đơn hình

Trước hết ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 3.1. Một phức đơn hình là họ K gồm các tập con hữu hạn không rỗng của một tập V sao cho:

(1) Mỗi tập con một điểm V đều thuộc vào K;

(2) nếu $\sigma \in K$ và $\sigma_1 \subset \sigma$, thì $\sigma_1 \in K$.

Định nghĩa 3.2. Một họ con $L \subset K$ thỏa mãn điều kiện (1) và (2) ở trên với K được thay bởi L được gọi là một phức đơn hình con của K.

Một tập n – điểm thuộc vào K được gọi là một (n – 1) – đơn hình.

Định nghĩa 3.3. Cho K là một phức đơn hình. Cho V là một cơ sở của một không gian vectơ X.

□$\sigma = \{u_1, \ldots, u_n\} \in K$, ta đặt $|\sigma| = \text{conv}\{u_1, \ldots, u_n\}$ và $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$ được gọi là thuộc thể hình học hóa của K. Trang bị tôpô Whitehead cho $|K|$ được xác định như sau:

□$U \in |K|$. Ta nói $U \in \mathscr{T}$ nếu $U \cap |\sigma|$ mở trong $|\sigma|$; □$\sigma \in K$. Ta có thể kiểm tra dễ dàng rằng: $\mathscr{T}$ là một tôpô trên $|K|$.

Như một ứng dụng của lý thuyết chọn Michael ta có:

Định lý 3.1. Với mỗi phức đơn hình K, không gian $|K|$ là paracompact.

3.3. Ứng dụng của lý thuyết chọn Michael để mở rộng định lý Tiezte – Urysohn, định lý Dugundji

Từ Định lý 2.1 *(Chương 2)* ta có:

Định lý 3.2. Cho E là một không gian Frechet và cho A là một tập con đóng của một không gian tôpô paracompact X.

Khi đó mỗi hàm liên tục $f : A \to E$ đều tồn tại một thác triển liên tục $F : X \to E$ mà :

$$F(X) \subset \text{cl conv } f(A)$$

Ta thấy định lý này là mở rộng của các định lý sau:

Bổ đề 3.2. *(Urysohn)* (Cho các không gian paracompact)

Cho X là một không gian tôpô paracompact; A, B là các tập con đóng của X mà $A \cap B = \emptyset$. Khi đó tồn tại ánh xạ liên tục $f : X \to R$ mà:

$f(a) = 1;\ \forall a \in A;$

$f(a) = 0;\ \forall a \in B.$

Định lý 3.3. *(Tietze – Urysohn)* (Cho các không gian paracompact)

Cho X là một không gian tôpô paracompact, A là một tập con đóng của X, $f : A \to R$ là một hàm liên tục. Khi đó tồn tại $F : X \to R$ là một thác triển của f.

Định lý 3.4. *(Dugundji)*

Cho X là một không gian tôpô khả metric, A là tập con đóng, E là một không gian Frechet. Cho $f : A \to E$ là một ánh xạ liên tục. Khi đó tồn tại ánh xạ liên tục:

$F : X \to E$ thác triển của f và $F(X) \subset \text{cl conv } f(A)$.

3.4. Mở rộng định lý điểm bất động Schauder cho hàm đa trị (Định lý Kakutani)

Định lý sau được gọi là định lý điểm bất động của Schauder:

Định lý 3.5. Cho K là một tập lồi, compact trong một không gian Banach. Khi đó K có tính chất điểm bất động (có nghĩa là mỗi ánh xạ liên tục f : K → K đều có điểm bất động)

Và Kakutani mở rộng kết quả trên cho hàm đa trị:

Định lý 3.6. (Kakutani)

Cho K là tập lồi, compact trong một không gian Banach E bất kỳ. Cho Φ: $K \to 2^K$ là một giá lồi, đóng, nửa liên tục dưới. Khi đó tồn tại $x_o \in K : x_o \in \Phi(x_o)$.

(với x_o được gọi là điểm bất động của giá Φ).

Ta sẽ chứng minh định lý này nhờ lý thuyết chọn của Michael.

Bằng cách sử dụng định lý chọn, ta cũng có định lý sau:

Định lý 3.7. Cho E là một không gian Frechet và K là một tập lồi, compact trong E, cho $\Phi : K \to 2^K$ là một giá lồi, đóng, nửa liên tục dưới. Khi đó: tồn tại $x_o \in K : x_o \in \Phi(x_o)$.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Luận văn "**Lý thuyết chọn Michael và ứng dụng**" đã đạt được những kết quả sau:

- Hệ thống lại một số kiến thức cơ bản liên quan đến không gian tôpô
- Trình bày lý thuyết chọn Michael
- Trình bày các ứng dụng của lý thuyết chọn Michael.

Tuy nhiên do khuôn khổ của một luận văn thạc sỹ, còn nhiều ứng dụng của lý thuyết chọn Michael mà tôi chưa đề cập tới, hy vọng đề tài sẽ được mở rộng hơn nữa.