

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

LÊ CHÂU VÂN

LÝ THUYẾT ĐỘ ĐO
VÀ ỨNG DỤNG TRONG
TOÁN SƠ CẤP

Chuyên ngành : Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Nguyễn Gia Định

Phản biện 1:.....

Phản biện 2:.....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm
Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng
vào ngày... tháng... năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng.
- Thư viện trường Đại học sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong nhiều môn học ở trường phổ thông đều có phần định lượng các đối tượng nghiên cứu. Để biết một chất điểm chuyển động nhanh hay chậm người ta sử dụng khái niệm vận tốc để xác định, để biết một hình có bề mặt lớn hay nhỏ người ta sử dụng khái niệm diện tích..., nói chung là người ta tìm mọi cách để đo đạc các đối tượng quan tâm. Tất cả sự đo đạc để xác định một cách định lượng các đối tượng đều có cùng chung các tính chất mang tính phổ quát nhất. Tất cả các tính chất này được lý thuyết độ đo nghiên cứu một cách chặt chẽ và có hệ thống. Tôi muốn trình bày về mối quan hệ sống động giữa lý thuyết độ đo với các cách tiếp cận để đo đạc các đối tượng trong chương trình toán học bậc phổ thông trung học, vì vậy tôi chọn đề tài "Lý thuyết độ đo và ứng dụng trong toán sơ cấp" làm luận văn tốt nghiệp của mình.

2. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng mà tôi tập trung nghiên cứu là lý thuyết độ đo và sự ứng dụng của chúng để giải toán ở bậc phổ thông trung học. Ngoài ra tôi cố gắng trình bày để làm sáng tỏ sự liên quan giữa các khái niệm có liên quan đến độ đo trong toán ở trong trường phổ thông theo cách thức của lý thuyết độ đo.

3. Mục đích nghiên cứu

Đề tài tập trung nghiên cứu các khái niệm và các tính chất của độ đo, khuyếch độ đo và ứng dụng của độ đo trong toán sơ cấp.

4. Tên đề tài

Đề tài "**Lý thuyết độ đo và ứng dụng trong toán sơ cấp**"

5. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp chủ yếu được sử dụng trong luận văn này là tìm hiểu các kết quả đã có trong các tài liệu chuyên khảo có liên quan đến đề tài và sau đó sử dụng các lý thuyết đó để trình bày các khái niệm liên quan đến độ đo trong chương trình toán ở bậc phổ thông trung học.

6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn được chia thành ba chương:

Chương 1: Chúng tôi trình bày các khái niệm về độ đo, các tính chất của độ đo, độ đo ngoài, các tập đo được.

Chương 2: Chúng tôi trình bày các khái niệm khuếch độ đo, các tính chất của độ đo cảm sinh, độ đo trong, độ đo Lebesgue.

Chương 3: Trong phần này chúng tôi sẽ trình bày một số ứng dụng của độ đo trong toán sơ cấp, đặc biệt chúng tôi có nêu ra một số bài toán cụ thể ở chương trình toán phổ thông sử dụng độ đo để giải.

Chương 1

ĐỘ ĐO

1.1 Các cấu trúc trong đại số tập hợp

1.1.1. Vành Boole, đại số Boole

Định nghĩa 1.1.1. Một vành (vành Boole) các tập hợp là một lớp $\mathcal{R}$ các tập hợp thỏa mãn nếu $A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{R}$ thì $A \cup B \in \mathcal{R}$ và $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Mệnh đề 1.1.1.[6] Cho $\mathcal{R}$ là một vành Boole, khi đó $\emptyset \in \mathcal{R}$, các phép hiệu đối xứng và giao của hai tập hợp là đóng trong $\mathcal{R}$.

Định nghĩa 1.1.2. Một lớp các tập hợp $\mathcal{R}$ được gọi là một đại số Boole nếu thỏa mãn:

a/ Nếu $A \in \mathcal{R}$ và $B \in \mathcal{R}$ thì $A \cup B \in \mathcal{R}$.

b/ Nếu $A \in \mathcal{R}$ thì $A^c \in \mathcal{R}$, (A^c là phần bù của A).

Rõ ràng, mỗi đại số Boole là một vành Boole vì $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$.

Mệnh đề 1.1.2. Cho $\mathcal{R}$ là một vành Boole các tập con của X . Vành $\mathcal{R}$ là một đại số khi và chỉ khi $X \in \mathcal{R}$.

1.1.2. Vành sinh, σ - vành

Định nghĩa 1.1.3. Cho $\mathcal{E}$ là lớp các tập hợp bất kỳ. Vành nhỏ nhất chứa $\mathcal{E}$ được gọi là vành sinh bởi lớp $\mathcal{E}$ và được ký hiệu bởi $R(\mathcal{E})$.

Định lý 1.1.1.[6] Nếu $\mathcal{E}$ là lớp các tập hợp bất kỳ thì tồn tại một vành sinh bởi lớp $\mathcal{E}$ duy nhất $R(\mathcal{E})$.

Định lý 1.1.2.[6] Nếu $\mathcal{E}$ là một lớp bất kỳ các tập hợp thì mỗi tập trong $R(\mathcal{E})$ được phủ bởi một họ hữu hạn các tập trong $\mathcal{E}$.

Định lý 1.1.3.[6] Nếu $\mathcal{E}$ là một lớp đếm được các tập hợp, thì $R(\mathcal{E})$ là đếm được.

Định nghĩa 1.1.4. Một lớp không rỗng $\mathcal{S}$ các tập hợp được gọi là một σ -vành nếu nó thỏa mãn:

a/ Nếu $E \in \mathcal{S}$ và $F \in \mathcal{S}$ thì $E \setminus F \in \mathcal{S}$.

b/ Nếu $\{E_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{S}$ thì $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} E_n \in \mathcal{S}$.

Định nghĩa 1.1.5. Cho một lớp bất kỳ các tập hợp $\mathcal{E}$, σ -vành nhỏ nhất chứa lớp $\mathcal{E}$ được gọi là σ -vành sinh bởi lớp $\mathcal{E}$ và được ký hiệu bởi $\sigma(\mathcal{E})$.

Định lý 1.1.4.[6] Nếu $\mathcal{E}$ là một lớp bất kỳ các tập hợp và E là một tập bất kỳ trong $\sigma(\mathcal{E})$ thì tồn tại một lớp đếm được $\mathcal{D}$ của $\mathcal{E}$ sao cho $E \in \sigma(\mathcal{D})$.

Định lý 1.1.5.[6] Nếu $\mathcal{E}$ là lớp bất kỳ các tập hợp con của tập X và A là tập con bất kỳ của X thì

$$\sigma(\mathcal{E}) \cap A = \sigma(\mathcal{E} \cap A).$$

1.2 Các lớp đơn điệu

1.2.1. Giới hạn trên, giới hạn dưới

Định nghĩa 1.2.1. Cho $\{E_n\}$ là một dãy các tập con của X , tập E^* gồm tất cả các phần tử của X thuộc E_n với vô hạn các giá trị của n được gọi là giới hạn trên của dãy $\{E_n\}$ và ký hiệu

$$E^* = \limsup_n E_n.$$

Định nghĩa 1.2.2. Cho $\{E_n\}$ là một dãy các tập con của X , tập E_* gồm tất cả các phần tử của X thuộc mọi E_n trừ một số hữu hạn các giá trị của n được gọi là giới hạn dưới của dãy $\{E_n\}$ và ký hiệu

$$E_* = \liminf_n E_n.$$

Nếu xảy ra trường hợp $E^* = E_*$ thì ta ký hiệu $E^* = E_* = \lim_n E_n$ và gọi là giới hạn của dãy $\{E_n\}$.

Dãy các tập hợp $\{E_n\}$ được gọi là tăng (đồng biến) nếu $E_n \subset E_{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

Dãy các tập hợp $\{E_n\}$ được gọi là giảm (nghịch biến) nếu $E_{n+1} \subset E_n, \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

Một dãy các tập hợp tăng hay giảm được gọi dãy đơn điệu.

Chú ý: Một dãy các tập đơn điệu thì luôn tồn tại giới hạn của dãy đó.

Định nghĩa 1.2.3. Một lớp không rỗng $\mathcal{M}$ các tập được gọi là đơn điệu nếu mọi dãy đơn điệu các tập $\{E_n\}$ trong $\mathcal{M}$ ta có $\lim_n E_n \in \mathcal{M}$.

Định nghĩa 1.2.4. Lớp đơn điệu nhỏ nhất chứa lớp $\mathcal{E}$ được gọi là lớp đơn điệu sinh bởi lớp $\mathcal{E}$ và được ký hiệu bởi $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

Định lý 1.2.1.[6] Một lớp $\mathcal{E}$ là một σ -vành khi và chỉ khi nó là vành đơn điệu.

Định lý 1.2.2.[6] Nếu $\mathcal{E}$ là một vành thì $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. Nếu $\mathcal{A}$ là lớp đơn điệu và $\mathcal{E}$ là vành sao cho $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ thì $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

1.3 Độ đo trên các vành

1.3.1. Các khái niệm

Một hàm tập là một ánh xạ từ một lớp các tập hợp vào tập số thực $\mathbb{R}$. Một hàm tập μ xác định trên lớp $\mathcal{E}$ các tập hợp được gọi là cộng tính nếu $\forall E \in \mathcal{E}, \forall F \in \mathcal{E}$ và $E \cap F = \emptyset$ thì $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$. Hàm tập $\mu : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hữu hạn cộng tính nếu

$$\forall E_i \in \mathcal{E}, i = \overline{1; n}; n < \infty, E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j; \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{E} \text{ thì } \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$$

Hàm tập $\mu : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là σ -cộng tính (cộng tính đếm được) nếu

$$\forall E_i \in \mathcal{E}, i \in \mathbb{N}, E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j; \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$$

thì

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_i).$$

Định nghĩa 1.3.1. Hàm tập μ có giá trị thực mở rộng, xác định trên vành $\mathcal{E}$ được gọi là một độ đo trên vành $\mathcal{E}$ nếu:

- 1/ Với mọi $E \in \mathcal{E}$ thì $\mu(E) \geq 0$ và $\mu(\emptyset) = 0$.
- 2/ Hàm tập μ là σ - cộng tính.

Định nghĩa 1.3.2. Cho độ đo μ xác định trên vành $\mathcal{E}$. Tập $E \in \mathcal{E}$ được gọi là có độ đo hữu hạn nếu $\mu(E) < \infty$. Tập E được gọi là có độ đo σ - hữu hạn nếu tồn tại dãy các tập $\{E_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ trong $\mathcal{E}$ sao cho

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ và } \mu(E_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Định nghĩa 1.3.3. Độ đo μ xác định trên vành $\mathcal{E}$ các tập con của tập X được gọi là:

- hữu hạn trên $\mathcal{E}$ nếu với mọi tập $E \in \mathcal{E}$ thì $\mu(E) < \infty$;
- σ - hữu hạn trên $\mathcal{E}$ nếu mọi tập $E \in \mathcal{E}$ đều có độ đo σ - hữu hạn.

Định nghĩa 1.3.4. Độ đo μ xác định trên đại số $\mathcal{E}$ các tập con của tập X được gọi là:

- hữu hạn hoàn toàn nếu $\mu(X) < \infty$;
- σ - hữu hạn hoàn toàn nếu tập X có độ đo σ - hữu hạn.

Định nghĩa 1.3.5. Độ đo μ xác định trên vành $\mathcal{E}$ được gọi là đầy đủ nếu $\forall E \in \mathcal{E}, F \subset E$ và $\mu(E) = 0$ thì $F \in \mathcal{E}$.

Chú ý. Trong định nghĩa 1.3.5 yêu cầu $\mathcal{E}$ là đại số để $X \in \mathcal{E}$.

1.3.2. Các tính chất của độ đo

Định lý 1.3.1.[6] Cho μ là một độ đo trên vành $\mathcal{E}$. Khi đó ta có:

- 1/ Nếu $E \in \mathcal{E}, F \in \mathcal{E}$ và $E \subset F$ thì $\mu(E) \leq \mu(F)$.
- 2/ Nếu $E \in \mathcal{E}, F \in \mathcal{E}$ và $E \subset F, F \setminus E \in \mathcal{E}, \mu(E) < \infty$ thì $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Định lý 1.3.2.[6] Cho μ là một độ đo trên σ -vành $\mathcal{E}$. Khi đó ta có:

- 1/ Nếu $E \in \mathcal{E}, \{E_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{E}$ và $E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} E_n$ thì $\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.
- 2/ Nếu $E \in \mathcal{E}, \{E_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{E}, E_i \cap E_j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$ và

$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} E_n \subset E$ thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu(E).$$

Định lý 1.3.3.[6] Cho μ là độ đo trên σ -vành $\mathcal{E}$. Nếu dãy các tập $\{E_n\} \subset \mathcal{E}$ là dãy tăng thì $\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$.

Định lý 1.3.4.[6] Cho μ là độ đo trên σ -vành $\mathcal{E}$. Nếu dãy các tập $\{E_n\} \subset \mathcal{E}$ là dãy giảm và tồn tại $m \in \mathbb{Z}_+$ sao cho $\mu(E_m) < \infty$ thì $\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$.

Định nghĩa 1.3.6. Hàm tập μ xác định trên lớp $\mathcal{E}$ được gọi là liên tục dưới tại tập E nếu mọi dãy tăng các tập $\{E_n\}$ trong $\mathcal{E}$ thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \mu(E)$. Tương tự, hàm tập μ được gọi là liên tục trên tại tập E nếu mọi dãy giảm các tập $\{E_n\}$ thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \mu(E)$.

Định lý 1.3.5.[6] Cho μ là hàm tập hữu hạn, cộng tính, không âm trên vành $\mathcal{E}$. Nếu μ là liên tục trên tại mọi tập E trong $\mathcal{E}$, hay liên tục trên tại $\emptyset$ thì μ là một độ đo trên vành $\mathcal{E}$.

1.4 Độ đo ngoài

Định nghĩa 1.4.1. Một lớp không rỗng các tập hợp $\mathcal{E}$ được gọi là lớp di truyền nếu với mọi tập $E \in \mathcal{E}$ và $F \subset E$ thì $F \in \mathcal{E}$.

Định nghĩa 1.4.2. σ -vành di truyền nhỏ nhất chứa lớp $\mathcal{E}$ được gọi là σ -vành di truyền sinh ra bởi lớp $\mathcal{E}$ và được ký hiệu bởi $H(\mathcal{E})$.

Định nghĩa 1.4.3. Một hàm tập μ^* có giá trị trên tập số thực mở rộng, xác định trên lớp $\mathcal{E}$ được gọi là:

-/ dưới cộng tính nếu với mọi tập $E \in \mathcal{E}$, $F \in \mathcal{E}$ và $E \cup F \in \mathcal{E}$ thì

$$\mu^*(E \cup F) \leq \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

-/ dưới cộng tính hữu hạn nếu với mọi hữu hạn tập $E_1; E_2; \dots; E_n$ và

$\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{E}$ thì

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu^*(E_i).$$

-/ σ - dưới cộng tính (dưới cộng tính đếm được) nếu với mọi dãy các tập $\{E_i\}$ mà $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$ thì

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

-/ đơn điệu nếu $E \in \mathcal{E}, F \in \mathcal{E}$ và $E \subset F$ thì $\mu(E) \leq \mu(F)$.

Định nghĩa 1.4.4. Một hàm tập μ^* nhận giá trị trên tập số thực mở rộng, xác định trên σ -vành di truyền $\mathcal{H}$ được gọi là một độ đo ngoài nếu nó không âm, đơn điệu, σ -dưới cộng tính và $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Định lý 1.4.1.[6] Nếu μ là một độ đo trên vành $\mathcal{E}$ và nếu với mọi tập $E \in H(\mathcal{E})$ đặt

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : E_i \in \mathcal{E}, \forall i; E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\},$$

thì μ^* là một độ đo ngoài trên $H(\mathcal{E})$ và là một mở rộng của μ . Nếu μ là (hoàn toàn) σ -hữu hạn thì μ^* cũng vậy.

Độ đo ngoài μ^* được gọi là cảm sinh bởi độ đo μ .

1.5 Các tập đo được

Định nghĩa 1.5.1. Cho μ^* là một độ đo ngoài trên σ -vành di truyền $\mathcal{H}$. Một tập $E \in \mathcal{H}$ được gọi là μ^* đo được nếu với mọi tập $A \in \mathcal{H}$, ta có

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

E^c là phần bù của E .

Định lý 1.5.1.[6] Nếu μ^* là một độ đo ngoài trên một σ -vành di truyền $\mathcal{H}$ và nếu $\overline{\mathcal{S}}$ là lớp tất cả các tập μ^* - đo được thì $\overline{\mathcal{S}}$ là một vành.

Chú ý. Cho μ^* là một độ đo ngoài trên σ -vành di truyền $\mathcal{H}$. Tập $E \in \mathcal{H}$ là μ^* -đo được nếu và chỉ nếu:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Định lý 1.5.2.[6] Nếu μ^* là một độ đo ngoài trên σ -vành di truyền $\mathcal{H}$ và nếu $\overline{\mathcal{S}}$ là lớp tất cả các tập μ^* đo được, thì $\overline{\mathcal{S}}$ là một σ -vành. Nếu $A \in \mathcal{H}$ và nếu $\{E_n\}$ là dãy rời nhau các tập trong $\overline{\mathcal{S}}$ với $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, thì:

$$\mu^*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n).$$

Định lý 1.5.3.[6] Nếu μ^* là một độ đo ngoài trên σ -vành di truyền $\mathcal{H}$ và nếu $\overline{\mathcal{S}}$ là lớp tất cả các tập μ^* -đo được, thì mỗi tập có độ đo ngoài bằng 0 thuộc vào $\overline{\mathcal{S}}$ và hàm tập $\overline{\mu}$ xác định trên $\overline{\mathcal{S}}$ được cho bởi $\overline{\mu}(E) = \mu^*(E), \forall E \in \overline{\mathcal{S}}$ là một độ đo đủ trên $\overline{\mathcal{S}}$.

Độ đo $\overline{\mu}$ được gọi là độ đo cảm sinh bởi độ đo ngoài μ^* . Độ đo $\overline{\mu}$ là hạn chế của độ đo ngoài μ^* trên $\overline{\mathcal{S}}$ và được ký hiệu $\overline{\mu} = \mu^*|_{\overline{\mathcal{S}}}$.

Chương 2

KHUYẾCH ĐỘ ĐO

2.1 Các tính chất của độ đo cảm sinh

Trong chương này ta luôn giả sử μ là độ đo trên vành $\mathcal{E}$, μ^* là độ đo ngoài cảm sinh bởi độ đo μ trên $H(\mathcal{E})$ (σ -vành di truyền sinh bởi $\mathcal{E}$) và $\bar{\mu}$ là độ đo cảm sinh bởi μ^* trên σ -vành $\bar{\mathcal{S}}$ các tập μ^* -đo được. Ta vẫn ký hiệu $\sigma(\mathcal{E})$ là σ -vành sinh bởi $\mathcal{E}$.

Định lý 2.1.1.[6] Mọi tập trong $\sigma(\mathcal{E})$ là các tập μ^* -đo được.

Định lý 2.1.2.[6] Nếu $E \in H(\mathcal{E})$ thì:

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \inf\{\bar{\mu}(F) : E \subset F \in \bar{\mathcal{S}}\} \\ &= \inf\{\bar{\mu}(F) : E \subset F \in \sigma(\mathcal{E})\}.\end{aligned}$$

Nghĩa là, độ đo ngoài cảm sinh bởi $\bar{\mu}$ trên $\sigma(\mathcal{E})$ và độ đo ngoài cảm sinh bởi $\bar{\mu}$ trên $\bar{\mathcal{S}}$ trùng nhau.

Định nghĩa 2.1.1. Tập $F \in \sigma(\mathcal{E})$ được gọi là một phủ đo được của tập $E \in H(\mathcal{E})$ nếu mọi tập $G \in \sigma(\mathcal{E})$ mà $G \subset F \setminus E$ thì $\bar{\mu}(G) = 0$.

Định lý 2.1.3.[6] Nếu một tập $E \in H(\mathcal{E})$ có độ đo ngoài σ -hữu hạn thì tồn tại một phủ đo được $F \in \sigma(\mathcal{E})$ sao cho $\mu^*(E) = \bar{\mu}(F)$.

Định lý 2.1.4.[6] Nếu F_1, F_2 là các phủ đo được của $E \in H(\mathcal{E})$ thì $\bar{\mu}(F_1 \Delta F_2) = 0$, nếu F là phủ đo được của E thì $\mu^*(E) = \bar{\mu}(F)$.

Định lý 2.1.5.[6] Nếu độ đo μ trên σ -vành $\mathcal{E}$ là σ -hữu hạn thì $\bar{\mu}\Big|_{\sigma(\mathcal{E})}$ và $\bar{\mu}\Big|_{\bar{\mathcal{S}}}$ cũng σ -hữu hạn.

2.2 Khuyếch, đầy đủ, và xấp xỉ một độ đo

Cho μ là độ đo σ -hữu hạn trên σ -vành $\mathcal{S}$, μ^* là độ đo ngoài được cảm sinh bởi độ đo μ . Độ đo $\bar{\mu} = \mu^*|_{\bar{\mathcal{S}}}$, trong đó $\bar{\mathcal{S}}$ là lớp tất cả các tập μ^* -đo được, được gọi là một đầy đủ của độ đo μ .

Định lý 2.2.1.[6] *Nếu μ là độ đo σ -hữu hạn trên vành $\mathcal{E}$, thì tồn tại một độ đo duy nhất $\bar{\mu}$ trên σ -vành $\sigma(\mathcal{E})$ sao cho $\mu = \bar{\mu}|_{\mathcal{E}}$.*

Định lý 2.2.2.[6] *Cho μ là độ đo trên σ -vành $\mathcal{K}$ và đặt*

$$\bar{\mathcal{K}} = \{E \Delta N : E \in \mathcal{K}, \exists B \in \mathcal{K}, N \subset B, \mu(B) = 0\}.$$

Khi đó $\bar{\mathcal{K}}$ là một σ -vành và hàm tập $\bar{\mu}$ xác định bởi $\bar{\mu}(E \Delta N) = \mu(E)$ là một độ đo đủ trên $\bar{\mathcal{K}}$.

Định lý 2.2.3.[6] *Nếu μ là độ đo σ -hữu hạn trên vành $\mathcal{E}$ và μ^* là độ đo ngoài được cảm sinh bởi độ đo μ thì tính đủ của độ đo mở rộng của μ trên $\sigma(\mathcal{E})$ đồng nhất với tính đủ của μ^* trên lớp tất cả các tập μ^* -đo được.*

Định lý 2.2.4.[6] *Nếu μ là độ đo σ -hữu hạn trên vành $\mathcal{E}$, thì với mọi tập E có độ đo hữu hạn trong $\sigma(\mathcal{E})$ và với mọi số dương ε , tồn tại tập $E_0 \in \mathcal{E}$ sao cho $\mu(E \Delta E_0) \leq \varepsilon$.*

2.3 Độ đo trong

Cho μ là độ đo trên σ -vành $\mathcal{S}$ và $H(\mathcal{S})$ là σ -vành di truyền sinh bởi σ -vành $\mathcal{S}$. Tương tự như độ đo ngoài μ^* được cảm sinh bởi độ đo μ ta định nghĩa độ đo trong μ_* xác định trên $H(\mathcal{S})$ như sau

$$\mu_*(E) = \sup \{ \mu(F) : E \supset F \in \mathcal{S} \}, E \in H(\mathcal{S}).$$

Định lý 2.3.1.[6] *Nếu $E \in H(\mathcal{S})$, thì*

$$\mu_*(E) = \sup \{ \bar{\mu}(F) : E \supset F \in \bar{\mathcal{S}} \}.$$

Định nghĩa 2.3.1. Tập $F \in \mathcal{S}$ được gọi là hạt nhân đo được của tập $E \in H(\mathcal{S})$ nếu $F \subset E$ và mọi tập $G \in \mathcal{S}$ mà $G \subset E \setminus F$ thì $\mu(G) = 0$.

Định lý 2.3.2.[6] Mọi tập $E \in H(\mathcal{S})$ có một hạt nhân đo được.

Định lý 2.3.3.[6] Nếu $E \in H(\mathcal{S})$ và F là hạt nhân đo được của E thì $\mu(F) = \mu_*(E)$, nếu F_1 và F_2 đều là các hạt nhân đo được của E thì $\mu(F_1 \Delta F_2) = 0$.

Định lý 2.3.4.[6] Nếu $\{E_n\}$ là dãy các tập rời nhau trong $H(\mathcal{S})$ thì

$$\mu_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(E_n).$$

Định lý 2.3.5.[6] Nếu $A \in H(\mathcal{S})$ và nếu $\{E_n\}$ là dãy các tập rời nhau với $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ thì

$$\mu_*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A \cap E_n).$$

Định lý 2.3.6.[6] Nếu $E \in \overline{\mathcal{S}}$ thì $\mu^*(E) = \mu_*(E) = \overline{\mu}(E)$. Ngược lại nếu $E \in H(\mathcal{S})$ và $\mu^*(E) = \mu_*(E) < \infty$ thì $E \in \overline{\mathcal{S}}$.

Định lý 2.3.7.[6] Nếu $E \in H(\mathcal{S}), F \in H(\mathcal{S})$ và $E \cap F = \emptyset$ thì

$$\mu_*(E \cup F) \leq \mu_*(E) + \mu^*(F) \leq \mu^*(E \cup F).$$

Định lý 2.3.8.[6] Nếu $E \in \overline{\mathcal{S}}$ thì với mọi tập con $A \subset X$ có

$$\mu_*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \overline{\mu}(E).$$

2.4 Độ đo Lebesgue

Ta áp dụng lý thuyết tổng quát về độ đo vào tập số thực $\mathbb{R}$ để xây dựng độ đo Lebesgue. Trong mục này ta ký hiệu như sau:

- / $\mathbb{P}$ là lớp tất cả các nửa đoạn bị chặn dạng $[a; b]$.
- / $\sigma(\mathbb{P})$ là σ -vành sinh bởi $\mathbb{P}$.
- / μ là hàm tập xác định trên $\mathbb{P}$ bởi $\mu([a; b]) = b - a$.

Các tập thuộc $\sigma(\mathbb{P})$ được gọi là các tập Borel của $\mathbb{R}$. Theo các phần trước ta có thể thác triển độ đo μ trên vành sinh ra bởi $\mathbb{P}$ lên $\sigma(\mathbb{P})$, nên có thể xem như μ xác định trên $\sigma(\mathbb{P})$. Đầy đủ của độ đo μ là độ đo $\bar{\mu}$ trên σ -vành $\bar{\mathbb{P}}$ được gọi là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$. Các tập hợp thuộc $\bar{\mathbb{P}}$ được gọi là các tập đo được Lebesgue, độ đo không đầy đủ μ trên lớp $\sigma(\mathbb{P})$ các tập Borel cũng thường được gọi là độ đo Lebesgue. Do $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n; n] \in \sigma(\mathbb{P})$ nên $\sigma(\mathbb{P})$ là một σ -đại số.

Định lý 2.4.1.[6] *Mỗi tập đếm được trong $\mathbb{R}$ là một tập Borel có độ đo không (tập A được gọi là có độ đo không nếu $\mu(A) = 0$).*

Định lý 2.4.2.[6] *Gọi $\mathcal{U}$ là lớp tất cả các tập mở trong $\mathbb{R}$. Khi đó*

$$\sigma(\mathbb{P}) = \sigma(\mathcal{U}).$$

Định lý 2.4.3.[6] *Nếu $E \subset \mathbb{R}$ thì*

$$\mu^*(E) = \inf \{ \mu(U) : E \subset U \in \mathcal{U} \}.$$

Định lý 2.4.4.[6] *Nếu T là một hàm từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ được xác định bởi $T(x) = \alpha x + \beta$, trong đó $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ và $\alpha \neq 0$, thì*

$$\mu^*(E) = |\alpha| \cdot \mu^*(E) \quad \text{và} \quad \mu_*(T(E)) = |\alpha| \cdot \mu_*(E).$$

Ngoài ra, tập $T(E)$ là tập Borel hay tập đo được Lebesgue nếu và chỉ nếu E là tập Borel hay tập đo được Lebesgue tương ứng.

Chương 3

ỨNG DỤNG TRONG TOÁN SƠ CẤP

3.1 Diện tích các hình phẳng

3.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 3.1.1. Bề mặt hình vuông có cạnh bằng 1 (đơn vị đo) được gọi là có diện tích 1 (đơn vị đo)².

Ghi chú:

- Ta quy ước một hình có diện tích S (đơn vị đo) được viết gọn là S .
- Ta quy ước một cạnh có độ dài a (đơn vị đo) được viết gọn là a .

3.1.2. Diện tích hình chữ nhật

Bài toán 3.1.1. Xét hình chữ nhật có chiều dài a đơn vị đo, chiều rộng b đơn vị đo. Diện tích S của hình chữ nhật là:

$$S = ab.$$

3.1.3. Diện tích tam giác

Bài toán 3.1.2. Xét tam giác có chiều dài một cạnh bằng a , chiều cao tương ứng h . Diện tích S của tam giác là:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

3.1.4. Diện tích hình bình hành

Bài toán 3.1.3. Xét hình hành có chiều dài một cạnh bằng a , chiều cao tương ứng h . Diện tích S của tam giác là:

$$S = a \cdot h.$$

3.1.5. Diện tích đa giác

Để tính diện tích của một đa giác bất kỳ n cạnh ($n \in \mathbb{N}, n \geq 4$), ta chia đa giác thành $n - 2$ tam giác chung đỉnh và không có điểm trong

chung (hình 3.5).

Khi đó, diện tích đa giác bằng tổng diện tích của $n - 2$ tam giác.

(*) Vấn đề đặt ra ở đây là làm thế nào để tính được diện tích hình tròn "không thuộc trong tập hợp các đa giác và nó không được giới hạn bởi các cạnh như đa giác?

3.1.6. Diện tích hình tròn

Bài toán 3.1.4. *Xét hình tròn $(O; R)$. Diện tích S của hình tròn là:*

$$S = \pi \cdot R^2.$$

3.2 Thể tích các khối

3.2.1. Định nghĩa

Định nghĩa 3.2.1. Phần không gian chiếm bởi khối lập phương cạnh bằng 1 (đơn vị đo) được gọi là có thể tích 1 (đơn vị đo)³.

Ghi chú: Ta quy ước một khối có thể tích V (đơn vị đo)³ được viết gọn là V .

3.2.2. Thể tích khối hộp chữ nhật

Bài toán 3.2.1. *Xét khối hình hộp chữ nhật có các kích thước lần lượt a, b, c . Thể tích V của khối hộp chữ nhật là:*

$$V = abc.$$

3.2.3. Thể tích khối lăng trụ đứng đáy tam giác vuông

Bài toán 3.2.2. *Xét khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông có diện tích mặt đáy $\mathcal{B}$ và chiều cao tương ứng h . Thể tích V của khối lăng trụ là:*

$$V = \mathcal{B}h.$$

3.2.4. Thể tích khối lăng trụ đứng bất kỳ

Bài toán 3.2.3. Xét khối lăng trụ đứng bất kỳ có diện tích mặt đáy $\mathcal{B}$ và chiều cao tương ứng h . Thể tích V của khối lăng trụ đứng là:

$$V = \mathcal{B}h.$$

3.2.5. Thể tích khối chóp tam giác

Bài toán 3.2.4. Xét khối chóp tam giác có diện tích mặt đáy $\mathcal{B}$ và chiều cao tương ứng h . Thể tích V chóp là:

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h.$$

3.2.6. Thể tích khối chóp bất kỳ

Bài toán 3.2.5. Xét khối chóp bất kỳ có diện tích mặt đáy $\mathcal{B}$ và chiều cao tương ứng h . Thể tích V chóp là:

$$V = \mathcal{B}h.$$

3.2.7. Thể tích khối lăng trụ tam giác

Bài toán 3.2.6. Xét khối lăng trụ tam giác có diện tích mặt đáy $\mathcal{B}$ và chiều cao tương ứng h . Thể tích V của khối lăng trụ là:

$$V = \mathcal{B}h.$$

3.2.8. Thể tích khối lăng trụ bất kỳ

Bài toán 3.2.7. Xét khối lăng trụ bất kỳ có diện tích mặt đáy $\mathcal{B}$ và chiều cao tương ứng h . Thể tích V của khối lăng trụ là:

$$V = \mathcal{B}h.$$

3.2.9. Thể tích khối trụ

Bài toán 3.2.8. Xét khối trụ $\mathcal{C}$ có chiều cao h và bán kính R . Thể tích V của khối trụ là:

$$V = \pi R^2 h$$

3.2.10. Thể tích khối nón

Bài toán 3.2.9. Xét khối nón $\mathcal{N}$ có chiều cao h và bán kính hình tròn đáy là R . Thể tích V của khối nón là:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

3.2.11. Thể tích khối cầu

Bài toán 3.2.10. Xét khối cầu S bán kính R . Thể tích V của khối cầu là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

3.3 Sử dụng diện tích, thể tích giải một số bài toán

Bài toán 3.3.1. Xác định điểm N trong tam giác ABC sao cho tổng khoảng cách từ M tới ba cạnh của tam giác nhỏ nhất có thể.

Bài toán 3.3.2. Cho trước tam giác ABC đều có cạnh bằng 1. Với mỗi điểm M bên trong tam giác, kẻ các đường thẳng AM , BM và CM cắt các cạnh đối diện của tam giác ABC lần lượt tại các điểm A' , B' và C' . Xác định vị trí của M để $MA' + MB' + MC'$ nhỏ nhất.

Bài toán 3.3.4. Cho tam giác ABC , điểm M nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M đến các cạnh BC, CA và AB . Xác định vị trí của điểm M trong tam giác để

$$Q = \frac{a}{MA_1} + \frac{b}{MB_1} + \frac{c}{MC_1}$$

có giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 3.3.5. Cho ba số $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \leq 1 + ab + bc + ca.$$

Bài toán 3.3.6. Cho số tự nhiên $n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} < 0,79n^2.$$

Bài toán 3.3.7. Cho $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6 \geq 0$. Chứng minh

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6)^2.$$

Bài toán 3.3.8. Cho tam diện vuông $Oxyz$. M là điểm tùy ý trong tam diện có khoảng cách xuống các mặt phẳng xOy, xOz, yOx lần lượt là a, b, c . Mặt phẳng qua M cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C . Chứng minh

$$OA + OB + OC \geq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \right)^2.$$

Bài toán 3.3.9. Cho tứ diện vuông $ABCD$, gọi h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng cách từ các đỉnh A, B, C, D đến các mặt đối diện. M là điểm tùy ý trong tứ diện đó. Gọi x, y, z, t lần lượt là khoảng cách từ M đến các mặt phẳng $(BCD), (ACD), (ABD)$ và (ABC) . Chứng minh

$$\frac{x}{h_1} + \frac{y}{h_2} + \frac{z}{h_3} + \frac{t}{h_4}.$$

có giá trị không đổi.

Bài toán 3.3.10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. M là điểm cố định trên cạnh SC . Mặt phẳng qua AM , cắt SC tại E và cắt SD tại F . Chứng minh

$$\frac{1}{SE} + \frac{1}{SF}$$

có giá trị không phụ thuộc vào vị trí của thiết diện $AEMF$.

KẾT LUẬN

Đề tài "Lý thuyết độ đo và ứng dụng trong toán sơ cấp" đã khảo sát các khái niệm về độ đo, khuếch độ đo và ứng dụng của nó trong toán sơ cấp.

Luận văn này đã thực hiện được một số vấn đề như sau:

- Trình bày và hệ thống lại các kiến thức độ đo mà nó có ứng dụng trong việc giải quyết một số vấn đề của toán học sơ cấp.
- Giải quyết các bài toán về diện tích của một số hình phẳng, thể tích của một số khối trong không gian, như diện tích hình tròn, thể tích khối cầu,...với những chứng minh chặt chẽ.
- Luận văn cho ta một cách nhìn nhất quán về diện tích, thể tích theo tinh thần của lý thuyết độ đo.

Thời gian thực hiện luận văn có hạn chế và trình độ còn có hạn nên không tránh khỏi những khiếm khuyết, rất mong sự đóng góp ý kiến của quý thầy cô, các bạn và những người quan tâm tới lĩnh vực này để luận văn được hoàn hảo hơn.