

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HCM**

Nguyễn Công Minh

**LÝ THUYẾT SỰ XÁC ĐỊNH DUY NHẤT
CÁC HÀM PHÂN HÌNH**

Chuyên ngành : Toán Giải tích

Mã số : 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

TS. NGUYỄN VĂN ĐÔNG

Thành phố Hồ Chí Minh - 2009

MỞ ĐẦU

Lý thuyết về sự xác định duy nhất các hàm phân hình nghiên cứu những điều kiện mà tồn tại duy nhất một hàm phân hình thoả mãn các điều kiện này. Ta đã biết các đa thức được xác định bởi các không điểm của nó (sai khác một nhân tử hằng), nhưng điều đó không đúng đối với hàm nguyên và hàm phân hình siêu việt. Ví dụ như hai hàm e^z và e^{-z} nhận chung các điểm $\pm 1, 0, \infty$. Do đó việc xác định duy nhất các hàm phân hình là đề tài hấp dẫn và phức tạp. Trong lĩnh vực này, lý thuyết phân bố giá trị được xây dựng bởi Nevanlinna trở thành một công cụ chính cho việc nghiên cứu. Nevanlinna đã chứng minh được rằng hàm phân hình khác hằng có thể được xác định duy nhất bởi 5 điểm, nghĩa là nếu hai hàm phân hình f và g nhận cùng 5 giá trị thì $f \equiv g$. Chắc chắn rằng số 5 trong định lý của Nevanlinna có thể giảm xuống khi chúng ta thêm vào điều kiện. Trong luận văn này tôi sẽ trình bày một số kết quả và phương pháp khác nhau để xác định duy nhất các hàm phân hình dưới những điều kiện khác nhau.

Luận văn này chủ yếu dựa vào tài liệu “Uniqueness Theory of Meromorphic Functions” của Chung-Chun Yang và Hong-Xun Yi, là quyển sách đầu tiên về lý thuyết xác định duy nhất các hàm phân hình, tập hợp hầu hết những kết quả mới nhất trong lĩnh vực này những năm gần đây và các bài báo liên quan.

Nội dung luận văn gồm 4 chương:

- Chương 1 trình bày tóm lược một số kiến thức chuẩn bị.
- Chương 2 trình bày các định lý liên quan đến tổ hợp các hàm phân hình, là mốc chuẩn bị cho việc nghiên cứu sự xác định duy nhất các hàm phân hình ở chương sau.
- Chương 3 trình bày các kết quả về sự xác định duy nhất các hàm phân hình khi chúng chia nhau 5, 4, 3, 2, 1 giá trị, và sự xác định duy nhất nghiệm của phương trình vi phân.
- Chương 4 trình bày sự xác định duy nhất của các hàm phân hình chia giá trị với đạo hàm của nó.

Tôi xin chân thành cảm ơn Tiến sĩ Nguyễn Văn Đông đã tận tình hướng dẫn tôi hoàn thành tốt luận văn này.

Tp. Hồ Chí Minh – Tháng 11 năm 2009

Chương 1:

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

VỀ LÝ THUYẾT NEVANLINNA

Định lý cơ bản của đại số nói rằng một đa thức bậc p với biến số phức nhận một giá trị nào đó đúng p lần kể cả bội. Các nhà toán học thế giới có nhiều nỗ lực mở rộng định lý này cho hàm chỉnh hình và hàm phân hình.

Vào thế kỉ thứ XIX, Picard [Picard 1897] đã khái quát định lý cơ bản của đại số bằng cách chứng minh rằng một hàm nguyên siêu việt – một dạng của đa thức bậc vô hạn – phải nhận tất cả các giá trị vô hạn lần ngoại trừ một giá trị phức. Chẳng hạn hàm nguyên e^z nhận các giá trị một cách vô hạn lần nhưng không bao giờ nhận giá trị 0. Do vậy, sự khái quát “ngây thơ” của định lý cơ bản của đại số mà người ta có thể tưởng tượng là có thể không đúng cho hàm nguyên. Ngoài ra các hàm siêu việt có thể nhận các giá trị vô hạn lần, nhưng ta không thể thật sự nói được tổng số lần mà hàm số nhận một giá trị. Vì hàm phân hình trên toàn mặt phẳng phức chỉ có thể có quá lắm hữu hạn không điểm trong một đĩa hữu hạn, những gì chúng ta có thể nói và sẽ nói thay cho số lần nhận là tốc độ mà số các không điểm trong một đĩa bán kính r tăng khi $r \rightarrow \infty$.

Cho f là hàm phân hình và $a \in \overline{\mathbb{C}}$, lý thuyết Nevanlinna nghiên cứu mối liên hệ giữa ba hàm sau:

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right), m\left(r, \frac{1}{f-a}\right), T(r, f).$$

◦ Hàm $N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ là “hàm đếm” vì nó đếm, như là trung bình loga, số lần f nhận giá trị a trên đĩa tròn bán kính r .

◦ Hàm $m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ là hàm xấp xỉ trung bình đo độ gần a của giá trị hàm f trên đường tròn tâm O bán kính r .

◦ Hàm $T(r, f)$ là hàm đặc trưng. Hàm đặc trưng đóng vai trò trong định lý Nevanlinna như là bậc của đa thức trong định lý cơ bản của đại số.

Vì $m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \geq 0$ và $T\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ không phụ thuộc a nên định lý cơ bản thứ nhất nói rằng f có thể nhận giá trị a không thể cao đến nỗi mà $N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ tăng nhanh hơn $T(r, f)$. Điều này tương tự phát biểu một đa thức bậc p nhận giá trị a tối đa p lần.

Định lý cơ bản thứ nhất còn nói rằng: tổng $N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ độc lập với a . Do đó ta có thể viết

$T(r, f) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$. Như vậy nếu f nhận giá trị a với một tần số đủ nhỏ để

$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ không tăng nhanh như $T(r, f)$ thì hàm $m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ sẽ bổ sung theo nghĩa là ảnh của f gần

với giá trị a với những cung đủ lớn trên đường tròn lớn tâm O. Nghĩa là một hàm phân hình nhận một giá trị đặc biệt kém thường xuyên hơn mong đợi thì nó sẽ bù lại bằng cách dành nhiều lần gần giá trị đó.

Định lý cơ bản thứ nhất cho một chặn trên (theo thuật ngữ tăng của hàm số) mà một hàm phân hình có thể thường xuyên nhận mọi giá trị. Điều này tương tự phát biểu một đa thức bậc p có thể nhận mọi giá trị nhiều nhất p lần.

Định lý cơ bản thứ hai cung cấp một cận dưới của tổng hữu hạn các hàm đếm $N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right)$ với bán kính đủ lớn tùy ý.

Như vậy cùng với định lý cơ bản thứ nhất, định lý cơ bản thứ hai cho ta một khái quát định lý cơ bản của đại số.

1.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 1.1: Cho $f(z)$ là hàm phân hình khác hằng trên $\square$ và a là số phức.

▪ Các hàm đếm:

- $n(r, f)$ là hàm đếm các cực điểm của f trong đĩa tròn đóng $\overline{D(r)}$ (kể cả bội).
- $n\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ là hàm đếm số không điểm của $f-a$ trong $\overline{D(r)}$ (kể cả bội).
- $\bar{n}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ đếm số không điểm của $f-a$ trong $\overline{D(r)}$ (không kể bội).
- $\bar{n}_k\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ đếm số không điểm của $f-a$ trong $\overline{D(r)}$ mà bội của không điểm không lớn hơn k và chỉ đếm 1 lần; $\bar{n}_{(k+1)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ đếm số không điểm trong $\overline{D(r)}$ mà bội của không điểm lớn hơn k và chỉ đếm 1 lần.

- $n_p\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ đếm số không điểm của $f-a$ trong $\overline{D(r)}$ mà bội lớn hơn p thì được đếm p lần.

$$\circ N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = n\left(0, \frac{1}{f-a}\right) \cdot \log r + \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f-a}\right) - n\left(0, \frac{1}{f-a}\right)}{t} dt$$

◦ Hàm $\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$, $n_k\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$, $n_{(k+1)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$, $N_k\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$, $N_{(k+1)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$, $\bar{N}_k\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$, $\bar{N}_{(k+1)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$, $N_p\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ được định nghĩa tương ứng.

▪ Hàm xấp xỉ: $m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta$

▪ Hàm đặc trưng: $T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$

▪ Số khuyết: $\delta(a, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)} = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)}$

$$\Theta(a, f) = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)}$$

▪ Bậc và bậc dưới của hàm phân hình: $\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ T(r, f)}{\log r}$; $\mu = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ T(r, f)}{\log r}$

▪ Kí hiệu: $S(r, f) = o(T(r, f))$ ($r \rightarrow \infty, r \notin E$), E là tập có độ đo tuyến tính hữu hạn.

▪ Hàm $a(z)$ được gọi là hàm nhỏ của $f(z)$ nếu $T(r, a) = o(T(r, f))$.

Định nghĩa 1.2: Cho f là hàm phân hình trên mặt phẳng phức và a là giá trị hữu hạn. Nếu $f(z) - a$ không có không điểm thì a được gọi là giá trị Picard của $f(z)$.

1.2 Một số kết quả chuẩn bị

♦ **Định lý 1.1** (Định lý cơ bản thứ nhất): Cho f là hàm phân hình trong $|z| \leq R$ ($\leq \infty$), và a là số phức tùy ý. Khi đó với $0 < r < R$ ta có

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + \log |c_\lambda| + \varepsilon(a, r)$$

trong đó c_λ là hệ số khác 0 đầu tiên trong khai triển Laurent của $\frac{1}{f(z) - a}$ tại 0 và

$$|\varepsilon(a, r)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$$

♦ **Định lý 1.2** (Định lý cơ bản thứ hai): Cho f là hàm phân hình trên mặt phẳng phức và $a_1, a_2, \dots, a_q$ ($q \geq 3$) là các giá trị phân biệt trên mặt phẳng phức mở rộng. Khi đó

$$(q-2).T(r, f) < \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N_1(r) + S(r, f)$$

và
$$(q-2).T(r, f) < \sum_{j=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f)$$

trong đó
$$N_1(r) = 2.N(r, f) - N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$$

$$N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right)$$
 là không điểm của f' mà không là không điểm của $f - a_j$ ($j = \overline{1, q}$)

♦ **Định lý 1.3:** (Định lý cơ bản thứ hai với hàm nhỏ): Cho $f(z)$ là hàm phân hình siêu việt trên mặt phẳng phức và $a_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, q$) là các hàm nhỏ phân biệt của $f(z)$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ ta có

$$(q-1-\varepsilon).T(r, f) < N(r, f) + \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r, f)$$

Hơn thế, nếu $q \geq 3$ thì tồn tại số nguyên dương p sao cho

$$(q-2-\varepsilon).T(r, f) < \sum_{j=1}^q N_p\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r, f)$$

♦ **Định lý 1.4:** Cho $f(z)$ là hàm phân hình khác hằng và $a_i(z)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) là các hàm nhỏ phân biệt của $f(z)$. Khi đó

$$2.T(r, f) < \sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r, f)$$

♦ **Định lý 1.5:** Cho $f(z), g(z)$ là hai hàm phân hình trên mặt phẳng phức, $\lambda(f)$ là bậc của $f(z)$ và $\mu(g)$ là bậc dưới của $g(z)$. Nếu $\lambda(f) < \mu(g)$ thì $T(r, f) = o(T(r, g))$, ($r \rightarrow \infty$).

♦ **Định lý 1.6** (Định lý Milloux): Cho $f(z)$ là hàm phân hình trên mặt phẳng phức và k là số nguyên dương. Đặt $\psi(z) = \sum_{i=0}^k a_i(z).f^{(i)}(z)$ trong đó $a_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) là các hàm nhỏ của $f(z)$. Khi đó ta có:

$$m\left(r, \frac{\psi}{f}\right) = S(r, f)$$

và
$$T(r, \psi) \leq T(r, f) + k.\overline{N}(r, f) + S(r, f) \leq (k+1).T(r, f) + S(r, f)$$

và
$$T(r, f) < \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\psi-1}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{\psi'}\right) + S(r, f)$$

trong đó $N_0\left(r, \frac{1}{\psi'}\right)$ là hàm đếm không điểm của ψ' mà không là không điểm của $\psi - 1$.

♦ **Định lý 1.7:** Cho $f(z)$ là hàm phân hình siêu việt trên mặt phẳng phức và k là số nguyên dương. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ cố định cho trước ta có

$$T(r, f) < \left(1 + \frac{1}{k}\right).N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \left(1 + \frac{1}{k}\right).N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-1}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right) + \varepsilon.T(r, f) + S(r, f)$$

♦ **Định lý 1.8:** Cho $f(z)$ là hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức. Nếu $0, \infty$ là giá trị Picard của $f(z)$ thì tồn tại hàm nguyên khác hằng $h(z)$ sao cho $f(z) = e^{h(z)}$.

♦ **Định lý 1.9:** Cho $h(z)$ là hàm nguyên khác hằng và $f(z) = e^{h(z)}$. Khi đó

$$\text{i)} \quad T(r, h) = o(T(r, f)) \quad , (r \rightarrow \infty).$$

$$\text{ii)} \quad T(r, h') = S(r, f)$$

♦ **Định lý 1.10:** Đặt $g_j(z) (j = 1, 2, \dots, n)$ là các hàm nguyên và $a_j(z) (j = 0, 1, \dots, n)$ là các hàm phân hình thoả $T(r, a_j) = o\left(\sum_{k=1}^n T(r, e^{g_k})\right) \quad , (r \rightarrow \infty, r \notin E) (j = 1, 2, \dots, n)$.

Nếu $\sum_{j=1}^n a_j(z).e^{g_j(z)} \equiv a_0(z)$ thì tồn tại các hằng số $c_j (j = 1, 2, \dots, n)$, ít nhất một trong số đó khác hằng, sao

$$\text{cho } \sum_{j=1}^n c_j . a_j(z) . e^{g_j(z)} \equiv 0 .$$

♦ **Định lý 1.11:** Cho $h(z)$ là hàm nguyên khác hằng và $f(z) = e^{h(z)}$, λ và μ là bậc và bậc dưới của $f(z)$.
Ta có

$$\text{(i)} \quad \text{Nếu } h(z) \text{ là đa thức bậc } p \text{ thì } \lambda = \mu = p .$$

$$\text{(ii)} \quad \text{Nếu } h(z) \text{ là hàm nguyên siêu việt thì } \lambda = \mu = \infty .$$

♦ **Định lý 1.12:** Mọi hàm phân hình trong mặt phẳng phức có nhiều nhất hai giá trị Picard.

Chương 2:

CÁC ĐỊNH LÝ LIÊN QUAN ĐẾN TỔ HỢP CÁC HÀM PHÂN HÌNH

Trong chương này ta trình bày các định lý về tổ hợp các hàm phân hình, bao gồm các kết quả thu được bởi Nevanlinna, Borel, Niiino – Ozawa... đóng vai trò quan trọng trong việc xác định duy nhất các hàm phân hình.

♦ **Định lý 2.1:** (Định lý Borel tổng quát)

Giả sử $f_1(z), \dots, f_n(z)$ là các hàm phân hình độc lập tuyến tính thỏa $\sum_{j=1}^n f_j \equiv 1$ (2.1)

Khi đó với $1 \leq j \leq n$ ta có

$$T(r, f_j) \leq \sum_{k=1}^n N\left(r, \frac{1}{f_k}\right) + N(r, f_j) + N(r, D) - \sum_{k=1}^n N(r, f_k) - N\left(r, \frac{1}{D}\right) + S(r) \quad (2.2)$$

trong đó D là định thức Wronskian $W(f_1, \dots, f_n)$,

$$S(r) = o(T(r)), (r \rightarrow \infty, r \notin E) \quad E \text{ là tập có độ đo tuyến tính hữu hạn} \quad (2.3)$$

$$\text{và } T(r) = \max_{1 \leq k \leq n} \{T(r, f_k)\} \quad (2.4)$$

Chứng minh:

$$\text{Lấy đạo hàm hai vế (2.1) ta có } \sum_{j=1}^n f_j^{(k)} \equiv 0 \quad (k = 1, \dots, n-1) \quad (2.5)$$

Bởi vì $f_1(z), \dots, f_n(z)$ độc lập tuyến tính nên $D \neq 0$. Từ (2.1), (2.5) ta có $D = D_j$ ($j = 1, \dots, n$), trong đó D_j là định thức con của D thu được bằng cách bỏ hàng 1, cột j của D . Vì thế

$$f_1 = \frac{\left(\frac{D_1}{f_2 \cdot f_3 \cdots f_n}\right)}{\left(\frac{D}{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n}\right)} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (2.6)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1'/f_1 & f_2'/f_2 & \cdots & f_n'/f_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}/f_1 & f_2^{(n-1)}/f_2 & \cdots & f_n^{(n-1)}/f_n \end{vmatrix} \quad \text{và} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} f_2'/f_2 & \cdots & f_n'/f_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_2^{(n-1)}/f_2 & \cdots & f_n^{(n-1)}/f_n \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

Từ (2.6), theo định lý cơ bản thứ nhất ta có

$$m(r, f_1) \leq m(r, \Delta_1) + m\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) \leq m(r, \Delta_1) + m(r, \Delta) + N(r, \Delta) - N\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) + O(1) \quad (2.8)$$

Bởi vì $\Delta = \frac{D}{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n}$ ta có

$$N(r, \Delta) - N\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) = \sum_{k=1}^n N\left(r, \frac{1}{f_k}\right) - \sum_{k=1}^n N(r, f_k) + N(r, D) - N\left(r, \frac{1}{D}\right) \quad (2.9)$$

$$\text{Vì } m\left(r, \frac{f_j^{(k)}}{f_j}\right) = S(r, f_j) = S(r), \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n-1} \quad (\text{định lý Milloux})$$

$$\text{nên ta có } m(r, \Delta_1) + m(r, \Delta) = S(r) \quad (2.10)$$

Từ (2.8), (2.9), (2.10) ta được

$$\begin{aligned} T(r, f_1) &= m(r, f_1) + N(r, f_1) \\ &\leq \sum_{k=1}^n N\left(r, \frac{1}{f_k}\right) + N(r, f_1) + N(r, D) - \sum_{k=1}^n N(r, f_k) - N\left(r, \frac{1}{D}\right) + S(r) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

♦ **Định lý 2.2:** Với giả thiết của 2.1 và nếu $\sum_{k=1}^n N(r, f_k) = S(r)$ thì

$$T(r, f_j) \leq \sum_{k=1}^n N\left(r, \frac{1}{f_k}\right) - N\left(r, \frac{1}{D}\right) + S(r)$$

Chứng minh:

$$\text{Ta có } N(r, D) = N(r, D_1) \leq \sum_{k=2}^n \left[N(r, f_k) + (n-1) \overline{N}(r, f_k) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Vì thế } N(r, f_1) + N(r, D) - \sum_{k=1}^n N(r, f_k) &= N(r, D) - \sum_{k=2}^n N(r, f_k) \\ &\leq (n-1) \cdot \sum_{k=2}^n \overline{N}(r, f_k) \leq (n-1) \cdot \sum_{k=1}^n \overline{N}(r, f_k) \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (2.11) và định lý 2.1 ta được } T(r, f_1) \leq \sum_{k=1}^n N\left(r, \frac{1}{f_k}\right) - N\left(r, \frac{1}{D}\right) + S(r) \quad \blacksquare$$

♦ **Định lý 2.3:** Giả sử $f_1(z), \dots, f_n(z)$ ($n \geq 2$) là các hàm phân hình thoả các điều kiện:

$$(i) \quad \sum_{j=1}^n C_j \cdot f_j(z) \equiv 0 \quad \text{trong đó } C_j \quad (j = \overline{1, n}) \text{ là các hằng số.}$$

$$(ii) \quad f_j(z) \not\equiv 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad \text{và } \frac{f_j(z)}{f_k(z)} \text{ khác hằng với } 1 \leq j < k \leq n.$$

$$(iii) \quad \sum_{j=1}^n \left(N(r, f_j) + N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) \right) = o(\tau(r)) \quad , \quad \tau(r) = \min_{1 \leq j < k \leq n} \left\{ T\left(r, \frac{f_j}{f_k}\right) \right\}$$

Khi đó $C_j = 0 \quad (j = \overline{1, n})$.

Chứng minh: Ta chứng minh bằng quy nạp.

- Với $n = 2$ ta có $C_1 \cdot f_1(z) + C_2 \cdot f_2(z) \equiv 0$. Nếu một trong hai giá trị C_1, C_2 khác 0, giả sử $C_1 \neq 0$ ta có $\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \equiv -\frac{C_2}{C_1}$ (mâu thuẫn với (ii)). Do đó $C_1 = C_2 = 0$ nên định lý đúng với $n = 2$.
- Giả sử định lý đúng với $n \geq 2$. Ta chứng minh định lý đúng với $n + 1$.

Thật vậy, nếu các hàm phân hình $f_j(z) \quad (j = \overline{1, n+1})$ thỏa mãn điều kiện của định lý, ta có $\sum_{j=1}^{n+1} C_j \cdot f_j(z) \equiv 0$ (2.12)

Nếu một trong các $C_j \quad (j = \overline{1, n+1})$ khác 0. Ta sẽ chứng minh tất cả C_j đều khác 0. Thật vậy nếu trái lại, không mất tính tổng quát, giả sử $C_{n+1} = 0$. Từ (2.12) ta có $\sum_{j=1}^n C_j \cdot f_j(z) \equiv 0$, và do $f_j(z) \quad (j = \overline{1, n})$ thỏa mãn các giả thiết của định lý nên theo giả thuyết quy nạp ta có $C_j = 0 \quad (j = \overline{1, n})$ (mâu thuẫn giả sử). Vậy $C_j \neq 0 \quad (j = \overline{1, n+1})$.

$$\text{Đặt } g_j(z) = -\frac{C_j \cdot f_j(z)}{C_{n+1} \cdot f_{n+1}(z)}, \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2.13)$$

Từ (2.12) ta có $\sum_{j=1}^n g_j(z) \equiv 1$.

Nếu $g_j(z) \quad (j = \overline{1, n})$ phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại các hằng số $a_j \quad (j = \overline{1, n})$ (một trong số chúng khác 0) sao cho $\sum_{j=1}^n a_j \cdot g_j(z) \equiv 0$. Do đó $\sum_{j=1}^n a_j \cdot C_j \cdot f_j(z) \equiv 0$.

Theo giả thuyết quy nạp ta có $a_j \cdot C_j = 0 \quad (j = \overline{1, n})$. Bởi vì một trong các $a_j \quad (j = \overline{1, n})$ khác 0, giả sử $a_1 \neq 0$ ta suy ra $C_1 = 0$ (mâu thuẫn vì $C_j \neq 0 \quad (j = \overline{1, n})$). Do đó $g_j(z) \quad (j = \overline{1, n})$ độc lập tuyến tính.

Đặt $T(r) = \max_{1 \leq k \leq n} \{T(r, g_k)\}$, $\forall j = \overline{1, n}$ từ (2.13) ta có

$$N(r, g_j) + N\left(r, \frac{1}{g_j}\right) \leq N(r, f_j) + N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + N(r, f_{n+1}) + N\left(r, \frac{1}{f_{n+1}}\right)$$

Từ (iii) ta có $N(r, g_j) + N\left(r, \frac{1}{g_j}\right) = S(r)$, trong đó $S(r) = o(T(r)), (r \rightarrow \infty, r \notin E)$. Vì ế th

$$\sum_{j=1}^n N(r, g_j) = S(r) \text{ và } \sum_{j=1}^n N\left(r, \frac{1}{g_j}\right) = S(r).$$

Áp dụng định lý 2.2 ta có $T(r, g_k) \leq S(r)$, $(k = \overline{1, n})$. Do đó $T(r) \leq S(r)$ (vô lý).

Vì thế tất cả $C_j = 0$, $(j = \overline{1, n+1})$.

Vậy định lý đúng với $n+1$ ■

♦ **Định lý 2.4:** Giả sử $f_1(z), \dots, f_n(z)$, $(n \geq 2)$ là các hàm phân hình và $g_1(z), \dots, g_n(z)$ là các hàm nguyên thoả các điều kiện:

$$(i) \quad \sum_{j=1}^n f_j(z).e^{g_j(z)} \equiv 0$$

$$(ii) \quad g_j(z) - g_k(z) \text{ khác hằng với } 1 \leq j < k \leq n.$$

$$(iii) \quad \text{Với } 1 \leq j \leq n, 1 \leq h < k \leq n \text{ ta có } T(r, f_j) = o\left\{T(r, e^{g_h - g_k})\right\}, (r \rightarrow \infty, r \notin E).$$

Khi đó $f_j(z) \equiv 0$, $1 \leq j \leq n$.

Chứng minh:

Ta chứng minh bằng quy nạp.

▪ Khi $n = 2$: điều kiện (i) trở thành $f_1(z).e^{g_1(z)} + f_2(z).e^{g_2(z)} \equiv 0$. Nếu một trong $f_1(z)$, $f_2(z)$ không đồng nhất 0, giả sử $f_1(z) \not\equiv 0$ thì $e^{g_1(z) - g_2(z)} \equiv -\frac{f_2(z)}{f_1(z)}$. Do đó theo điều kiện (iii) ta có

$$T(r, e^{g_1 - g_2}) = T\left(r, \frac{f_2}{f_1}\right) \leq T(r, f_1) + T(r, f_2) + O(1) = o\left\{T(r, e^{g_1 - g_2})\right\} \text{ (vô lý).}$$

Vậy định lý đúng với $n = 2$.

▪ Giả sử định lý đúng với $n (\geq 2)$. Ta chứng minh định lý đúng với $n+1$.

Giả sử $f_j(z)$, $g_j(z)$ $(j = \overline{1, n+1})$ thoả mãn các điều kiện của định lý và một trong các $f_j(z)$ $(j = \overline{1, n+1})$ không đồng nhất 0. Trái lại, không mất tính tổng quát ta giả sử $f_{n+1}(z) \equiv 0$, khi đó $\sum_{j=1}^n f_j(z).e^{g_j(z)} \equiv 0$. Do $f_j(z)$ $(j = \overline{1, n})$ thoả các điều kiện của định lý nên theo giả thuyết quy nạp ta có $f_j(z) \equiv 0$ $(j = \overline{1, n})$ (mâu thuẫn giả sử). Vậy $f_j(z) \not\equiv 0$ $(j = \overline{1, n+1})$.

$$\text{Đặt } F_j(z) = f_j(z).e^{g_j(z)}, C_j = 1 \text{ } (j = \overline{1, n+1}) \quad (2.14)$$

Từ (i) ta có $\sum_{j=1}^{n+1} C_j.F_j(z) \equiv 0$.

Ta thấy $F_j(z) \neq 0 \quad (j = \overline{1, n+1})$ và $\frac{F_j(z)}{F_k(z)} \quad (1 \leq j < k \leq n+1)$ khác hằng. Hơn thế với $j = \overline{1, n+1}$, $1 \leq h < k \leq n+1$, $r \rightarrow \infty$, $r \notin E$ ta có

$$N(r, F_j) + N\left(r, \frac{1}{F_j}\right) \leq N(r, f_j) + N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) \leq 2T(r, f_j) + O(1) = o\left\{T(r, e^{g_h - g_k})\right\} \quad (2.15)$$

Bởi vì $\frac{F_h}{F_k} = \frac{f_h}{f_k} \cdot e^{g_h - g_k}$ nên suy ra

$$\begin{aligned} T(r, e^{g_h - g_k}) &= T\left(r, \frac{f_k}{f_h} \cdot \frac{F_h}{F_k}\right) \leq T(r, f_k) + T(r, f_h) + T\left(r, \frac{F_h}{F_k}\right) + O(1) \\ &= T\left(r, \frac{F_h}{F_k}\right) + o\left\{T(r, e^{g_h - g_k})\right\} \quad (r \rightarrow \infty, r \notin E) \end{aligned}$$

$$\text{Vì thế } T(r, e^{g_h - g_k}) = O\left\{T\left(r, \frac{F_h}{F_k}\right)\right\}, \quad (r \rightarrow \infty, r \notin E) \quad (2.16)$$

$$\text{Từ (2.15), (2.16) ta được } N(r, F_j) + N\left(r, \frac{1}{F_j}\right) = o\left\{T\left(r, \frac{F_h}{F_k}\right)\right\}, \quad (r \rightarrow \infty, r \notin E)$$

với $j = \overline{1, n+1}$, $1 \leq h < k \leq n+1$.

Nghĩa là $F_j(z)$, $j = \overline{1, n+1}$ thoả các điều kiện của định lý 2.3, vì thế $C_j = 0 \quad j = \overline{1, n+1}$ (mâu thuẫn (2.14)). Vậy $f_j(z) \equiv 0 \quad j = \overline{1, n+1}$ ■

♦ **Định lý 2.5:** Nếu $f_j(z)$ và $g_j(z) \quad (j = \overline{1, n}) \quad (n \geq 2)$ là các hàm phân hình thoả mãn các điều kiện: (i)

$$\sum_{j=1}^n f_j(z) \cdot e^{g_j(z)} \equiv 0$$

(ii) Bậc của f_j bé hơn bậc của $e^{g_h - g_k}$ với $1 \leq j \leq n$, $1 \leq h < k \leq n$.

thì $f_j(z) \equiv 0 \quad (j = \overline{1, n})$.

Chứng minh:

Ta sẽ chứng minh điều kiện (ii) của định lý 2.5 ám chỉ điều kiện (ii), (iii) của định lý 2.4. Vì bậc của hàm nguyên là không âm nên ta thấy bậc của $e^{g_h - g_k} \quad (h \neq k)$ lớn hơn 0 và vì thế $g_j(z) - g_k(z)$, $(h \neq k)$ không thể là hằng. Vậy điều kiện (ii) của định lý 2.4 thoả.

Từ định lý 1.11 suy ra bậc và bậc dưới của $e^{g_h - g_k}$ bằng nhau. Theo giả thiết (ii) trong định lý ta có bậc của f_j nhỏ hơn bậc của $e^{g_h - g_k}$ nên bậc của f_j nhỏ hơn bậc dưới của $e^{g_h - g_k}$. Do đó từ định lý 1.5 ta được $T(r, f_j) = o\left\{T(r, e^{g_h - g_k})\right\}$. Vậy điều kiện (iii) của định lý 2.4 thoả mãn. Vậy theo định lý 2.4 ta có $f_j(z) \equiv 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad \blacksquare$

Hệ quả: Giả sử $f_j(z) \quad (j = \overline{1, n+1})$ và $g_j(z) \quad (j = \overline{1, n}) \quad (n \geq 1)$ là các hàm nguyên thoả điều kiện sau

$$(i) \quad \sum_{j=1}^n f_j(z).e^{g_j(z)} \equiv f_{n+1}(z)$$

(ii) Bậc của f_j nhỏ hơn bậc của e^{g_k} với $1 \leq j \leq n+1, 1 \leq k \leq n$. Hơn thế, bậc của f_j nhỏ hơn bậc của $e^{g_h - g_k}$ với $n \geq 2, 1 \leq j \leq n+1, 1 \leq h < k \leq n$.

Khi đó $f_j(z) \equiv 0 \quad (j = \overline{1, n+1})$.

Chứng minh:

Từ (i) ta có $\sum_{j=1}^n f_j(z).e^{g_j(z)} - f_{n+1}(z).e^{g_{n+1}(z)} \equiv 0, e^{g_{n+1}(z)} \equiv 0$.

Từ (ii) ta thấy bậc của f_j nhỏ hơn bậc của $e^{g_h - g_k}$ với $n \geq 2, 1 \leq j \leq n+1, 1 \leq h < k \leq n+1$ nên điều kiện (ii) của định lý 2.5 thoả mãn đối với các hàm $f_j(z), g_j(z) \quad (j = \overline{1, n+1})$. Do đó $f_j(z) \equiv 0 \quad (j = \overline{1, n+1}) \quad \blacksquare$

Bổ đề 2.1: Cho $f_1(z), f_2(z)$ là các hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức và c_1, c_2, c_3 là các hằng số khác 0. Nếu $c_1.f_1 + c_2.f_2 \equiv c_3$ thì

$$T(r, f_1) < \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_2}\right) + \overline{N}(r, f_1) + S(r, f_1)$$

Chứng minh: Theo định lý cơ bản thứ hai ta có

$$T(r, f_1) < \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1 - \frac{c_3}{c_1}}\right) + \overline{N}(r, f_1) + S(r, f_1) \quad \blacksquare$$

♦ **Định lý 2.6:** Cho $f_j(z), (j = 1, 2, 3)$ là các hàm phân hình, $f_1(z)$ khác hằng.

$$\text{Nếu} \quad \sum_{j=1}^3 f_j(z) \equiv 1 \quad (2.17)$$

$$\text{và } \sum_{j=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + 2 \sum_{j=1}^3 \overline{N}(r, f_j) < (\lambda + o(1)) T(r) \quad , \quad (r \in I). \quad (2.18) \text{ trong đó } \lambda < 1,$$

$$T(r) = \max_{1 \leq j \leq 3} \{T(r, f_j)\}, \quad I \subset (0, \infty) \text{ có độ đo tuyến tính vô hạn.}$$

Khi đó $f_2(z) \equiv 1$ hoặc $f_3(z) \equiv 1$.

Chứng minh:

◦ Nếu $f_2(z) \equiv 0$ hoặc $f_3(z) \equiv 0$, giả sử $f_3(z) \equiv 0$, từ (2.17) ta có $f_1(z) + f_2(z) \equiv 1$.

Theo định lý cơ bản thứ 2 ta có

$$\begin{aligned} T(r, f_1) &< \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1-1}\right) + \overline{N}(r, f_1) + S(r, f_1) \\ &= \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_2}\right) + \overline{N}(r, f_1) + S(r, f_1) < (\lambda + o(1)) T(r) \quad (\text{vô lý}) \end{aligned}$$

Do đó $f_2(z) \not\equiv 0$ và $f_3(z) \not\equiv 0$.

◦ Nếu f_1, f_2, f_3 độc lập tuyến tính thì theo định lý 2.1 ta có

$$T(r, f_1) < \sum_{k=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f_k}\right) + N(r, f_1) + N(r, D) - \sum_{k=1}^3 N(r, f_k) - N\left(r, \frac{1}{D}\right) + S(r)$$

$$\text{trong đó } D = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} \text{ và } S(r) = o(T(r)), \quad T(r) = \max_{1 \leq j \leq 3} \{T(r, f_j)\}.$$

$$\text{Từ (2.17) ta được } D = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^3 f_j & f_2 & f_3 \\ \sum_{j=1}^3 f_j' & f_2' & f_3' \\ \sum_{j=1}^3 f_j'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_2' & f_3' \\ f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} = f_2' \cdot f_3'' - f_2'' \cdot f_3'$$

$$\text{Vì thế } N(r, f_1) + N(r, D) - \sum_{k=1}^3 N(r, f_k) = N(r, D) - N(r, f_2) - N(r, f_3)$$

$$\leq 2 \cdot \overline{N}(r, f_2) + 2 \cdot \overline{N}(r, f_3)$$

$$\text{Từ đó ta có } T(r, f_1) < \sum_{k=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f_k}\right) + 2 \cdot \overline{N}(r, f_2) + 2 \cdot \overline{N}(r, f_3) + S(r) \quad (2.19)$$

Tương tự ta có $T(r, f_2) < \sum_{k=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f_k}\right) + 2.\overline{N}(r, f_1) + 2.\overline{N}(r, f_3) + S(r)$

$$T(r, f_3) < \sum_{k=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f_k}\right) + 2.\overline{N}(r, f_1) + 2.\overline{N}(r, f_2) + S(r)$$

Vì thế $T(r) < \sum_{j=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + 2.\sum_{j=1}^3 \overline{N}(r, f_j) + S(r) < (\lambda + o(1)).T(r)$, $(r \in I)$ mâu thuẫn, nghĩa là f_1, f_2, f_3 phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại 3 hằng số c_1, c_2, c_3 (ít nhất một trong ba số khác 0) sao cho

$$\sum_{j=1}^3 c_j \cdot f_j = 0 \quad (2.20)$$

$$\text{Nếu } c_1 = 0 \text{ thì từ (2.20) ta có } c_2 \neq 0, c_3 \neq 0 \text{ và } f_3 = -\frac{c_2}{c_3} \cdot f_2 \quad (2.21)$$

$$\text{Thay } f_3 \text{ vào (2.17) ta được } f_1 + \left(1 - \frac{c_2}{c_3}\right) \cdot f_2 = 1 \quad (2.22)$$

$$\text{Từ (2.21), (2.22) ta có } T(r, f_2) = T(r, f_1) + O(1)$$

$$T(r, f_3) = T(r, f_2) + O(1) = T(r, f_1) + O(1)$$

$$\text{Và vì thế } T(r) = T(r, f_1) + O(1) \quad (2.23)$$

$$\text{Bởi vì } f_1(z) \text{ khác hằng nên từ (2.22) ta có } 1 - \frac{c_2}{c_3} \neq 0.$$

Từ bổ đề 2.1 và (2.22), (2.23) ta có

$$\begin{aligned} T(r) &< \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_2}\right) + \overline{N}(r, f_1) + S(r) < \sum_{j=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + 2 \sum_{j=1}^3 \overline{N}(r, f_j) + S(r) \\ &< (\lambda + o(1)).T(r), \quad (r \in I) \quad (\text{vô lý}) \end{aligned}$$

Vậy $c_1 \neq 0$.

$$\text{Từ (2.20) ta có } f_1 = -\frac{c_2}{c_1} \cdot f_2 - \frac{c_3}{c_1} \cdot f_3 \quad (2.24)$$

$$\text{Thay (2.24) vào (2.17) ta được } \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) \cdot f_2 + \left(1 - \frac{c_3}{c_1}\right) \cdot f_3 = 1 \quad (2.25)$$

Ta xét 3 trường hợp sau:

▪ Trường hợp 1: $1 - \frac{c_2}{c_1} \neq 0$ và $1 - \frac{c_3}{c_1} \neq 0$.

$$\text{Từ (2.24), (2.25) ta có } f_1 = \frac{c_2 - c_3}{c_1 - c_2} \cdot f_3 - \frac{c_2}{c_1 - c_2} \quad (2.26)$$

$$\text{Do đó } T(r, f_3) = T(r, f_1) + O(1), T(r, f_2) = T(r, f_3) + O(1) = T(r, f_1) + O(1)$$

$$\text{Vì thế } T(r) = T(r, f_1) + O(1) \quad (2.27)$$

Theo bổ đề 2.1 và (2.25), (2.27) ta có

$$\begin{aligned} T(r) &< \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_2}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_3}\right) + \overline{N}(r, f_2) + S(r) < \sum_{j=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + 2 \cdot \sum_{j=1}^3 \overline{N}(r, f_j) + S(r) \\ &< (\lambda + o(1)) \cdot T(r), \quad (r \in I) \quad (\text{vô lý}). \end{aligned}$$

▪ Trường hợp 2: $1 - \frac{c_2}{c_1} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$.

$$\text{Từ (2.25) ta có } 1 - \frac{c_3}{c_1} \neq 0 \text{ và } f_3 = \frac{c_1}{c_1 - c_3} \quad (2.28)$$

$$\text{Từ (2.24), (2.28) ta được } f_1 + f_2 = -\frac{c_3}{c_1 - c_3} \quad (2.29)$$

Nếu $c_3 \neq 0$, áp dụng bổ đề 2.1 vào (2.29) ta có

$$\begin{aligned} T(r) &< \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_2}\right) + \overline{N}(r, f_1) + S(r) < \sum_{j=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + 2 \sum_{j=1}^3 \overline{N}(r, f_j) + S(r) \\ &< (\lambda + o(1)) \cdot T(r), \quad (r \in I) \quad (\text{vô lý}) \end{aligned}$$

Vậy $c_3 = 0$. Vì thế $f_3(z) \equiv 1$.

▪ Trường hợp 3: $1 - \frac{c_3}{c_1} = 0$.

Tương tự trường hợp 2 ta được $f_2(z) \equiv 1$ ■

♦ **Định lý 2.7:** (Niino – Ozawa [5]) Cho $g_j(z)$ ($j = 1, 2, \dots, p$) là các hàm phân hình khác hằng thỏa điều kiện $\Theta(\infty, g_j) = 1$ ($j = 1, 2, \dots, p$) và a_j ($j = 1, 2, \dots, p$) là các hằng số khác 0. Nếu $\sum_{j=1}^p a_j \cdot g_j(z) \equiv a_0$ thì

$$\sum_{j=1}^p \delta(0, g_j) \leq p - 1.$$

Chứng minh:

Ta chứng minh định lý bằng quy nạp.

▪ Với $p = 2$, vì $a_1.g_1 + a_2.g_2 \equiv a_0$ nên $T(r, g_2) = T(r, g_1) + O(1)$.

Vì $\Theta(\infty, g_j) = 1$ ($j = 1, 2$) nên từ bổ đề 2.1 ta chia 2 vế của bổ đề cho $T(r, g_1)$ và chuyển qua giới hạn ta thu được $\delta(0, g_1) + \delta(0, g_2) \leq 1$. Vậy định lý đúng với $p = 2$.

▪ Giả sử định lý đúng với $2 \leq p \leq q$ ($q \geq 2$), ta chứng minh định lý đúng với $p = q + 1$.

▫ Nếu $g_j(z)$ ($j = 1, 2, \dots, q + 1$) là các hàm độc lập tuyến tính, từ điều kiện $\Theta(\infty, g_j) = 1$ ($j = 1, 2, \dots, q + 1$) ta có $\overline{N}(r, g_j) = o(T(r, g_j))$ ($j = 1, 2, \dots, q + 1$).

Đặt $T(r) = \max_{1 \leq j \leq q+1} \{T(r, g_j)\}$ ta được $\sum_{j=1}^{q+1} \overline{N}(r, g_j) = S(r) = o(T(r))$, $r \rightarrow \infty, r \notin E$.

$$\text{Vì } \sum_{j=1}^{q+1} \frac{a_j}{a_0} . g_j(z) \equiv 1 \quad (2.30)$$

từ định lý 2.2 ta suy ra $T(r, g_j) < \sum_{j=1}^{q+1} N\left(r, \frac{1}{g_j}\right) + S(r)$ ($j = 1, 2, \dots, q + 1$)

$$\text{nên } T(r) < \sum_{j=1}^{q+1} N\left(r, \frac{1}{g_j}\right) + S(r) \quad (2.31)$$

Mặt khác với $j = 1, 2, \dots, q + 1$ ta có

$$N\left(r, \frac{1}{g_j}\right) \leq [1 - \delta(0, g_j) + o(1)] . T(r, g_j) \leq [1 - \delta(0, g_j) + o(1)] . T(r)$$

$$\text{vì thế } \sum_{j=1}^{q+1} N\left(r, \frac{1}{g_j}\right) \leq \left[q + 1 - \sum_{j=1}^{q+1} \delta(0, g_j) + o(1) \right] . T(r) \quad (2.32)$$

$$\text{Từ (2.31), (2.32) ta được } T(r) < \left[q + 1 - \sum_{j=1}^{q+1} \delta(0, g_j) + o(1) \right] . T(r) + S(r)$$

$$\text{nghĩa là } \sum_{j=1}^{q+1} \delta(0, g_j) \leq q.$$

▫ Nếu $g_j(z)$ ($j = 1, 2, \dots, q + 1$) phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại các hằng số (ít nhất một trong số chúng khác 0) c_j ($j = 1, 2, \dots, q + 1$) sao cho $\sum_{j=1}^{q+1} c_j . g_j(z) \equiv 0$ (2.33)

Không mất tính tổng quát, giả sử $c_{q+1} \neq 0$, từ (2.32) ta có $g_{q+1} = -\sum_{j=1}^q \frac{c_j}{c_{q+1}} \cdot g_j(z)$, thay vào (2.30) ta được

$$\sum_{j=1}^q d_j \cdot g_j(z) \equiv 1 \quad (\text{trong đó } d_1, \dots, d_q \text{ là các hằng số}). \quad (2.34)$$

Từ (2.34) ta có ít nhất hai trong các d_j ($j=1, 2, \dots, q$) khác 0, giả sử $d_j \neq 0$ ($j=1, 2, \dots, s$) và $d_j = 0$ ($j=s+1, \dots, q$) ($2 \leq s \leq q$). Khi đó (2.34) có thể viết lại $\sum_{j=1}^s d_j \cdot g_j(z) \equiv 1$ (2.35)

Theo giả thuyết quy nạp và từ (2.35) ta có $\sum_{j=1}^s \delta(0, g_j) \leq s-1$.

Chú ý rằng $\delta(0, g_j) \leq 1$ ($j=s+1, \dots, q+1$) vì thế $\sum_{j=1}^{q+1} \delta(0, g_j) \leq q$ nghĩa là định lý đúng với $p = q+1$ ■

Nhận xét: Trường hợp $g_j(z)$ ($j=1, 2, \dots, p$) là các hàm nguyên và a_j ($j=1, 2, \dots, p$) là các hằng số khác 0 sao cho $\sum_{j=1}^p a_j \cdot g_j(z) \equiv a_0$. Khi đó ít nhất một trong các hàm $g_j(z)$ đồng nhất hằng.

♦ **Định lý 2.8:** (H.X.Yi [6]) Cho $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ ($n \geq 3$) là các hàm phân hình khác hằng (ngoại trừ $f_n(z)$) thoả $\sum_{j=1}^n f_j(z) \equiv 1$. (2.36)

Nếu $f_n(z) \neq 0$ và $\sum_{j=1}^n N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + (n-1) \cdot \sum_{j=1}^n \overline{N}(r, f_j) < (\lambda + o(1)) \cdot T(r, f_k)$ (2.37)

trong đó $r \in I$, I là tập có độ đo tuyến tính vô hạn; $k=1, 2, \dots, n-1$ và $\lambda < 1$.

thì $f_n \equiv 1$.

Chứng minh:

Ta chứng minh định lý 2.8 bằng quy nạp. Từ định lý 2.6 ta suy ra định lý 2.8 đúng với $n=3$. Giả sử định lý đúng với mọi số nguyên n ($3 \leq n \leq l$), ta chứng minh định lý đúng với $n=l+1$.

Nếu các hàm $f_1(z), f_2(z), \dots, f_{l+1}(z)$ độc lập tuyến tính, từ định lý 2.1 ta suy ra

$$T(r, f_1) \leq \sum_{j=1}^{l+1} N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + N(r, f_1) + N(r, D) - \sum_{j=1}^{l+1} N(r, f_j) - N\left(r, \frac{1}{D}\right) + S(r) \quad (2.38)$$

Tương tự như trong (2.11) định lý 2.2 ta cũng có

$$N(r, f_1) + N(r, D) - \sum_{j=1}^{l+1} N(r, f_j) = l \cdot \sum_{j=1}^{l+1} \overline{N}(r, f_j) \quad (2.39)$$

Kết hợp (2.37), (2.38), (2.39) ta có $T(r, f_1) < (\lambda + o(1)) \cdot T(r, f_1)$ ($r \in I$) (vô lý). Viết các hàm $f_1(z), f_2(z), \dots, f_{l+1}(z)$ phụ thuộc tuyến tính, khi đó tồn tại các hằng số (ít nhất một trong số chúng khác 0) c_j ($j = 1, 2, \dots, l+1$) sao cho
$$\sum_{j=1}^{l+1} c_j \cdot f_j(z) \equiv 0 \quad (2.40)$$

Bởi vì f_j ($j = 1, 2, \dots, l$) là các hàm khác hằng và $f_{l+1} \neq 0$ nên ít nhất một trong c_j ($j = 1, 2, \dots, l$) khác 0, không mất tính tổng quát giả sử $c_1 \neq 0$, từ (2.40) suy ra
$$\sum_{j=2}^{l+1} \left(1 - \frac{c_j}{c_1}\right) \cdot f_j(z) \equiv 1 \quad (2.41)$$

Từ bổ đề 2.1 ta thấy ít nhất ba trong $1 - \frac{c_j}{c_1}$ ($j = 2, 3, \dots, l+1$) khác 0.

Nếu $1 - \frac{c_{l+1}}{c_1} = 0$, từ (2.41) ta được $\sum_{j=2}^l \left(1 - \frac{c_j}{c_1}\right) \cdot f_j(z) \equiv 1$. Theo giả thuyết quy nạp ít nhất một trong $\left(1 - \frac{c_j}{c_1}\right) \cdot f_j(z)$ ($j = 2, 3, \dots, l$) đồng nhất 1 (mâu thuẫn). Vậy $1 - \frac{c_{l+1}}{c_1} \neq 0$.

Từ (2.41) và theo giả thuyết quy nạp ta được $f_{l+1} \equiv c$ là hàm hằng . Nếu $c \neq 1$ thì từ (2.36) ta suy ra $\sum_{j=1}^l \frac{1}{1-c} \cdot f_j(z) \equiv 1$. Và từ đó theo giả thuyết quy nạp ta có ít nhất một trong f_j ($j = 1, 2, \dots, l$) là hàm hằng (mâu thuẫn). Vậy $c = 1$ nghĩa là $f_{l+1} \equiv 1$.

Do đó định lý đúng với $n = l+1$ ■

Chương 3:

SỰ XÁC ĐỊNH DUY NHẤT CỦA CÁC HÀM PHÂN HÌNH CHIA GIÁ TRỊ

Nevanlinna đã chứng minh được rằng hàm phân hình khác hằng có thể được xác định duy nhất bởi 5 điểm, nghĩa là nếu hai hàm phân hình f và g nhận cùng 5 giá trị thì $f \equiv g$. Chắc chắn rằng số 5 trong định lý của Nevanlinna có thể được giảm xuống khi chúng ta thêm vào điều kiện.

Trong chương này ta sẽ bổ sung thêm các điều kiện để xác định duy nhất các hàm phân hình khi chúng lần lượt chia 5, 4, 3, 2 và 1 giá trị. Bao gồm các kết quả quan trọng thu được bởi Nevanlinna, L.Yang, H.X.Yi, Brosch...

Định nghĩa 3.1: Cho f, g là hai hàm phân hình và số phức a .

- Gọi z_n ($n = 1, 2, \dots$) là không điểm của $f - a$. Nếu z_n ($n = 1, 2, \dots$) cũng là không điểm của $g - a$ (không kể bội) ta viết $f = a \Rightarrow g = a$.

- Gọi $v(n)$ là bội của không điểm z_n . Nếu z_n ($n = 1, 2, \dots$) cũng là không điểm bội nhỏ nhất là $v(n)$ của $g - a$ ta viết $f = a \rightarrow g = a$.

Định nghĩa:

- (i) Nếu $f = a \square g = a$ nghĩa là $f - a$ và $g - a$ có cùng không điểm (đếm cả bội) và ta nói f, g chia a CM.
- (ii) Nếu $f = a \Leftrightarrow g = a$ nghĩa là $f - a$ và $g - a$ có cùng không điểm (không đếm bội) và ta nói f, g chia a IM.
- (iii) Nếu f, g chia a IM sao cho không điểm của $f - a$ và $g - a$ có bội khác nhau ta nói f, g chia a DM.

Định nghĩa 3.2: Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng và số phức a .

Kí hiệu $N_E(r, a)$ là hàm đếm quy gọn những không điểm chung của $f - a$ và $g - a$ với bội bằng nhau.

$N_E^{(1)}(r, a)$ là hàm đếm quy gọn các không điểm đơn chung của $f - a$ và $g - a$.

3.1 Hàm phân hình chia 5 giá trị

3.1.1 Định lý 5 điểm của Nevanlinna:

Định lý 5 điểm là kết quả quan trọng của Nevanlinna trong việc xác định duy nhất các hàm phân hình.

♦ **Định lý 3.1:** Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng, a_j ($j = \overline{1, 5}$) là 5 giá trị phân biệt trên mặt phẳng phức mở rộng. Nếu f, g chia a_j ($j = \overline{1, 5}$) IM thì $f \equiv g$.

Chứng minh:

- Xét trường hợp $a_j (j = \overline{1,5})$ hữu hạn.

Theo định lý cơ bản thứ 2 ta có:

$$3T(r, f) < \sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r, f) \quad (3.1)$$

$$3T(r, g) < \sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-a_j}\right) + S(r, g) \quad (3.2)$$

Nếu $f \neq g$, theo giả thiết f, g chia $a_j (j = \overline{1,5})$ IM nên

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) &= \sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-a_j}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f-g}\right) \\ &\leq T(r, f-g) + O(1) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Do đó $3[T(r, f) + T(r, g)] \leq 2[T(r, f) + T(r, g)] + S(r, f) + S(r, g)$ (mâu thuẫn)

Vậy $f \equiv g$.

- Xét trường hợp một trong các giá trị a_j vô hạn. Ta giả sử $a_5 = \infty$.

Lấy $a \neq a_j (j = \overline{1,5})$, đặt $F(z) = \frac{1}{f(z)-a}$; $G(z) = \frac{1}{g(z)-a}$

$$b_j = \frac{1}{a_j - a} (j = \overline{1,4}) ; \quad b_5 = 0$$

Khi đó F, G chia $b_j (j = \overline{1,5})$ IM. Theo chứng minh trên ta có $F \equiv G$ nên $f \equiv g$ ■

Nhận xét: Điều kiện f, g chia 5 điểm trong định lý 3.1 không thể làm yếu hơn bởi điều kiện f, g chia 4 điểm IM. Thật vậy, xét $f(z) = e^z$, $g(z) = e^{-z}$. Ta thấy f, g chia $0, 1, -1, \infty$ IM nhưng $f \neq g$ ■

3.1.2 Mở rộng định lý 5 điểm:

Định nghĩa 3.3: Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng, a là số phức tùy ý.

Kí hiệu $\overline{E}(a, f)$ là tập các không điểm của $f(z) - a$, mỗi không điểm được đếm 1 lần.

♦ **Định lý 3.2:** (C.C Yang [7])

Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng, $a_j (j = \overline{1,5})$ là 5 giá trị phân biệt.

Nếu $\overline{E}(a_j, f) \subseteq \overline{E}(a_j, g) (j = \overline{1,5})$ (3.4)

$$\text{và } \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right)}{\sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-a_j}\right)} \right] > \frac{1}{2} \quad (3.5)$$

thì $f \equiv g$.

Chứng minh:

Tương tự như trong chứng minh của định lý 3.1 ta có thể giả sử $a_j (j = \overline{1,5})$ hữu hạn.

Theo định lý cơ bản thứ 2 ta thu được (3.1), (3.2).

Nếu $f \neq g$, do (3.4) ta được $\sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f-g}\right) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$

Kết hợp với (3.1), (3.2) ta có

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) &\leq \left(\frac{1}{3} + O(1)\right) \cdot \sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + \left(\frac{1}{3} + O(1)\right) \cdot \sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-a_j}\right) \\ \Rightarrow \left(\frac{2}{3} + O(1)\right) \cdot \sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) &\leq \left(\frac{1}{3} + O(1)\right) \cdot \sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-a_j}\right) \\ \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right)}{\sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-a_j}\right)} \right] &\leq \frac{1}{2} \text{ mâu thuẫn giả thiết. Vậy } f \equiv g \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.1.3 Tổng quát hoá định lý 5 điểm bằng việc thay thế các hằng số bởi các hàm nhỏ:

♦ **Định lý 3.3:** Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng, $a_j(z) (j = \overline{1,5})$ là 5 hàm nhỏ phân biệt của f, g nghĩa là $T(r, a_j) = S(r, f), T(r, a_j) = S(r, g) (j = \overline{1,5})$.

Nếu $f(z) - a_j(z) = 0 \square g(z) - a_j(z) = 0 (j = \overline{1,5})$ thì $f \equiv g$.

Chứng minh:

Nếu $f \neq g$, theo định lý 1.3, với ε là số dương tùy ý cho trước ta có:

$$(3-\varepsilon).T(r, f) < \sum_{j=1}^5 N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r, f) \quad (3.6)$$

$$(3-\varepsilon).T(r, g) < \sum_{j=1}^5 N\left(r, \frac{1}{g-a_j}\right) + S(r, g) \quad (3.7)$$

Từ $f(z) - a_j(z) = 0 \square g(z) - a_j(z) = 0 (j = \overline{1,5})$ ta được

$$\sum_{j=1}^5 N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) = \sum_{j=1}^5 N\left(r, \frac{1}{g-a_j}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f-g}\right) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1) \quad (3.8)$$

Suy ra $(3-\varepsilon)[T(r, f) + T(r, g)] < 2[T(r, f) + T(r, g)] + S(r, f) + S(r, g)$ mâu thuẫn.

Vậy $f \equiv g \quad \blacksquare$

♦ **Định lý 3.4:** (Q.D. Zhang, 1993 [8])

Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng, $a_j(z) (j = \overline{1, 5})$ là 5 hàm nh phân biệt của f, g . Nếu $f(z) - a_j(z) = 0 \Leftrightarrow g(z) - a_j(z) = 0 (j = \overline{1, 5})$ và tất cả không điểm bội của $f(z) - a_j(z)$ là không điểm bội của $g(z) - a_j(z)$ thì $f \equiv g$.

Chứng minh:

Nếu $f \neq g$, kí hiệu $\bar{n}^*\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right)$ đếm số không điểm của $f - a_j$ trong $|z| \leq r$ với bội lớn hơn 1 và chỉ

được đếm 1 lần. $\bar{N}^*\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right)$ là hàm đếm tương ứng.

Từ giả thiết của định lý ta có

$$\sum_{j=1}^5 \bar{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + \sum_{j=1}^5 \bar{N}^*\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f - g}\right) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1) \quad (3.9)$$

Từ định lý 1.4 ta có

$$\begin{aligned} 2T(r, f) + \sum_{j=1}^5 \bar{N}^*\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) &< \sum_{j=1}^5 \bar{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + \sum_{j=1}^5 \bar{N}^*\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + S(r, f) \\ &< T(r, f) + T(r, g) + S(r, f) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\text{Tương tự ta được } 2T(r, g) + \sum_{j=1}^5 \bar{N}^*\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) < T(r, f) + T(r, g) + S(r, f) \quad (3.11)$$

Kết hợp (3.10), (3.11) ta được

$$\begin{aligned} 2T(r, f) + 2T(r, g) + 2 \sum_{j=1}^5 \bar{N}^*\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) &< 2T(r, f) + 2T(r, g) + S(r, f) + S(r, g) \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^5 \bar{N}^*\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) &= S(r, f) + S(r, g) \text{ và } T(r, g) = T(r, f) + S(r, f) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Áp dụng định lý 1.3 với $\varepsilon = \frac{1}{2}$, tồn tại số nguyên dương p sao cho

$$\frac{5}{2}T(r, f) < \sum_{j=1}^5 N_p\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + S(r, f) < \sum_{j=1}^5 \left[\bar{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + p \cdot \bar{N}^*\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) \right] + S(r, f)$$

Kết hợp (3.9), (3.12) ta có $\frac{5}{2}T(r, f) < 2T(r, f) + S(r, f)$ (vô lý).

Vậy $f \equiv g$ ■

♦ **Định lý 3.5:** (Q.D Zhang, 1993 [8])

Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng, $a_j(z) (j = \overline{1, 6})$ là 6 hàm nh phân biệt của f, g . Nếu $f(z) - a_j(z) = 0 \Leftrightarrow g(z) - a_j(z) = 0 (j = \overline{1, 6})$ thì $f \equiv g$.

Chứng minh:

$$\text{Nếu } f \neq g, \text{ khi đó } \sum_{j=1}^6 \bar{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f - g}\right) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$$

Từ định lý 1.4 ta được $2.T(r, f) < \sum_{j=1, j \neq k}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r, f) \quad (k = \overline{1, 6})$

Vì thế $12.T(r, f) < 5. \sum_{j=1}^5 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r, f) < 5.T(r, f) + 5.T(r, g) + S(r, f)$

Tương tự $12.T(r, g) < 5.T(r, f) + 5.T(r, g) + S(r, g)$

Từ đó suy ra $2.T(r, f) + 2.T(r, g) < S(r, f) + S(r, g) \quad (\text{vô lý}).$

Vậy $f \equiv g \quad \blacksquare$

3.2 Hàm phân hình chia 4 giá trị

Năm 1929, Nevanlinna đã chứng minh định lý 4 điểm CM, đó là kết quả quan trọng trong việc xác định duy nhất các hàm phân hình. Năm 1979 kết quả được mở rộng bởi Gundersen cho trường hợp $3 \text{ CM} + 1 \text{ IM} = 4 \text{ CM}$ và $4 \text{ IM} \neq 4 \text{ CM}$ và tổng quát lên trường hợp $2 \text{ CM} + 2 \text{ IM} = 4 \text{ CM}$ vào năm 1983. Nhưng bài toán $1 \text{ CM} + 3 \text{ IM} = 4 \text{ CM}$ vẫn là bài toán mở chưa được giải quyết.

Trong chương này tôi sẽ trình bày những kết quả được chứng minh bởi Nevanlinna, Gudersen, Mues...

3.2.1 Hàm phân hình chia 4 giá trị CM

♦ **Định lý 3.6** (Định lý 4 điểm của Nevanlinna): Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng. Nếu f, g chia $0, 1, \infty, c$ CM ($c \neq 0, 1, \infty$) thì f, g có một trong các mối liên hệ sau:

- (i) $f(z) \equiv g(z)$
- (ii) $f(z) \equiv -g(z)$ nếu $c = -1$ và $1, -1$ là giá trị Picard của f, g .
- (iii) $f(z) \equiv 2 - g(z)$ nếu $c = 2$ và $0, 2$ là giá trị Picard của f, g .
- (iv) $f(z) \equiv 1 - g(z)$ nếu $c = \frac{1}{2}$ và $0, 1$ là giá trị Picard của f, g .
- (v) $f(z) = \frac{g(z)}{2g(z)-1}$ nếu $c = \frac{1}{2}$ và $\frac{1}{2}, \infty$ là giá trị Picard của f, g .
- (vi) $f(z) = \frac{g(z)}{g(z)-1}$ nếu $c = 2$ và $1, \infty$ là giá trị Picard của f, g .
- (vii) $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ nếu $c = -1$ và $0, \infty$ là giá trị Picard của f, g .

Để chứng minh định lý 3.6 ta xét các bổ đề sau:

Bổ đề 3.1: Cho f, g là các hàm nguyên và a_1, a_2 là 2 giá trị hữu hạn phân biệt. Giả sử f, g chia a_2 CM và a_1 là giá trị Picard của f, g . Nếu $f \neq g$ thì $f(z) = e^{\alpha(z)} + a_1$; $g(z) = (a_1 - a_2)^2 \cdot e^{-\alpha(z)} + a_1$ (trong đó $\alpha(z)$ là hàm nguyên khác hằng).

Chứng minh:

Từ định lý 1.8 ta có $f(z) = e^{\alpha(z)} + a_1$; $g(z) = e^{\beta(z)} + a_1$ (trong đó $\alpha(z), \beta(z)$ là các hàm nguyên khác hằng thoả $e^{\alpha(z)} \neq e^{\beta(z)}$).

Do f, g là các hàm nguyên chia a_2 CM nên tồn tại hàm nguyên $\gamma(z)$ sao cho $\frac{f-a_2}{g-a_2} = e^\gamma$ ($e^\gamma \neq 1$).

$$\text{Vì thế } \frac{e^\alpha + a_1 - a_2}{e^\beta + a_1 - a_2} = e^\gamma \Rightarrow \frac{1}{a_2 - a_1} \cdot e^\alpha + e^\gamma - \frac{1}{a_2 - a_1} \cdot e^{\beta+\gamma} = 1 \quad (3.13)$$

Do $e^\gamma \neq 1$ nên theo định lý 2.6 suy ra $-\frac{1}{a_2 - a_1} \cdot e^{\beta+\gamma} \equiv 1$.

Từ (3.13) ta được $e^\beta = (a_1 - a_2)^2 \cdot e^{-\alpha(z)}$ ■

Bổ đề 3.2: Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng và a_1, a_2 là các giá trị hữu hạn phân biệt. Nếu f, g chia ∞ CM và nếu a_1, a_2 là giá trị Picard của f, g thì $f(z) \equiv g(z)$ hoặc tồn tại hàm nguyên khác hằng $\alpha(z)$ sao cho

$$f(z) = \frac{a_1 \cdot e^{\alpha(z)} - a_2}{e^{\alpha(z)} - 1} \quad \text{và} \quad g(z) = \frac{a_1 \cdot e^{-\alpha(z)} - a_2}{e^{-\alpha(z)} - 1}$$

Chứng minh:

Giả sử $f(z) \not\equiv g(z)$, từ định lý 1.8, tồn tại các hàm nguyên khác hằng $\alpha(z), \beta(z)$, $e^{\alpha(z)} \neq e^{\beta(z)}$ sao cho

$$f(z) = \frac{a_1 \cdot e^{\alpha(z)} - a_2}{e^{\alpha(z)} - 1} \quad ; \quad g(z) = \frac{a_1 \cdot e^{\beta(z)} - a_2}{e^{\beta(z)} - 1}$$

Vì f, g chia ∞ CM và a_1 là giá trị Picard của f, g nên $0, \infty$ là giá trị Picard của $\frac{f-a_1}{g-a_1}$ nên theo định lý 1.8 tồn tại hàm nguyên khác hằng γ sao cho $\frac{f-a_1}{g-a_1} = e^\gamma$, ($e^\gamma \neq 1$).

Do đó $\frac{e^\beta - 1}{e^\alpha - 1} = e^\gamma \Rightarrow e^\beta + e^\alpha - e^{\alpha+\gamma} = 1$ (3.14)

Vì $e^\gamma \neq 1$ nên theo định lý 2.6 ta được $-e^{\alpha+\gamma} = 1$. Từ (3.14) suy ra $e^\beta = e^{-\alpha}$ ■

Chứng minh định lý 3.6

Vì f, g chia $0, 1, \infty, c$ CM nên từ định lý 1.8 tồn tại các hàm nguyên $\phi_1(z), \phi_2(z), \phi_3(z)$ sao cho $\frac{f}{g} = e^{\phi_1}$;

$$\frac{f-1}{g-1} = e^{\phi_2} \quad ; \quad \frac{f-c}{g-c} = e^{\phi_3} \quad (3.15)$$

Giả sử $f(z) \not\equiv g(z)$, khi đó $e^{\phi_j} \neq 1$, ($j = \overline{1, 3}$) và $e^{\phi_j - \phi_i} \neq 1$, ($1 \leq j < i \leq 3$). Ta xét 7 trường hợp sau:

▪ Trường hợp 1: $e^{\phi_1} = k_1$, ($k_1 \neq 0, 1$) là hằng số.

Khi đó 1 và c là giá trị Picard của f, g . Theo bổ đề 3.2 tồn tại hàm nguyên khác hằng α sao cho

$$f = \frac{e^\alpha - c}{e^\alpha - 1} \quad ; \quad g = \frac{e^{-\alpha} - c}{e^{-\alpha} - 1}.$$

Từ $\frac{f}{g} = k_1$ ta suy ra $(1 - c.k_1)e^\alpha = c - k_1 \Rightarrow c = k_1 = -1$ (vì $e^\alpha \neq \text{const}$).

Vì thế (ii) trong định lý 3.6 đúng.

▪ Trường hợp 2: $e^{\phi_2} = k_2, (k_2 \neq 0, 1)$ là hằng số.

Khi đó 0 và c là giá trị Picard của f, g . Do đó tồn tại hàm nguyên khác hằng α sao cho $f = \frac{-c}{e^\alpha - 1}$;

$$g = \frac{-c}{e^{-\alpha} - 1}.$$

Từ $\frac{f-1}{g-1} = k_2$ ta suy ra $[k_2(c-1)+1]e^\alpha = -c+1-k_2 \Rightarrow c=2, k_2=-1$.

Vì thế (iii) đúng.

▪ Trường hợp 3: $e^{\phi_3} = k_3, (k_3 \neq 0, 1)$ là hằng số.

Khi đó 0 và 1 là giá trị Picard của f, g . Do đó tồn tại hàm nguyên khác hằng α sao cho $f = \frac{-1}{e^\alpha - 1}$;

$$g = \frac{-1}{e^{-\alpha} - 1}.$$

Từ $\frac{f-c}{g-c} = k_3$ ta suy ra $[k_3(-c+1)+c]e^\alpha = c-1-k_3c \Rightarrow c = \frac{1}{2}, k_3 = -1$.

Vì thế (iv) đúng.

▪ Trường hợp 4: $e^{\phi_1 - \phi_2} = k_4, (k_4 \neq 0, 1)$ là hằng số.

Khi đó $\frac{f}{f-1} \cdot \frac{g-1}{g} = k_4$. Vì thế c và ∞ là giá trị Picard của f, g và f, g chia 0 CM nên theo bổ đề 3.1 tồn tại hàm nguyên khác hằng α sao cho

$$f(z) = e^{\alpha(z)} + c \quad ; \quad g(z) = c^2 \cdot e^{-\alpha(z)} + c.$$

Do đó $\frac{e^\alpha + c}{e^\alpha + c - 1} \cdot \frac{c^2 \cdot e^{-\alpha} + c - 1}{c^2 \cdot e^{-\alpha} + c} = k_4$ ta suy ra

$$[(c-1) - c.k_4]e^\alpha = c[(c-1).k_4 - c] \Rightarrow c = \frac{1}{2}, k_4 = -1$$

Vì thế (v) đúng.

▪ Trường hợp 5: $e^{\phi_1 - \phi_3} = k_5, (k_5 \neq 0, 1)$ là hằng số.

Khi đó 1 và ∞ là giá trị Picard của f, g và do f, g chia 0 CM nên tương tự trường hợp 4 ta suy ra (vi) đúng.

▪ Trường hợp 6: $e^{\phi_2 - \phi_3} = k_6, (k_6 \neq 0, 1)$ là hằng số.

Khi đó 0 và ∞ là giá trị Picard của f, g và f, g chia 1 CM nên tương tự trường hợp 4 ta được (vii).

▪ Trường hợp 7: $e^{\phi_j} (j=1, 2, 3)$ và $e^{\phi_j - \phi_i} (1 \leq j < i \leq 3)$ khác hằng.

Từ (3.15) rút f và g ta thu được $-e^{\phi_1 + \phi_2 - \phi_3} + (1-c) \cdot e^{\phi_1 - \phi_3} + c \cdot e^{\phi_2 - \phi_3} + (1-c) \cdot e^{\phi_2} + c e^{\phi_1} = 1$

Áp dụng định lý 2.8 ta có $-e^{\phi_1 + \phi_2 - \phi_3} \equiv 1$. Vì thế $\frac{c-1}{c} \cdot e^{\phi_1 - \phi_2} + e^{2\phi_1} + \frac{1-c}{c} \cdot e^{\phi_1 + \phi_2} = 1$.

Theo định lý 2.6 suy ra $\frac{1-c}{c} \cdot e^{\phi_1+\phi_2} \equiv 1$, mà $-e^{\phi_1+\phi_2-\phi_3} \equiv 1$ nên từ đó ta có $e^{\phi_3} = \frac{c}{c-1}$ (mâu thuẫn giả thiết).

Vậy định lý được chứng minh ■

Hệ quả: Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng. Nếu f, g chia 4 điểm phân biệt $0, 1, \infty, c$ CM và $c \neq -1, \frac{1}{2}, 2$ thì $f(z) \equiv g(z)$.

♦ **Định lý 3.7:** Cho f, g là hai hàm nguyên khác hằng, $c \neq 0, 1, \infty$ là hằng số. Nếu f, g chia $0, 1, c$ CM thì f, g có một trong các mối liên hệ sau:

$$(i) \quad f(z) \equiv g(z)$$

$$(v) \quad f(z) = \frac{g(z)}{2g(z)-1} \text{ nếu } c = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{1}{2} \text{ là giá trị Picard của } f, g.$$

$$(vi) \quad f(z) = \frac{g(z)}{g(z)-1} \text{ nếu } c = 2 \text{ và } 1 \text{ là giá trị Picard của } f, g.$$

$$(vii) \quad f(z) = \frac{1}{g(z)} \text{ nếu } c = -1 \text{ và } 0 \text{ là giá trị Picard của } f, g.$$

Chứng minh:

Vì f, g là hàm nguyên nên ∞ là giá trị Picard của f, g . Do f, g chia 4 giá trị $0, 1, \infty, c$ CM nên từ định lý 3.6 suy ra f, g có 7 mối liên hệ trong định lý. Ta thấy rằng các trường hợp (ii), (iii), (iv) trong định lý không thể xảy ra vì khi đó f, g sẽ có 3 giá trị Picard (vô lý) ■

Hệ quả: Cho f, g là hai hàm nguyên khác hằng và $a_j \ (j = \overline{1, 3})$ là 3 giá trị hữu hạn phân biệt. Nếu f, g chia $a_j \ (j = \overline{1, 3})$ CM và $\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3} \neq \frac{1}{2}, 2, -1$ thì $f(z) \equiv g(z)$.

Chứng minh:

$$\text{Đặt } L(z) = \frac{z-a_3}{a_2-a_3} \text{ thì } L(a_2) = 1, L(a_3) = 0, L(a_1) = \frac{a_1-a_3}{a_2-a_3} := c.$$

Bởi vì f, g chia $a_j \ (j = \overline{1, 3})$ nên $F(z) = L(f(z))$ và $G(z) = L(g(z))$ chia $0, 1, c$ CM, và vì $c \neq -1, \frac{1}{2}, 2$ nên theo định lý 3.7 ta được $F(z) \equiv G(z)$ vì vậy $f(z) \equiv g(z)$ ■

♦ **Định lý 3.8:** (R. Nevanlinna)

Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng phân biệt và $a_j \ (j = \overline{1, 4})$ là 4 giá trị phân biệt. Nếu f, g chia $a_j \ (j = \overline{1, 4})$ CM thì $f(z) \equiv T(g(z))$ (trong đó T là dạng biến đổi phân tuyến tính) sao cho 2 điểm là điểm cố định của T, 2 điểm còn lại là giá trị Picard của f, g .

Chứng minh:

$$\text{Đặt } L(z) = \frac{z-a_3}{z-a_4} \cdot \frac{a_2-a_4}{a_2-a_3}.$$

Ta có $L(a_2)=1$, $L(a_3)=0$, $L(a_4)=\infty$, $L(a_1)=\frac{a_1-a_3}{a_1-a_4} \cdot \frac{a_2-a_4}{a_2-a_3} := c$

$$F(z)=L(f(z)), \quad G(z)=L(g(z))$$

Vì $f(z) \neq g(z)$ nên $F(z) \neq G(z)$.

Mặt khác, do f, g chia a_j ($j=\overline{1,4}$) CM nên F, G chia $L(a_j)$ ($j=\overline{1,4}$) CM, nghĩa là F, G chia $0, 1, \infty, c$

CM. Theo định lý 3.6 ta suy ra F, G có 1 trong 6 mối liên hệ sau:

◦ $F(z)+G(z) \equiv 0$ nếu $c=-1$ và $1, -1$ là giá trị Picard của F, G ; nghĩa là $L(f(z))+L(g(z)) \equiv 0$ nếu $L(a_1)=-1$ và a_1, a_2 là giá trị Picard của f, g .

Vì $L(f(z))+L(g(z)) \equiv 0$ suy ra $f = \frac{(a_3+a_4) \cdot g - 2a_3 \cdot a_4}{2g - (a_3+a_4)} = T(g)$.

Và do đó $T(a_3)=a_3$; $T(a_4)=a_4$.

◦ $F(z)+G(z) \equiv 2$ nếu $c=2$ và $0, 2$ là giá trị Picard của F, G ; nghĩa là $L(f(z))+L(g(z)) \equiv 2$ nếu $L(a_1)=2$ và a_1, a_3 là giá trị Picard của f, g .

Vì $L(f(z))+L(g(z)) \equiv 2$ suy ra $f = \frac{(a_2+a_4) \cdot g - 2a_2 \cdot a_4}{2g - (a_2+a_4)} = T(g)$.

Và do đó $T(a_2)=a_2$; $T(a_4)=a_4$.

◦ $F(z)+G(z) \equiv 1$ nếu $c=\frac{1}{2}$ và $0, 1$ là giá trị Picard của F, G ; nghĩa là $L(f(z))+L(g(z)) \equiv 1$ nếu $L(a_1)=\frac{1}{2}$ và a_2, a_3 là giá trị Picard của f, g .

Vì $L(f(z))+L(g(z)) \equiv 1$ suy ra $f = \frac{(a_2 \cdot a_3 - a_4^2) \cdot g + a_2 \cdot a_4^2 + a_3 \cdot a_4^2 - 2a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}{(a_2 + a_3 - 2a_4)g + a_4^2 - a_2 \cdot a_3} = T(g)$.

Và do đó $T(a_1)=a_1$; $T(a_4)=a_4$.

◦ $2.F(z).G(z)=F(z)+G(z)$ nếu $c=\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{2}, \infty$ là giá trị Picard của F, G ; nghĩa là $2.L(f(z)).L(g(z)) \equiv L(f(z))+L(g(z))$ nếu $L(a_1)=\frac{1}{2}$ và a_1, a_4 là giá trị Picard của f, g .

Vì $2.L(f(z)).L(g(z)) \equiv L(f(z))+L(g(z))$ suy ra $f = \frac{(a_2+a_3) \cdot g - 2a_2 \cdot a_3}{2g - (a_2+a_3)} = T(g)$.

Và do đó $T(a_2)=a_2$; $T(a_3)=a_3$.

◦ $F(z).G(z)=F(z)+G(z)$ nếu $c=2$ và $1, \infty$ là giá trị Picard của F, G ; nghĩa là $L(f(z)).L(g(z)) \equiv L(f(z))+L(g(z))$ nếu $L(a_1)=2$ và a_2, a_4 là giá trị Picard của f, g . Vì $L(f(z)).L(g(z)) \equiv L(f(z))+L(g(z))$ suy ra

$$f = \frac{(a_3^2 + a_4^2 - a_2 \cdot a_4 - a_3 \cdot a_4) \cdot g + a_3 \cdot (2a_2 \cdot a_4 - a_2 \cdot a_3 - a_4^2)}{(a_3 - a_2)g + a_4 \cdot (a_2 - a_3)} = T(g).$$

Và ta có $T(a_1)=a_1$; $T(a_3)=a_3$.

◦ $F(z).G(z) \equiv 1$ nếu $c=-1$ và $0, \infty$ là giá trị Picard của F, G ; nghĩa là $L(f(z)).L(g(z)) \equiv 1$ nếu $L(a_1)=-1$ và a_3, a_4 là giá trị Picard của f, g . Vì $L(f(z)).L(g(z)) \equiv 1$ suy ra

$$f = \frac{\left[a_3 \cdot (a_2 - a_4)^2 - a_4 \cdot (a_2 - a_3)^2 \right] \cdot g + \left[a_4^2 \cdot (a_2 - a_3)^2 - a_3^2 \cdot (a_2 - a_4)^2 \right]}{\left[(a_2 - a_4)^2 - (a_2 - a_3)^2 \right] g + a_4 \cdot (a_2 - a_3)^2 - a_3 \cdot (a_2 - a_4)^2} = T(g).$$

Và ta có $T(a_1) = a_1$; $T(a_2) = a_2$.

Từ 6 trường hợp ta suy ra kết luận của định lý ■

3.2.2 Hàm phân hình chia 4 giá trị IM

Bổ đề 3.3:

Cho f là hàm phân hình khác hằng và $P(f) = a_0 \cdot f^p + a_1 \cdot f^{p-1} + \dots + a_p$, ($a_0 \neq 0$) là đa thức của f với bậc p và hệ số a_j , ($j = \overline{0, p}$) là hằng số. Giả sử b_j , ($j = \overline{0, q}$) ($q > p$) là các giá trị hữu hạn phân biệt. Khi đó

$$m\left(r, \frac{P(f) \cdot f'}{(f - b_1)(f - b_2) \dots (f - b_q)}\right) = S(r, f).$$

Chứng minh:

Tồn tại các hằng số A_j ($j = \overline{0, q}$) sao cho $\frac{P(f)}{(f - b_1)(f - b_2) \dots (f - b_q)} = \sum_{j=1}^q \frac{A_j}{f - b_j}$

Theo định lý 1.6 ta có

$$m\left(r, \frac{P(f) \cdot f'}{(f - b_1)(f - b_2) \dots (f - b_q)}\right) = m\left(r, \sum_{j=1}^q \frac{A_j \cdot f'}{f - b_j}\right) \leq \sum_{j=1}^q m\left(r, \frac{f'}{f - b_j}\right) + O(1) = S(r, f)$$

■

♦ **Định lý 3.9:** Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng chia 4 giá trị a_j ($j = \overline{1, 4}$) IM. Nếu $f(z) \neq g(z)$, khi đó:

$$(i) \quad T(r, f) = T(r, g) + S(r, f) \quad ; \quad T(r, g) = T(r, f) + S(r, g)$$

$$(ii) \quad \sum_{j=1}^4 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) = 2.T(r, f) + S(r, f)$$

$$(iii) \quad \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - b}\right) = T(r, f) + S(r, f) \quad ; \quad \overline{N}\left(r, \frac{1}{g - b}\right) = T(r, g) + S(r, g)$$

trong đó $b \neq a_j$, ($j = \overline{1, 4}$).

$$(iv) \quad N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) = S(r, f) \quad ; \quad N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) = S(r, g), \text{ trong đó } N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) \text{ là hàm đếm không điểm}$$

của f' mà không là không điểm của $f - a_j$, ($j = \overline{1, 4}$).

$$(v) \quad \sum_{j=1}^4 N^*(r, a_j) = S(r, f), \text{ trong đó } N^*(r, a_j) \text{ là hàm đếm những không điểm bội chung của}$$

$f - a_j$ và $g - a_j$ mà đếm bội ứng với bội nhỏ hơn.

Chứng minh:

◦ Theo định lý cơ bản thứ hai ta có

$$2.T(r, f) < \sum_{j=1}^4 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r, f) \leq N\left(r, \frac{1}{f-g}\right) + S(r, f) \\ \leq T(r, f) + T(r, g) + S(r, f)$$

Tương tự $2.T(r, g) \leq T(r, f) + T(r, g) + S(r, g)$

Từ đó ta thu được (i), (ii).

◦ Theo định lý cơ bản thứ hai:

$$3.T(r, f) < \sum_{j=1}^4 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + S(r, f) = 2.T(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + S(r, f) \\ < 3.T(r, f) + S(r, f)$$

Vì thế $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) = T(r, f) + S(r, f)$.

Tương tự ta cũng có $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) = T(r, g) + S(r, g)$

◦ Theo định lý cơ bản thứ hai:

$$2.T(r, f) < \sum_{j=1}^4 \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f) = 2.T(r, f) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f)$$

Do đó $N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) = S(r, f)$. Tương tự $N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) = S(r, g)$.

◦ Để chứng minh (v), bằng công thức biến đổi phân tuyến tính ta có thể giả sử rằng $a_1 = c, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = \infty$.

Đặt $\psi = \frac{f'g'(f-g)^2}{f(f-1)(f-c).g(g-1)(g-c)}$ (3.16)

Giả sử $f(z_0) = 0$ (hay $1, c, \infty$) với bội p và $g(z_0) = 0$ (hay $1, c, \infty$) với bội q. Từ (3.16) ta được

$$\psi(z) = O\left((z-z_0)^{2\min(p,q)-2}\right) \quad (3.17)$$

Vì thế ψ là hàm nguyên. Từ bổ đề 3.3 ta được

$$T(r, \psi) = m(r, \psi) \\ \leq m\left(r, \frac{f' \cdot f}{(f-1)(f-c)}\right) + m\left(r, \frac{f'}{(f-1)(f-c)}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f(f-1)(f-c)}\right) \\ + m\left(r, \frac{g' \cdot g}{(g-1)(g-c)}\right) + m\left(r, \frac{g'}{(g-1)(g-c)}\right) + m\left(r, \frac{g'}{g(g-1)(g-c)}\right) + O(1) \\ = S(r, f) + S(r, g)$$

Từ (3.17) ta được $\sum_{j=1}^4 N^*(r, a_j) \leq N\left(r, \frac{1}{\psi}\right) \leq T(r, \psi) + O(1) = S(r, f) \quad \blacksquare$

Từ (v) của định lý ta có hệ quả sau:

Hệ quả: Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng chia 4 giá trị phân biệt $a_j (j = \overline{1, 4})$ IM. Nếu $f(z) \neq g(z)$ thì với $j = \overline{1, 4}$ ta có $N_E(r, a_j) = N_E^{(1)}(r, a_j) + S(r, f)$.

? L. Rubel đã đặt ra câu hỏi Có thể thay thế CM bởi IM trong định lý 3.8 mà vẫn có kết luận tương tự không?

Gudersen [14] đã đưa ra ví dụ để chứng minh $4 \text{ IM} \neq 4 \text{ CM}$ như sau:

$$\text{Xét hai hàm phân hình: } f(z) = \frac{e^{h(z)} + b}{(e^{h(z)} - b)^2} \text{ và } g(z) = \frac{(e^{h(z)} + b)^2}{8b^2 \cdot (e^{h(z)} - b)}$$

trong đó $h(z)$ là hàm nguyên khác hằng và $b \neq 0$ là giá trị hữu hạn. Ta thấy f, g chia 4 giá trị $0, \infty, \frac{1}{b}, -\frac{1}{8b}$ IM nhưng không CM. Hơn nữa ta thấy f, g chia $0, \infty, \frac{1}{b}, -\frac{1}{8b}$ DM. Rõ ràng f không là dạng biến đổi phân tuyến tính của g ■

3.2.3 Hàm phân hình chia $3\text{CM} + 1 \text{IM} = 4 \text{CM}$:

♦ **Định lý 3.10:** Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng phân biệt và $a_j (j = \overline{1, 4})$ là các giá trị phân biệt.

Nếu f, g chia a_1, a_2, a_3 CM và a_4 IM thì f, g chia a_4 CM và vì thế kết quả của định lý 3.8 vẫn đúng.

Chứng minh:

Bằng công thức biến đổi phân tuyến tính, ta có thể giả sử $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \infty, a_4 = c$.

$$\text{Đặt } F(z) = \frac{f'(f-c)}{f(f-1)} - \frac{g'(g-c)}{g(g-1)} \quad (3.18)$$

◦ Nếu $F(z) \equiv 0$ thì f, g chia c CM và do đó kết luận của định lý 3.8 vẫn đúng.

◦ Nếu $F(z) \not\equiv 0$, theo bổ đề 3.3 và định lý 3.9 ta có $m(r, F) = S(r, f)$.

Vì f, g chia $0, 1, \infty$ CM nên $F(z)$ không có cực điểm suy ra $T(r, F) = m(r, F) = S(r, f)$.

Vì f, g chia c IM nên từ (3.18) ta có

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-c}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-c}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{F}\right) \leq T(r, F) + O(1) = S(r, f)$$

Không mất tính tổng quát, vì f, g không thể có 3 giá trị Picard nên ta có thể giả sử 1 không là giá trị Picard của f, g ; nghĩa là $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \neq S(r, f)$ (3.19)

$$\text{Đặt } G(z) = \frac{f'(f-1)}{f(f-c)} - \frac{g'(g-1)}{g(g-c)} \quad (3.20)$$

Nếu $G(z) \equiv 0$ thì f, g chia c CM nên ta giữ $G(z) \not\equiv 0$. Theo bổ đề 3.3 và định lý 3.9 ta có $m(r, G) = S(r, f)$.

Vì f, g chia $0, \infty$ CM nên không điểm và cực điểm của f, g không thể là cực điểm của G . Vì thế cực điểm của G chỉ có thể là không điểm của $f - c$ và G chỉ có thể có cực điểm đơn, do đó:

$$N(r, G) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-c}\right) = S(r, f). \text{ Vì thế } T(r, G) = S(r, f).$$

Mặt khác f, g chia 1 CM nên từ (3.19), (3.20) và do 1 không là giá trị Picard của f, g nên ta có

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{G}\right) \leq T(r, G) + O(1) = S(r, f) \text{ (mâu thuẫn với (3.19))}$$

Vậy f, g chia c CM và do đó kết luận của định lý 3.8 vẫn đúng ■

3.2.4 Hàm phân hình chia 4 “CM” = 4 CM

Định nghĩa 3.4: Cho f, g là hai hàm phân hình khác nhau, a là số phức. Giả sử f, g chia a IM. Nếu

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) - N_E(r, a) = S(r, f) \text{ và } \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-a}\right) - N_E(r, a) = S(r, g)$$

thì ta nói f, g chia a “CM”.

♦ **Định lý 3.11:** Cho f, g là hai hàm phân hình khác nhau phân biệt chia 4 giá trị phân biệt a_j ($j = \overline{1, 4}$) “CM”. Khi đó f, g chia a_j ($j = \overline{1, 4}$) CM và vì thế kết luận của định lý 3.8 vẫn đúng.

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \infty, a_4 = c$ và $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \neq S(r, f)$;

$$\overline{N}(r, f) \neq S(r, f) \quad (3.21)$$

Vì f, g chia $0, 1, \infty, c$ “CM” nên từ hệ quả của định lý 3.9 ta có

$$N_E(r, \infty) = N_E^1(r, \infty) + S(r, f)$$

và từ (iv), (v) trong định lý 3.9 suy ra $\overline{N}_{(2)}(r, f) + \overline{N}_{(2)}(r, g) = S(r, f)$

$$\text{và } \overline{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g'}\right) = N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) + \sum_{j=1}^4 N^*(r, a_j) = S(r, f) \quad (3.22)$$

$$\text{Đặt } H = \frac{f''}{f'} - \frac{g''}{g'} \quad (3.23)$$

Ta thấy cực điểm chung cùng bội của f, g không thể là cực điểm của H .

Theo định lý 1.6 ta có $m(r, H) = S(r, f)$. Mặt khác vì H chỉ có thể có cực điểm đơn nên

$$N(r, H) \leq \overline{N}(r, f) - N_E(r, \infty) + \overline{N}(r, g) - N_E(r, \infty) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g'}\right) = S(r, f)$$

Suy ra $T(r, H) = S(r, f)$.

Giả sử z_0 là cực điểm đơn của f, g , trong lân cận z_0 ta có

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + b_2 + b_3(z - z_0) + \dots$$

$$g(z) = \frac{c_1}{z - z_0} + c_2 + c_3(z - z_0) + \dots$$

Bằng tính toán đơn giản ta có z_0 là không điểm của H . Từ (3.22) ta có

$$\overline{N}(r, f) \leq \overline{N}_{(2)}(r, f) + \overline{N}_{(1)}(r, f) \leq N\left(r, \frac{1}{H}\right) + S(r, f) \leq T(r, H) + S(r, f) = S(r, f)$$

Do đó $\overline{N}(r, f) = S(r, f)$ mâu thuẫn với (3.21).

Vì thế $H(z) \equiv 0$, suy ra $f(z) \equiv A.g(z) + B$ ($A \neq 0, B$ là hằng số). (3.24)

Vì $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \neq S(r, f)$ nên $B \equiv 0 \Rightarrow f(z) \equiv A.g(z)$ (3.25)

Vì $f(z) \neq g(z)$ nên $A \neq 1$. Bởi vì $A \neq 0$ nên từ (3.25) ta thấy 1, c , A , Ac là giá trị Picard của f, g và do đó $A = c, Ac = 1 \Rightarrow c = -1$.

Suy ra $f(z) \equiv -g(z)$ nên f, g chia $0, \infty$ CM và 1, -1 là giá trị Picard của f, g .

Vậy f, g chia $0, \infty, 1, -1$ CM ■

♦ Định lý 3.12:

Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng phân biệt và a_j ($j = \overline{1, 4}$) là các giá trị phân biệt. Nếu f, g chia

a_j ($j = \overline{1, 4}$) IM và nếu $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) = S(r, f)$ ($i = \overline{1, 2}$) thì f, g chia a_j ($j = \overline{1, 4}$) CM và do đó kết luận của định lý 3.8 vẫn đúng.

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 = 0, a_2 = \infty, a_3 = 1, a_4 = c$.

Khi đó $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r, f)$, $\overline{N}(r, f) = S(r, f)$ nên f, g chia $0, \infty$ CM.

Ta có $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) = \overline{N}_{(1)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \overline{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right)$ và $\overline{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \leq \frac{1}{2}N_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right)$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) &= \frac{1}{2}\overline{N}_{(1)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \frac{1}{2}\overline{N}_{(1)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \frac{1}{2}N_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\overline{N}_{(1)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \leq \frac{1}{2}\overline{N}_{(1)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \frac{1}{2}T(r, f) + O(1) \end{aligned}$$

Theo định lý cơ bản thứ hai ta có

$$\begin{aligned} T(r, f) &< \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) \\ &< \frac{1}{2}\overline{N}_{(1)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \frac{1}{2}T(r, f) + S(r, f) \\ \Rightarrow T(r, f) &< \overline{N}_{(1)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) < T(r, f) + S(r, f) \\ \Rightarrow \overline{N}_{(1)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) &= T(r, f) + S(r, f) \end{aligned}$$

Mặt khác $\overline{N}_1\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \leq T(r, f) + O(1)$

nên $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) = \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f)$ và $\overline{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) = S(r, f)$

Tương tự ta có $\overline{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) = S(r, f)$

Do đó ta có

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \geq N_E^{(1)}(r, 1) \geq \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{f-1}\right) - \overline{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f)$$

$$\Rightarrow N_E^{(1)}(r, 1) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f)$$

Theo hệ quả định lý 3.9 suy ra $N_E(r, 1) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f)$ nghĩa là f, g chia 1 “CM”.

Tương tự ta cũng thu được f, g chia c “CM”.

Theo định lý 3.11 f, g chia $0, 1, c, \infty$ CM và do đó kết luận của định lý 3.8 vẫn đúng ■

3.2.5 Hàm phân hình chia 2 CM + 2 IM = 4 CM

Bổ đề 3.4: Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng chia 4 giá trị phân biệt $0, 1, c, \infty$ IM, đặt

$$\alpha = \left[\frac{f''}{f'} - \left(\frac{2f'}{f} + \frac{f'}{f-1} + \frac{f'}{f-c} \right) \right] - \left[\frac{g''}{g'} - \left(\frac{2g'}{g} + \frac{g'}{g-1} + \frac{g'}{g-c} \right) \right]$$

$$\beta = \left[\frac{f''}{f'} - \left(\frac{f'}{f-1} + \frac{f'}{f-c} - \frac{2f'}{f} \right) \right] - \left[\frac{g''}{g'} - \left(\frac{g'}{g-1} + \frac{g'}{g-c} - \frac{2g'}{g} \right) \right]$$

Nếu $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, f(z) \neq g(z)$ thì

$$T(r, \alpha) \leq \overline{N}(r, f) - N_E(r, \infty) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - N_E(r, 0) + S(r, f)$$

$$T(r, \beta) \leq \overline{N}(r, f) - N_E(r, \infty) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - N_E(r, 0) + S(r, f)$$

Chứng minh:

Rõ ràng $m(r, \alpha) = S(r, f)$.

Giả sử z_1 là không điểm của $f(z) - 1$ hay $f(z) - c$. Trong lân cận của z_1 ta có

$$f(z) = a + b_q(z - z_1)^q + b_{q+1}(z - z_1)^{q+1} + \dots \quad (b_q \neq 0)$$

$$g(z) = a + c_p(z - z_1)^p + b_{p+1}(z - z_1)^{p+1} + \dots \quad (c_p \neq 0)$$

trong đó $a = 1$ hoặc $a = c$.

Bằng tính toán ta được $\alpha(z) = \left[\frac{-1}{z - z_1} + O(1) \right] - \left[\frac{-1}{z - z_1} + O(1) \right] = O(1)$

Vì thế không điểm của $f(z)-1$ và $f(z)-c$ không là cực điểm của $\alpha(z)$. Rõ ràng cực điểm và không điểm của f, g với bội bằng nhau cũng không thể là cực điểm của α . Do đó theo định lý 3.9 ta có

$$\begin{aligned} N(r, \alpha) &\leq \overline{N}(r, f) - N_E(r, \infty) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - N_E(r, 0) + N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) \\ &= \overline{N}(r, f) - N_E(r, \infty) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - N_E(r, 0) + S(r, f) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta có } T(r, \alpha) \leq \overline{N}(r, f) - N_E(r, \infty) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - N_E(r, 0) + S(r, f)$$

$$\text{Tương tự ta có } T(r, \beta) \leq \overline{N}(r, f) - N_E(r, \infty) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - N_E(r, 0) + S(r, f) \quad \blacksquare$$

Bổ đề 3.5: Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng chia nhau 4 giá trị $0, 1, c, \infty$ IM và

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{g'(f-g)}{g(f-1)(g-c)} & ; & & G_1 &= \frac{f'(f-g)}{f(g-1)(f-c)} \\ F_c &= \frac{g'(f-g)}{g(g-1)(f-c)} & ; & & G_c &= \frac{f'(f-g)}{f(f-1)(g-c)} \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } f(z) \neq g(z) \text{ thì } T(r, F_1) \leq T(r, f) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f)$$

$$T(r, G_1) \leq T(r, g) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) + S(r, g)$$

$$T(r, F_c) \leq T(r, f) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-c}\right) + S(r, f)$$

$$T(r, G_c) \leq T(r, g) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-c}\right) + S(r, g)$$

Chứng minh:

$$\text{Ta thấy } F_1 = \frac{1}{f-1} \left(\frac{g'}{g(g-c)} - \frac{g'}{g-c} \right) + \frac{g'}{g(g-c)}$$

$$\text{Theo bổ đề 3.3 ta có } m(r, F_1) \leq m\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f).$$

Giả sử z_c là không điểm của $f-c$ thì z_c là cực điểm đơn của $\frac{g'}{g-c}$ và là không điểm của $f-g$ và vì thế

z_c không là cực điểm của F_1 . Tương tự ta có không điểm của f cũng không là cực điểm của F_1 .

Giả sử z^* là cực điểm của f với bội p và là cực điểm của g với bội q . Khi đó z^* là cực điểm của $f-g$ với bội $\max\{p, q\}$. Do đó

$$F_1(z) = O\left[\left(z-z^*\right)^{(p+2q)-(q+1+\max\{p,q\})}\right] = O\left[\left(z-z^*\right)^{p+q-1-\max\{p,q\}}\right]$$

nên z^* không thể là cực điểm của F_1 .

Giả sử z_1 là không điểm của $f - 1$ với bội p thì z_1 là không điểm của $f - g$. Vì thế z_1 là cực điểm của F_1 với bội tối thiểu là $(p - 1)$. Suy ra

$$N(r, F_1) \leq N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Vì thế } T(r, F_1) &\leq m\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) \\ &= T(r, f) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) \end{aligned}$$

Tương tự cho các bất đẳng thức còn lại ■

Bổ đề 3.6: Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng chia 4 giá trị $0, 1, c, \infty$ IM và

$$\gamma = \alpha^2 - (1+c)^2 \cdot \psi \quad ; \quad \delta = \beta^2 - (1+c)^2 \cdot \psi$$

$$\psi = \frac{f'g'(f-g)^2}{f(f-1)(f-c)g(g-1)(g-c)} \quad \text{trong đó } \alpha, \beta \text{ được định nghĩa ở bổ đề 3.4.}$$

Giả sử z_0 là không điểm đơn chung của $f(z)$ và $g(z)$, z_∞ là cực điểm đơn chung của $f(z)$ và $g(z)$.

Khi đó $\gamma(z_0) = 0$, $\delta(z_\infty) = 0$ và

$$\alpha(z_0) = (1+c)F_1(z_0) = (1+c)G_1(z_0) = (1+c)F_c(z_0) = (1+c)G_c(z_0)$$

$$\beta(z_\infty) = (1+c)F_1(z_\infty) = (1+c)G_1(z_\infty) = (1+c)F_c(z_\infty) = (1+c)G_c(z_\infty)$$

Chứng minh:

◦ Trong lân cận của z_0 ta có $f(z) = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$ ($a_1 \neq 0$)

$$g(z) = b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots$$
 ($b_1 \neq 0$)

Bằng tính toán ta thu được $\psi(z_0) = \frac{1}{c^2}(a_1 - b_1)^2$; $\alpha(z_0) = \left(1 + \frac{1}{c}\right)(a_1 - b_1)$

Do đó $\gamma(z_0) = [\alpha(z_0)]^2 - (1+c)^2 \psi(z_0) = 0$

◦ Trong lân cận của z_∞ ta có $f(z) = \frac{c_1}{z - z_\infty} + c_2 + O(z - z_\infty)$ ($c_1 \neq 0$)

$$g(z) = \frac{d_1}{z - z_\infty} + d_2 + O(z - z_\infty) \quad (d_1 \neq 0)$$

Bằng tính toán ta thu được $\psi(z_\infty) = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{d_1}\right)^2$; $\beta(z_\infty) = (1+c)\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{d_1}\right)$

Vì thế $\delta(z_\infty) = [\beta(z_\infty)]^2 - (1+c)^2 \psi(z_\infty) = 0$.

Bằng tính toán tương tự ta có

$$F_1(z_0) = G_1(z_0) = F_c(z_0) = G_c(z_0) = \frac{1}{c}(a_1 - b_1)$$

$$F_1(z_\infty) = G_1(z_\infty) = F_c(z_\infty) = G_c(z_\infty) = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{d_1} \quad \blacksquare$$

Năm 1983, Gundersen [9] đã cải tiến định lý 3.10 và thu được kết quả sau:

♦ **Định lý 3.13:** Cho f, g là hai hàm phân hình khác ~~lẫn~~ phân biệt, a_j ($j = \overline{1, 4}$) là các giá trị khác nhau. Nếu f, g chia a_1, a_2 CM và chia a_3, a_4 IM thì f, g chia a_3, a_4 CM và vì thế kết quả của định lý 3.10 vẫn đúng.

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1 = \infty, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = c$. Xét 4 trường hợp sau:

▪ *Trường hợp 1:* $\gamma \neq 0; \delta \neq 0$

Bởi vì f, g chia $0, \infty$ CM nên theo bổ đề 3.4 và 3.6 ta có

$$\begin{aligned} N_E^{(1)}(r, 0) &\leq N\left(r, \frac{1}{\gamma}\right) \leq T(r, \gamma) + O(1) = T(r, \alpha^2 - (1+c)^2 \cdot \psi) \\ &\leq 2T(r, \alpha) + T(r, \psi) + O(1) = S(r, f) \end{aligned}$$

(do f, g chia $0, \infty$ CM nên theo bổ đề 3.4 ta được $T(r, \alpha) = S(r, f)$ và dựa vào chứng minh của định lý

$$3.9 \text{ ta có } T(r, \psi) = S(r, f))$$

Vì f, g chia 0 CM nên theo hệ quả của định lý 3.9 ta có

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = N_E(r, 0) = N_E^{(1)}(r, 0) = S(r, f).$$

Tương tự theo bổ đề 3.4, 3.6 và hệ quả của định lý 3.9 ta suy ra

$$\begin{aligned} \overline{N}(r, f) &= \overline{N}_1(r, f) + \overline{N}_2(r, f) \leq N\left(r, \frac{1}{\delta}\right) + S(r, f) = T(r, \delta) + S(r, f) = S(r, f) \\ &\quad (\text{do } f, g \text{ chia } \infty \text{ CM}) \end{aligned}$$

Vậy theo định lý 3.12 ta có f, g chia $0, 1, c, \infty$ CM.

▪ *Trường hợp 2:* $\gamma \neq 0; \delta \equiv 0$.

$$\text{Bởi vì } \gamma \neq 0 \text{ nên tương tự trường hợp 1 ta có } \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r, f) \quad (3.26)$$

◦ Trước tiên ta giả sử $c \neq -1$.

Nếu $F_1 \equiv G_1$ thì $\frac{f'(f-1)}{f(f-c)} = \frac{g'(g-1)}{g(g-c)}$ vì thế f, g chia $0, 1, c, \infty$ CM.

Nếu $F_c \equiv G_c$ thì tương tự ta có f, g chia $0, 1, c, \infty$ CM.

Ta giả sử $F_1 \neq G_1; F_c \neq G_c$.

Vì $F_1 \neq G_1$ nên ít nhất 1 trong 2 hàm $\beta - (1+c)F_1; \beta - (1+c)G_1$ không đồng nhất 0.

Ta thấy nếu z_0 là cực điểm đơn của f thì theo bổ đề 3.6 ta thấy z_0 là không điểm của $\beta - (1+c)F_1$ và $\beta - (1+c)G_1$. Nếu z_0 là cực điểm bội của f thì theo chứng minh của bổ đề 3.4, 3.5 ta suy ra z_0 là không điểm của β, F_1, G_1 . Do đó từ định lý 3.5 ta có

$$\overline{N}(r, f) < N\left(r, \frac{1}{\beta - (1+c)F_1}\right) + S(r, f) \leq T(r, \beta) + T(r, F_1) + S(r, f)$$

$$\leq T(r, f) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) \quad (3.27)$$

$$\text{Tương tự vì } F_c \neq G_c \text{ nên } \overline{N}(r, f) \leq T(r, f) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-c}\right) + S(r, f) \quad (3.28)$$

Từ (3.27), (3.28) và (ii) của định lý 3.9 ta có

$$\begin{aligned} 2\overline{N}(r, f) &\leq 2T(r, f) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-c}\right) + S(r, f) \\ &= \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f) \\ \Rightarrow \overline{N}(r, f) &\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f) = S(r, f) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Từ (3.26), (3.29) và áp dụng định lý 3.12 ta có f, g chia $0, 1, c, \infty$ CM.

◦ Xét trường hợp $c = -1$.

$$\text{Vì } \delta \equiv 0 \text{ nên } \beta \equiv 0 \text{ nghĩa là } \frac{f''}{f'} - \left(\frac{f'}{f-1} + \frac{f'}{f-c} - \frac{2f'}{f} \right) \equiv \frac{g''}{g'} - \left(\frac{g'}{g-1} + \frac{g'}{g-c} - \frac{2g'}{g} \right)$$

$$\text{Lấy tích phân ta được } \frac{f' f^2}{f^2 - 1} = A \cdot \frac{g' g^2}{g^2 - 1} \quad (A \neq 0 \text{ là hằng số}) \quad (3.30)$$

Nếu cả 1 và -1 đều là giá trị Picard của $f(z)$ thì f, g chia $0, 1, -1, \infty$ CM.

Không mất tính tổng quát giả sử 1 không là giá trị Picard của $f(z)$. Khi đó tồn tại z_1 sao cho $f(z_1) = g(z_1) = 1$. Trong lân cận của z_1 ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + b_p (z - z_1)^p + b_{p+1} (z - z_1)^{p+1} + \dots \quad (b_p \neq 0) \\ g(z) &= 1 + c_q (z - z_1)^q + c_{q+1} (z - z_1)^{q+1} + \dots \quad (c_q \neq 0) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (3.30) ta thu được } A = \frac{p}{q} \text{ vì thế } \frac{f' f^2}{f^2 - 1} = \frac{p}{q} \cdot \frac{g' g^2}{g^2 - 1} \quad (3.31)$$

$$\text{Đặt } \lambda = \frac{f' f^2}{f^2 - 1} - \frac{p}{q} \cdot \frac{g' g^2}{g^2 - 1} \quad (3.32)$$

$$\text{Nếu } \lambda \equiv 0 \text{ thì } \frac{f' f^2}{f^2 - 1} \equiv \frac{p}{q} \cdot \frac{g' g^2}{g^2 - 1} \quad (3.33)$$

$$\text{Từ (3.31), (3.33) ta có } f^3 = g^3 \text{ suy ra } f = Bg \quad (3.34)$$

trong đó B là hằng số thỏa $B^3 = 1$. Bởi vì $f \neq g$ nên $B \neq 1$ vì thế $B = \exp\left\{\frac{2\pi}{3}i\right\}$ hoặc $B = \exp\left\{\frac{4\pi}{3}i\right\}$. Từ

(3.34) ta có $1, -1, B, -B$ là giá trị Picard của $f(z)$ (vô lý).

Vậy $\lambda \neq 0$. Theo bổ đề 3.3 ta có $m(r, \lambda) = S(r, f)$.

Rõ ràng cực điểm của f không là cực điểm của λ . Giả sử z^* là không điểm của $f-1$ và $g-1$. Trong lân cận của z^* ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + b_m (z - z^*)^m + b_{m+1} (z - z^*)^{m+1} + \dots \quad (b_m \neq 0) \\ g(z) &= 1 + c_n (z - z^*)^n + c_{n+1} (z - z^*)^{n+1} + \dots \quad (c_n \neq 0) \end{aligned}$$

Từ (3.31) ta có $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$. Từ (3.32) suy ra

$$\lambda(z) = \left[\frac{m}{2(z-z^*)} + O(1) \right] - \frac{p}{q} \left[\frac{n}{2(z-z^*)} + O(1) \right] = O(1)$$

nên z^* không là cực điểm của λ .

Tương tự ta cũng có không điểm của $f+1$ và $g+1$ cũng không là cực điểm của λ .

Vì thế $N(r, \lambda) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r, f)$ (do cực điểm của λ chỉ có thể là cực điểm đơn).

nên $T(r, \lambda) = S(r, f)$.

Gọi z^{**} là cực điểm của f và g với bội t . Từ (3.32) suy ra z^{**} là không điểm của λ với bội ít nhất $(2t-1)$. Ta được $\overline{N}(r, f) \leq N\left(r, \frac{1}{\lambda}\right) \leq T(r, \lambda) + O(1) = S(r, f)$

Vì thế $0, 1, -1, \infty$ là giá trị chia CM của f, g theo định lý 3.12.

▪ Trường hợp 3: $\gamma \equiv 0; \delta \neq 0$

Vì $\delta \neq 0$ nên tương tự trường hợp 1 ta có $\overline{N}(r, f) = S(r, f)$ (3.35)

◦ Xét trường hợp $c \neq -1$.

Nếu $F_1 \equiv G_1, F_c \equiv G_c$ thì tương tự trường hợp 2 ta có $f(z), g(z)$ chia $0, 1, c, \infty$ CM.

Giả sử $F_1 \neq G_1, F_c \neq G_c$. Vì $F_1 \neq G_1$ nên ít nhất một trong hai hàm $\alpha - (1+c)F_1, \alpha - (1+c)G_1$ không đồng nhất 0.

Nếu z_0 là không điểm đơn của f thì z_0 là không điểm của $\alpha - (1+c)F_1$ và $\alpha - (1+c)G_1$ (theo bổ đề 3.6).

Nếu z_0 là không điểm bội của f thì z_0 là không điểm của F_1, G_1, α nên theo bổ đề 3.4, 3.5, 3.6 ta có

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) &< N\left(r, \frac{1}{\alpha - (1+c)F_1}\right) + S(r, f) = T(r, \alpha) + T(r, F_1) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{và } \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) &< N\left(r, \frac{1}{\alpha - (1+c)G_1}\right) + S(r, f) = T(r, \alpha) + T(r, G_1) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\text{Tương tự } \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) < T(r, f) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-c}\right) + S(r, f) \quad (3.37)$$

Từ (3.36), (3.37) và (ii) của định lý 3.9 ta có

$$2\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) < 2T(r, f) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-c}\right) + S(r, f)$$

$$= \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f)$$

$$\Rightarrow \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) < \overline{N}(r, f) + S(r, f)$$

Từ (3.35) suy ra $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r, f)$ (3.38)

Từ (3.35), (3.38) và định lý 3.12 ta có f, g chia $0, 1, c, \infty$ CM.

◦ Xét trường hợp $c = -1$.

Bởi vì $\gamma \equiv 0$ nên $\alpha \equiv 0$ tức là $\frac{f''}{f'} - \left(\frac{2f'}{f} + \frac{f'}{f-1} + \frac{f'}{f-c} \right) \equiv \frac{g''}{g'} - \left(\frac{2g'}{g} + \frac{g'}{g-1} + \frac{g'}{g-c} \right)$

Lấy tích phân ta được $\frac{f'}{f^2(f^2-1)} = A \cdot \frac{g'}{g^2(g^2-1)}$ ($A \neq 0$ là hằng số) (3.39)

Đặt $\mu = \frac{f'f}{f^2-1} - A \cdot \frac{g'g}{g^2-1}$ (3.40)

Nếu $\mu \equiv 0$ thì $\frac{f'f}{f^2-1} \equiv A \cdot \frac{g'g}{g^2-1}$ (3.41)

Từ (3.39), (3.41) ta có $f^3 = g^3$. Tương tự trường hợp 2 ta có điều mâu thuẫn. Vì thế $\mu \neq 0$. Theo bổ đề 3.3 ta suy ra $m(r, \mu) = S(r, f)$.

Tương tự trường hợp 2 và (3.39), (3.40) ta thu được không điểm của $f-1, f+1$ không là cực điểm của μ . Vì thế $N(r, \mu) \leq \overline{N}(r, f)$.

Từ (3.35) dẫn đến $N(r, \mu) = S(r, f)$ nên $T(r, \mu) = S(r, f)$.

Rõ ràng không điểm của f là không điểm của μ vì thế

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{\mu}\right) \leq T(r, \mu) + O(1) = S(r, f) \quad (3.42)$$

Do đó từ (3.35), (3.42) và định lý 3.12 ta có f, g chia $0, 1, -1, \infty$ CM.

▪ Trường hợp 4: $\gamma \equiv 0; \delta \equiv 0 \Rightarrow \gamma - \delta \equiv 0$ hay $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \equiv 0$

$\Rightarrow \alpha - \beta \equiv 0$ hay $\alpha + \beta \equiv 0$.

◦ Nếu $\alpha - \beta \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{-4f'}{f} + \frac{4g'}{g} \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{f'}{f} \equiv \frac{g'}{g}$

Lấy tích phân ta được $f(z) \equiv A \cdot g(z)$ ($A \neq 0, 1$ là hằng số)

Vì $A \neq 0$ nên 1 và c là 2 giá trị Picard của f, g . Mặt khác A và Ac cũng là giá trị Picard của f, g , vì thế $A = c, Ac = 1 \Rightarrow A = c = -1$ suy ra $f(z) \equiv -g(z)$ nên $0, 1, c, \infty$ là giá trị chia CM của f, g .

◦ Nếu $\alpha + \beta \equiv 0 \Leftrightarrow \left[2 \frac{f''}{f'} - 2 \left(\frac{f'}{f-1} + \frac{f'}{f-c} \right) \right] - \left[2 \frac{g''}{g'} - 2 \left(\frac{g'}{g-1} + \frac{g'}{g-c} \right) \right] \equiv 0$

$$\text{Lấy tích phân ta được } \frac{f'}{(f-1)(f-c)} \equiv A \cdot \frac{g'}{(g-1)(g-c)} \quad (A \neq 0 \text{ là hằng số}) \quad (3.43)$$

Nếu cả 1 và c đều là giá trị Picard của $f(z)$ thì $f(z)$ và $g(z)$ chia $0, 1, c, \infty$ CM. Không mất tính tổng quát giả sử tồn tại z_1 sao cho $f(z_1) = g(z_1) = 1$, khi đó trong lân cận của z_1 ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + b_p (z - z_1)^p + b_{p+1} (z - z_1)^{p+1} + \dots \quad (b_p \neq 0) \\ g(z) &= 1 + c_q (z - z_1)^q + c_{q+1} (z - z_1)^{q+1} + \dots \quad (c_q \neq 0) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (3.43) ta được } A = \frac{p}{q} \text{ vì thế } \frac{q \cdot f'}{(f-1)(f-c)} \equiv \frac{p \cdot g'}{(g-1)(g-c)}$$

$$\text{Lấy tích phân ta được } \left(\frac{f-1}{f-c} \right)^q = B \cdot \left(\frac{g-1}{g-c} \right)^p \quad (B \neq 0 \text{ là hằng số}) \quad (3.44)$$

$$\Rightarrow q.T(r, f) = p.T(r, g) + O(1)$$

Theo (i) của định lý 3.9 suy ra $p = q$. Vì thế $\frac{f-1}{f-c} = C \cdot \frac{g-1}{g-c}$ ($C \neq 0$ là hằng) nên f, g chia 1, c CM. Vậy

f, g chia $0, 1, c, \infty$ CM.

Vậy kết quả của định lý 3.8 vẫn đúng ■

3.3 Hàm phân hình chia 3 giá trị

3.3.1 Định lý 3 điểm của Nevanlinna

Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng chia 3 giá trị phân biệt a_1, a_2, a_3 CM.

$$\text{Đặt } F(z) = \frac{f(z) - a_1}{f(z) - a_3} \cdot \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_1}; \quad G(z) = \frac{g(z) - a_1}{g(z) - a_3} \cdot \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_1}$$

Khi đó F, G chia $0, 1, \infty$ CM

Do đó không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \infty$.

♦ **Định lý 3.14:** Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng chia 3 giá trị a_1, a_2, a_3 IM. Khi đó

$$T(r, f) < 3.T(r, g) + S(r, f) \quad \text{và} \quad T(r, g) < 3.T(r, f) + S(r, g)$$

Chứng minh:

Từ định lý 1.2 ta có

$$T(r, f) < \sum_{j=1}^3 \overline{N} \left(r, \frac{1}{f - a_j} \right) + S(r, f) = \sum_{j=1}^3 \overline{N} \left(r, \frac{1}{g - a_j} \right) + S(r, f) \leq 3.T(r, g) + S(r, f)$$

■

♦ **Định lý 3.15:** (R. Nevanlinna, 1989) Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng chia $0, 1, \infty$ CM. Nếu

$f(z) \neq g(z)$ thì

(i) Tồn tại hai hàm nguyên $\beta(z), \gamma(z)$ thỏa $e^{\beta(z)} \neq 1, e^{\gamma(z)} \neq 1, e^{\beta(z)} \neq e^{\gamma(z)}$ sao cho

$$f(z) = \frac{e^{\beta(z)} - 1}{e^{\gamma(z)} - 1} \quad ; \quad g(z) = \frac{e^{-\beta(z)} - 1}{e^{-\gamma(z)} - 1} \quad (3.45)$$

(ii) $T(r, g) = O(T(r, f)), T(r, e^\beta) = O(T(r, f)), T(r, e^\gamma) = O(T(r, f))$
 $(r \rightarrow \infty, r \notin E)$

Chứng minh:

Vì f, g chia 0, 1, ∞ CM nên tồn tại 2 hàm nguyên $\alpha(z), \beta(z)$ sao cho

$$\frac{f(z)}{g(z)} = e^{\alpha(z)} \quad ; \quad \frac{f(z) - 1}{g(z) - 1} = e^{\beta(z)} \quad (3.46)$$

Vì $f(z) \neq g(z)$ nên $e^{\alpha(z)} \neq 1, e^{\beta(z)} \neq 1, e^{\beta(z) - \alpha(z)} \neq 1$.

$$\text{Từ (3.46) ta có } f(z) = \frac{e^{\beta(z)} - 1}{e^{\beta(z) - \alpha(z)} - 1} \quad ; \quad g(z) = \frac{e^{-\beta(z)} - 1}{e^{-\beta(z) + \alpha(z)} - 1} \quad (3.47)$$

Đặt $\gamma = \beta - \alpha$ ta thu được (3.45).

$$\text{Theo định lý 3.14 ta có } T(r, g) < 3.T(r, f) + S(r, f) \quad (3.48)$$

$$\text{Từ (3.46) ta có } T(r, e^\alpha) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1) < 4.T(r, f) + S(r, f)$$

$$T(r, e^\beta) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1) < 4.T(r, f) + S(r, f)$$

$$\Rightarrow T(r, e^\gamma) = T(r, e^{\beta - \alpha}) \leq T(r, e^\beta) + T(r, e^\alpha) + O(1) < 8.T(r, f) + S(r, f)$$

Từ đó ta thu được (ii) của định lý ■

Chú ý:

1) Các hàm nguyên $\beta(z), \gamma(z)$ trong định lý là tùy ý.

2) Ta hoàn toàn không tìm được mối liên hệ giữa hai hàm f, g trong định lý dù chúng chia nhau 3 giá trị CM. Do đó khi f, g chia nhau 3 giá trị CM mà ta cần tìm mối liên hệ giữa chúng thì phải cần thêm điều kiện. Mục đích của chương này là trình bày một số kết quả nghiên cứu về vấn đề này.

3.3.2 Những định lý duy nhất

Bổ đề 3.7: Giả sử $f(z), g(z), h(z) \in \Lambda$, trong đó Λ là lớp các hàm phân hình $f(z)$ trong $\square$ thỏa $\overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r, f)$.

Nếu $f(z), g(z), h(z)$ chia 1 IM thì ít nhất hai trong ba hàm này đồng nhất.

Chứng minh: xem [1].

♦ **Định lý 3.16:** (R. Nevanlinna, 1989)

Có tối đa hai hàm phân hình khác hằng phân biệt chia nhau 3 giá trị CM.

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát giả sử chia 3 giá trị $0, 1, \infty$. Nếu 3.16 không đúng thì tồn tại 3 hàm phân hình f, g, h chia $0, 1, \infty$ CM và $f(z) \neq g(z)$, $f(z) \neq h(z)$, $g(z) \neq h(z)$.

Nếu hai trong $0, 1, \infty$ là giá trị Picard của $f(z)$ (giả sử $0, \infty$). Theo bổ đề 3.7 thì ít nhất hai trong ba hàm f, g, h đồng nhất nhau (mâu thuẫn giả thiết). Vì thế ít nhất hai trong $0, 1, \infty$ (giả sử $0, \infty$) không là giá trị Picard của $f(z)$. Do đó $f(z)$ có không điểm và cực điểm.

Vì f, g chia $0, 1, \infty$ CM nên theo định lý 3.15 tồn tại hai hàm nguyên β_1, γ_1 thỏa $e^{\beta_1} \neq \text{const}$, $e^{\gamma_1} \neq \text{const}$,

$$e^{\beta_1} \neq e^{\gamma_1} \text{ sao cho } f = \frac{e^{\beta_1} - 1}{e^{\gamma_1} - 1}, \quad g = \frac{e^{-\beta_1} - 1}{e^{-\gamma_1} - 1} \quad (3.49)$$

$$\text{Tương tự vì } f, h \text{ chia } 0, 1, \infty \text{ CM nên } f = \frac{e^{\beta_2} - 1}{e^{\gamma_2} - 1}, \quad g = \frac{e^{-\beta_2} - 1}{e^{-\gamma_2} - 1} \quad (3.50)$$

(trong đó β_2, γ_2 là các hàm nguyên thỏa $e^{\beta_2} \neq \text{const}$, $e^{\gamma_2} \neq \text{const}$, $e^{\beta_2} \neq e^{\gamma_2}$).

$$\text{Từ (3.49), (3.50) ta có } f(z) = \frac{e^{\beta_1} - 1}{e^{\gamma_1} - 1} = \frac{e^{\beta_2} - 1}{e^{\gamma_2} - 1} \quad (3.51)$$

◦ Nếu $e^{\beta_1} \equiv e^{\beta_2} \Rightarrow e^{\gamma_1} \equiv e^{\gamma_2}$ do đó từ (3.49) ta có $g \equiv h$ (mâu thuẫn giả thiết). Vậy $e^{\beta_1} \neq e^{\beta_2}$.

◦ Nếu $e^{\beta_2 - \beta_1} \equiv c$ ($\text{const} \neq 0, 1$) thì từ (3.51) ta suy ra không điểm của f phải là không điểm của $e^{\beta_1} - 1$ và là không điểm của $e^{\beta_2} - 1 = c.e^{\beta_1} - 1$. Điều này không xảy ra vì $e^{\beta_1} - 1$ và $c.e^{\beta_1} - 1$ không thể có không điểm chung. Vì thế $e^{\beta_2 - \beta_1} \neq \text{const}$.

Tương tự ta có $e^{\gamma_2 - \gamma_1} \neq \text{const}$.

$$\text{Từ (3.51) ta thu được } e^{\gamma_2} - e^{\beta_2 + \gamma_1 - \beta_1} + e^{\beta_2 - \beta_1} + e^{\gamma_1 - \beta_1} - e^{\gamma_2 - \beta_1} \equiv 1 \quad (3.52)$$

Áp dụng định lý 2.7 ta được ít nhất một trong $e^{\beta_2 + \gamma_1 - \beta_1}$, $e^{\gamma_1 - \beta_1}$, $e^{\gamma_2 - \beta_1}$ là hằng. Ta xét 3 trường hợp sau:

▪ Trường hợp 1: Giả sử $e^{\gamma_1 - \beta_1} = k_1$ ($k_1 \neq 0, 1$ là hằng). Khi đó $e^{\gamma_1} = k_1.e^{\beta_1}$, thay vào (3.52) ta được

$$e^{\gamma_2} - k_1.e^{\beta_2} + e^{\beta_2 - \beta_1} - e^{\gamma_2 - \beta_1} \equiv 1 - k_1 \quad (3.53)$$

Áp dụng định lý 2.7 với (3.53) ta được $e^{\gamma_2 - \beta_1} \equiv c_1$ (c_1 là hằng số). Suy ra $e^{\gamma_2 - \gamma_1} \equiv \frac{c_1}{k_1} = \text{const}$ (mâu thuẫn).

Vì thế $e^{\gamma_2 - \beta_1} \neq \text{const}$.

▪ Trường hợp 2: $e^{\gamma_2 - \beta_1} \equiv k_2$ ($k_2 \neq 0$ là hằng) suy ra $e^{\gamma_2} \equiv k_2.e^{\beta_1}$, thay vào (3.52) ta được

$$k_2.e^{\beta_1} - e^{\beta_2 + \gamma_1 - \beta_1} + e^{\beta_2 - \beta_1} + e^{\gamma_1 - \beta_1} \equiv 1 + k_2 \quad (3.54)$$

$$\square \text{ Nếu } 1 + k_2 = 0, \text{ từ (3.54) ta được } -e^{2\beta_1 - \gamma_1 - \beta_2} + e^{-\gamma_1} + e^{-\beta_2} \equiv 1 \quad (3.55)$$

Áp dụng định lý 2.6 vào (3.55) ta được $-e^{2\beta_1 - \gamma_1 - \beta_2} \equiv 1 \Rightarrow e^{-\gamma_1} \equiv -e^{-\beta_2} \Rightarrow e^{2(\gamma_1 - \beta_1)} \equiv 1$ (mâu thuẫn).

◻ Nếu $1 + k_2 \neq 0$, áp dụng định lý 2.7 đối với (3.54) ta được $e^{\beta_2 + \gamma_1 - \beta_1} \equiv c_2$ ($c_2 \neq 0$ là hằng). Thay $e^{\gamma_1} \equiv c_2.e^{\beta_1 - \beta_2}$ vào (3.54) ta được $k_2.e^{\beta_1} + e^{\beta_2 - \beta_1} + c_2.e^{-\beta_2} \equiv 1 + k_2 + c_2$ (3.56)

Áp dụng định lý 2.7 ta được $1 + k_2 + c_2 = 0$ và do đó từ (3.56) suy ra

$$-k_2.e^{2\beta_1-\beta_2} - c_2.e^{\beta_1-2\beta_2} \equiv 1 \quad (3.57)$$

Từ định lý 2.7 ta thấy cả hai hàm $e^{2\beta_1-\beta_2}$ và $e^{\beta_1-2\beta_2}$ đều là hàm hằng nên e^{β_1} và e^{β_2} là hằng (mâu thuẫn).

Vậy $e^{\gamma_2-\beta_1} \neq \text{const}$.

▪ *Trường hợp 3:* $e^{\beta_2+\gamma_1-\beta_1} \equiv k_3$ ($k_3 \neq 0$ là hằng) suy ra $e^{\beta_2-\beta_1} \equiv k_3.e^{-\gamma_1}$. Thay vào (3.52) ta được $e^{\gamma_2} + k_3.e^{-\gamma_1} + e^{\gamma_1-\beta_1} - e^{\gamma_2-\beta_1} \equiv 1 + k_3$

Áp dụng định lý 2.7 ta được $k_3 = -1$. Vì thế phương trình trên trở thành

$$e^{\beta_1} - e^{\beta_1-\gamma_1-\gamma_2} + e^{\gamma_1-\gamma_2} \equiv 1 \quad (3.58)$$

Áp dụng định lý 2.6 vào (3.58) ta được $-e^{\beta_1-\gamma_1-\gamma_2} \equiv 1$ và $e^{\beta_1} \equiv -e^{\gamma_1-\gamma_2}$. Do đó $e^{2\gamma_2} \equiv -1$ (mâu thuẫn).

Vậy giả sử là không đúng. Do đó ta có đpcm ■

Nhận xét: Chia 3 giá trị CM trong định lý 3.16 là hợp lý. Thật vậy vào năm 1991, Jack-Terglane đã đưa ra

$$\text{ví dụ sau: } f = \frac{e^{3\beta}}{e^\beta + 1 - e^{2\beta}} ; g = \frac{e^\beta}{e^\beta + 1 - e^{2\beta}} ; h = \frac{e^{-\beta}}{e^\beta + 1 - e^{2\beta}}$$

trong đó β là hàm nguyên khác hằng.

Rõ ràng f, g, h chia $0, \infty$ CM và chia 1 IM nhưng f, g, h là đôi một khác nhau. Hơn nữa năm 1990, Jack-Terglane [10] đã chứng minh kết quả sau:

♦ **Định lý 3.17:** (Sự duy nhất của 4 hàm phân hình)

Cho f, g, h, k là các hàm phân hình khác hằng và a_1, a_2, a_3 là 3 giá trị phân biệt trong mặt phẳng phức mở rộng. Nếu f, g, h, k chia a_1, a_2 CM và a_3 IM thì ít nhất hai trong f, g, h, k đồng nhất.

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát giả sử $a_1 = 0, a_2 = \infty, a_3 = 1$.

Giả sử định lý không đúng, nghĩa là f, g, h, k khác nhau đôi một. Theo định lý 3.14 ta có

$$S(r, f) = S(r, g) = S(r, h) = S(r, k) := S(r).$$

$$\text{Để thuận tiện ta kí hiệu } \overline{N}(r, 0) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) ; \overline{N}(r, \infty) = \overline{N}(r, f) ; \overline{N}(r, 1) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right).$$

Nếu hai trong $\overline{N}(r, 0), \overline{N}(r, \infty), \overline{N}(r, 1)$ bằng $S(r)$ thì theo định lý 1.12 ta có ít nhất hai trong ba hàm f, g, h đồng nhất (mâu thuẫn). Vì thế ít nhất hai trong $\overline{N}(r, 0), \overline{N}(r, \infty), \overline{N}(r, 1)$ khác $S(r)$.

$$\text{Không mất tính tổng quát giả sử } \overline{N}(r, 0) \neq S(r), \overline{N}(r, 1) \neq S(r) \quad (3.59)$$

Vì f, g, h, k chia $0, \infty$ CM nên tồn tại các hàm nguyên α, β, γ sao cho

$$\frac{f}{g} = e^\alpha ; \frac{f}{h} = e^\beta ; \frac{f}{k} = e^\gamma \quad (3.60)$$

Nếu $\alpha \equiv c = \text{const}$ thì từ (3.59), (3.60) ta có $e^\alpha \equiv 1$ (vì nếu $e^\alpha \neq 1$ thì f, g không chia 1 IM) và vì thế $f \equiv g$ (mâu thuẫn). Do đó $\alpha \neq \text{const}$.

Tương tự $\beta, \gamma, \alpha - \beta, \alpha - \gamma, \beta - \gamma$ khác hằng.

$$\text{Đặt } \frac{f-1}{g-1} = A ; \quad \frac{f-1}{h-1} = B ; \quad \frac{f-1}{k-1} = C \quad (3.61)$$

trong đó A, B, C là các hàm phân hnh. Từ (3.59) ta thấy $A, B, C, \frac{A}{B}, \frac{A}{C}, \frac{B}{C}$ khác hằng. Giải g từ (3.60), (3.61) ta có

$$g = \frac{A-1}{A-e^\alpha} ; \quad g = \frac{\frac{B}{A}-1}{\frac{B}{A}-e^{\beta-\alpha}} \cdot e^{\beta-\alpha} ; \quad g = \frac{\frac{C}{A}-1}{\frac{C}{A}-e^{\gamma-\alpha}} \cdot e^{\gamma-\alpha} \quad (3.62)$$

Từ ba phương trình trên ta có:

$$e^{\alpha-\beta} = \frac{e^\alpha (B-A) + (A-AB)}{B-AB} \quad (3.63) ; \quad e^{\alpha-\gamma} = \frac{e^\alpha (C-A) + (A-AC)}{C-AC} \quad (3.64)$$

$$e^{\beta-\alpha} = \frac{e^\beta (A-B) + (B-AB)}{A-AB} \quad (3.65) ; \quad e^{\gamma-\alpha} = \frac{e^\gamma (A-C) + (C-AC)}{A-AC} \quad (3.66)$$

Từ (3.63), (3.65) ta có e^α và e^β chia 1 IM.

Từ (3.64), (3.66) ta có e^α và e^γ chia 1 IM.

Bởi vì $0, \infty$ là giá trị Picard của $e^\alpha, e^\beta, e^\gamma$ nên theo định lý 1.12 ta có 2 trong $e^\alpha, e^\beta, e^\gamma$ đồng nhất (mâu thuẫn). Vậy ta có đpcm ■

Nhận xét:

Ta thấy điều kiện chia 2 điểm CM và 1 điểm IM là cần thiết. Thật vậy, xét $f = 2e^\alpha - 1 ; f = e^{-\alpha} (2e^\alpha - 1) ; h = (2e^\alpha - 1)^2$ trong đó α là hàm nguyên khác hằng. Rõ ràng f, g, h, k chia ∞ CM và chia 0, 1 IM nhưng f, g, h, k đôi một khác nhau.

Năm 1985, H.X.Yi đã chứng minh định lý sau:

♦ **Định lý 3.18:** Cho f, g là hai hàm phân hình chia nhau ba giá trị $0, 1, \infty$ CM.

$$\text{Nếu } N_{(2)}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + N_{(2)}(r, f) \neq S(r, f)$$

thì $f \equiv g$.

Chứng minh:

$$\text{Giả sử } f \neq g. \text{ Theo định lý 3.15 ta có: } f = \frac{e^\beta - 1}{e^\gamma - 1} ; \quad g = \frac{e^{-\beta} - 1}{e^{-\gamma} - 1} \quad (3.67)$$

$$\text{trong đó } \beta, \gamma \text{ là các hàm nguyên thỏa } e^\beta \neq 1, e^\gamma \neq 1, e^\beta \neq e^\gamma \text{ và } T(r, e^\beta) = O(T(r, f)), \\ T(r, e^\gamma) = O(T(r, f)), \text{ vì thế } T(r, e^{\beta-\gamma}) = O(T(r, f)) \quad (3.68)$$

$$\circ \text{ Rõ ràng không điểm bội của } f(z) \text{ thỏa } \begin{cases} e^\beta - 1 = 0 \\ \beta' = 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

Nếu $\beta \equiv \text{const}$ thì $N_{(2)}\left(r, \frac{1}{f}\right) = 0$

Nếu $\beta \neq \text{const}$ thì từ (3.69) và do không điểm bội của $e^\beta - 1$ cũng là không điểm bội của β' ta có

$$N_{(2)}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq 2N\left(r, \frac{1}{\beta'}\right) < 2.T(r, \beta') + O(1)$$

Từ định lý 1.9 ta có $T(r, \beta') = S(r, e^\beta)$.

Kết hợp với (3.68) ta có $T(r, \beta') = S(r, f)$. Do đó $N_{(2)}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r, f)$ (3.70)

◦ Rõ ràng cực điểm bội của $f(z)$ thoả $\begin{cases} e^\gamma - 1 = 0 \\ \gamma' = 0 \end{cases}$

Tương tự như trên ta cũng có $N_{(2)}(r, f) = S(r, f)$ (3.71)

◦ Ta có $f - 1 = \frac{e^\beta - e^\gamma}{e^\gamma - 1}$ nên không điểm bội của $f - 1$ thoả $\begin{cases} e^\beta - e^\gamma = 0 \\ \beta'.e^\beta - \gamma'.e^\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\beta-\gamma} = 0 \\ (\beta - \gamma)' = 0 \end{cases}$. Do đó

tương tự ta có $N_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) = S(r, f)$ (3.72)

Từ (3.70), (3.71), (3.72) ta có $N_{(2)}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + N_{(2)}(r, f) = S(r, f)$ mâu thuẫn giả thiết. Vậy $f \equiv g$ ■

♦ **Định lý 3.19:** Cho f, g là hai hàm phân hình chia 0, 1 CM và chia ∞ IM.

Kí hiệu $N^*(r, \infty)$ là hàm đếm cực điểm bội của f và g và đếm theo bội nhỏ hơn.

Nếu $N^*(r, \infty) \neq S(r, f)$ (3.73)

thì $f \equiv g$.

Chứng minh:

Đặt $\beta = \left(\frac{f'}{f} - \frac{f'}{f-1}\right) - \left(\frac{g'}{g} - \frac{g'}{g-1}\right) = \frac{-f'}{f(f-1)} + \frac{g'}{g(g-1)}$ (3.74)

Nếu $\beta \neq 0$ thì $m(r, \beta) = S(r, f)$.

Do f, g chia 0, 1 CM nên không điểm của f và $f-1$ không là cực điểm của β . Từ (3.74) ta suy ra cực điểm của f cũng không thể là cực điểm của β . Vì thế β là hàm nguyên. Do đó $T(r, \beta) = S(r, f)$.

Giả sử z_0 là cực điểm của f với bội $p(\geq 2)$ và là cực điểm của g với bội $q(\geq 1)$. Từ (3.74) ta có z_0 là không điểm của β với bội lớn hơn hoặc bằng $\min\{p, q\} - 1$. Do đó

$$N^*(r, \infty) \leq 2.N\left(r, \frac{1}{\beta}\right) \leq 2.T(r, \beta) + O(1) = S(r, f) \quad (\text{mâu thuẫn (3.73)})$$

Vậy $\beta \equiv 0$.

Từ (3.74) ta được $\frac{f'}{f-1} = c \cdot \frac{g'}{g-1} \Rightarrow f = \frac{cg}{(c-1)g+1}$ trong đó $c \neq 0$ là hằng.

Kết hợp với (3.73) ta suy ra $c = 1$ (vì nếu $c \neq 1$ thì f, g không chia ∞ IM)

Từ đó ta có $f \equiv g$ ■

Nhận xét: Đặt $f(z) = \frac{(2e^z - 1)^2}{4(e^z - 1)^2}$; $g(z) = \frac{(2e^z - 1)^2}{1 - e^z}$

Ta thấy f, g chia 0, 1 CM và chia ∞ IM và $N^*(r, \infty) = 0$ (do g chỉ có cực điểm đơn),
 $N_{(2)}\left(r, \frac{1}{f}\right) \neq S(r, f)$ và $f(z) \neq g(z)$. Do đó điều kiện “ f, g chia 0, 1, ∞ CM” trong định lý 3.17 và điều kiện $N^*(r, \infty) \neq S(r, f)$ trong định lý 3.18 là cần thiết.

3.3.3 Sự duy nhất nghiệm của phương trình vi phân:

♦ **Định lý 3.20:** (Jank-Volkman, 1985)

Giả sử f là hàm phân hình thoả phương trình vi phân

$$(f')^n = a_0(z) + a_1(z) \cdot f + \dots + a_{2n}(z) \cdot f^{2n} = P(z, f) \quad (3.75)$$

trong đó n là số nguyên dương và $a_0, a_1, \dots, a_{2n} (\neq 0)$ là các hàm phân hình thoả $\sum_{j=0}^{2n} T(r, a_j) = S(r, f)$
(3.76)

Khi đó $m(r, f) = S(r, f)$

và $m\left(r, \frac{1}{f - \alpha}\right) = S(r, f)$ trong đó α là giá trị hữu hạn sao cho $P(z, \alpha) \neq 0$.

Chứng minh:

Vì $a_{2n} \neq 0$, chia 2 vế (3.75) cho $a_{2n} \cdot f^{2n-1}$ ta có $f = \frac{1}{a_{2n}} \cdot \frac{(f')^n}{f^{2n-1}} - \frac{a_0}{a_{2n}} \cdot \frac{1}{f^{2n-1}} - \dots - \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$

Do đó với $|f| \geq 1$ nên suy ra $|f| \leq \frac{1}{|a_{2n}|} \cdot \left| \frac{f'}{f} \right|^n + \left| \frac{a_0}{a_{2n}} \right| + \dots + \left| \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} \right|$

Vì thế từ định nghĩa hàm $m(r, f)$ và định lý 1.6 ta có $m(r, f) = S(r, f)$.

Đặt $g = f - \alpha$, từ (3.75) ta có $(g')^n = a_{2n} \cdot g^{2n} + b_{2n-1} \cdot g^{2n-1} + \dots + b_1 \cdot g + P(z, \alpha)$ (3.77)

$$\text{và } \sum_{j=1}^{2n-1} T(r, b_j) + T(r, P(z, \alpha)) = S(r, g) = S(r, f)$$

Vì $P(z, \alpha) \neq 0$, chia 2 vế (3.77) cho $P(z, \alpha) \cdot g$ ta có

$$\frac{1}{g} = \frac{a_{2n}}{P} \cdot g^{2n-1} + \frac{b_{2n-1}}{P} \cdot g^{2n-2} + \dots + \frac{b_1}{P} - \frac{(g')^n}{g}$$

Với $|g| \leq 1$ ta có $\frac{1}{|g|} \leq \frac{1}{|g|^n}$, từ (3.77) ta được $\left| \frac{1}{g} \right| \leq \frac{1}{|P|} \cdot \left| \frac{g'}{g} \right|^n + \left| \frac{a_{2n}}{P} \right| + \left| \frac{b_{2n-1}}{P} \right| + \dots + \left| \frac{b_1}{P} \right|$

Vì thế theo định nghĩa hàm $m\left(r, \frac{1}{g}\right)$ và định lý 1.6 ta có $m\left(r, \frac{1}{g}\right) = S(r, g) = S(r, f)$ hay $m\left(r, \frac{1}{f-\alpha}\right) = S(r, f)$ ■

♦ **Định lý 3.21** (E.Mues, 1987): Cho f là hàm phân hình khác 0 thỏa mãn phương trình Riccati:

$$f' = a + b.f + c.f^2 \quad (3.78) \quad \text{trong đó } a, b, c (\neq 0) \text{ là các hàm phân hình tho}$$

$$T(r, a) + T(r, b) + T(r, c) = S(r, f).$$

Hơn nữa ρ là hàm phân hình thỏa $T(r, \rho) = S(r, f)$.

$$(i) \quad \text{Nếu } \rho \text{ thỏa phương trình (3.78) thì } \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-\rho}\right) = S(r, f)$$

$$(ii) \quad \text{Nếu } \rho \text{ không thỏa phương trình (3.78) thì } N\left(r, \frac{1}{f-\rho}\right) = T(r, f) + S(r, f)$$

Chứng minh:

Đặt $g = c.f$ thì phương trình (3.78) có thể viết dưới dạng phương trình Riccati $g' = A + B.g + g^2$ (3.79)

với $T(r, A) + T(r, B) = S(r, f)$.

◦ Dễ thấy nếu ρ thỏa phương trình (3.78) thì $\tau = c.\rho$ thỏa phương trình (3.79)

$$\text{Đặt } h = g - \tau, \text{ phương trình (3.79) có thể viết lại là } h' = h.(B + 2\tau + h) \quad (3.80)$$

$$\text{Áp dụng định lý 3.20 ta được } m(r, h) = S(r, h) = S(r, f). \quad (3.81)$$

$$\text{Mặt khác từ (3.80) ta được } h = \frac{h'}{h} - B - 2\tau \text{ do đó } N(r, h) = \overline{N}(r, h) + S(r, f) \quad (3.82)$$

Từ (3.80), (3.81), (3.82) ta được

$$\begin{aligned} T(r, h) &= T(r, B + 2\tau + h) + S(r, f) \\ &= T\left(r, \frac{h'}{h}\right) + S(r, f) = N\left(r, \frac{h'}{h}\right) + S(r, f) \\ &= \overline{N}(r, h) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{h}\right) + S(r, f) = N(r, h) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{h}\right) + S(r, f) \\ &= T(r, h) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{h}\right) + S(r, f) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } S(r, f) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{h}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{c(f-\rho)}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-\rho}\right) + S(r, f)$$

Vì thế $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-\rho}\right) = S(r, f)$. Từ đó ta thu được (i) của định lý.

◦ Nếu ρ không thỏa phương trình (3.78) thì $h = g - \tau$ thỏa phương trình Riccati

$$h' = A + B\tau + \tau^2 - \tau' + (B + 2\tau)h + h^2 = P(z, h)$$

Vì τ không thỏa (3.79) nên $P(z, 0) \neq 0$. Theo định lý 3.20 ta có $m\left(r, \frac{1}{h}\right) = S(r, f)$.

$$\begin{aligned} \text{Vì thế } T(r, f) &= T(r, f - \rho) + S(r, f) \\ &= N\left(r, \frac{1}{f - \rho}\right) + m\left(r, \frac{1}{f - \rho}\right) + S(r, f) \\ &= N\left(r, \frac{1}{f - \rho}\right) + m\left(r, \frac{1}{c(f - \rho)}\right) + S(r, f) \\ &= N\left(r, \frac{1}{f - \rho}\right) + m\left(r, \frac{1}{h}\right) + S(r, f) = N\left(r, \frac{1}{f - \rho}\right) + S(r, f) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } N\left(r, \frac{1}{f - \rho}\right) = T(r, f) + S(r, f) \quad \blacksquare$$

♦ **Định lý 3.22 :** (Brosch 1989) Cho f, g là hai hàm phân hình khác ~~h~~ không chia nhau 3 giá trị phân biệt $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. Giả sử f thỏa phương trình vi phân $(f')^n = a_0(z) + a_1(z) \cdot f + \dots + a_{2n}(z) \cdot f^{2n} = P(z, f)$

$$(3.83) \text{ trong đó } n \text{ là số nguyên dương và } a_j, (j = \overline{0, 2n}) \text{ là hàm phân hình thỏa } \sum_{j=0}^{2n} T(r, a_j) = S(r, f),$$

$$a_{2n} \neq 0.$$

Nếu $P(z, c_j) \neq 0 (j = 1, 2, 3)$ thì $f(z) \equiv g(z)$.

Chứng minh:

▪ Trước tiên ta giả sử $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = \infty$. Bởi vì f, g chia $0, 1, \infty \in \mathbb{C}$ nên tồn tại các hàm nguyên α, β sao cho $\frac{f}{g} = e^\alpha, \frac{f-1}{g-1} = e^\beta$

$$(3.84)$$

Giả sử $f(z) \not\equiv g(z)$. Ta sẽ chứng minh $e^{\beta-\alpha} \neq \text{const}$.

$$\text{Thật vậy nếu } e^{\beta-\alpha} \equiv c (c \neq 0 \text{ là hằng}) \text{ thì } \frac{f-1}{g-1} \cdot \frac{g}{f} = c \quad (3.85)$$

Áp dụng định lý 3.20 đối với phương trình (3.83) ta có $m(r, f) = S(r, f)$. Vì thế $T(r, f) = N(r, f) + S(r, f)$ nghĩa là f phải có cực điểm, ta gọi z_p là cực điểm của f . Thay cực điểm này vào (3.85) ta được $c = 1$ (vì f, g chia $\infty \in \mathbb{C}$) và do đó $f(z) \equiv g(z)$ (mâu thuẫn). Vậy $e^{\beta-\alpha} \neq \text{const}$. Từ

$$(3.84) \text{ ta có } f = \frac{e^\beta - 1}{e^{\beta-\alpha} - 1} \quad (3.86)$$

Từ (3.83), (3.86) ta được

$$\left[-\beta' \cdot e^\beta + (\beta' - \alpha') e^{\beta-\alpha} + \alpha' \cdot e^{2\beta-\alpha} \right]^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k (e^\beta - 1)^k (e^{\beta-\alpha} - 1)^{2n-k} \quad (3.87)$$

$$\text{Chú ý về phải của (3.87) là } \sum_{k=0}^{2n} \sum_{l=0}^k \sum_{j=0}^{2n-k} a_k \cdot (-1)^{l+j} C_k^l C_{2n-k}^j e^{(l+j)\beta - j\alpha} = \sum_{\mu=0}^{2n} \sum_{v=\mu}^{2n} C_{v,\mu} e^{v\beta - \mu\alpha} \quad (3.88)$$

trong đó $C_{v,\mu}$ là hàm phân hình thỏa $T(r, C_{v,\mu}) = S(r, f), C_{2n,0} = a_{2n} \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\text{Vế trái của (3.87)} &= \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} (-\beta' e^\beta)^{n_1} (\beta' - \alpha')^{n_2} e^{n_2(\beta-\alpha)} (\alpha')^{n_3} e^{n_3(2\beta-\alpha)} \\
&= \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} (-\beta')^{n_1} (\beta' - \alpha')^{n_2} (\alpha')^{n_3} e^{(n+n_3)\beta - (n-n_1)\alpha} \\
&= \sum_{\mu=0}^n \sum_{v=n}^{2n} D_{v,\mu} e^{v\beta - \mu\alpha} \quad (3.89)
\end{aligned}$$

trong đó $D_{v,\mu}$ là hàm phân hình thoả $T(r, D_{v,\mu}) = S(r, f)$, $D_{2n,0} \equiv 0$.

Đặt $A_0 = C_{0,0}$, từ (3.87), (3.88), (3.89) ta có

$$A_0 = C_{0,0} = \sum_{\mu=0}^n \sum_{v=n}^{2n} D_{v,\mu} e^{v\beta - \mu\alpha} - \sum_{\mu=0}^{2n} \sum_{v=\mu, v \geq 1}^{2n} C_{v,\mu} e^{v\beta - \mu\alpha} = \sum_{\mu=0}^{2n} \sum_{v=1}^{2n} E_{v,\mu} e^{v\beta - \mu\alpha} = \sum_{k=1}^{2n(2n+1)} A_k e^{g_k} \quad (3.90)$$

trong đó $E_{v,\mu}, A_k$ là các hàm nguyên thoả $T(r, E_{v,\mu}) = S(r, f)$, $T(r, A_k) = S(r, f)$ và

$$E_{2n,0} = D_{2n,0} - C_{2n,0} = -a_{2n} \neq 0.$$

Chú ý rằng $g_j - g_q = v\beta + \mu\alpha$ với $j, q = 1, 2, \dots, 2n(2n+1)$, $j \neq q$, v, μ là các số nguyên và ít nhất một trong hai là khác 0.

$$\text{Ta sẽ chứng minh } T(r, e^{v\beta + \mu\alpha}) \geq T(r, f) + S(r, f) \quad (3.91)$$

Theo định lý 1.1 ta chỉ cần xét 2 trường hợp $v \geq 0, \mu \geq 0$ và $v \leq 0, \mu \geq 0$. Trường hợp

$$P(z, c_j) \neq 0 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ và áp dụng định lý 3.20 ta được } m(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{1}{f-1}\right) = S(r, f) \quad (3.92)$$

◦ Trường hợp 1: $v \geq 0, \mu \geq 0$ và $v + \mu > 0$

Từ (3.84), (3.92) ta có

$$\begin{aligned}
T(r, e^{v\beta + \mu\alpha}) &= m\left(r, \left(\frac{f}{g}\right)^\mu \cdot \left(\frac{f-1}{g-1}\right)^v\right) = m\left(r, \frac{1}{g^\mu (g-1)^v}\right) + S(r, f) \\
&= T(r, g^\mu (g-1)^v) - N\left(r, \frac{1}{g^\mu (g-1)^v}\right) + S(r, f) \\
&= (\mu + v)T(r, g) - \mu N\left(r, \frac{1}{f}\right) - v N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) \\
&= (\mu + v)[T(r, g) - T(r, f)] + S(r, f) = (\mu + v)m(r, g) + S(r, f) \\
&\geq m(r, g) + S(r, f) = m\left(r, \frac{g}{f}\right) + S(r, f) = T\left(r, \frac{g}{f}\right) + S(r, f) \\
&= T\left(r, \frac{1}{\frac{g}{f} - 1}\right) + S(r, f) \geq N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) = T(r, f) + S(r, f)
\end{aligned}$$

◦ Trường hợp 2: $v \leq 0, \mu \geq 0$ và ít nhất một trong v, μ khác 0. Ta có

$$\begin{aligned}
T(r, e^{\nu\beta+\mu\alpha}) &= m\left(r, \left(\frac{f}{g}\right)^\mu \cdot \left(\frac{g-1}{f-1}\right)^{-\nu}\right) = m\left(r, \frac{(g-1)^{-\nu}}{g^\mu}\right) + S(r, f) \\
&= T\left(r, \frac{(g-1)^{-\nu}}{g^\mu}\right) - N\left(r, \frac{(f-1)^{-\nu}}{f^\mu}\right) + S(r, f) \\
&= \max(\mu, -\nu) \cdot T(r, g) - N\left(r, \frac{1}{f^\mu}\right) - \max(0, -\nu - \mu) \cdot N(r, f) + S(r, f) \\
&\quad (\text{vì } (g-1)^{-\nu} \text{ và } g^\mu \text{ là các đa thức của } g) \\
&= \max(\mu, -\nu) \cdot T(r, g) - \mu T(r, f) - \max(0, -\nu - \mu) \cdot T(r, f) + S(r, f) \\
&= \max(\mu, -\nu) \cdot [T(r, g) - T(r, f)] + S(r, f) \\
&= \max(\mu, -\nu) \cdot m(r, g) + S(r, f) \geq m(r, g) + S(r, f) \geq T(r, f) + S(r, f)
\end{aligned}$$

Vì thế (3.91) đúng.

Do đó $\frac{T(r, A_k)}{T(r, e^{\nu\beta+\mu\alpha})} \leq \frac{T(r, A_k)}{T(r, f) + S(r, f)}$. Mặt khác ta có $T(r, A_k) = S(r, f)$ nên suy ra

$T(r, A_k) = o(T(r, e^{\nu\beta+\mu\alpha}))$. Các hàm A_k ($k = 0, 1, \dots, 2n(2n+1)$) thỏa điều kiện của định lý 2.4 nên ta có $A_k \equiv 0$, ($k = 0, 1, \dots, 2n(2n+1)$) (mâu thuẫn với $E_{2n,0} \neq 0$). Vậy $f(z) \equiv g(z)$.

▪ Xét trường hợp tổng quát, đặt $T(z) = \frac{z-c_1}{z-c_3} \cdot \frac{c_2-c_3}{c_2-c_1}$ (3.93)

Ta có $T(c_1) = 0$, $T(c_2) = 1$, $T(c_3) = \infty$.

Đặt $F = T \circ f$, $G = T \circ g$ (3.94)

Ta có F, G chia $0, 1, \infty$ CM.

Từ (3.93) ta được $T^{-1}(z) = \frac{\alpha \cdot z + \beta}{\gamma \cdot z + \delta}$ trong đó $\alpha = c_3(c_2 - c_1)$, $\beta = c_1(c_3 - c_2)$, $\gamma = c_2 - c_1$, $\delta = c_3 - c_2$ và

$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Từ (3.94) ta được $f = \frac{\alpha \cdot F + \beta}{\gamma \cdot F + \delta}$ (3.95)

Không mất tính tổng quát giả sử $c_3 \neq \infty$ và vì thế $T^{-1}(\infty) = c_3 = \frac{\alpha}{\gamma}$. Thay (3.95) vào phương trình (3.83) ta

được $\frac{\Delta^n \cdot (F')^n}{(\gamma \cdot F + \delta)^{2n}} = \sum_{j=0}^{2n} a_j \cdot \left(\frac{\alpha \cdot F + \beta}{\gamma \cdot F + \delta}\right)^j$

Vì thế $(F')^n = \frac{1}{\Delta^n} \cdot \sum_{j=0}^{2n} a_j \cdot (\alpha \cdot F + \beta)^j \cdot (\gamma \cdot F + \delta)^{2n-j} = P_1(z, F)$
 $= \frac{1}{\Delta^n} \left(\sum_{k=0}^{2n} a_k \cdot \alpha^k \cdot \gamma^{2n-k} \right) \cdot F^{2n} + \dots + \frac{1}{\Delta^n} \left(\sum_{k=0}^{2n} a_k \cdot \beta^k \cdot \delta^{2n-k} \right)$ (3.96)

Hệ số của F^{2n} trong vế phải của (3.96) là

$$\frac{1}{\Delta^n} \left(\sum_{k=0}^{2n} a_k \cdot \alpha^k \cdot \gamma^{2n-k} \right) = \frac{\gamma^{2n}}{\Delta^n} \cdot \sum_{k=0}^{2n} a_k \cdot \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^k = \frac{\gamma^{2n}}{\Delta^n} \cdot \sum_{k=0}^{2n} a_k \cdot c_3^k = \frac{\gamma^{2n}}{\Delta^n} \cdot P(z, c_3) \neq 0 \quad (3.97)$$

Từ (3.96), (3.97) ta thấy F thỏa phương trình $(F')^n = \sum_{j=0}^{2n} b_j \cdot F^j = P_1(z, F)$ trong đó $b_{2n} \neq 0$,

$$\sum_{j=0}^{2n} T(r, b_j) = S(r, F).$$

Từ (3.96) ta có $P_1(z, 0) = \frac{\delta^{2n}}{\Delta^n} \cdot \sum_{j=0}^{2n} a_j \cdot \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^j = \frac{\delta^{2n}}{\Delta^n} \cdot P(z, c_1) \neq 0$ (vì $\frac{\beta}{\delta} = c_1$).

$$P_1(z, 1) = \frac{1}{\Delta^n} \sum_{j=0}^{2n} a_j (\alpha + \beta)^j (\gamma + \delta)^{2n-j} = \frac{(c_3 - c_1)^{2n}}{\Delta^n} \cdot P(z, c_2) \neq 0, \quad P_1(z, \infty) \neq 0.$$

Do đó theo chứng minh trên ta có $F \equiv G$ và do đó $f \equiv g$ ■

Hệ quả: Cho $f(z)$ là hàm phân hình khác hằng, c_1, c_2, c_3 là ba số phức phân biệt thỏa $c_j \neq \pm i$; ($j = 1, 2, 3$).

Nếu $f(z)$ và $\tan(z)$ chia c_1, c_2, c_3 CM thì $f(z) \equiv \tan(z)$.

Chứng minh:

Đặt $g(z) = \tan(z)$. Ta thấy $g(z)$ thỏa phương trình Riccati $g' = g^2 + 1 = (g+i)(g-i)$

Theo định lý 3.22 ta có $f(z) \equiv g(z)$ ■

Nhận xét: Điều kiện $P(z, c_j) \neq 0$ ($j = 1, 2, 3$) trong định lý 3.22 là cần thiết.

Thật vậy, xét $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$; $g(z) = \frac{1}{e^{-z} - 1}$.

Ta thấy f thỏa phương trình $f' = -f(f+1)$ và f, g chia $-1, -\frac{1}{2}, 0, \infty$ CM nhưng $f \neq g$. Lý do là vì -1 và

0 không thỏa điều kiện $P(z, c_j) \neq 0$ ($j = 1, 2, 3$) ■

3.4 Hàm phân hình chia 2 giá trị và 1 giá trị

♦ **Định lý 3.23:** (H.X Yi, 1995) Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng chia $1, \infty$ CM. Nếu

$$N_2\left(r, \frac{1}{f}\right) + N_2\left(r, \frac{1}{g}\right) + 2\overline{N}(r, f) < (\mu + o(1)) \cdot T(r) \quad (r \in I) \quad (3.98)$$

trong đó $\mu < 1$, $T(r) = \max\{T(r, f), T(r, g)\}$, $I \in (0, \infty)$ là tập có độ đo tuyến tính hữu hạn. Khi đó $f \equiv g$

hoặc $f \cdot g \equiv 1$.

Nhận xét: Điều kiện (3.98) trong định lý 3.23 là cần thiết. Thật vậy, xét

$$f = 2e^z(1 - 2e^z) \quad ; \quad g = \frac{1}{4}e^{-z}(2 - e^{-z}).$$

Ta thấy f, g chia $1, \infty$ CM và $N_2\left(r, \frac{1}{f}\right) + N_2\left(r, \frac{1}{g}\right) + 2\overline{N}(r, f) = (1 + o(1)) \cdot T(r)$.

Nhưng $f \neq g$ và $f \cdot g \neq 1$.

Để chứng minh định lý 3.23 ta xét 2 bổ đề sau:

Bổ đề 3.8: Cho f là hàm phân hình khác rỗng, và g là dạng biến đổi phân tuyến tính của f . Nếu $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}(r, g) < (\lambda + o(1)).T(r, f)$ ($r \in I$); trong đó $\lambda < 1$, và tồn tại z_0 sao cho $f(z_0) = g(z_0) = 1$. Khi đó $f \equiv g$ hoặc $f.g \equiv 1$.

Chứng minh:

Bởi vì g là dạng biến đổi phân tuyến tính của f . Đặt $g = \frac{a.f + b}{c.f + d}$ trong đó a, b, c, d là các hằng số sao cho

$ad - bc \neq 0$. Ta xét ba trường hợp sau:

▪ *Trường hợp 1:* $a \neq 0, c \neq 0$.

Bởi vì $ad - bc \neq 0$ nên ít nhất một trong b và d khác 0. Không mất tính tổng quát giả sử $b \neq 0$. Khi đó

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f + \frac{b}{a}}\right). \text{ Vì thế}$$

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f + \frac{b}{a}}\right) &\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}(r, g) \\ &< (\lambda + o(1)).T(r, f) \quad (r \in I) \end{aligned}$$

mâu thuẫn định lý cơ bản thứ hai.

▪ *Trường hợp 2:* $c = 0$.

$$\text{Khi đó } ad \neq 0 \text{ và } g = \frac{a}{d}.f + \frac{b}{d}. \text{ Nếu } b \neq 0 \text{ thì } \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f + \frac{b}{a}}\right).$$

Tương tự như trên ta có điều mâu thuẫn. Do đó $f \equiv g$ và do đó $g = \frac{a}{d}.f$. Cho $z = z_0$ ta thu được $\frac{a}{d} = 1$ vì thế $f \equiv g$.

▪ *Trường hợp 3:* $a = 0$.

$$\text{Khi đó } bc \neq 0 \text{ và } g = \frac{b}{c.f + d}. \text{ Nếu } d \neq 0 \text{ thì } \overline{N}(r, g) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f + \frac{d}{c}}\right), \text{ vì thế}$$

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f + \frac{d}{c}}\right) &\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}(r, g) \\ &< (\lambda + o(1)).T(r, f) \quad (r \in I) \end{aligned}$$

mâu thuẫn định lý cơ bản thứ hai. Vậy $d = 0$ và $f.g = \frac{b}{c}$. Cho $z = z_0$ ta thu được $\frac{b}{c} = 1$, vì thế $f.g \equiv 1$ ■

Bổ đề 3.9: Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng chia 1 CM.

$$\text{Đặt} \quad H = \left(\frac{f''}{f'} - \frac{2 \cdot f'}{f-1} \right) - \left(\frac{g''}{g'} - \frac{2 \cdot g'}{g-1} \right). \quad (3.99)$$

$$\text{Nếu } H \neq 0 \text{ thì } \overline{N_1} \left(r, \frac{1}{f-1} \right) \leq N(r, H) + S(r, f) + S(r, g).$$

Chứng minh:

Theo định lý 1.6 ta có $m(r, H) = S(r, f) + S(r, g)$.

Giả sử z_0 là không điểm đơn của $f-1$, trong lân cận z_0 ta có

$$f(z) = 1 + a_1 \cdot (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3) ; (a_1 \neq 0)$$

$$g(z) = 1 + b_1 \cdot (z - z_0) + b_2 (z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3) ; (b_1 \neq 0)$$

Từ (3.99) ta có $H(z) = O(z - z_0)$ nghĩa là z_0 là không điểm của H .

$$\text{Vì thế } \overline{N_1} \left(r, \frac{1}{f-1} \right) \leq N \left(r, \frac{1}{H} \right) \leq T(r, H) + O(1) \leq N(r, H) + S(r, f) + S(r, g) \quad \blacksquare$$

Chứng minh định lý 3.23:

$$\text{Từ bổ đề 3.9 ta có } \overline{N_1} \left(r, \frac{1}{f-1} \right) \leq N(r, H) + S(r, f) + S(r, g).$$

Bởi vì f, g chia 1, ∞ CM ta thấy H chỉ có thể có cực điểm đơn và không điểm đơn của f, g không thể là cực điểm của H , do đó ta được

$$N(r, H) \leq \overline{N_{(2)}} \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N_{(2)}} \left(r, \frac{1}{g} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{g'} \right)$$

Vì thế

$$\overline{N_1} \left(r, \frac{1}{f-1} \right) \leq \overline{N_{(2)}} \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N_{(2)}} \left(r, \frac{1}{g} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{g'} \right) + S(r, f) + S(r, g)$$

Theo định lý cơ bản thứ hai ta có

$$T(r, f) \leq \overline{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{f-1} \right) + \overline{N}(r, f) - N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right) + S(r, f)$$

$$T(r, g) \leq \overline{N} \left(r, \frac{1}{g} \right) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{g-1} \right) + \overline{N}(r, g) - N_0 \left(r, \frac{1}{g'} \right) + S(r, g)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overline{N} \left(r, \frac{1}{f-1} \right) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{g-1} \right) &= 2 \overline{N} \left(r, \frac{1}{f-1} \right) \leq \overline{N_1} \left(r, \frac{1}{f-1} \right) + N \left(r, \frac{1}{f-1} \right) \\ &\leq N \left(r, \frac{1}{f-1} \right) + \overline{N_{(2)}} \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N_{(2)}} \left(r, \frac{1}{g} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{g'} \right) + S(r, f) + S(r, g) \end{aligned}$$

Vì thế ta có

$$T(r, f) + T(r, g) \leq N_2 \left(r, \frac{1}{f} \right) + N_2 \left(r, \frac{1}{g} \right) + 2 \overline{N}(r, f) + N \left(r, \frac{1}{f-1} \right) + S(r, f) + S(r, g) \quad (3.100)$$

$$\text{Bởi vì } N \left(r, \frac{1}{f-1} \right) \leq T(r, f) + O(1) \text{ và } N \left(r, \frac{1}{f-1} \right) = N \left(r, \frac{1}{g-1} \right) \leq T(r, g) + O(1)$$

$$\text{Vì thế từ (3.100) ta có } (1-o(1))T(r) \leq N_2\left(r, \frac{1}{f}\right) + N_2\left(r, \frac{1}{g}\right) + 2.\overline{N}(r, f) \quad (r \in I) \quad (3.101)$$

Từ giả thiết (3.98) ta có $(1-o(1))T(r) \leq (\mu+o(1)).T(r) \quad (r \in I)$ (mâu thuẫn).

Vì thế $H \equiv 0$, từ (3.99) ta có g là dạng biến đổi phân tuyến tính của f . Từ định lý cơ bản thứ hai và (3.98) ta suy ra 1 không thể là giá trị Picard của f , vì thế tồn tại z_0 sao cho $f(z_0) = g(z_0) = 1$. Từ bổ đề 3.8 ta thu được $f \equiv g$ hoặc $f.g \equiv 1$ ■

♦ **Định lý 3.24:** Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng chia 0, 1 CM. Nếu

$$N_2(r, f) + N_2(r, g) + 2.\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) < (\mu+o(1)).T(r) \quad (r \in I) \quad (3.102)$$

trong đó $\mu < 1$, $T(r) = \max\{T(r, f), T(r, g)\}$. Khi đó $f \equiv g$ hoặc $f.g \equiv 1$.

Chứng minh:

Đặt $F = \frac{1}{f}$, $G = \frac{1}{g}$. Khi đó F, G thoả các giả thiết của định lý 3.23 nên $F \equiv G$ hoặc $F.G \equiv 1$. Do đó $f \equiv g$

hoặc $f.g \equiv 1$ ■

Chương 4:

SỰ XÁC ĐỊNH DUY NHẤT CỦA HÀM PHÂN HÌNH

CHIA GIÁ TRỊ VỚI ĐẠO HÀM CỦA NÓ

Bài toán hàm phân hình chia giá trị với đạo hàm của nó là trường hợp đặc biệt của sự xác định duy nhất các hàm phân hình. Mục đích chính của chương này là chứng minh hàm phân hình khác hằng chia hai giá trị hữu hạn CM hoặc ba giá trị hữu hạn IM với $f^{(k)}$ thì $f \equiv f^{(k)}$. Gồm các kết quả thu được bởi Frank, Ohlenroth, Weissenborn, Schwick, Mues-Reinder...

4.1 Hàm nguyên chia giá trị với đạo hàm của nó

4.1.1 Hàm nguyên chia hai giá trị CM với đạo hàm của nó

♦ **Định lý 4.1:** (Rubel – Yang, 1977 [11])

Cho f là hàm nguyên khác hằng. Nếu f và f' chia a, b CM thì $f \equiv f'$.

Chứng minh:

▪ Nếu chỉ một trong a, b bằng 0, ta giả sử $a = 0, b \neq 0$. Khi đó 0 phải là giá trị Picard của f và f' . Theo định lý 1.8 tồn tại các hàm nguyên khác hằng α, β sao cho $f(z) = e^{\alpha(z)}$ và $f'(z) = e^{\beta(z)}$

(4.1)

$$\text{Khi đó } e^{\beta(z)} = \alpha'(z).e^{\alpha(z)} \quad (4.2)$$

$$\text{Vì } f \text{ và } f' \text{ chia } b \text{ CM nên } \frac{f-b}{f'-b} = e^{\gamma} \quad (\gamma \text{ là hàm nguyên}) \quad (4.3)$$

$$\text{Từ (4.1), (4.3) ta được } \frac{1}{b}.e^{\alpha} + e^{\gamma} - \frac{1}{b}.e^{\beta+\gamma} = 1 \quad (4.4)$$

Ta thấy các hàm $\frac{1}{b}.e^{\alpha}, e^{\gamma}, -\frac{1}{b}.e^{\beta+\gamma}$ là các hàm nguyên không có không điểm và $\frac{1}{b}.e^{\alpha}$ khác hằng nên thỏa điều kiện của định lý 2.6, do đó suy ra $e^{\gamma} \equiv 1$ hoặc $-\frac{1}{b}.e^{\beta+\gamma} \equiv 1$

◦ Nếu $e^{\gamma} \equiv 1$ thì $f \equiv f'$.

◦ Nếu $-\frac{1}{b}.e^{\beta+\gamma} \equiv 1$ thì $e^{\beta} = -b.e^{-\gamma} = b^2.e^{-\alpha}$. Từ (4.2) ta suy ra $e^{2\alpha} = \frac{b^2}{\alpha'}$ (mâu thuẫn vì

$$T(r, \alpha') = S(r, e^{\alpha}).$$

▪ Bây giờ ta giả sử $a \neq 0, b \neq 0$. Khi đó ta cần tìm tại các hàm nguyên α, β sao cho $\frac{f'-a}{f-a} = e^{\alpha};$

$$\frac{f'-b}{f-b} = e^{\beta} \quad (4.5)$$

Giả sử $f \not\equiv f'$. Giải f và f' từ (4.5) ta được

$$f = \frac{b.e^{\beta} - a.e^{\alpha} + a - b}{e^{\beta} - e^{\alpha}} \quad \text{và} \quad f' = \frac{b.e^{\alpha} - a.e^{\beta} + (a-b)e^{\beta+\alpha}}{e^{\alpha} - e^{\beta}} \quad (4.6)$$

Vì thế $a.e^{2\beta} + b.e^{2\alpha} + (a-b)e^{2\alpha+\beta} - (a-b)e^{\alpha+2\beta} + \{(b-a)(\beta'-\alpha') - (a+b)\}e^{\alpha+\beta}$

$$+(a-b).\beta'.e^\beta - (a-b).\alpha'.e^\alpha = 0 \quad (4.7)$$

$$\text{Từ (4.6) ta có } T(r, f) < 2.T(r, e^\alpha) + 2.T(r, e^\beta) + O(1) \quad (4.8)$$

Giả sử $e^\alpha \equiv c$ ($c \neq 0, 1$ là hằng), từ (4.8) ta có $e^\beta \neq \text{const}$.

$$\text{Từ (4.7) suy ra } Ae^{2\beta} + Be^\beta + bc^2 = 0 \quad (4.9)$$

trong đó $A = a - (a-b)c$; $B = (a-b)c^2 + \{(b-a)\beta' - (a+b)\}.c + (a-b)\beta'$

Do đó theo định lý 1.9 ta được $T(r, B) = S(r, e^\beta)$. Mặt khác từ (4.9) ta có $T(r, B) = 2.T(r, e^\beta) + O(1)$ (vô lý). Vậy $e^\alpha \neq \text{const}$.

Tương tự ta có $e^\beta, e^{\beta-\alpha}, e^{\beta-2\alpha}, e^{2\beta-\alpha} \neq \text{const}$.

Chia (4.7) cho e^β ta được

$$\begin{aligned} a.e^\beta + b.e^{2\alpha-\beta} + (a-b)e^{2\alpha} - (a-b)e^{\alpha+\beta} + \{(b-a)(\beta' - \alpha') - (a+b)\}e^\alpha \\ - (a-b).\alpha'.e^{\alpha-\beta} = -(a-b).\beta' \end{aligned} \quad (4.10)$$

Áp dụng định lý 1.11 đối với (4.10) tồn tại các hằng số không đồng thời bằng 0 c_j ($j = \overline{1, 6}$) sao cho

$$c_1.e^\beta + c_2.e^{2\alpha-\beta} + c_3.e^{2\alpha} + c_4.e^{\alpha+\beta} + c_5.\{(b-a)(\beta' - \alpha') - (a+b)\}e^\alpha + c_6.\alpha'.e^{\alpha-\beta} = 0 \quad (4.11)$$

Chia (4.11) cho e^α ta được

$$c_1.e^{\beta-\alpha} + c_2.e^{\alpha-\beta} + c_3.e^\alpha + c_4.e^\beta + c_6.\alpha'.e^{-\beta} = -c_5.\{(b-a)(\beta' - \alpha') - (a+b)\}$$

Áp dụng định lý 1.11 tồn tại các hằng số không đồng thời bằng 0 d_j ($j = \overline{1, 5}$) sao cho

$$d_1.e^{\beta-\alpha} + d_2.e^{\alpha-\beta} + d_3.e^\alpha + d_4.e^\beta + d_5.\alpha'.e^{-\beta} = 0$$

$$\text{Suy ra } d_1.e^{2\beta-\alpha} + d_2.e^\alpha + d_3.e^{\alpha+\beta} + d_4.e^{2\beta} = -d_5.\alpha'$$

Lại áp dụng định lý 1.11 ta được $t_1.e^{2\beta-\alpha} + t_2.e^\alpha + t_3.e^{\alpha+\beta} + t_4.e^{2\beta} = 0$ (t_j ($j = \overline{1, 4}$) là các hằng số không đồng thời bằng 0).

$$\text{Không mất tính tổng quát giả sử } t_4 \neq 0 \text{ ta được } -\frac{t_1}{t_4}.e^{-\alpha} - \frac{t_2}{t_4}.e^{\alpha-2\beta} - \frac{t_3}{t_4}.e^{\alpha-\beta} = 1.$$

Ta thấy $e^{-\alpha}, e^{\alpha-\beta}, e^{\alpha-2\beta}$ khác hằng nên mâu thuẫn với định lý 2.6. Vậy $f \equiv f'$ ■

Năm 1992, Zeng – Wang đã cải tiến định lý 4.1 bằng cách thay các hằng số bởi các hàm nhỏ và thu được kết quả sau bằng phương pháp chứng minh tương tự.

♦ **Định lý 4.2:** (Zeng – Wang, 1992 [12]) Cho f là hàm nguyên khác hằng, $a(z), b(z)$ là các hàm phân hình phân biệt thỏa $T(r, a) + T(r, b) = o(T(r, f))$.

Nếu $f - a = 0 \square f' - a = 0$ và $f - b = 0 \square f' - b = 0$ thì $f \equiv f'$.

▪ **Nhận xét:**

Ta thấy điều kiện f và f' chia hai giá trị CM trong định lý là cần thiết. Thật vậy, xét

$$f(z) = e^{e^z} \cdot \int_0^z e^{-e^t} (1 - e^t) dt. \text{ Ta thấy } \frac{f'-1}{f-1} = e^z \text{ nghĩa là } f \text{ và } f' \text{ chia 1 CM nhưng } f \not\equiv f' \quad \blacksquare$$

4.1.2 Hàm nguyên chia hai giá trị IM với đạo hàm của nó

Năm 1979, Mues – Steinmetz đã cải tiến định lý 4.1 và chứng minh kết quả sau:

♦ **Định lý 4.3:** Cho f là hàm nguyên khác hằng, a, b là hai giá trị hữu hạn phân biệt. Nếu f và f' chia a, b IM thì $f \equiv f'$.

Chứng minh:

Ta xét hai trường hợp:

▪ *Trường hợp 1:* $a.b \neq 0$.

Bởi vì f và f' chia a, b IM và do $a.b \neq 0$ nên không điểm của $f - a$ và $f - b$ chỉ có thể là không điểm đơn. Giả sử $f(z) \neq f'(z)$. Ta có:

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f - f'}\right) &\leq T(r, f - f') + O(1) = m\left(r, f\left(1 - \frac{f'}{f}\right)\right) + O(1) \\ &\leq m(r, f) + S(r, f) = T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Ta thấy: i) $\log^+ a + \log^+ b \geq \log^+ ab$

$$\text{ii) } \log^+ \frac{1}{a} + \log^+ \frac{1}{b} \leq \log^+ \frac{1}{c} + \log^+ \frac{c}{ab}$$

$$\text{Do đó } N\left(r, \frac{1}{f - a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f - b}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f - f'}\right) \leq T(r, f) + S(r, f) \quad (4.11)$$

$$m\left(r, \frac{1}{f - a}\right) + m\left(r, \frac{1}{f - b}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{(f - a)(f - b)}\right) = m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f)$$

$$\text{Vì thế } 2.T(r, f) \leq T(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f) \quad (4.12)$$

$$\text{Mặt khác } \overline{N}\left(r, \frac{1}{f' - a}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f' - b}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f - f'}\right) \leq T(r, f) + S(r, f)$$

$$\text{và do } N\left(r, \frac{1}{f' - a}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f' - a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f' - b}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f' - b}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f''}\right)$$

$$\text{suy ra } N\left(r, \frac{1}{f' - a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f' - b}\right) \leq T(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r, f) \quad (4.13)$$

Từ i), ii) và định lý 1.6 ta được

$$m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + m\left(r, \frac{1}{f' - a}\right) + m\left(r, \frac{1}{f' - b}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r, f)$$

Kết hợp với (4.13) ta được

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + 2.T(r, f) &\leq T(r, f) + T(r, f'') + S(r, f) \\ &\leq T(r, f) + m(r, f') + m\left(r, \frac{f''}{f'}\right) + S(r, f) \\ &= T(r, f) + T(r, f') + S(r, f) \leq m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + T(r, f') + S(r, f) \end{aligned}$$

Suy ra $T(r, f') = S(r, f)$

Do đó từ (4.12) ta có $T(r, f) \leq T(r, f') + S(r, f) = S(r, f)$ hay $T(r, f) = S(r, f)$ (vô lý). Vậy $f \equiv f'$.

▪ *Trường hợp 2:* $a.b = 0$. Không mất tính tổng quát giả sử $a = 0, b = 1$.

Do f và f' chia 0, 1 IM nên ta thấy bội các không điểm của f phải lớn hơn 1 và không điểm của $f-1$

phải là không điểm đơn. Giả sử $f \neq f'$. Đặt $g = \frac{f'(f'-f)}{f(f-1)}$ (4.14)

Bởi vì f và f' chia 0, 1 IM nên g là hàm nguyên và

$$T(r, g) = m\left(r, \frac{f'}{f-1} \cdot \left(\frac{f'}{f} - 1\right)\right) \leq m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1) = S(r, f) \quad (4.15)$$

Hơn nữa từ (4.14) ta có $(f')^2 - f \cdot f' = g(f^2 - f)$ (4.16)

Lấy đạo hàm 2 lần ta được: $2f' \cdot f'' - (f')^2 - f \cdot f''' = g' \cdot (f^2 - f) + g \cdot (2f \cdot f' - f')$ (4.17)

và $2 \cdot (f'')^2 + 2f' \cdot f''' - 3f' \cdot f'' - f \cdot f''' = g'' \cdot (f^2 - f) + 2g' \cdot (2f \cdot f' - f') + g \cdot \{2 \cdot (f')^2 + 2f \cdot f'' - f'''\}$ (4.18)

Gọi z_1 là không điểm của $f-1$. Khi đó $f(z_1) = f'(z_1) = 1$. Từ (4.17), (4.18) ta có

$$f''(z_1) = 1 + g(z_1) \quad (4.19)$$

$$f'''(z_1) = 2 \cdot g'(z_1) - g^2(z_1) + 2 \cdot g(z_1) + 1 \quad (4.20)$$

Đặt $\phi = \frac{f'' - (g+1) \cdot f'}{f-1}$ (4.21)

$$\psi = \frac{f''' - (2g' - g^2 + g + 1) \cdot f'}{f-1} \quad (4.22)$$

Bởi vì $f-1$ chỉ có không điểm đơn và kết hợp với (4.19), (4.20) ta thấy ϕ, ψ là hàm nguyên. Vì thế

$$T(r, \phi) = m(r, \phi) \leq m\left(r, \frac{f''}{f-1}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + m(r, g) + O(1) = S(r, f)$$

Tương tự $T(r, \psi) = S(r, f)$.

Từ (4.21), (4.22) ta có $f' \cdot (2g^2 - g' + \phi) = (f-1)[\psi - \phi' - (1+g) \cdot \phi]$ (4.23)

◦ Nếu $2g^2 - g' + \phi \neq 0$. Do f và f' chia 0,1 IM nên từ (4.23) ta có

$$N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{2g^2 - g' + \phi}\right) = S(r, f)$$

và $\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{\psi - \phi' - (1+g) \cdot \phi}\right) = S(r, f)$

Theo định lý 1.2 ta có $T(r, f) < \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) = S(r, f)$ (vô lý). Do đó

$$2g^2 - g' + \phi \equiv 0 \quad (4.24)$$

Gọi z_0 là không điểm của $f(z)$, từ (4.18), (4.21) ta có $2 \cdot f''(z_0) = -g(z_0)$ và $f''(z_0) = -\phi(z_0)$. Suy ra

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2} \cdot g(z_0).$$

Từ (4.24) ta được $2 \cdot g^2(z_0) + \frac{1}{2} \cdot g(z_0) - g'(z_0) = 0$ (4.25)

◦ Nếu $2 \cdot g^2 + \frac{1}{2} \cdot g - g' \neq 0$. Từ (4.15), (4.25) ta có

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{2.g^2 + \frac{1}{2}.g - g'}\right) = S(r, f)$$

Do đó

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) &\leq N\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) \leq T\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1) \\ &= \overline{N}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + S(r, f) = S(r, f) \quad (\text{do } f \text{ và } f' \text{ chia } 0 \text{ IM}) \end{aligned}$$

Theo định lý cơ bản thứ hai ta có

$$T(r, f) < \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) = S(r, f) \quad (\text{vô lý})$$

$$\text{Do đó } g' \equiv 2.g^2 + \frac{1}{2}.g \quad (4.26)$$

Nếu g là hàm nguyên khác hằng, từ định lý 3.19 ta có $T(r, g) = S(r, g)$ (vô lý). Vậy g là hàm hằng. Từ (4.26) ta thấy $g \equiv 0$ hoặc $g \equiv -\frac{1}{4}$. Bởi vì $f \neq f'$ nên $g \equiv -\frac{1}{4}$. Từ (4.14) ta được $(2f' - f)^2 = f$.

$$\text{Đặt } h = 2f' - f \text{ thì } f = h^2 \Rightarrow f' = 2h.h'. \text{ Vì thế } h' = \frac{h+1}{4} \quad (4.27)$$

Giải (4.27) ta được $h(z) = Ae^{\frac{1}{4}z} - 1$ ($A \neq 0$ là hằng).

Chọn $z^* = 4\pi i - 4\log A$ suy ra $h(z^*) = -2$, $h'(z^*) = -\frac{1}{4}$. Vì thế $f(z^*) = h^2(z^*) = 4$ và

$$f'(z^*) = 2h(z^*).h'(z^*) = 1 \quad (\text{vô lý vì } f, f' \text{ chia } 1).$$

Vậy $f \equiv f'$ ■

4.1.3 Hàm nguyên chia hai giá trị với đạo hàm bậc k của nó

Năm 1990, L.Z.Yang [13] cải tiến định lý 4.1 và chứng minh kết quả sau:

♦ **Định lý 4.4:** Cho f là hàm nguyên khác hằng, k là số nguyên dương, a, b là hai giá trị hữu hạn phân biệt.

Nếu f và $f^{(k)}$ chia a, b CM thì $f \equiv f^{(k)}$.

Chứng minh:

Theo định lý 4.1 ta chỉ cần xét $k \geq 2$. Xét 2 trường hợp sau:

▪ Trường hợp I: $a.b \neq 0$.

Do f và $f^{(k)}$ chia a, b CM nên tồn tại hai hàm nguyên α, β sao cho

$$\frac{f-a}{f^{(k)}-a} = e^\alpha \quad \text{và} \quad \frac{f-b}{f^{(k)}-b} = e^\beta \quad (4.28)$$

$$\text{Do đó } T(r, e^\alpha) + T(r, e^\beta) = O(T(r, f)) \quad (r \notin E) \quad (4.29)$$

Giả sử $f \neq f^{(k)}$, từ (4.28) ta được $e^\alpha \neq 1, e^\beta \neq 1$.

▫ Nếu $e^\alpha \equiv c$ ($c \neq 0, 1$ là hằng), nếu b là giá trị Picard của f và $f^{(k)}$ thì theo định lý 1.7 ta có $T(r, f) < \varepsilon T(r, f) + S(r, f)$ (vô lý) nên b không là giá trị Picard của f và $f^{(k)}$. Do đó tồn tại z_0 sao cho $f(z_0) = f^{(k)}(z_0) = b$ (4.30)

Thay $z = z_0$ vào $\frac{f-a}{f^{(k)}-a} = e^\alpha$ ta được $c = 1$ (vô lý).

Vậy $e^\alpha \neq \text{const}$. Tương tự ta có $e^\beta \neq \text{const}$. Vì thế $\alpha' \neq 0, \beta' \neq 0$.

Từ (4.28) ta có $\alpha' = \frac{f'}{f-a} - \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-a}$

$$\begin{aligned} \text{và } \frac{\alpha'}{f-b} &= \frac{f'}{(f-a)(f-b)} - \frac{f^{(k+1)}}{(f^{(k)}-a)(f-b)} \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{f'}{f-b} - \frac{f'}{f-a} \right) - \frac{f^{(k)}}{f-b} \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-a} - \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}} \right) \end{aligned}$$

Do đó $m\left(r, \frac{\alpha'}{f-b}\right) = S(r, f)$.

Từ (4.29) ta có $m\left(r, \frac{1}{f-b}\right) \leq m\left(r, \frac{\alpha'}{f-b}\right) + m\left(r, \frac{1}{\alpha'}\right) \leq T(r, \alpha') + S(r, f) = S(r, f)$

$$\text{và } N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) = T(r, f) + S(r, f) \quad (4.31)$$

$$\text{Tương tự ta được } N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + S(r, f) \quad (4.32)$$

Mặt khác vì f và $f^{(k)}$ chia a, b CM nên

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) &\leq N\left(r, \frac{1}{f-f^{(k)}}\right) \leq T(r, f-f^{(k)}) + O(1) \\ &= m\left(r, f\left(1 - \frac{f^{(k)}}{f}\right)\right) + O(1) \leq m(r, f) + S(r, f) \\ &= T(r, f) + S(r, f) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Từ (4.31), (4.32), (4.33) ta được $T(r, f) = S(r, f)$ (vô lý). Vậy $f \equiv f^{(k)}$.

▪ Trường hợp 2: $a.b = 0$. Ta giả sử $a \neq 0, b = 0$.

Do f và $f^{(k)}$ chia $a, 0$ CM nên tồn tại các hàm nguyên α, β sao cho $\frac{f-a}{f^{(k)}-a} = e^\alpha$ và $\frac{f}{f^{(k)}} = e^\beta$ (4.34)

$$\text{Ta có } T(r, e^\alpha) + T(r, e^\beta) = O(T(r, f)) \quad (r \notin E) \quad (4.35)$$

Giả sử $f \not\equiv f^{(k)}$, từ (4.34) ta có $e^\alpha \neq 1, e^\beta \neq 1$.

▫ Nếu $e^\beta \equiv c_1$ ($c_1 \neq 0, 1$ là hằng), theo định lý 1.7 ta suy ra a không là giá trị Picard của f và $f^{(k)}$. Do đó tồn tại z_1 sao cho $f(z_1) = f^{(k)}(z_1) = a$. Thay vào (4.34) ta được $c_1 = 1$ (vô lý). Vậy $e^\beta \neq \text{const}$.

▫ Nếu 0 là giá trị Picard của f và $f^{(k)}$ thì $f(z) = e^{Az+B}$ ($A \neq 0$ và B là các hằng số). vì f và $f^{(k)}$ chia a CM nên tồn tại z_0 sao cho $a = e^{Az_0+B} = A^k \cdot e^{Az_0+B} \Rightarrow A^k = 1$ hay $f \equiv f^{(k)}$ (vô lý). Do đó 0 không là giá trị Picard của f và $f^{(k)}$ nên tồn tại z_2 sao cho $f(z_2) = f^{(k)}(z_2) = 0$

$$(4.37)$$

▫ Nếu $e^\alpha \equiv c_2$ ($c_2 \neq 0, 1$ là hằng), từ (4.34), (4.37) ta có $c_2 = 1$ (vô lý) nên $e^\alpha \neq \text{const}$. Vì $\alpha' \neq 0, \beta' \neq 0$.

Từ (4.34) ta được
$$\alpha' = \frac{f'}{f-a} - \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-a}$$

$$\text{và } \frac{\alpha'}{f} = \frac{1}{a} \left(\frac{f'}{f-a} - \frac{f'}{f} \right) - \frac{f^{(k)}}{f} \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-a} - \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}} \right)$$

Vì thế $m\left(r, \frac{\alpha'}{f}\right) = S(r, f)$.

Từ (4.35) ta có $m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{\alpha'}{f}\right) + m\left(r, \frac{1}{\alpha'}\right) \leq T(r, \alpha') + S(r, f) = S(r, f)$

Do đó $N\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r, f) + S(r, f)$ (4.38)

Tương tự $N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + S(r, f)$ (4.39)

Mặt khác tương tự (4.33) ta có $N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leq T(r, f) + S(r, f)$ (4.40)

Từ (4.38), (4.39), (4.40) ta được $T(r, f) = S(r, f)$ (vô lý).

Vậy $f \equiv f^{(k)}$ ■

4.2 Hàm phân hình chia giá trị với đạo hàm của nó

♦ **Định lý 4.5:** (Gundersen, 1980) Cho f là hàm phân hình khác hằng, $b (\neq 0)$ là giá trị hữu hạn. Nếu f và f' chia 0 và b CM thì $f \equiv f'$.

Chứng minh:

Giả sử $f \not\equiv f'$. Trước tiên ta chứng minh

$$\overline{N}_1(r, f) \leq \overline{N}_2(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f'-1}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r, f)$$

trong đó $N_0\left(r, \frac{1}{f''}\right)$ đếm không điểm của f'' mà không là không điểm của $f'-1$.

Thật vậy, đặt $g(z) = \frac{[f''(z)]^2}{(1-f')^3}$.

Nếu z_0 là cực điểm đơn của f thì trong lân cận của z_0 ta có $f(z) = \frac{a}{z-z_0} + O(1)$ (trong đó $a \neq 0$). Vì thế

$$1 - f'(z) = \frac{a}{(z-z_0)^2} + O(1) = \frac{a}{(z-z_0)^2} \cdot \{1 + O(z-z_0)^2\}$$

$$f''(z) = \frac{2a}{(z-z_0)^3} \cdot \{1 + O(z-z_0)^3\}$$

Từ đó ta được $g(z) = \frac{4}{a} \cdot \{1 + O(z-z_0)^2\}$

Do đó z_0 không là không điểm và cực điểm của g , nhưng z_0 là không điểm của g' . Theo định lý cơ bản

thứ nhất ta có $N\left(r, \frac{g}{g'}\right) - N\left(r, \frac{g'}{g}\right) \leq m\left(r, \frac{g'}{g}\right) + O(1) = S(r, f)$

Mặt khác, $N\left(r, \frac{g}{g'}\right) - N\left(r, \frac{g'}{g}\right) = N(r, g) + N\left(r, \frac{1}{g'}\right) - N(r, g') - N\left(r, \frac{1}{g}\right)$

$$= N\left(r, \frac{1}{g'}\right) - N\left(r, \frac{1}{g}\right) - \bar{N}(r, g) = N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) - \bar{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) - \bar{N}(r, g)$$

trong đó $N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right)$ là hàm đếm không điểm của g' mà không là không điểm của g .

Vì thế $\bar{N}_{(1)}(r, f) \leq N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \bar{N}(r, g) + S(r, f)$

Ta thấy chỉ cực điểm bội của f và không điểm của $f'-1$ mới có thể là không điểm và cực điểm của g , và không điểm của f'' không thể là không điểm của $f'-1$. Vì thế ta có

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \bar{N}(r, g) \leq \bar{N}_{(2)}(r, f) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f'-1}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{f''}\right)$$

Vậy ta có $\bar{N}_{(1)}(r, f) \leq \bar{N}_{(2)}(r, f) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f'-1}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r, f).$

Vì f, f' chia 0 CM nên 0 là giá trị Picard của f và f' . Do f, f' chia ∞ IM nên theo định lý 3.14 ta có

$$T(r, f) = O(T(r, f')), \quad r \notin E.$$

Từ định lý cơ bản thứ hai, do 0 là giá trị Picard của f' nên ta có

$$T(r, f') \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f'-b}\right) + \bar{N}(r, f') + S(r, f')$$

$$\leq N\left(r, \frac{1}{\frac{f'}{f}-1}\right) + \bar{N}(r, f') + S(r, f') \quad (\text{do } f, f' \text{ chia } b \text{ CM})$$

$$\leq T\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \bar{N}(r, f') + S(r, f') = N\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \bar{N}(r, f') + S(r, f')$$

$$\leq 2\bar{N}(r, f') + S(r, f') \leq T(r, f') + S(r, f') \quad (\text{do } f, f' \text{ chia } \infty \text{ IM})$$

Từ đó suy ra $2\bar{N}(r, f') = T(r, f') + S(r, f')$

$$2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f'-b}\right) = T(r, f') + S(r, f') \quad (4.41)$$

Mặt khác ta có $T(r, f') \leq N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f'-b}\right) + \overline{N}(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r, f')$

Nên $N\left(r, \frac{1}{f''}\right) = S(r, f')$

Theo chứng minh trên ta có

$$\begin{aligned} \overline{N}_{(1)}(r, f) &\leq \overline{N}_{(1)}(r, f+z) \leq \overline{N}_{(2)}(r, f+z) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r, f+z) \\ &\leq \overline{N}_{(2)}(r, f) + S(r, f') \end{aligned} \quad (4.42)$$

Từ (4.41), (4.42) ta được $\overline{N}_{(2)}(r, f) = S(r, f)$, $\overline{N}_{(1)}(r, f) = S(r, f)$

nên $\overline{N}(r, f') = \overline{N}(r, f) = S(r, f)$.

Từ (4.41) suy ra $T(r, f') = S(r, f')$ (vô lý).

Vậy $f \equiv f'$.

♦ **Định lý 4.6:** (Mues – Steinmetz and Gundersen) Cho f là hàm phân hình khác hằng, a_1, a_2, a_3 là ba giá trị hữu hạn phân biệt. Nếu f và f' chia a_1, a_2, a_3 IM thì $f \equiv f'$.

Chứng minh:

Giả sử $f \not\equiv f'$. Khi đó

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f-f'}\right) &\leq T(r, f-f') + O(1) = N(r, f') + m\left(r, f \cdot \left(1 - \frac{f'}{f}\right)\right) + O(1) \\ &\leq N(r, f) + \overline{N}(r, f) + m(r, f) + S(r, f) = T(r, f) + \overline{N}(r, f) + S(r, f) \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\text{Mặt khác ta có } \sum_{i=1}^3 m\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f) \quad (4.44)$$

◦ Giả sử $a_1.a_2.a_3 \neq 0$. Bởi vì a_1, a_2, a_3 là giá chia IM của f và f' nên không điểm đơn của $f-a_i$, ($i=1,2,3$) chỉ có thể là không điểm đơn. Vì thế từ (4.43) ta có

$$\sum_{i=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f-f'}\right) \leq T(r, f) + \overline{N}(r, f) + S(r, f) \quad (4.45)$$

$$\text{Từ (4.44), (4.45) ta có } 3.T(r, f) \leq T(r, f) + \overline{N}(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f)$$

$$\text{hay } 2.T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f) \quad (4.46)$$

◦ Nếu $a_1.a_2.a_3 = 0$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_3 = 0$. Khi đó không điểm của $f-a_i$, ($i=1,2$) là không điểm đơn và không điểm của f là không điểm bội. Vì thế

$$\sum_{i=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) = \sum_{i=1}^2 N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f-f'}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$$

$$\text{Từ (4.43) ta có } \sum_{i=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) \leq T(r, f) + \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f) \quad (4.47)$$

Kết hợp (4.44), (4.47) ta thu được $2.T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + T(r, f') + S(r, f)$

Tương tự ta cũng có $2.T(r, f') \leq \overline{N}(r, f) + T(r, f) + S(r, f)$ (4.48)

Mặt khác do a_1, a_2, a_3 và ∞ là giá trị chia IM của f và f' nên theo định lý 3.9 ta có

$$T(r, f') = T(r, f) + S(r, f) \quad (4.49)$$

Từ (4.46), (4.48), (4.49) ta có $T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + S(r, f)$

Vì thế $T(r, f') = N(r, f) + \overline{N}(r, f) + m(r, f') \geq 2.\overline{N}(r, f) \geq 2.T(r, f) + S(r, f)$

Kết hợp (4.49) ta suy ra $T(r, f) = S(r, f)$ (vô lý)

Vậy $f \equiv f'$ ■

KẾT LUẬN

Lý thuyết Nevanlinna là lý thuyết tương đối hiện đại và là một trong những hướng phát triển của Toán học hiện nay. Trong đó lý thuyết Nevanlinna về sự xác định duy nhất các hàm phân hình đang mở ra một hướng phát triển mới.

Luận văn đã tổng hợp một cách có hệ thống các kết quả thu được về sự xác định duy nhất các hàm phân hình khi chúng chia 5, 4, 3, 2, 1 giá trị và trình bày một số ứng dụng trong phương trình vi phân. Đồng thời đưa ra một số nhận xét quan trọng sau mỗi định lý.

Tuy nhiên còn nhiều vấn đề quan trọng của lý thuyết Nevanlinna chưa được đề cập trong luận văn như: lý thuyết về tập xác định duy nhất, lý thuyết p -adic ... là những nhánh phát triển khác của lý thuyết Nevanlinna. Tôi hi vọng sẽ tiếp tục nghiên cứu sâu hơn về đề tài này.

Luận văn này chủ yếu dựa vào tài liệu “Uniqueness Theory of Meromorphic Functions” của Chung-Chun Yang và Hong-Xun Yi, là quyển sách đầu tiên về lý thuyết xác định duy nhất các hàm phân hình, tập hợp hầu hết những kết quả mới nhất trong lĩnh vực này những năm gần đây và các bài báo liên quan.

Một lần nữa tôi xin chân thành cảm ơn Tiến sĩ Nguyễn Văn Đông đã tận tình hướng dẫn tôi hoàn thành tốt luận văn này.

Tp. Hồ Chí Minh – Tháng 11 năm 2009

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Chung – Chun Yang and Hong – Xun Yi (2003), *Uniqueness of Meromorphic functions*, Science Press Beijing, New York.
2. W. Cherry and Z. Ye (2001), *Nevanlinna's Theory of Distribution*, Springer.
3. W.K Hayman (1964), *Meromorphic functions*, The Clarendon Press, Oxford.
4. *Meromorphic function that share one or two values*, Complex variables.
5. K. Niino and M. Ozawa (1970), *Deficiencies of an entire algebroidal function*, Kodai Math. Sem. Rep., 22, 98 – 113.
6. H. X. Yi (1997), *Some theorems on systems of meromorphic functions II*, J. Shandong Univ, 32, No.2, 121 – 127.
7. C. C. Yang, *Further results on the Nevanlinna's five-value theorem*, to appear.
8. Q. D. Zhang (1999), *A unicity theorem for meromorphic functions dealing with derivatives and sharing sets*, J. China Univ., Mining and Technology, 28, No.4, 353 – 356.
9. G. G. Gundersen (1983), *Meromorphic functions that share four values*, Trans. Amer. Math. Soc., 227, 545 – 567.
10. G. Jank and N. Terjane (1990), *Meromorphic functions sharing three values*, Math. Pannonica, 2, 37 – 46.
11. L. A. Rubel and C. C. Yang (1976), *Values shared by an entire function and its derivative*, in “Complex analysis, Kentucky, 1976”, Lecture Notes in Math., Vol. 599, Springer, 101 – 103.
12. J. H. Zheng and S. P. Wang (1992), *On uniqueness of meromorphic functions and their derivatives*, Adv. Math., 21, 334 – 341.
13. L.Z Yang (1990), *Entire functions that share finite values with their derivatives*, Bull. Austral. Math. Soc., 41, 337 – 342.
14. G. G. Gundersen (1979), *Meromorphic functions that share three or four values*, J. London Math. Soc., 20, 457 – 466.