

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HỒ CHÍ MINH

NGHIÊM XUÂN CẢNH

MÔ ĐUN TỰ DO TRÊN VÀNH CHỈNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

CHUYÊN NGÀNH: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ

NGƯỜI HƯỚNG DẪN:
TS. TRẦN HUYỀN

TP. HỒ CHÍ MINH - 2008

§1. MƠ ĐUN CON CỦA MƠ ĐUN HẠNG HỮU HẠN

TRN VNH CHÍNH

Nhĩ chung khi ta cĩ A l mơ đun con của mơ đun tự do X trn vnh chính R , từ một cơ sở của A thì khơng thể bổ sung tới cơ sở của mơ đun X . Tuy nhĩn ta cĩ được một kết quả kh th vĩ sau đĩ:

Đĩnh lý 3.1.1:

Giả sử R l vnh chính, X l một R -mơ đun tự do hạng n v A l một mơ đun con của X . Khi đĩ: tồn tại một cơ sở $\{e_1, \dots, e_n\}$ của X v n hệ tử $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ thuộc R sao cho $\{\alpha_1 e_1, \dots, \alpha_n e_n\}$ l một hệ sinh của A .

Trước hết ta nu cĩ nhận xt sau:

Nhĩn xt :

Nếu R l vnh chính, X l một R -mơ đun tự do cĩ hạng n v A l một mơ đun con của X , thì:

a) $\forall f \in \text{Hom}_R(X, R) \Rightarrow f(A)$ l mơ đun con của R

$\Rightarrow f(A)$ l một ĩđĩn của vnh chính R

$\Rightarrow f(A) = R\alpha_f$ với $\alpha_f \in R$.

b) Trong mỗi tập hợp khơng rĩng S nhĩng ĩđĩn của vnh chính R luĩn tồn tại một ĩđĩn tối đĩi.

Thật vậy giả sử trong S khơng tồn tại một ĩđĩn tối đĩi nĩ v giả sử $R\alpha_1 \in S$ suy ra $R\alpha_1$ khơng phải l tối đĩi nn tồn tại $R\alpha_2 \in S$ sao cho $R\alpha_1 \subset R\alpha_2$, vĩ $R\alpha_2$ khơng phải l tối đĩi nn tồn tại $R\alpha_3 \in S$ sao cho $R\alpha_2 \subset R\alpha_3$, tiếp tục như vậy ta sẽ được một dy thực sự tăng vĩ hạn: $R\alpha_1 \subset R\alpha_2 \subset R\alpha_3 \subset \dots$, mu thuẫn vĩĩ tính chất 1.4.2.5 của vnh chính l mọi dy thực sự tăng nhĩng ĩđĩn đều hữu hạn.

c) Trong tập hợp cc idan chính $R\alpha_f$ với $f \in \text{Hom}_R(X, R)$, tồn tại một phần tử tối đại, giả sử $m \in \text{Hom}_R(X, R)$ sao cho idan $R\alpha_m = m(A)$ l tối đại trong cc $R\alpha_f$ do dĩ tồn tại $e' \in A$ sao cho $m(e') = \alpha_m$.

d) $\forall f \in \text{Hom}_R(X, R)$ ta chứng minh được $\alpha_m / f(e')$. Thật vậy nếu δ l UCLN của α_m v $f(e')$ (δ tồn tại do tính chất 1.4.2.4 của vnh chính R) thì $\delta = \beta \alpha_m + \gamma f(e')$ với $\beta, \gamma \in R$. Do dĩ $\delta = \beta m(e') + \gamma f(e') = (\beta m + \gamma f)(e')$.

Đặt $g = (\beta m + \gamma f)$, ta được $g \in \text{Hom}_R(X, R)$ v $\delta = g(e')$.

Vì δ / α_m nn $R\alpha_m \subset R\delta = Rg(e') = g(Re') \subset g(A) = R\alpha_g$.

M $R\alpha_m$ tối đại trong cc $R\alpha_f$ nn từ $R\alpha_m \subset R\delta \subset R\alpha_g$ ta suy ra $R\alpha_m = R\delta = R\alpha_g$ do dĩ α_m / δ m $\delta / f(e')$ nn $\alpha_m / f(e')$.

e) Giả sử $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ l một cơ sở của X . Ta xt cc hm tọa độ:

$p_i : X \rightarrow R$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i \mapsto \alpha_i$$

Như vậy $p_i \in \text{Hom}_R(X, R)$ do dĩ $\alpha_m / p_i(e')$ với $i = \overline{1, n}$

Nn $p_i(e') = \alpha_m \beta_i$, $i = \overline{1, n}$.

Suy ra $e' = \sum_{i=1}^n \alpha_m \beta_i \varepsilon_i = \alpha_m \sum_{i=1}^n \beta_i \varepsilon_i = \alpha_m e$ với $e = \sum_{i=1}^n \beta_i \varepsilon_i$.

$\Rightarrow me' = m\alpha_m e$ hay $\alpha_m = \alpha_m m(e) \Rightarrow m(e) = 1$ (vì $\alpha_m \neq 0$).

f) Ta chứng minh được:

i) $X = Re + \text{Ker}(m)$

ii) $A = Re' + (A \cap \text{Ker}(m))$

Thật vậy:

* $\forall x \in X$, ta cũ $x = m(x)e + (x - m(x)e)$

$$M \quad m(x - m(x)e) = m(x) - m(x)m(e) = m(x) - m(x) = 0$$

$$Nn \quad x - m(x)(e) \in \text{Ker}(m). \text{ Vậy } x = m(x)e + (x - m(x)e) \in \text{Re} + \text{Ker}(m)$$

$$\Rightarrow X \subset \text{Re} + \text{Ker}(m)$$

$$\text{hiên nhin } X \supset \text{Re} + \text{Ker}(m)$$

$$\text{Vậy } X = \text{Re} + \text{Ker}(m).$$

* $\forall y \in A$, ta cũ $m(y) = \beta \alpha_m$ với $\beta \in R$ v ta cũ thể phn tích:

$$y = \beta \alpha_m e + (y - \beta \alpha_m e) = \beta (\alpha_m e) + (y - m(y)e) = \beta e' + (y - m(y)e)$$

$$m \quad \begin{cases} m(y - m(y)e) = m(y) - m(y)m(e) = m(y) - m(y) = 0 \\ y - m(y)e = y - \beta \alpha_m e = y - \beta e' \in A \end{cases}$$

$$nn \quad y - m(y)e \in (A \cap \text{Ker}(m))$$

$$\text{do cũ } y \in \text{Re}' + (A \cap \text{Ker}(m))$$

$$\text{hay } A \subset \text{Re}' + (A \cap \text{Ker}(m))$$

$$m \text{ hiên nhin } A \supset \text{Re}' + (A \cap \text{Ker}(m))$$

$$nn \quad A = \text{Re}' + (A \cap \text{Ker}(m)).$$

By giờ ta chứng minh định ly:

Nếu $n = 0$ thì mọi việc r rng.

Nếu $n > 0$ thì theo i) ở nhận xt f) ta cũ $\text{Ker}(m)$ l mơ đun tự do v cũ hạng $n-1$ vì tổng trong i) l tổng trực tiếp.

p dụng giả thiết quy nạp vo mơ đun tự do $\text{Ker}(m)$ v mơ đun con $A \cap \text{Ker}(m)$ của nĩ thì cũ một cơ sở $\{e_2, \dots, e_n\}$ của $\text{Ker}(m)$ v $n-1$ hệ tử $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ thuộc R sao cho $\{\alpha_i e_i\}_{i=2, n}$ l một hệ sinh của $A \cap \text{Ker}(m)$.

Với cc ký hiệu ở phần nhận xt trn, nếu ta đặt $\alpha_1 = \alpha_m$ v $e_1 = e$ thì theo i) ta được $\{e_i\}_{i=1, n}$ l cơ sở của X v theo ii) ta cũ $\{\alpha_i e_i\}_{i=1, n}$ l một hệ sinh của A .

Hệ quả:

Nếu X là một môđun tự do trên vành chính R và có hạng n , A là môđun con của X thì tồn tại một cơ sở $\{e_i\}_{i=1, \overline{n}}$ của X và các hệ tử khác 0: $\{\alpha_i\}_{i=1, \overline{k}}$, $k \leq n$ sao cho $\{\alpha_i e_i\}_{i=1, \overline{k}}$ là cơ sở của A .

Thật vậy trong định lý 3.1.1, ta chỉ cần loại bỏ các $\alpha_i = 0$ (thì $\alpha_i e_i = 0$), sau đó chỉnh số lại thì ta được một cơ sở của A .

Nhận xét:

1. A là môđun con của môđun tự do X trên vành chính R , X có hạng là n . Khi đó hạng $A \leq$ hạng X .

2. Hệ quả trên vẫn còn đúng khi các hệ tử α_i thỏa điều kiện α_i / α_{i+1} , $1 \leq i \leq k-1$.

Ứng dụng quan trọng của định lý này đối với các môđun hữu hạn sinh trên vành chính cho phép ta phân tích các môđun hữu hạn sinh trên vành chính thành tổng các môđun cyclic. Chúng ta nhắc lại rằng một môđun X được gọi là môđun cyclic nếu nó có dạng $X = Ra$, với a là một phần tử không thuộc X .

Định lý 3.1.2:

Nếu R là vành chính và X là một R -môđun hữu hạn sinh thì

$$X \cong (R/I_1) \times (R/I_2) \times \dots \times (R/I_n)$$

Trong đó I_i là các ideal của R thỏa $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n$

Chứng minh

Ta chỉ cần X là R -môđun hữu hạn sinh nên ta có thể giả sử $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là một hệ sinh của X .

Xét R -môđun tự do T sinh ra bởi S thì ta có thể xem S là một cơ sở của T do đó có phép nhúng chính tắc $g: S \rightarrow X$ mở rộng được thành một toàn cấu $h: T \rightarrow X$.

Vậy theo định lý Nơ – te ta được $X \cong T / \text{Ker } h$.

Theo hệ quả nhận xét của định lý 3.1.1 thì tồn tại một cơ sở $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ của T , một số tự nhiên $k \leq n$ và k hệ tử khác không $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sao cho $\{\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \dots, \alpha_k e_k\}$ là một cơ sở của $\text{Ker } h$ và α_i / α_{i+1} ($1 \leq i \leq k-1$).

Đặt $\alpha_i = 0$ với $k+1 \leq i \leq n$. Khi đó:

$$X \cong T/\text{Ker } h \cong (Re_1 \times \dots \times Re_n) / (R\alpha_1 e_1 \times \dots \times R\alpha_n e_n) \quad (1)$$

Mặt khác

$$(Re_1 \times \dots \times Re_n) \rightarrow (Re_1 / R\alpha_1 e_1) \times \dots \times (Re_n / R\alpha_n e_n)$$

$$(\alpha_1 e_1, \dots, \alpha_n e_n) \mapsto (\overline{\alpha_1 e_1}, \dots, \overline{\alpha_n e_n})$$

là một toàn cấu với hạt nhân là $R\alpha_1 e_1 \times \dots \times R\alpha_n e_n$.

Do đó theo định lý Nơ – te, ta có

$$\begin{aligned} (Re_1 \times \dots \times Re_n) / (R\alpha_1 e_1 \times \dots \times R\alpha_n e_n) &\stackrel{(2)}{\cong} (Re_1 / R\alpha_1 e_1) \times \dots \times (Re_n / R\alpha_n e_n) \\ (1)(2) &\Rightarrow X \cong (Re_1 / R\alpha_1 e_1) \times \dots \times (Re_n / R\alpha_n e_n) \\ &\cong (R / R\alpha_1) \times \dots \times (R / R\alpha_n) \end{aligned}$$

Vì α_i / α_{i+1} nên $I_i = R\alpha_i \supseteq R\alpha_{i+1} = I_{i+1}$.

Vậy $X \cong (R / I_1) \times \dots \times (R / I_n)$ trong đó I_i là các ideal của R thỏa $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n$.

Ta nhận thấy giả thiết hữu hạn sinh trong các mệnh đề trên là cần thiết vì trong trường hợp môđun không hữu hạn sinh thì cho d trên vnh chính cũng không phân tích được, chẳng hạn $\mathbb{Q}$ - môđun $(\mathbb{Q}, +)$ không hữu hạn sinh, không phân tích được thành tổng trực tiếp các môđun cyclic. Thật vậy:

$(\mathbb{Q}, +)$ không hữu hạn sinh:

Nếu $(\mathbb{Q}, +)$ có hệ sinh là $\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ với $q_i = \frac{m_i}{n_i}$ thì đặt $l = [n_1, n_2, \dots, n_k]$, khi

đã có thể xem $\mathbb{Q} = \langle \frac{1}{l} \rangle = m \frac{1}{l+1} \in \mathbb{Q}$, không biểu diễn được qua $\frac{1}{l}$, vô lý.

. $\square$ - mơ đun $(\square, +)$ không l mơ đun tự do:

Trước hết ta thấy mọi hệ gồm hai phần tử thuộc $\square \setminus \{0\}$ đều phụ thuộc tuyến

tính vì : bất kỳ $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \square \setminus \{0\}$ thì pn. $\frac{m}{n} - mq. \frac{p}{q} = 0$.

Do dĩ nếu $\square$ tự do thì $\square = \langle \frac{1}{q} \rangle$, vớ lý vì $\frac{1}{q+1} \in \square$ nhưng không biểu diễn được qua $\frac{1}{q}$.

Vậy $\square$ - mơ đun $(\square, +)$ không l mơ đun tự do m $\square$ l vnh chính nn $\square$ - mơ đun $(\square, +)$ không l mơ đun xạ ảnh.

$(\square, +)$ không phn tích được thnh tổng trực tiếp cc mơ đun cyclic:

Vì nếu $(\square, +)$ phn tích được thì do $(\square, +)$ không xoắn nn cc mơ đun con cyclic ny không xoắn do dĩ chng vớ hạn.

$\Rightarrow$ phần tử sinh của mỗi mơ đun con ny cũng tạo thnh một cơ sở.

$\Rightarrow$ mỗi mơ đun con ny tự do nn xạ ảnh.

$\Rightarrow (\square, +)$ l mơ đun xạ ảnh, vớ lý.

§1. MÔ ĐUN VÀ ĐỒNG CẤU

1. Mô đun:

Định nghĩa 1.1.1.1:

Cho R là vành có đơn vị. Nhóm cộng giao hoán X được gọi là R – mô đun trái nếu đã xác định được một ánh xạ.

$$\mu : R \times X \rightarrow X$$

$(r, x) \mapsto r.x$ thỏa các điều kiện sau

$$. M1: 1.x = x \quad \forall x \in X, 1 \text{ là đơn vị của } R.$$

$$. M2: (rs).x = r.(sx) \quad \forall r, s \in R, \forall x \in X$$

$$. M3: (r+s).x = r.x + s.x \quad \forall r, s \in R, \forall x \in X$$

$$. M4: r.(x+y) = r.x + r.y \quad \forall r \in R, \forall x, y \in X$$

Ánh xạ μ được gọi là phép nhân ngoài.

Vành R được gọi là vành các hệ tử hay vành các vô hướng.

Ví dụ mỗi không gian tuyến tính thực là một mô đun với vành hệ tử là trường số thực.

Định nghĩa 1.1.1.2:

Cho X, Y là các R -mô đun. Ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ được gọi là R -đồng cấu nếu $\forall r \in R$ và $\forall x_1, x_2, x \in X$ ta đều có:

$$1. f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$2. f(rx) = rf(x)$$

Ví dụ mỗi ánh xạ tuyến tính giữa các không gian tuyến tính là các đồng cấu mô đun.

Định nghĩa 1.1.1.3:

Cho hai đồng cấu $f: X \rightarrow Y$ và $g: Y \rightarrow Z$.

Tích $g \circ f : X \rightarrow Z$ được xác định bởi $g \circ f(x) = g(f(x))$, $\forall x \in X$.

2. Mô đun con:

Định nghĩa 1.1.2.1:

Cho R - mô đun X và tập con khác rỗng $A \subset X$. A được gọi là mô đun con của X , ký hiệu là $A \triangleleft X$ nếu $\forall x, y \in A, \forall r \in R: x + y \in A$ và $rx \in A$.

Mỗi mô đun X bất kỳ đều có các mô đun con là X và mô đun 0 .

Định nghĩa 1.1.2.2:

Tổng hữu hạn các mô đun con $A_1, A_2, \dots, A_n$ của mô đun X là mô đun con

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mid x_i \in A_i \right\} \text{ của } X.$$

Giao của một họ bất kỳ các mô đun con của X là một mô đun con của X .

Định nghĩa 1.1.2.3:

Mô đun con sinh bởi một tập S trong X , ký hiệu là $\langle S \rangle$ là giao của tất cả các mô đun con của X mà chứa S .

Quy ước $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

Nếu $a \in X$ thì $\langle a \rangle$ được gọi là mô đun con cyclic của X sinh bởi a .

Nếu S chỉ có hữu hạn phần tử thì ta nói $\langle S \rangle$ là mô đun con hữu hạn sinh.

Định nghĩa 1.1.2.4:

Cho $\{X_i\}_{i \in I}$ là họ khác rỗng bất kỳ các mô đun con của X .

Tổng của họ $\{X_i\}_{i \in I}$ là mô đun con $\sum_{i \in I} X_i$ của X sinh bởi $\bigcup_{i \in I} X_i$,

nghĩa là: $\sum_{i \in I} X_i = \langle \bigcup_{i \in I} X_i \rangle$, do đó:

$\forall x \in \sum_{i \in I} X_i \Rightarrow x = \sum_{i \in I} x_i$ với $x_i \in X_i$ và hầu hết các $x_i = 0$, trừ một số hữu hạn.

Các kết quả về mô đun con:

Cho $f: X \rightarrow Y$ là đồng cấu mô đun. Khi đó:

. Nếu $A \triangleleft X$ thì $f(A) \triangleleft Y$

. Nếu $B \triangleleft Y$ thì $f^{-1}(B) \triangleleft X$

Nói riêng $\text{Im} f \triangleleft Y$ và $\text{Ker} f \triangleleft X$.

Các kết quả quan trọng:

Định lý 1.1.2.1:

Cho $f: X \rightarrow Y$ là đồng cấu mô đun, khi đó: f đơn cấu $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0\}$.

Hệ quả: Nếu $g \circ f$ là đơn cấu thì f là đơn cấu.

Định lý 1.1.2.2: (Note 1)

Cho $f: X \rightarrow Y$ là toàn cấu mô đun.

Khi đó tồn tại duy nhất đẳng cấu $\tilde{f}: X/\text{Ker} f \rightarrow Y$ sao cho $f = \tilde{f} \circ p$, trong đó $p: X \rightarrow X/\text{Ker} f$ là phép chiếu chính tắc.

3. Mô đun xoắn-mô đun không xoắn:

Định nghĩa 1.1.3.1:

Cho R là miền nguyên và X là R - mô đun. Phần tử $x \in X$ được gọi là phần tử xoắn nếu tồn tại $\lambda \in R \setminus \{0\}$ mà $\lambda x = 0$.

Đặt $\tau(X)$ là tập hợp tất cả các phần tử xoắn của X .

Dễ thấy $0 \in \tau(X)$

Định nghĩa 1.1.3.2:

Nếu $\tau(X) = X$ thì ta nói X là mô đun xoắn.

Ví dụ: $\mathbb{Z} - \text{mô đun } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là mô đun xoắn.

Định nghĩa 1.1.3.3:

Nếu $\tau(X) = 0$ thì ta nói X là mô đun không xoắn.

Ví dụ: $X/\tau(X)$ là mô đun không xoắn.

§2. CÔNG THỨC VỀ SỐ CHIỀU

Trong không gian vector ta đã biết mối quan hệ về số chiều của các không gian con A, B với số chiều của các không gian $A+B, A \cap B$, cụ thể là:

$$\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B).$$

Còn đối với các mô đun tự do trên vành chính mà có hạng hữu hạn thì kết quả này còn đúng hay không?

Trước hết ta nhận thấy nếu X là mô đun tự do có hạng hữu hạn trên vành chính R và A, B là các mô đun con của X thì theo nhận xét 1 sau định lý 3.1.1 ta có A, B và $A \cap B$ đều có hạng hữu hạn. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

1. Trường hợp $A \cap B = 0$ thì hạng $(A \cap B) = 0$ và cơ sở của $A+B$ là hợp của cơ sở của A và cơ sở của B nên: hạng $(A+B) =$ hạng $A +$ hạng B hay hạng $(A+B) =$ hạng $A +$ hạng $B -$ hạng $(A \cap B)$.

2. Trường hợp $A \cap B \neq 0$ và hạng $A =$ hạng $B =$ hạng $(A \cap B) = k$.

Để giải quyết được trường hợp này, trước hết ta chứng minh một kết quả sau:

Bổ đề:

Hệ $\{u_i\}_{i=\overline{1,k}}$ độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow$ Hệ $\{lu_i\}_{i=\overline{1,k}}$ độc lập tuyến tính, $\forall l \neq 0$

.Giả sử hệ $\{u_i\}_{i=\overline{1,k}}$ độc lập tuyến tính (1), ta chứng minh hệ $\{lu_i\}_{i=\overline{1,k}}$ độc lập tuyến tính, $\forall l \neq 0$.

Xét $\sum_{i=1}^k m_i(lu_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k (m_i l) u_i = 0 \stackrel{do(1)}{\Rightarrow} m_i l = 0, \forall i = \overline{1,k} \Rightarrow m_i = 0, \forall i = \overline{1,k}$ (vì

R là vành chính nên cũng là miền nguyên do đó không có ước của 0 mà $l \neq 0$).

Vậy hệ $\{lu_i\}_{i=\overline{1,k}}$ độc lập tuyến tính, $\forall l \neq 0$.

.Giả sử hệ $\{lu_i\}_{i=\overline{1,k}}$ độc lập tuyến tính, $\forall l \neq 0$ (2), ta chứng minh hệ $\{u_i\}_{i=\overline{1,k}}$ độc lập tuyến tính.

$$\text{Xét } \sum_{i=1}^k m_i u_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k l(m_i u_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k (lm_i) u_i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^k (m_i l) u_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k m_i (lu_i) = 0 \stackrel{do(2)}{\Rightarrow} m_i = 0, \forall i = \overline{1, k}.$$

Vậy hệ $\{u_i\}_{i=\overline{1, k}}$ độc lập tuyến tính.

Bổ đề đã được chứng minh, từ đó suy ra

Hệ quả:

Hệ $\{lu_i\}_{i=\overline{1, k}}$ phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow$ Hệ $\{u_i\}_{i=\overline{1, k}}$ phụ thuộc tuyến tính, $\forall l \neq 0$

Ta trở lại với trường hợp 2:

. Do $A \cap B \subset A$ nên theo hệ quả của mệnh đề 2.2.3 ta chọn được một cơ sở của A là $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ và các hệ tử $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ để $\{\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \dots, \alpha_k e_k\}$ là cơ sở của $A \cap B$.

. Do $A \cap B \subset B$, tương tự ta cũng chọn được một cơ sở của B là $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k\}$ và các hệ tử $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ để $\{\beta_1 \varepsilon_1, \beta_2 \varepsilon_2, \dots, \beta_k \varepsilon_k\}$ là cơ sở của $A \cap B$.

. Khi đó $A+B = \langle \{e_1, e_2, \dots, e_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k\} \rangle$.

Ta sẽ chứng minh mọi hệ có $k+1$ phần tử trong $A+B$ là phụ thuộc tuyến tính.

Trước hết ta thấy hệ $\{e_1, e_2, \dots, e_k, \varepsilon_i\} \forall i = \overline{1, k}$ là phụ thuộc tuyến tính.

Thật vậy, vì $\beta_i \varepsilon_i \in A \cap B$ nên biểu thị tuyến tính được qua cơ sở $\{\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \dots, \alpha_k e_k\}$ nghĩa là tồn tại các $r_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$ thỏa :

$$\beta_i \varepsilon_i = r_1 (\alpha_1 e_1) + r_2 (\alpha_2 e_2) + \dots + r_k (\alpha_k e_k)$$

$$\Rightarrow \beta_i \varepsilon_i - (r_1 \alpha_1) e_1 - (r_2 \alpha_2) e_2 - \dots - (r_k \alpha_k) e_k = 0 \text{ (có } \beta_i \neq 0 \text{)}$$

$\Rightarrow$ hệ $\{e_1, e_2, \dots, e_k, \varepsilon_i\} \forall i = \overline{1, k}$ là phụ thuộc tuyến tính.

Bây giờ ta xét hệ gồm $k+1$ phần tử thuộc $A+B$:

$\{u_1, u_2, \dots, u_{k+1}\}$, vì $\{e_1, e_2, \dots, e_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k\}$ là hệ sinh của $A+B$ nên

$$u_1 = (t_{11}e_1 + t_{12}e_2 + \dots + t_{1k}e_k) + (s_{11}\varepsilon_1 + s_{12}\varepsilon_2 + \dots + s_{1k}\varepsilon_k)$$

$$u_2 = (t_{21}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{2k}e_k) + (s_{21}\varepsilon_1 + s_{22}\varepsilon_2 + \dots + s_{2k}\varepsilon_k)$$

.....

$$u_k = (t_{k1}e_1 + t_{k2}e_2 + \dots + t_{kk}e_k) + (s_{k1}\varepsilon_1 + s_{k2}\varepsilon_2 + \dots + s_{kk}\varepsilon_k)$$

$$u_{k+1} = (t_{k+1,1}e_1 + t_{k+1,2}e_2 + \dots + t_{k+1,k}e_k) + (s_{k+1,1}\varepsilon_1 + s_{k+1,2}\varepsilon_2 + \dots + s_{k+1,k}\varepsilon_k)$$

Khi đó nếu đặt $l = \prod_{i=1}^k \beta_i$ thì $l \neq 0$ và:

$$lu_1 = l \sum_{j=1}^k t_{1j}e_j + [(\prod_{i=2}^k \beta_i)s_{11}] \sum_{j=1}^k r_{1j}\alpha_j e_j + \dots + [(\prod_{i=1}^{k-1} \beta_i)s_{1k}] \sum_{j=1}^k r_{kj}\alpha_j e_j$$

$$lu_2 = l \sum_{j=1}^k t_{2j}e_j + [(\prod_{i=2}^k \beta_i)s_{21}] \sum_{j=1}^k r_{2j}\alpha_j e_j + \dots + [(\prod_{i=1}^{k-1} \beta_i)s_{2k}] \sum_{j=1}^k r_{kj}\alpha_j e_j$$

.....

$$lu_k = l \sum_{j=1}^k t_{kj}e_j + [(\prod_{i=2}^k \beta_i)s_{k1}] \sum_{j=1}^k r_{kj}\alpha_j e_j + \dots + [(\prod_{i=1}^{k-1} \beta_i)s_{kk}] \sum_{j=1}^k r_{kj}\alpha_j e_j$$

$$lu_{k+1} = l \sum_{j=1}^k t_{k+1,j}e_j + [(\prod_{i=2}^k \beta_i)s_{k+1,1}] \sum_{j=1}^k r_{k+1,j}\alpha_j e_j + \dots + [(\prod_{i=1}^{k-1} \beta_i)s_{k+1,k}] \sum_{j=1}^k r_{k+1,j}\alpha_j e_j$$

rõ ràng $k+1$ phần tử $lu_1, lu_2, \dots, lu_{k+1}$ biểu thị tuyến tính được qua k phần tử cơ sở $e_1, e_2, \dots, e_k$ nên theo mệnh đề 2.1.2 ta suy ra hệ gồm $k+1$ phần tử $\{lu_1, lu_2, \dots, lu_{k+1}\}$ phụ thuộc tuyến tính.

Theo hệ quả vừa nêu, ta suy ra hệ gồm $k+1$ phần tử $\{u_1, u_2, \dots, u_{k+1}\}$ phụ thuộc tuyến tính

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \text{hạng}(A+B) \leq k \\ \text{mà } \text{hạng}(A+B) \geq \text{hạng}A \\ \text{và } \text{hạng}(A+B) \geq \text{hạng}B \end{array} \right\} \Rightarrow \text{hạng}(A+B) \geq k \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Rightarrow \text{hạng}(A+B) \leq k \\ \text{mà } \text{hạng}(A+B) \geq \text{hạng}A \\ \text{và } \text{hạng}(A+B) \geq \text{hạng}B \end{array}} \right\} \Rightarrow \text{hạng}(A+B) = k$$

Hay hạng $(A+B) = \text{hạng} A + \text{hạng} B - \text{hạng}(A \cap B)$.

3. Trường hợp có ít nhất hạng A hoặc hạng B khác hạng $(A \cap B)$:

Đặt hạng $A = k$, hạng $B = l$, hạng $(A \cap B) = m$ ($m \leq k, m \leq l$)

.Tương tự trường hợp 2, ta có $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ là cơ sở của A và các hệ tử $\alpha_i, i = \overline{1, k}$ sao cho $\{\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \dots, \alpha_k e_k\}$ là hệ sinh của $A \cap B$, loại bỏ các $\alpha_i = 0$ và đánh số lại để được $\{\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \dots, \alpha_m e_m\}$ ($m \leq k$) là cơ sở của $A \cap B$.

.Cũng như vậy ta được $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l\}$ là cơ sở của B và các hệ tử $\beta_i, i = \overline{1, l}$ sao cho $\{\beta_1 \varepsilon_1, \beta_2 \varepsilon_2, \dots, \beta_l \varepsilon_l\}$ là hệ sinh của $A \cap B$, loại bỏ các $\beta_i = 0$ và đánh số lại để được $\{\beta_1 \varepsilon_1, \beta_2 \varepsilon_2, \dots, \beta_m \varepsilon_m\}$ ($m \leq l$) là cơ sở của $A \cap B$.

.Ta phân tích:

$A = A_1 \oplus A_2$ với $A_1 = \langle \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \rangle$, $A_2 = \langle \{e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_k\} \rangle$

$B = B_1 \oplus B_2$ với $B_1 = \langle \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\} \rangle$, $B_2 = \langle \{\varepsilon_{m+1}, \varepsilon_{m+2}, \dots, \varepsilon_l\} \rangle$

Do đó hạng $A_1 = m$, hạng $B_1 = m$, hạng $A_2 = k - m$, hạng $B_2 = l - m$

$(A_1 + B_1) \cap A_2 = 0, (A_1 + B_1) \cap B_2 = 0, A_2 \cap B_2 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{và } A_1 \cap B_1 \subset A \cap B \\ \text{hơn nữa: } A \cap B \subset A_1 \\ A \cap B \subset B_1 \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B \subset A_1 \cap B_1 \Rightarrow A \cap B = A_1 \cap B_1$$

$\Rightarrow \text{hạng}(A_1 \cap B_1) = \text{hạng}(A \cap B) = m$.

Theo trường hợp 2 ta có:

$\text{hạng}(A_1 + B_1) = \text{hạng} A_1 + \text{hạng} B_1 - \text{hạng}(A_1 \cap B_1) = m + m - m = m$

Lúc đó: $A+B = (A_1 \oplus A_2) + (B_1 \oplus B_2) = (A_1 + B_1) \oplus A_2 \oplus B_2$

Theo trường hợp 1 ta suy ra:

$\text{Hạng}(A+B) = \text{hạng}(A_1 + B_1) + \text{hạng} A_2 + \text{hạng} B_2$

$$= m + (k-m) + (l-m) = k + l - m$$

$$= \text{hạng}A + \text{hạng}B - \text{hạng}A \cap B$$

Tóm lại , ta có kết quả sau:

Mệnh đề:

Nếu X là mô đun tự do có hạng hữu hạn trên vành chính R và A , B là các mô đun con của X thì $\text{hạng}(A+B) = \text{hạng}A + \text{hạng}B - \text{hạng}(A \cap B)$.

§2. MÔ ĐUN CON CỦA MÔ ĐUN TỰ DO TRÊN VÀNH CHÍNH

Nói chung mô đun con của mô đun tự do không chắc là mô đun tự do.

Chẳng hạn $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ là mô đun tự do trên chính nó với cơ sở là $\{(1;1)\}$ có $\mathbb{Z} \times 0 = \{(m;0) / \forall m \in \mathbb{Z}\}$ là mô đun con của R nhưng không là mô đun tự do vì $\{(m;0)\}$ phụ thuộc tuyến tính (do $(0; k).(m; 0) = (0;0) \forall k \neq 0$).

Tuy nhiên khi R là vành chính thì ta có kết quả sau:

Định lý 2.2.1:

Mọi mô đun con A của mô đun tự do X trên vành chính R đều là R -mô đun tự do.

Để chứng minh định lý này ta cần sử dụng một kết quả của lý thuyết tập hợp được gọi là nguyên lý sắp thứ tự tốt.

Nguyên lý sắp thứ tự tốt:

Mọi tập hợp không rỗng đều có thể sắp thứ tự tốt.

Bây giờ ta chứng minh định lý.

Giả sử $\{e_i\}_{i \in I}$ là một cơ sở của X , với I là tập được sắp tốt và p_i là các hàm tọa độ:

$$p_i: X \rightarrow R$$

$$\sum_{i \in I} \alpha_i e_i \mapsto \alpha_i$$

Đặt $X_i = \langle \{e_j\}_{j \leq i} \rangle$ là mô đun con của X sinh ra bởi các e_j với $j \leq i$ và gọi $A_i = A \cap X_i$.

Khi đó $p_i(A_i)$ là một mô đun con của R nên cũng là một ideal của R , mà R là vành chính nên $p_i(A_i) = R \alpha_i$.

Giả sử $a_i \in A_i$ thỏa $p_i(a_i) = \alpha_i$, nếu $\alpha_i = 0$ thì ta quy ước lấy $a_i = 0$. Ta được một họ phần tử của A : $(a_i)_{i \in I}$.

Ta sẽ chứng minh họ $(a_i)_{i \in I}$ mà $a_i \neq 0$ lập thành một cơ sở của A .

Thật vậy $(a_i)_{i \in I}$ là hệ sinh của A :

Ta chỉ cần chứng tỏ với mọi i , họ $(a_j)_{j \leq i}$ sinh ra A_i bằng phép quy nạp siêu hạn.

Giả sử 1 là phần tử bé nhất của I .

$\forall x \in A_1$, ta có $p_1(x) \in p_1(A_1) = R\alpha_1$ nên $p_1(x) = r\alpha_1$ với $r \in R$

mà $\alpha_1 = p_1(a_1)$ nên $p_1(x) = rp_1(a_1)$ suy ra $p_1(x - ra_1) = 0$

Nhưng x và a_1 đều thuộc $A_1 = A \cap X_1$ và $X_1 = \langle e_1 \rangle$ nên $x - ra_1 = r_1 e_1$,
 $r_1 \in R$

Như vậy: $p_1(x - ra_1) = 0 \Leftrightarrow p_1(r_1 e_1) = 0 \Leftrightarrow r_1 p_1(e_1) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0$

Do đó $x - ra_1 = 0 \Rightarrow x = ra_1 \Rightarrow A_1 = \langle a_1 \rangle$.

Giả sử $\forall k \leq i$, $A_k = \langle (a_j)_{j \leq k} \rangle$, ta sẽ chứng minh $A_i = \langle (a_j)_{j \leq i} \rangle$:

$\forall x \in A_i$, $p_i(x) \in p_i(A_i) = R\alpha_i \Rightarrow p_i(x) = r_2 \alpha_i$ với $r_2 \in R$.

Vì $p_i(x - r_2 a_i) = p_i(x) - r_2 p_i(a_i) = r_2 \alpha_i - r_2 \alpha_i = 0$

Nên $x - r_2 a_i \in A_k$ với $k < i$, do đó theo giả thiết quy nạp, $x - r_2 a_i$ là một tổ hợp tuyến tính của các a_j với $j \leq k$ suy ra x là một tổ hợp tuyến tính của các a_j với $j \leq i$.

Vậy A_i được sinh ra bởi các $(a_j)_{j \leq i}$.

Theo nguyên lý quy nạp siêu hạn, mọi $A_i (i \in I)$ đều được sinh ra bởi $(a_j)_{j \leq i}$ suy ra A được sinh ra bởi $(a_i)_{i \in I}$.

$(a_i)_{i \in I}$ với $a_i \neq 0$ là độc lập tuyến tính:

Nếu họ này là phụ thuộc tuyến tính tức là tồn tại một hệ thức tuyến tính $\sum \beta_i a_i = 0$ trong đó họ (β_i) có hữu hạn phần tử khác 0, với ít nhất một $\beta_i \neq 0$.

Gọi m là chỉ số lớn nhất sao cho $\beta_m \neq 0$. Khi đó ta có $\beta_m \alpha_m \neq 0$ (vì $\beta_m \neq 0$, $\alpha_m \neq 0$ và R là miền nguyên). Mặt khác $p_m(a_i) = 0$ với $i < m$ nên $\beta_m \alpha_m = p_m(\beta_m a_m) = p_m(\sum \beta_i a_i) = p_m(0) = 0$, mâu thuẫn.

Dưới đây là một vài ứng dụng của định lý.

Ứng dụng 1:

Chứng minh mệnh đề 2.1.4 phát biểu ở §1, chương 2

Ta có $\{u_i\}_{i \in I}$ độc lập tuyến tính trong X và có thể bổ sung $\{v_j\}_{j \in J}$ tới cơ sở $\{u_i\}_{i \in I} \cup \{v_j\}_{j \in J}$ của X .

Ta cần chứng minh $A = \langle \{u_i\}_{i \in I} \rangle$ là một hạng tử trực tiếp của X . Thật vậy:

A và $B = \langle \{v_j\}_{j \in J} \rangle$ đều là mô đun con của mô đun tự do X trên vành chính R nên theo định lý trên, ta có A và B đều là mô đun tự do, hơn nữa

$$\begin{aligned} \forall x \in A \cap B &\Rightarrow \begin{cases} x = \sum_{i \in I} r_i u_i, r_i \in R \\ x = \sum_{j \in J} s_j v_j, s_j \in R \end{cases} \\ &\Rightarrow \sum_{i \in I} r_i u_i - \sum_{j \in J} s_j v_j = 0 \Rightarrow \sum_{i \in I} r_i u_i + \sum_{j \in J} (-s_j) v_j = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} r_i = 0, \forall i \in I \\ -s_j = 0, \forall j \in J \Rightarrow s_j = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ hay } A \cap B = 0. \end{aligned}$$

* Ta có $\{u_i\}_{i \in I}$ độc lập tuyến tính trong X và $A = \langle \{u_i\}_{i \in I} \rangle$ là một hạng tử trực tiếp của X .

$\Rightarrow X = A \oplus B$, vì A và B là mô đun con của mô đun tự do X trên vành chính nên theo định lý, B cũng là mô đun tự do nghĩa là B có một cơ sở, giả sử là $\{v_j\}_{j \in J}$, rõ ràng $v_j \neq u_i, \forall i, j$.

Khi đó $\{u_i\}_{i \in I} \cup \{v_j\}_{j \in J}$ là một cơ sở của X hay ta có thể bổ sung $\{u_i\}_{i \in I}$ tới một cơ sở của X .

Ứng dụng 2:

Kết quả sau đây cũng có thể được xem như là một ứng dụng của định lý trên:

Mệnh đề:

Cho A là mô đun bất kỳ, X là mô đun tự do trên vành chính. Khi đó:

Với mỗi đồng cấu $f: A \rightarrow X$ thì ta luôn có đẳng cấu: $A \cong \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$.

Chứng minh:

Xét dãy khớp sinh ra bởi đồng cấu f :

$$0 \longrightarrow \text{Ker} f \xrightarrow{j} A \xrightarrow{f} \text{Im} f \longrightarrow 0$$

Trong đó j là phép nhúng, $f_1(a) = f(a)$.

Vì $\text{Im} f$ là mô đun con của mô đun tự do X trên vành chính nên $\text{Im} f$ cũng là mô đun tự do, suy ra $\text{Im} f$ là mô đun xạ ảnh nên dãy khớp trên là chẻ, do đó $A \cong \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$.

Ứng dụng 3:

Xem như là một ứng dụng của định lý 2.2.1, ta có kết quả tương tự như trong lý thuyết các nhóm aben nói về các nhóm aben không xoắn hữu hạn sinh trong phạm trù các R - mô đun trên vành chính như sau:

Định lý 2.2.2:

Với R là vành chính. Nếu X là R - mô đun hữu hạn sinh và không xoắn thì X là R - mô đun tự do.

Chứng minh:

Vì X là R -mô đun hữu hạn sinh nên có thể giả sử $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một hệ sinh của X . Chọn trong hệ sinh này một bộ phận độc lập tuyến tính tối đại chẳng hạn là bộ phận $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, $k \leq n$.

Hiển nhiên mô đun $A = \langle \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \rangle$ là mô đun tự do và $A \subset X$. Do tính độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ mà $\forall i = \overline{1, n}$ thì hệ $\{u_1, u_2, \dots, u_k, u_i\}$ là phụ thuộc tuyến tính tức tồn tại các hệ tử $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ki}, \beta_i$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$\alpha_{1i} u_1 + \alpha_{2i} u_2 + \dots + \alpha_{ki} u_k + \beta_i u_i = 0.$$

Để thấy $\beta_i \neq 0$, bởi ngược lại thì do tính độc lập tuyến tính của hệ $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ buộc $\alpha_{1i} = \alpha_{2i} = \dots = \alpha_{ki} = 0$, trái với tính phụ thuộc tuyến tính của hệ $\{u_1, u_2, \dots, u_k, u_i\}$. Vậy $\forall i = \overline{1, n}$, tồn tại $\beta_i \neq 0$ mà

$$\beta_i u_i = -(\alpha_{1i} u_1 + \alpha_{2i} u_2 + \dots + \alpha_{ki} u_k). \text{ Đặt } \beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \text{ thì } \beta \neq 0 \text{ và } \forall i = \overline{1, n}:$$

$$\beta u_i = -(\gamma_i \alpha_{1i} u_1 + \gamma_i \alpha_{2i} u_2 + \dots + \gamma_i \alpha_{ki} u_k) \in A \text{ với } \gamma_i \beta_i = \beta$$

Ta xây dựng đồng cấu $\varphi: X \rightarrow A$ xác định như sau: $\varphi(x) = \beta x$.

Ảnh xạ φ là hợp lý vì nếu $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ thì $\varphi(x) = \beta x = \sum_{i=1}^n x_i \beta u_i \in A$ do mỗi

$\beta u_i \in A$. φ là đồng cấu vì $\forall x, x_1, x_2 \in X, \forall r \in R$ ta có:

$$\varphi(x_1 + x_2) = \beta(x_1 + x_2) = \beta x_1 + \beta x_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\varphi(rx) = \beta(rx) = (\beta r)x = (r\beta)x = r(\beta x) = r\varphi(x).$$

Mà $\text{Ker } \varphi = \{x \in X / \beta x = 0\} = \{0\}$ (vì mô đun X không xoắn) nên φ là đơn cấu. Do đó $X \cong \varphi(X) \subset A$, mà A là mô đun tự do nên theo định lý 2.2.1 ta có mô đun con $\varphi(X)$ cũng là mô đun tự do, suy ra X là mô đun tự do.

§2. DÃY KHỚP

Định nghĩa 1.2.1.1:

Dãy (hữu hạn hay vô hạn) các mô đun và các đồng cấu:

$(X; f): \dots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$ được gọi là khớp tại mô đun X_n nếu $\text{Im} f_n = \text{Ker} f_{n+1}$.

Dãy được gọi là dãy khớp nếu nó khớp tại bất kỳ mô đun nào không phải là đầu mút của dãy.

Ví dụ với $f: X \rightarrow Y$ là đồng cấu thì ta có dãy khớp sau:

$$0 \longrightarrow \text{Ker} f \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y.$$

Định nghĩa 1.2.1.2:

Dãy khớp ngắn là dãy khớp có dạng sau:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} B \xrightarrow{\sigma} C \longrightarrow 0$$

Ví dụ $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X/A \longrightarrow 0$ là dãy khớp ngắn, trong đó i là phép nhúng, p là toàn cấu tự nhiên.

§3. TỔNG TRỰC TIẾP – TÍCH TRỰC TIẾP

1. Tổng trực tiếp hai mô đun

Định nghĩa 1.3.1.1:

Cho X_1, X_2 là hai R -mô đun. Trên tập tích Đề - Các $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) / x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$, chúng ta đưa vào các phép toán sau:

$$. (x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2), \forall (x_1, x_2), (x'_1, x'_2) \in X_1 \times X_2.$$

$$. r(x_1, x_2) = (rx_1, rx_2), \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2, \forall r \in R.$$

Khi đó $X_1 \times X_2$ là một R -mô đun. Ta gọi R -mô đun này là tổng trực tiếp (hay tích trực tiếp) của các mô đun X_1, X_2 và ký hiệu là $X_1 \oplus X_2$.

Định lý 1.3.1.1:

Cho X_1, X_2 là các mô đun con của mô đun X mà $X_1 + X_2 = X$ và $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Khi đó: $X \cong X_1 \oplus X_2$.

Định lý 1.3.1.2:

Dãy khớp $\dots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n+1}} X_{n+1} \longrightarrow \dots$ được gọi là chẻ ra tại X_n nếu $\text{Im} f_n$ là hạng tử trực tiếp của mô đun X_n .

Dãy khớp được gọi là chẻ ra nếu nó chẻ ra tại mỗi mô đun không phải là đầu mút của dãy.

Ví dụ $0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{j_1} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{p_2} X_2 \longrightarrow 0$ là dãy khớp chẻ ra.

Định lý 1.3.1.2:

Nếu dãy khớp $\dots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n+1}} X_{n+1} \longrightarrow \dots$ chẻ ra tại X_n thì $X_n \cong \text{Im} f_n \oplus \text{Im} f_{n+1}$.

Định lý 1.3.1.3:

Cho dãy khớp ngắn $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \longrightarrow 0$. Các phát biểu sau là tương đương:

a) Dãy đã cho là chẻ ra.

b) Đồng cấu χ có nghịch đảo trái (nghĩa là có đồng cấu $p: B \rightarrow A$ thỏa $p\chi = 1_A$)

c) Đồng cấu σ có nghịch đảo phải (nghĩa là có đồng cấu $q: C \rightarrow B$ thỏa $\sigma q = 1_C$).

2. Tích trực tiếp và tổng trực tiếp ho mô đun:

Định nghĩa 1.3.2.1:

Cho họ bất kỳ các mô đun $\{X_i\}_{i \in I}$ trên cùng một vành hệ tử R . Trên tập tích Đề Các $\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} / x_i \in X_i, \forall i \in I\}$ ta đưa vào các phép toán như sau:

$$\cdot (x_i)_{i \in I} + (x'_i)_{i \in I} = (x_i + x'_i)_{i \in I}.$$

$$\cdot r(x_i)_{i \in I} = (rx_i)_{i \in I}, \text{ với mọi bộ } (x_i)_{i \in I}, (x'_i)_{i \in I} \text{ của } \prod_{i \in I} X_i \text{ và mọi } r \in R.$$

Khi đó $\prod_{i \in I} X_i$ là một R -mô đun và được gọi là tích trực tiếp của họ mô đun $\{X_i\}_{i \in I}$

Định nghĩa 1.3.2.2:

Cho họ các R -mô đun $\{X_i\}_{i \in I}$. Tổng trực tiếp của họ $\{X_i\}_{i \in I}$, được ký hiệu là $\bigoplus_{i \in I} X_i$, là mô đun con của mô đun $\prod_{i \in I} X_i$, sinh bởi hợp tất cả các tập hợp ảnh của họ phép nhúng $\{j_k: X_k \rightarrow \prod_{i \in I} X_i\}_{k \in I}$.

Nói cách khác $\bigoplus_{i \in I} X_i$ là mô đun con của $\prod_{i \in I} X_i$ nhận tập $J = \bigcup_{k \in I} j_k(X_k)$ làm một hệ sinh.

Như vậy $(x_i)_{i \in I} \in \bigoplus X_i \Leftrightarrow (x_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} j_i(x_i)$.

Định lý:

Nếu họ các mô đun con $\{X_k\}_{k \in I}$ của mô đun X cho trước mà thỏa $\sum_{k \in I} X_k = X$ và với mỗi $k \in I$ ta luôn có $X_k \cap \sum_{j \neq k} X_j = \{0\}$ thì $X \cong \bigoplus_{k \in I} X_k$.

§4.VÀNH CHÍNH

1. Các định nghĩa:

Định nghĩa 1.4.1.1:

Một vành giao hoán khác không, có đơn vị và không có ước của không được gọi là một miền nguyên.

Định nghĩa 1.4.1.2:

Một ideal được sinh bởi một phần tử được gọi là một ideal chính.

Định nghĩa 1.4.1.3:

Một miền nguyên mà trong đó mọi ideal đều là ideal chính được gọi là vành chính.

Ví dụ vành số nguyên Z là một vành chính.

2. Các tính chất :

Tính chất 1.4.2.1:

Trong một vành chính R , nếu phần tử p là bất khả quy thì ideal $\langle p \rangle$ là tối đại.

Tính chất 1.4.2.2:

Trong một vành chính R , mọi ideal nguyên tố khác 0 đều tối đại.

Tính chất 1.4.2.3:

Trong một vành chính, các khái niệm phần tử nguyên tố và phần tử bất khả quy trùng nhau.

Tính chất 1.4.2.4:

Trong một vành chính, mọi cặp phần tử khác không đều có ước chung lớn nhất.

Tính chất 1.4.2.5:

Trong một vành chính, mọi dãy thực sự tăng những idêan đều là hữu hạn.

Tính chất 1.4.2.6:

Trong một vành chính R , không tồn tại một dãy vô hạn những phần tử $a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots$ sao cho $a_{i+1} \nmid a_i, i = 1, 2, \dots$

Tính chất 1.4.2.7:

Trong một vành chính R , mọi phần tử khác không và khác ước của đơn vị đều phân tích được thành một tích những phần tử bất khả quy và sự phân tích này là duy nhất (không kể đến thứ tự và những nhân tử là ước của đơn vị).

§5 MÔ ĐUN TỰ DO – MÔ ĐUN XẠ ẢNH

1. MÔ ĐUN TỰ DO:

Định nghĩa 1.5.1.1:

Hệ sinh của một mô đun: là một hệ gồm các phần tử của mô đun sao cho bất kỳ một phần tử nào của mô đun cũng có ít nhất một cách biểu thị tuyến tính qua hệ đó.

Nhận xét: Một mô đun X bất kỳ bao giờ cũng có hệ sinh, chẳng hạn là X .

Định nghĩa 1.5.1.2:

Hệ độc lập tuyến tính : là một hệ gồm các phần tử của mô đun sao cho phần tử 0 chỉ có một cách biểu thị tuyến tính duy nhất qua hệ đó. Nói cách khác hệ $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là độc lập tuyến tính nếu $r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n = 0$ chỉ khi các hệ tử $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$.

Hệ không độc lập tuyến tính thì được gọi là hệ phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là S phụ thuộc tuyến tính nếu phần tử 0 có nhiều hơn một cách biểu thị tuyến tính qua S .

Nhận xét :

Không phải bất kỳ mô đun nào cũng có chứa hệ độc lập tuyến tính, chẳng hạn như nhóm abel A có cấp là m thì $ma = 0, \forall a \in A$, nghĩa là mọi phần tử a của Z - mô đun A đều phụ thuộc tuyến tính nên trong A không thể có bất kỳ tập con khác rỗng nào độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 1.5.1.3:

Cơ sở của mô đun: là một hệ sinh độc lập tuyến tính của mô đun đó.

Định nghĩa 1.5.1.4:

Mô đun tự do: là mô đun có ít nhất một cơ sở .

Ví dụ: vành số nguyên $\mathbb{Z}$ là một $\mathbb{Z}$ – mô đun tự do với cơ sở là $\{1\}$. Các $\mathbb{Z}$ – mô đun hữu hạn là các $\mathbb{Z}$ – mô đun không tự do.

Mệnh đề 1.5.1.1:

Hệ $S = \{s_i\}_{i \in I}$ các phần tử của mô đun X là cơ sở của X khi và chỉ khi mỗi phần tử $x \in X$ có và chỉ có một cách biểu thị tuyến tính qua S .

Chứng minh:

Nếu S là một cơ sở của X thì $X = \langle S \rangle$ nên mọi phần tử x của X đều viết được dưới dạng $x = \sum_{i \in I} r_i s_i$, nếu có thêm cách biểu thị $x = \sum_{i \in I} r'_i s_i$ thì $\sum_{i \in I} (r_i - r'_i) s_i = 0$ mà S độc lập tuyến tính nên $r_i - r'_i = 0$, $\forall i \in I$ hay $r_i = r'_i, \forall i \in I$.

Đảo lại nếu mọi phần tử x của X đều viết được dưới dạng $x = \sum_{i \in I} r_i s_i$ thì ta có $X = \langle S \rangle$. Mặt khác nếu $\sum_{i \in I} r_i s_i = 0$ thì $\sum_{i \in I} r_i s_i = \sum_{i \in I} 0 s_i$, vì cách viết là duy nhất nên ta có $r_i = 0, \forall i \in I$ hay S là độc lập tuyến tính, do đó S là cơ sở.

Mệnh đề 1.5.1.2:

Nếu $f: X \rightarrow Y$ là đẳng cấu mô đun thì X là mô đun tự do khi và chỉ khi Y là mô đun tự do, đồng thời $S = \{s_i\}_{i \in I}$ là cơ sở của X khi và chỉ khi $f(S) = \{f(s_i)\}_{i \in I}$ là cơ sở của Y .

Định lý 1.5.1.1:

Nếu họ $\{X_i\}_{i \in I}$ chỉ gồm các R - mô đun tự do thì $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ cũng là một mô đun tự do.

Chứng minh:

Ta có thể xem các X_i là các mô đun con của X .

Nếu ngược lại thì ta sử dụng họ các mô đun con $X'_i = j_i(X_i) \cong X_i$ cũng là mô đun tự do. Khi đó $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ là tổng trực tiếp trong các X_i . Ta chọn trong mỗi X_i một cơ sở S_i và lấy $S = \bigcup_{i \in I} S_i$. Ta sẽ chứng tỏ S là cơ sở của X . Thật vậy nếu $x \in X$ thì vì X là tổng trực tiếp trong của các X_i nên x chỉ có một cách phân tích duy nhất $x = \sum_{i \in I} x_i$, $x_i \in X_i$, $\forall i \in I$.

Đối với mỗi $i \in I$, do S_i là cơ sở của X_i nên x_i có một cách phân tích duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính các phần tử của S_i . Do đó $x \in X$ chỉ có một cách biểu thị tuyến tính qua $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ hay S là một cơ sở.

Định lý 1.5.1.2:

R - mô đun X là tự do khi và chỉ khi X đẳng cấu với tổng trực tiếp của họ nào đó các mô đun là bản sao của vành hệ tử R .

Định lý 1.5.1.3:

Tập $S \neq \emptyset$ của mô đun X là cơ sở của X khi và chỉ khi với bất kỳ mô đun Y , mỗi ánh xạ $f: S \rightarrow Y$ đều có thể mở rộng tới một đồng cấu duy nhất $\bar{f}: X \rightarrow Y$.

Hệ quả:

Nếu F là mô đun tự do thì mọi dãy khớp ngắn $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\sigma} F \rightarrow 0$ đều chẻ ra.

Chứng minh:

Ta cần chứng minh σ có nghịch đảo phải. Lấy cơ sở S nào đó của F . Vì σ toàn cấu nên tồn tại một ánh xạ $q: S \rightarrow B$ mà $q(s) \in \sigma^{-1}(s)$ với mỗi $s \in S$. Theo định lý 1.5.1.3 vừa nêu, tồn tại mở rộng $\varphi: F \rightarrow B$ của q . Mà $\sigma \circ \varphi$ thực

hiện sự đồng nhất trên cơ sở S của F nên $\sigma \circ \varphi = 1_F$ hay φ là nghịch đảo phải của σ .

2. Mô đun xạ ảnh:

Định nghĩa:

Mô đun A được gọi là xạ ảnh nếu với mọi toàn cấu $p: B \rightarrow C$ và mọi đồng cấu $f: A \rightarrow C$, bao giờ cũng tồn tại một đồng cấu $h: A \rightarrow B$ sao cho $f = p \circ h$.

Ví dụ về mô đun xạ ảnh:

Mỗi mô đun tự do là một mô đun xạ ảnh.

Thật vậy, cho $F(S)$ là mô đun tự do có cơ sở là S . Nếu $f: F(S) \rightarrow C$ là đồng cấu và $p: B \rightarrow C$ là toàn cấu thì với mỗi $s \in S$ có thể chọn phần tử $g(s) \in p^{-1}(f(s))$, ta được ánh xạ $g: S \rightarrow B$ mà $p \circ g = f|_S$.

Mà S là cơ sở nên g có thể mở rộng tới đồng cấu $h: F(S) \rightarrow B$.

Hơn nữa $p \circ h$ và f lấy giá trị như nhau trên cơ sở S nên $f = p \circ h$.

Định lý 1.5.2.1:

Tổng trực tiếp $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ của họ mô đun $\{P_i\}_{i \in I}$ là xạ ảnh khi và chỉ khi với mỗi $i \in I$, mô đun P_i là xạ ảnh.

Hệ quả:

Nếu $\prod_{i \in I} P_i$ là mô đun xạ ảnh thì P_i là xạ ảnh với mỗi $i \in I$.

Định lý 1.5.2.2:

Đối với mỗi mô đun P , ba phát biểu sau là tương đương:

a/ P là mô đun xạ ảnh.

b/ Mỗi dãy khớp $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\sigma} P \rightarrow 0$ là chẻ ra.

c/ P đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của mô đun tự do nào đó.

Hệ quả:

Nếu R là vành chính thì mọi R – mô đun xạ ảnh cũng là R – mô đun tự do.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Nghiêm Xuân Cảnh

MÔ ĐUN TỰ DO
TRÊN VÀNH CHÍNH

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 60 46 05

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. TRẦN HUYỀN

Thành phố Hồ Chí Minh - 2008

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

NGHIÊM XUÂN CẢNH

**MÔ ĐUN TỰ DO
TRÊN VÀNH CHÍNH**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thành phố Hồ Chí Minh - 2008

CHƯƠNG 1: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

§1. MÔ ĐUN VÀ ĐỒNG CẤU

§2. DÃY KHỚP

§3. TỔNG TRỰC TIẾP – TÍCH TRỰC TIẾP

§4. VÀNH CHÍNH

§5 MÔ ĐUN TỰ DO – MÔ ĐUN XẠ ẢNH

CHƯƠNG 2: MÔ ĐUN TỰ DO TRÊN VÀNH CHÍNH

§1. CƠ SỞ CỦA MÔ ĐUN TỰ DO TRÊN VÀNH CHÍNH

- Các cơ sở của một mô đun tự do trên vành chính có lực lượng như thế nào?
- Trong mô đun tự do trên vành chính, điều kiện để hệ độc lập tuyến tính bổ sung tới cơ sở là gì?
- Trong mô đun tự do trên vành chính hạng n , hệ sinh gồm n phần tử có là cơ sở không?

§2. MÔ ĐUN CON CỦA MÔ ĐUN TỰ DO TRÊN VÀNH CHÍNH

- Mô đun con của mô đun tự do trên vành chính có là mô đun tự do không ?
- Ứng dụng 1
- Ứng dụng 2
- Ứng dụng 3

Chương 3: MÔ ĐUN TỰ DO HẠNG HỮU HẠN TRÊN VÀNH CHÍNH

§1. MÔ ĐUN CON CỦA MÔ ĐUN HẠNG HỮU HẠN TRÊN VÀNH CHÍNH

- Quan hệ giữa cơ sở của mô đun tự do hạng n trên vành chính với cơ sở của mô đun con của nó.
- Ứng dụng.

§2. CÔNG THỨC VỀ SỐ CHIỀU

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, ngoài việc làm mới chứng minh một số các kết quả quen thuộc như lực lượng cơ sở của một mô đun tự do trên vành chính, mối quan hệ giữa cơ sở của mô đun con với cơ sở của mô đun tự do hạng hữu hạn trên vành chính thì các kết quả tương đối mới mà chúng tôi đạt được là:

Chứng minh được trong mô đun tự do hạng n trên vành chính, mỗi hệ sinh n phần tử là một cơ sở của mô đun.

Chứng minh được mỗi mô đun hữu hạn sinh không xoắn trên vành chính là mô đun tự do.

Chứng minh được công thức về hạng của tổng, giao các mô đun con trong mô đun tự do hạng hữu hạn trên vành chính.

LỜI CẢM ƠN

Trong luận văn này, đầu tiên tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến quý thầy cô trong khoa Toán – Tin học thuộc trường Đại Học Sư Phạm TP. Hồ Chí Minh và trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên TP. Hồ Chí Minh đã tham gia giảng dạy cung cấp cho chúng tôi những tri thức khoa học làm hành trang cho cuộc đời .

Đặc biệt, tôi cảm nhận được tình cảm thầy trò sâu sắc và lòng nhiệt thành trong công việc của TS. Trần Huyền, người thầy đã giao đề tài nghiên cứu cho tôi, gợi mở hướng suy nghĩ, cách giải quyết từng vấn đề một cách khoa học và chỉnh sửa cẩn thận cho tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn này.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới các cán bộ của phòng Khoa Học Công Nghệ & Sau Đại Học thuộc trường Đại Học Sư Phạm TP. Hồ Chí Minh đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt khóa học.

Cuối cùng tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới các bạn bè, đồng nghiệp đã động viên tinh thần giúp tôi vượt qua được hoàn cảnh khó khăn để hoàn thành luận văn.

Do chủ quan và năng lực còn hạn chế nên luận văn chắc không thể tránh khỏi thiếu sót. Kính mong quý thầy cô trong hội đồng xét duyệt, chỉ bảo và lượng thứ, các đồng nghiệp góp ý. Chúng tôi xin chân thành tiếp thu.

Xin chân trọng kính chào.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài:

Lý thuyết mô đun nói chung và lý thuyết mô đun trên vành chính nói riêng đã được nghiên cứu từ đầu thế kỷ XIX và có nhiều giá trị ứng dụng trong các ngành toán học. Việc phát triển tiếp, tìm kiếm những kết quả của lý thuyết mô đun và lý thuyết mô đun trên vành chính là một hướng có tính chất thời sự trong lĩnh vực Đại số hiện đại.

Đề tài nghiên cứu của chúng tôi có tên gọi là: **“MÔ ĐUN TỰ DO TRÊN VÀNH CHÍNH”** được thực hiện theo hướng phát triển này.

2. Mục đích nghiên cứu :

Luận văn này nghiên cứu về các mô đun tự do, đặc biệt là mô đun tự do hạng hữu hạn trên vành chính đồng thời tìm ra những cách chứng minh mới, những kết quả mới bổ sung cho kiến thức về mô đun tự do, mô đun tự do hạng hữu hạn trên vành chính. Ngoài ra luận văn còn tìm các ví dụ, phản ví dụ mới để làm sáng tỏ những tính chất và quan hệ giữa các cơ sở với các hệ độc lập tuyến tính, hệ sinh của mô đun tự do trên vành chính và một vài ứng dụng của mô đun con của mô đun tự do và mô đun tự do hạng hữu hạn trên vành chính đồng thời tìm ra và chứng minh công thức về hạng của tổng và giao các mô đun con trong mô đun tự do hạng hữu hạn trên vành chính.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

Luận văn này nghiên cứu về các mô đun tự do hạng hữu hạn trên vành chính trong đó đi sâu vào một số vấn đề cơ bản sau:

- Cơ sở của mô đun tự do trên vành chính.
- Mô đun con của mô đun tự do trên vành chính và một vài ứng dụng.
- Mô đun hữu hạn sinh và mô đun tự do hữu hạn sinh trên vành chính.
- Công thức về số chiều.

4. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài:

Ngoài những kết quả quen thuộc nhưng phần chứng minh được làm mới như lực lượng cơ sở của mô đun tự do trên vành chính, quan hệ giữa cơ sở của mô đun tự do hạng n trên vành chính với cơ sở của mô đun con của nó, luận văn còn khẳng định được :

- Mọi quan hệ giữa các cơ sở của mô đun tự do hạng n trên vành chính với các hệ sinh, hệ độc lập tuyến tính của nó.
- Ứng dụng của mô đun con của mô đun tự do trên vành chính.
- Công thức về hạng của tổng, giao các mô đun con trong mô đun tự do hạng hữu hạn trên vành chính.

Nội dung luận văn được chia thành ba chương:

CHƯƠNG 1: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trình bày về các khái niệm cơ bản và các kết quả được sử dụng cho các chương sau, như là: khái niệm mô đun, đồng cấu, dãy khớp, tổng trực tiếp, tích trực tiếp, vành chính, mô đun tự do, mô đun xạ ảnh ...

CHƯƠNG 2: MÔ ĐUN TỰ DO TRÊN VÀNH CHÍNH

Trình bày về cơ sở của mô đun tự do trên vành chính và mô đun con của mô đun tự do trên vành chính, cụ thể là nghiên cứu về lực lượng của cơ sở, mối quan hệ giữa các hệ độc lập tuyến tính, hệ sinh với cơ sở và một vài ứng dụng của mô đun con của mô đun tự do trên vành chính. CHƯƠNG 3: MÔ ĐUN TỰ DO HẠNG HỮU HẠN TRÊN VÀNH CHÍNH

Trình bày về mô đun con của mô đun hạng hữu hạn trên vành chính, ứng dụng để phân tích một mô đun hữu hạn sinh trên vành chính thành tổng các mô đun cyclic và áp dụng để chứng minh công thức về hạng của tổng và giao các mô đun con trong mô đun tự do hạng hữu hạn trên vành chính, tương tự công thức số chiều trong lý thuyết không gian vec tơ.

MỤC LỤC

	Trang
Lời cảm ơn	1
Mở đầu	2
Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	5
1.1 Mô đun và đồng cấu.....	6
1.1.1 Mô đun	6
1.1.2 Mô đun con	7
1.1.3 Mô đun xoắn – Mô đun không xoắn.....	9
1.2 Dây khớp	10
1.3 Tổng trực tiếp – Tích trực tiếp	11
1.3.1 Tổng trực tiếp hai mô đun.....	11
1.3.2 Tích trực tiếp và tổng trực tiếp họ mô đun	12
1.4 Vành chính	14
1.4.1 Các định nghĩa	14
1.4.2 Các tính chất	14
1.5 Mô đun tự do-mô đun xạ ảnh.....	16
1.5.1 Mô đun tự do.....	16
1.5.2 Mô đun xạ ảnh	19
Chương 2. MÔ ĐUN TỰ DO TRÊN VÀNH CHÍNH	21
2.1 Cơ sở của mô đun tự do trên vành chính	22
2.2 Mô đun con của mô đun tự do trên vành chính	33
Chương 3. MÔ ĐUN TỰ DO HẠNG HỮU HẠN TRÊN VÀNH CHÍNH	39
3.1 Mô đun con của mô đun hạng hữu hạn trên vành chính.....	40
3.2 Công thức về số chiều.....	47
Kết luận	52
Tài liệu tham khảo.....	53

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Nguyễn Viết Đông - Trần Huyền, *Đại số đồng điều*, NXB Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh 2002.
2. Ngô Thúc Lan, *Đại số*, NXB Giáo Dục 1985.

Tiếng Anh

3. A.Solian, *Theory of Modules*.
4. Bucur and A.Deleanu, *Introduction to the Theory of Categories and Funtors*.
5. G.Birkhoff and S.Maclane, *Algebra*.
6. S.Lang, *Algebra*.
7. S-T.HU, *Introduction to Homological Algebra*.

Trong đại số tuyến tính ta đã biết các không gian vector đều có cơ sở, do đó mỗi không gian vector đều là mô đun tự do trên một trường. Lý thuyết các không gian vector có rất nhiều kết quả phong phú, tuy nhiên chúng không chắc đã đúng cho các R – mô đun tự do trên vành R bất kỳ.

Trong chương này chúng ta sẽ xét tới các mô đun tự do trên vành chính – là các mô đun tự do còn giữ lại được khá nhiều những tính chất quan trọng của các không gian vector mà có thể không có ở trên các mô đun tự do trên các vành R không là vành chính.

§ 1. CƠ SỞ CỦA MÔ ĐUN TỰ DO TRÊN VÀNH CHÍNH

Trong mỗi không gian vector có thể có nhiều cơ sở khác nhau nhưng lực lượng của chúng là như nhau. Trong một R – mô đun tự do, liệu chừng lực lượng các cơ sở khác nhau có là như nhau không?

Câu trả lời là: nói chung nếu X là R – mô đun tự do bất kỳ thì các cơ sở của X có thể có lực lượng khác nhau.

Để minh chứng điều này ta xét thí dụ sau:

Xét nhóm aben tự do $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ như là $\mathbb{Z}$ – mô đun tự do với cơ sở $e_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, ... và R là vành các tự đồng cấu của nhóm aben A với các phép toán được xác định:

$\forall f, g \in R, \forall a \in A:$

$$\begin{cases} (f + g)(a) = f(a) + g(a) \\ (f \circ g)(a) = f(g(a)) \end{cases}$$

R là vành có đơn vị là đồng cấu đồng nhất 1_A . Nếu ta xem R như là R – mô đun trên chính nó thì R có các cơ sở sau:

Cơ sở 1: $\{1_A\}$

Cơ sở 2: vì mỗi đồng cấu được hoàn toàn xác định khi nó xác định trên một cơ sở nên ta xác định các đồng cấu φ, ψ như sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(e_{2k}) = e_k \\ \varphi(e_{2k-1}) = 0 \end{array} \right. \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(e_{2k}) = 0 \\ \psi(e_{2k-1}) = e_k \end{array} \right. \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Ta sẽ chứng minh $\{\varphi, \psi\}$ là một cơ sở của R , thật vậy:

* $\{\varphi, \psi\}$ độc lập tuyến tính vì:

$$\forall f, g \in R \text{ thỏa } f\varphi + g\psi = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (f\varphi + g\psi)(e_{2k}) = 0 \\ (f\varphi + g\psi)(e_{2k-1}) = 0 \end{array} \right. \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f\varphi(e_{2k}) + g\psi(e_{2k}) = 0 \\ f\varphi(e_{2k-1}) + g\psi(e_{2k-1}) = 0 \end{array} \right. \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(e_k) + g(0) = 0 \\ f(0) + g(e_k) = 0 \end{array} \right. \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(e_k) = 0 \\ g(e_k) = 0 \end{array} \right. \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Khi đó : } \forall a \in A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q} \Rightarrow a = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} m_i e_i \quad (m_i \in \mathbb{Q})$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(a) = f\left(\sum_{i \in \mathbb{N}^*} m_i e_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} m_i f(e_i) = 0 \\ g(a) = g\left(\sum_{i \in \mathbb{N}^*} m_i e_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} m_i g(e_i) = 0 \end{array} \right. \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f = 0 \\ g = 0 \end{array} \right.$$

* $\{\varphi, \psi\}$ là hệ sinh của R :

Xét các đồng cấu $\varphi', \psi' \in R$ xác định như sau

$$\varphi'(e_k) = e_{2k}, \psi'(e_k) = e_{2k-1}, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Khi đó $\forall k \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\begin{aligned} (\varphi' \varphi + \psi' \psi)(e_{2k}) &= \varphi' \varphi(e_{2k}) + \psi' \psi(e_{2k}) \\ &= \varphi'(e_k) + \psi'(0) = e_{2k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi' \varphi + \psi' \psi)(e_{2k-1}) &= \varphi' \varphi(e_{2k-1}) + \psi' \psi(e_{2k-1}) \\ &= \varphi'(0) + \psi'(e_k) = e_{2k-1} \end{aligned}$$

Như vậy $(\varphi' \varphi + \psi' \psi)(e_i) = e_i, \forall i \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \varphi' \varphi + \psi' \psi = 1$$

$\Rightarrow \{\varphi, \psi\}$ là hệ sinh của R

$\Rightarrow \{\varphi, \psi\}$ là cơ sở của R.

Ví dụ này cho ta thấy nếu R là vành tùy ý thì các cơ sở khác nhau có thể có lực lượng khác nhau.

Tuy nhiên nếu X là mô đun tự do trên vành chính R thì lực lượng của các cơ sở khác nhau của X có quan hệ với nhau như thế nào?

Trước hết ta xem xét X khi nó có một cơ sở hữu hạn phần tử. Tương tự như trong không gian vector n – chiều, ta có:

Mệnh đề 2.1.2:

Cho X là R – mô đun tự do trên vành chính có một cơ sở $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ gồm n phần tử. Khi đó mọi hệ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$ gồm (n+1) phần tử trong X đều phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh:

Nếu trong hệ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$ có chứa phần tử 0 thì kết luận là hiển nhiên.

Vậy ta có thể giả thiết $\alpha_i \neq 0, \forall i$, và ta chứng minh kết luận trên bằng quy nạp theo n – số phần tử trong cơ sở cho trước.

+ Khi $n = 1$ hay X có cơ sở chỉ gồm một phần tử $\{e_1\}$. Nếu $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ là hệ gồm hai phần tử khác không trong X thì tồn tại các hệ tử r_1, r_2 khác 0 mà

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = r_1 e_1 \\ \alpha_2 = r_2 e_1 \end{array} \right\} \Rightarrow r_2 \alpha_1 - r_1 \alpha_2 = 0 \Rightarrow \text{hệ } \{\alpha_1, \alpha_2\} \text{ phụ thuộc tuyến tính.}$$

+ Giả thiết quy nạp rằng kết luận của mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$. Khi đó gọi cơ sở gồm $(k+1)$ phần tử của X là $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ (*) và xét hệ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}\}$ gồm $(k+2)$ phần tử khác 0 trong X . Vì $\alpha_{k+2} \neq 0$ nên trong các hệ tử của biểu diễn:

$\alpha_{k+2} = s_1 e_1 + s_2 e_2 + \dots + s_{k+1} e_{k+1}$, ắt có hệ tử nào đó khác 0, để thuận tiện cho việc tính toán ta giả thiết là $s_{k+1} \neq 0$.

Sử dụng các biểu thị tuyến tính của $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$ qua cơ sở (*) như sau:

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^k t_{1j} e_j + r_1 e_{k+1}$$

$$\alpha_2 = \sum_{j=1}^k t_{2j} e_j + r_2 e_{k+1}$$

.....

$$\alpha_{k+1} = \sum_{j=1}^k t_{k+1,j} e_j + r_{k+1} e_{k+1}$$

Ta thành lập hệ gồm $(k+1)$ vector sau:

$$\beta_1 = s_{k+1} \alpha_1 - r_1 \alpha_{k+2} = \sum_{j=1}^k (s_{k+1} t_{1j} - r_1 s_j) e_j$$

$$\beta_2 = s_{k+1} \alpha_2 - r_2 \alpha_{k+2} = \sum_{j=1}^k (s_{k+1} t_{2j} - r_2 s_j) e_j$$

.....

$$\beta_{k+1} = s_{k+1} \alpha_{k+1} - r_{k+1} \alpha_{k+2} = \sum_{j=1}^k (s_{k+1} t_{k+1j} - r_{k+1} s_j) e_j$$

Vì các β_i biểu thị tuyến tính được qua k vector cơ sở $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ nên $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k+1}\}$ là hệ $(k+1)$ vector trong mô đun con tự do X' có cơ sở gồm k phần tử $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ nên theo giả thiết quy nạp, chúng phụ thuộc tuyến tính nghĩa là tồn tại các hệ tử không đồng thời bằng 0: $l_1, l_2, \dots, l_{k+1}$ sao cho

$$l_1 \beta_1 + l_2 \beta_2 + \dots + l_{k+1} \beta_{k+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow l_1 s_{k+1} \alpha_1 + l_2 s_{k+1} \alpha_2 + \dots + l_{k+1} s_{k+1} \alpha_{k+1} - \left(\sum_{i=1}^{k+1} r_i l_i \right) \alpha_{k+2} = 0$$

do $s_{k+1} \neq 0$ mà có hệ tử nào đó $l_i s_{k+1} \neq 0$.

Vậy hệ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

Từ mệnh đề trên ta có ngay các hệ quả hiển nhiên sau đây:

Hệ quả 1:

Cho X là R - mô đun tự do trên vành chính có một cơ sở gồm n – phần tử. Nếu hệ $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ độc lập tuyến tính trong M thì $m \leq n$.

Hệ quả 2:

Nếu X là mô đun tự do trên vành chính R có một cơ sở n phần tử thì mọi cơ sở của X đều có đúng n phần tử.

Như vậy theo hệ quả 2, lực lượng mọi cơ sở của mô đun tự do trên vành chính (trong trường hợp X hữu hạn sinh) đều như nhau.

Để kết luận này là đúng cho mọi mô đun tự do X trên vành chính, ta cần tiếp mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.1.3:

Nếu mô đun tự do X trên vành chính có một cơ sở có vô hạn phần tử thì mọi cơ sở khác cũng có vô hạn phần tử, hơn nữa chúng có cùng lực lượng như nhau.

Chứng minh

Nếu S là một cơ sở của X có vô hạn phần tử thì do hệ quả 2 nói trên, một cơ sở bất kỳ M của X cũng có vô hạn phần tử. Hơn nữa ta chỉ ra rằng $|S|=|M|$.

Thật vậy vì S là cơ sở nên $\forall x \in M$ có duy nhất sự phân tích

$$x = r_1 s_1 + r_2 s_2 + \dots + r_k s_k \text{ với } s_1, s_2, \dots, s_k \in S.$$

Do vậy luật tương ứng $\varphi: M \rightarrow P_H(S)$, từ tập M với tập các tập con hữu hạn của S là $P_H(S)$ là một ánh xạ. Hơn nữa ánh xạ φ , do mệnh đề 2.1.2 mà nghịch ảnh của mỗi phần tử thuộc $P_H(S)$ chỉ là tập hữu hạn. Suy ra:

$$|M| \leq |\mathcal{P}_H(S)| = |S|.$$

Tráo đổi vai trò, xem M là cơ sở và S là tập trong X ta lại có $|S| \leq |M|$.

Từ đó ta có $|S|=|M|$.

Tổng hợp các kết quả từ hai mệnh đề trên, ta có

Định lý: Mọi cơ sở của mô đun tự do X trên vành chính đều có cùng lực lượng.

Do kết quả của định lý mà ta có quyền đưa khái niệm hạng của mô đun tự do trên vành chính như là hạng của không gian vector bằng lực lượng của cơ sở.

Ta đã biết trong không gian vector n chiều, mọi hệ vector độc lập tuyến tính mà chưa là cơ sở đều có thể được bổ sung thêm để trở thành một cơ sở.

Vấn đề này sẽ như thế nào khi ta xét đối với các mô đun tự do trên vành chính.

Nói chung thì không phải hệ độc lập tuyến tính nào cũng có thể bổ sung được tới một cơ sở, chẳng hạn như ví dụ sau:

Xét $X = Z \oplus Z$ với phép cộng $(x_1; x_2) + (y_1; y_2) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$ và phép nhân ngoài $k(x_1; x_2) = (kx_1; kx_2)$, $\forall k \in Z$ thì X là một Z - mô đun tự do hạng 2, khi đó $\{(2;0)\}$ độc lập tuyến tính nhưng không thể bổ sung được tới cơ sở của X . Thật vậy

+ $\{(2;0)\}$ độc lập tuyến tính:

$\forall k \in Z$ mà $k(2;0) = (0;0)$ thì $2k = 0 \Rightarrow k = 0$.

+ Không thể bổ sung tới cơ sở:

Nếu bổ sung được $(m; n) \in X$ để $\{(2;0), (m;n)\}$ là một cơ sở của X thì $\forall x = (x_1; x_2) \in X$, x đều biểu diễn được qua cơ sở nghĩa là tồn tại $k, l \in Z$ sao cho $x = (x_1; x_2) = k(2;0) + l(m; n)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k + ml = x_1 \\ nl = x_2 \Leftrightarrow l = \frac{x_2}{n}, \forall x_2 \in Z \Rightarrow n = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k + mx_2 = x_1 \Rightarrow k = \frac{x_1 - mx_2}{2} \in Z, \text{ vô lý khi } x_1 \text{ lẻ, } x_2 \text{ chẵn} \\ l = x_2 \end{cases}$$

Tuy nhiên ta có thể nêu ra được điều kiện để thực hiện được việc này bằng mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.1.4:

Hệ $\{u_i\}_{i \in I}$ độc lập tuyến tính trong mô đun tự do X trên vành chính R có thể bổ sung tới cơ sở khi và chỉ khi mô đun con sinh bởi hệ $\{u_i\}_{i \in I}$ là hạng tử trực tiếp của X .

Việc chứng minh mệnh đề này sẽ được nêu ở §2 sau này.

Ta biết rằng trong không gian vectơ n chiều, mọi hệ n vectơ độc lập tuyến tính hay mọi hệ sinh gồm n phần tử đều là cơ sở. Điều đó có còn đúng đối với mô đun tự do hạng n trên vành chính hay không?

Về hệ n phần tử độc lập tuyến tính nói chung không là cơ sở.

Chẳng hạn $\square \oplus \square$ với phép toán cộng $(m_1; m_2) + (n_1; n_2) = (m_1 + n_1; m_2 + n_2)$ và phép nhân ngoài $k(m_1; m_2) = (km_1; km_2)$, khi đó $\square \oplus \square$ là $\square$ – mô đun tự do với cơ sở $\{(1;0), (0;1)\}$ (hạng 2) nhưng $S = \{(1;0), (0;2)\}$ không là cơ sở mặc dù S độc lập tuyến tính.

Thật vậy $k(1;0) + h(0;2) = (0;0) \Leftrightarrow (k;0) + (0;2h) = (0;0) \Leftrightarrow (k;2h) = (0;0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

S không là hệ sinh vì phần tử $(2;3)$ không biểu diễn được qua S .

Thật vậy $k(1;0) + h(0;2) = (2;3) \Leftrightarrow (k;2h) = (2;3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ 2h = 3 \Leftrightarrow h = \frac{3}{2} \notin \square \end{cases}$$

Tuy nhiên ta lại có kết quả sau:

Mệnh đề 2.1.5:

Trong mô đun tự do trên vành chính hạng n thì hệ sinh gồm n phần tử cũng là cơ sở của mô đun đó.

Chứng minh:

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Nếu X là mô đun tự do trên vành chính R , X có hạng là n và $f: X \rightarrow X$ là toàn cấu thì f là đẳng cấu.

Thật vậy, ta chỉ cần chứng minh f là đơn cấu. Vì f là toàn cấu nên ta có dãy khớp ngắn sau: $0 \longrightarrow \text{Ker} f \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} X \longrightarrow 0$
(trong đó j là phép nhúng)

mà X là mô đun tự do nên X là mô đun xạ ảnh do đó dãy khớp trên là chẻ hay $X \cong X \oplus \text{Ker} f$.

Nếu $\text{Ker} f \neq 0$ thì $X \oplus \text{Ker} f$ có hạng lớn hơn hạng của X , không thể đẳng cấu với X , vô lý.

Do đó $\text{Ker} f = 0$ hay f là đơn cấu.

Vậy f đẳng cấu.

Bây giờ ta chứng minh mệnh đề.

Gọi $\{e_1, \dots, e_n\}$ là cơ sở của X

và $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ là hệ sinh gồm n phần tử của X ta sẽ chứng minh $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ là cơ sở của X .

Xét $f: X \longrightarrow X$ thỏa $f(e_i) = \varepsilon_i$, ta thấy f toàn cấu trên hệ sinh nên f là toàn cấu theo bổ đề trên ta suy ra f là đẳng cấu mà $\{e_1, \dots, e_n\}$ là cơ sở của X nên $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ là cơ sở của X .