

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

LÊ XUÂN HẬU

**MỘT ĐỊNH LÝ MỚI VỀ ỔN ĐỊNH LŨY THỪA
CỦA HỌ TIẾN HÓA TUẦN HOÀN TRÊN
KHÔNG GIAN BANACH**

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS.TS LÊ HOÀN HÓA**

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

LỜI CẢM ƠN

Để có thể hoàn thành được luận văn này. Người đầu tiên mà tôi tỏ lòng biết ơn sâu sắc đó là PGS. TS Lê Hoàn Hóa, người thầy đã tận tâm hướng dẫn chỉ bảo từng bước cho tôi trong suốt quá trình học tập.

Xin trân trọng cảm ơn TS.....và TS.....đã đọc góp ý cho luận văn của tôi.

Xin trân trọng cảm ơn quý thầy cô thuộc khoa Toán – Tin học trường Đại Học Sư Phạm TPHCM, cùng quý thầy cô giảng dạy cho lớp cao học khóa 18 chuyên ngành Giải Tích đã nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ cho tôi trong suốt khóa học.

Tôi cũng xin cảm ơn quý thầy cô phòng KHCN - SĐH trường Đại Học Sư Phạm TPHCM đã tạo điều kiện và giúp đỡ cho tôi hoàn thành chương trình học.

Xin gửi lời cảm ơn đến Lãnh Đạo Sở Giáo Dục Và Đào Tạo Phú Yên, Ban Giám Hiệu, cùng toàn thể giáo viên công nhân viên của trường THPT Trần Bình Trọng – Phú Hòa – Phú Yên đã tạo điều kiện thuận lợi, và giúp đỡ tôi hoàn thành khóa học.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn gia đình, các bạn bè đồng nghiệp đã động viên và nhiệt tình giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua.

Thành Phố Hồ Chí Minh, tháng năm 2010

Lê Xuân Hậu

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan chỉ sử dụng nội dung một số bài báo, và tài liệu liên quan để hoàn thành tốt luận văn của mình và không sao chép bất kì luận văn nào khác đã có trước đây.

Học viên

Lê Xuân Hậu

MỞ ĐẦU

1. Lý do và mục đích chọn đề tài:

Lý thuyết ổn định lũy thừa của họ tiến hóa tuần hoàn trong lĩnh vực phương trình đạo hàm riêng đã ra đời từ rất sớm và có nhiều ứng dụng quan trọng trong nhiều lĩnh vực toán học. Cùng với nhiều nhà toán học khác, hai nhà toán học Constantin và Jitianu đặt vấn đề tìm nghiệm yếu

$v_f(., 0)$ của phương trình Cauchy không thuần nhất:
$$\begin{cases} v'(t) = A(t)v(t) + f(t) \\ v(0) = 0 \end{cases}$$
 dựa trên lý thuyết phổ

của nửa nhóm tiến hóa. Đến năm 2003 hai tác giả này đã đưa ra những kết quả quan trọng cùng với nhiều ứng dụng mới đã đem đến cho lĩnh vực này thêm sự đa dạng và đặc sắc.

Với sự tâm đắc, và với mục đích tìm hiểu nhiều hơn nữa về phương pháp trên cùng với các ứng dụng của nó để học tập, và bước đầu làm quen công việc nghiên cứu khoa học, tôi đã chọn đề tài trên cho luận văn thạc sĩ của mình.

2. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu.

Nghiên cứu lý thuyết về ổn định lũy thừa của họ tiến hóa tuần hoàn trên không gian Banach và các ứng dụng của nó.

Trong luận văn tôi xin đề cập đến một trong những kết của hai tác giả nói trên, đó là:

“MỘT ĐỊNH LÝ MỚI VỀ ỔN ĐỊNH LŨY THỪA CỦA HỌ TIẾN HÓA TUẦN HOÀN TRÊN KHÔNG GIAN BANACH”.

Cụ thể Chúng ta xem xét một nghiệm yếu của bài toán Cauchy không thuần nhất

$$\begin{cases} v'(t) = A(t)v(t) + f(t) \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

trên không gian Banach phức X , với $A(.)$ là toán tử tuần hoàn chu kì 1.

Ta chứng minh rằng nếu $v_f(., 0)$ thuộc tập $AP_0(R_+, X)$ với mỗi f thuộc $AP_0(R_+, X)$ thì với mỗi x thuộc X nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \\ u(0) = x \end{cases}$$

là ổn định đều theo lũy thừa và ngược lại.

Chi tiết về không gian $AP_0(R_+, X)$ được trình bày trong mục 2.1 của chương II dưới đây. Phương pháp nghiên cứu dựa trên lý thuyết phổ của nửa nhóm tiến hóa. Nội dung của luận văn trình bày lại kết quả của bài báo:

**“A new theorem on exponential stability of
periodic evolution families on Banach spaces”**

của hai tác giả Constantin Buse & Oprea Jitianu nhưng được trình bày chi tiết hơn.

Nội dung của luận văn được chia làm ba chương

Chương I: Các kiến thức cơ bản

Trong chương này nhắc lại định nghĩa và tính chất của nửa nhóm, nửa nhóm liên tục đều, nửa nhóm liên tục mạnh, nửa nhóm tiến hóa, họ tiến hóa, cũng như các khái niệm và tính chất liên quan làm cơ sở cho các kiến thức của chương II.

Chương II: Lời giới thiệu và các kết quả

Trong chương này giới thiệu các kí hiệu sử dụng trong luận văn và các kết quả của luận văn.

Chương III: Ứng dụng

Giới thiệu một số ứng dụng quan trọng của các kết quả trong chương II.

Vì kiến thức bản thân còn nhiều hạn chế nên chắc chắn có những thiếu sót trong quá trình trình bày luận văn. Rất mong nhận được sự phê bình và đóng góp ý kiến của Quý Thầy cô cùng bạn bè quan tâm.

CHƯƠNG I

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Nửa nhóm liên tục đều của các toán tử tuyến tính bị chặn.

Định nghĩa 1.1.1

Cho X là không gian Banach. Họ một tham số $T(t), 0 \leq t < \infty$, các toán tử tuyến tính bị chặn từ X vào X được gọi là một nửa nhóm các toán tử tuyến tính bị chặn trên X nếu

- i) $T(0) = I$, (I là ánh xạ đồng nhất trên X)
- ii) $T(t+s) = T(t).T(s)$ với mọi $t, s \geq 0$.

Một nửa nhóm các toán tử tuyến tính bị chặn $T(t)$ được gọi là liên tục đều nếu

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - I\| = 0. \quad (1.1)$$

Từ định nghĩa ta có:

Nếu $T(t), 0 \leq t < \infty$ là một nửa nhóm liên tục đều các toán tử tuyến tính bị chặn thì

$$\lim_{t \rightarrow s} \|T(t) - T(s)\| = 0. \quad (1.2)$$

Định nghĩa 1.1.2

Cho $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ là nửa nhóm các toán tử tuyến tính bị chặn, xác định trên X . Với $h > 0$, ta định nghĩa toán tử $A_h x$ xác định như sau

$$A_h x = \frac{T(h)x - x}{h}, \quad x \in X. \quad (1.3)$$

Kí hiệu $D(A)$ là tập tất cả các $x \in X$ sao cho giới hạn $\lim_{h \rightarrow 0} A_h x$ tồn tại.

Ta xác định toán tử A trên $D(A)$ như sau:

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0} A_h x, \quad x \in D(A). \quad (1.4)$$

Ta gọi toán tử A xác định như trên là toán tử sinh của nửa nhóm $T(t)$, và $D(A)$ là tập xác định của A .

Định lý 1.1.3. Một toán tử tuyến tính A là toán tử sinh của một nửa nhóm liên tục đều nếu và chỉ nếu A là một toán tử tuyến tính bị chặn.

Chứng minh:

Cho A là một toán tử tuyến tính bị chặn trên X , và đặt

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \quad (1.5)$$

Về phải (1.5) hội tụ theo chuẩn với mọi $t \geq 0$, và xác định với mỗi t là một toán tử tuyến tính bị chặn $T(t)$.

Rõ ràng $T(0) = I$, và với cách tính trực tiếp trên chuỗi lũy thừa, ta có:

$$T(t+s) = T(t).T(s)$$

Tiến hành đánh giá chuỗi lũy thừa trên, ta có:

$$\|T(t) - I\| \leq t\|A\|e^{t\|A\|}$$

và
$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq \|A\|\|T(t) - I\|.$$

Suy ra $T(t)$ là nửa nhóm liên tục đều các toán tử tuyến tính bị chặn trên X , và A là toán tử sinh của $T(t)$.

Mặt khác, cho $T(t)$ là một nửa nhóm liên tục đều các toán tử tuyến tính bị chặn trên X .

Cố định $\rho > 0$ đủ nhỏ sao cho $\left\| I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s)ds \right\| < 1$.

Suy ra $\rho^{-1} \int_0^\rho T(s)ds$ là khả nghịch và vì vậy $\int_0^\rho T(s)ds$ là khả nghịch.

Mặt khác

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I) \int_0^\rho T(s)ds &= \frac{1}{h} \left(\int_0^\rho T(s+h)ds - \int_0^\rho T(s)ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \right). \end{aligned}$$

Vì vậy

$$\frac{1}{h}(T(h) - I) = \left(\frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)ds \right) \left(\int_0^h T(s)ds \right)^{-1} \quad (1.6)$$

Trong (1.6), cho $h \rightarrow 0$ ta có $\frac{1}{h}(T(h) - I)$ hội tụ theo chuẩn. Do đó toán tử tuyến tính bị chặn

$(T(\rho) - I)(\int_0^\rho T(s)ds)^{-1}$ là toán tử sinh của $T(t)$.

Toán tử sinh của nửa nhóm $T(t)$ là duy nhất. Định lí sau sẽ chứng minh cho khẳng định trên.

Định lí 1.1.4. Cho $T(t)$ và $S(t)$ là nửa nhóm liên tục đều các toán tử tuyến tính bị chặn trên X .

$$\text{Nếu } A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - I}{t} \text{ thì } T(t) = S(t), \text{ với mọi } t \geq 0. \quad (1.7)$$

Chứng minh:

Cho $T > 0$, chúng ta chứng minh rằng $S(t) = T(t)$, với $0 \leq t \leq T$.

Cố định $T > 0$, vì hàm $t \rightarrow \|T(t)\|$, và $t \rightarrow \|S(t)\|$ liên tục nên tồn tại hằng số C sao cho:

$$\|T(t)\| \|S(t)\| \leq C, \text{ với } 0 \leq t, s \leq T.$$

Cho $\varepsilon > 0$, do (1.7) nên tồn tại số $\delta > 0$ sao cho:

$$\frac{1}{h} \|T(h) - S(h)\| < \frac{\varepsilon}{TC}, \text{ với } 0 \leq h \leq \delta. \quad (1.8)$$

Cho $0 \leq t \leq T$, và chọn $n \geq 1$ sao cho $\frac{t}{n} < \delta$.

Từ tính chất của nửa nhóm và từ (1.8), ta có:

$$\begin{aligned} \|T(t) - S(t)\| &= \left\| T\left(n \frac{t}{n}\right) - S\left(n \frac{t}{n}\right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k) \frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1) \frac{t}{n}\right) S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1) \frac{t}{n}\right) \right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S\left(\frac{kt}{n}\right) \right\| \\ &\leq Cn \frac{\varepsilon}{TC} \frac{t}{n} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Vậy $S(t) = T(t)$, với mọi $0 \leq t \leq T$.

Do hai định lí trên ta có kết quả sau:

Cho $T(t)$ là nửa nhóm liên tục đều các toán tử tuyến tính bị chặn, ta có:

- a) Tồn tại hằng số $\omega \geq 0$, sao cho $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.
- b) Tồn tại toán tử bị chặn duy nhất A , sao cho $\|T(t)\| = e^{At}$.
- c) Toán tử A trong phần b) là toán tử sinh của $T(t)$.
- d) $t \rightarrow \|T(t)\|$ khả vi theo chuẩn, và $\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A$.

1.2. Nửa nhóm liên tục mạnh các toán tử tuyến tính bị chặn

Trong phần này ta kí hiệu X là không gian Banach.

Định nghĩa 1.2.1

Một nửa nhóm $T(t), 0 \leq t < \infty$ các toán tử tuyến tính bị chặn trên X là nửa nhóm liên tục mạnh nếu

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x, \text{ với mọi } x \in X. \quad (1.9)$$

Một nửa nhóm liên tục mạnh các toán tử tuyến tính bị chặn trên X được gọi là một nửa nhóm của lớp C_0 hay gọi tắt là nửa nhóm $_C_0$.

Định lý 1.2.2. Cho $T(t)$ là nửa nhóm $_C_0$, khi đó tồn tại hằng số $\omega \geq 0$ và $M \geq 1$, sao cho:

$$\|T(t)\| \leq M.e^{\omega t}, \text{ với } 0 \leq t < \infty. \quad (1.10)$$

Chứng minh:

Trước hết ta thấy tồn tại số $\eta > 0$, sao cho $\|T(t)\|$ là bị chặn trong $0 \leq t \leq \eta$, vì nếu trái lại thì có dãy $\{t_n\}$ thỏa $t_n \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$, và $\|T(t_n)\| \geq n$.

Áp dụng định lý bị chặn đều, tồn tại $x \in X$ sao cho $\|T(t_n)x\|$ là không bị chặn. Điều này mâu thuẫn với (1.9). Vì vậy $\|T(t)\| \leq M$, với mọi $0 \leq t \leq \eta$.

Do đó $M \geq \|T(0)\| = 1$.

Cho $\omega = \frac{1}{\eta} \log M \geq 0$, và $t \geq 0$, ta có $t = n\eta + \delta$, với $0 \leq \delta < \eta$.

Áp dụng tính chất của nửa nhóm, ta thu được

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq M.M^{\frac{t}{\eta}} = M.e^{\omega t}.$$

Hệ quả 1.2.3. Nếu $T(t)$ là nửa nhóm $_C C_0$ thì với mọi $x \in X$, $t \rightarrow T(t)x$ là một hàm liên tục từ $\mathbb{R}_0^+$ (đường thẳng thực không âm) vào X .

Chứng minh:

Cho $t, h \geq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq M.e^{\omega t} \|T(h)x - x\|. \end{aligned}$$

và cho $t \geq h \geq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \|T(t-h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\| \\ &\leq M.e^{\omega t} \|x - T(h)x\|. \end{aligned}$$

Cho $h \rightarrow 0$, áp dụng tính chất liên tục mạnh của nửa nhóm $T(t)$, suy ra hàm $t \rightarrow T(t)x$ là liên tục từ $\mathbb{R}_0^+$ vào X .

Định lý 1.2.4. Cho $T(t)$ là nửa nhóm $_C C_0$ và cho A là toán tử sinh của nó, ta có:

$$a) \text{ Với } x \in X, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x. \quad (1.11)$$

$$b) \text{ Cho } x \in X, \int_0^t T(s)x ds \in D(A)$$

$$\text{và } A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x. \quad (1.12)$$

$$c) \text{ Cho } x \in D(A), T(t)x \in D(A)$$

$$\text{và } \frac{d}{dt} T(t)x = A T(t)x = T(t)Ax. \quad (1.13)$$

$$d) \text{ Cho } x \in D(A), T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(r)A x dr = \int_s^t A T(r)x dr. \quad (1.14)$$

Chứng minh:

a) Phần này được suy ra trực tiếp từ tính liên tục của $t \rightarrow T(t)x$.

b) Cho $x \in X$, và $h > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)x ds &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(s+h)x - T(s)x) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds.\end{aligned}$$

Cho $h \rightarrow 0$, về phải tiến đến $T(t)x - x$, ta có điều phải chứng minh.

c) Cho $x \in D(A)$ và $h > 0$, ta có:

$$\frac{T(h) - I}{h} T(t)x = T(t) \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) x \rightarrow T(t)Ax \text{ khi } h \rightarrow 0. \quad (1.15)$$

vì vậy $T(t)x \in D(A)$ và $AT(t)x = T(t)Ax$.

Từ (1.15), suy ra $\frac{d^+}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$. Nghĩa là đạo hàm bên phải của $T(t)x$ là $T(t)Ax$. Chứng minh (1.13) ta chứng minh rằng với $t > 0$, đạo hàm bên trái của $T(t)x$ tồn tại, và bằng $T(t)Ax$.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right] \\ = \lim_{h \rightarrow 0} T(t-h) \left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right] + \lim_{h \rightarrow 0} (T(t-h)Ax - T(t)Ax).\end{aligned}$$

và cả hai giới hạn bên phải đều bằng 0.

Giới hạn thứ nhất bằng 0 do $x \in D(A)$, và $\|T(t-h)\|$ bị chặn trên $0 \leq h \leq t$, giới hạn thứ hai là do tính liên tục mạnh của $T(t)$.

Kết thúc chứng minh kết quả (c).

d) Chứng minh phần này ta lấy tích phân từ s đến t cho 2 vế của (1.13).

Hệ quả 1.2.5. Nếu A là toán tử sinh của nửa nhóm $T(t)$ và $T(t)$ là nửa nhóm $_0C_0$ thì tập xác định $D(A)$ của A trù mật trong X , hơn nữa A là toán tử tuyến tính đóng.

Chứng minh:

Với $x \in X$, xét tập $x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)ds$. Do kết quả b)

của định lí 1.2.4 nên $x_t \in D(A)$, với $t > 0$ và do kết quả a) của định lí 1.2.4 nên $x_t \rightarrow x$ khi $t \rightarrow 0$. Vì vậy $\overline{D(A)} = X$.

Tính chất tuyến tính của A là rõ ràng, vì vậy ta chỉ cần chứng minh A là ánh xạ đóng.

Cho $x_n \in D(A)$, $x_n \rightarrow x$ và $Ax_n \rightarrow y$ khi $n \rightarrow \infty$.

Từ kết quả d) của định lí 1.2.4, ta có:

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds \quad (1.16)$$

Ta có hàm $T(s)Ax_n$ hội tụ đều đến $T(s)y$ trên một khoảng bị chặn, do vậy trong (1.16) khi $n \rightarrow \infty$, ta có:

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds \quad (1.17)$$

Chia (1.17) cho $t > 0$, và cho $t \rightarrow 0$, ta có $x \in D(A)$ và $Ax = y$, (do kết quả a) của định lí 1.2.4).

Định lí 1.2.6. Cho $T(t)$ và $S(t)$ là nửa nhóm $_C$ của các toán tử tuyến tính bị chặn với hai toán tử sinh tương ứng là A và B . Nếu $A = B$ thì $T(t) = S(t)$, với mọi $t \geq 0$

Chứng minh:

Cho $x \in D(A) = D(B)$. Từ kết quả c) của định lí 1.2.4, ta có hàm $s \rightarrow T(t-s)S(s)x$ khả vi và

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0 \end{aligned}$$

Vì vậy hàm $s \rightarrow T(t-s)S(s)x$ là hàm hằng. Trong trường hợp đặc biệt giá trị của nó ở $s = 0$ và $s = t$ là giống nhau, tức là $T(t)x = S(t)x$ với mọi $x \in X$. Do đó điều này cũng đúng cho mọi $x \in D(A)$.

Do hệ quả 1.2.5, $D(A)$ trù mật trong X , và $T(t), S(t)$ bị chặn nên $T(t)x = S(t)x$, với mọi $x \in X$.

1.3. Định lý Hille-Yosida

Cho $T(t)$ là một nửa nhóm $_C C_0$. Từ định lý 1.2.2, ta có hằng số $\omega \geq 0$ và $M \geq 1$, sao cho:

$$\|T(t)\| \leq M.e^{\omega t}, \text{ với } 0 \leq t < \infty.$$

Nếu $\omega = 0$ thì $T(t)$ được gọi là bị chặn đều.

Nếu $M = 1$ thì $T(t)$ được gọi là nửa nhóm $_C C_0$ rút gọn.

Nếu A là toán tử tuyến tính (không nhất thiết bị chặn) trong X , tập giải $\rho(A)$ của tập A là tập hợp gồm tất cả các số phức λ sao cho $\lambda I - A$ có ánh xạ ngược, tức là $(\lambda I - A)^{-1}$ là toán tử tuyến tính bị chặn trong X .

Họ $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ được gọi là giải thức của A .

Định lý 1.3.1. (Hille – Yosida)

Một toán tử tuyến tính (có thể không bị chặn) A là toán tử sinh của nửa nhóm $_C C_0$ rút gọn $T(t)$, $t \geq 0$ nếu và chỉ nếu

a) A là đóng và $\overline{D(A)} = X$

b) Tập giải $\rho(A)$ của A là tập chứa $\mathbb{R}^+$, và cho $\lambda > 0$, ta có:

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad (1.18)$$

Định lý 1.3.2. Cho $T(t)$ là nửa nhóm liên tục mạnh xác định trên X , và A là toán tử sinh của nó thỏa hai điều kiện của định lý 1.3.1. Khi đó ta có kết quả sau

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Chứng minh:

Đầu tiên giả sử rằng $x \in D(A)$, thì

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|AR(\lambda, A)x\| = \|R(\lambda, A)Ax\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|Ax\| \rightarrow 0 \text{ khi } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Nhưng $\overline{D(A)} = X$, ($D(A)$ trù mật trong X và $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$).

Vì vậy $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \forall x \in X$.

1.4. Nửa nhóm các toán tử tuyến tính và bài toán Cauchy.

Chúng ta xét một phương trình vi phân và quan hệ của nó với nửa nhóm các toán tử tuyến tính.

Cho X là không gian Banach, và A là toán tử tuyến tính từ $D(A) \subset X \rightarrow X$. Cho $x \in X$, bài toán Cauchy của A với giá trị đầu x là:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \quad (1.19)$$

Nghiệm của bài toán là một hàm $u(t)$ có giá trị trong X , sao cho $u(t)$ liên tục với mọi $t \geq 0$, khả vi liên tục và $u(t) \in D(A)$, với mọi $t > 0$, đồng thời thỏa (1.19).

Rõ ràng nếu A là toán tử sinh của nửa nhóm $_0C_t T(t)$ thì bài toán Cauchy theo A có nghiệm $u(t) = T(t)x$, với mọi $x \in D(A)$.

Thật vậy theo định lí 1.2.4, ta có:

$$\frac{d}{dt} T(t)x = A T(t)x = T(t)Ax$$

và

$$T(0)x = x.$$

Bây giờ ta xét bài toán giá trị đầu không thuần nhất

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \quad (1.20)$$

với $f : [0, T] \rightarrow X$, và A là toán tử sinh của nửa nhóm $_0C_t T(t)$ sao cho phương trình thuần nhất tương ứng (tức là phương trình với $f \equiv 0$) có nghiệm duy nhất với mọi giá trị đầu $x \in D(A)$.

Định nghĩa 1.4.2

Một hàm $u : [0, T[\rightarrow X$ được gọi là một nghiệm mạnh của (1.20) trên $[0, T[$ nếu u liên tục trên $[0, T[$, khả vi liên tục trên $]0, T[$, $u(t) \in D(A)$ với $0 < t < T$, đồng thời thỏa mãn (1.20) trên $[0, T[$.

Cho $T(t)$ là nửa nhóm $_C C_0$ với toán tử sinh A , và u là một nghiệm của (1.20). Khi đó hàm có giá trị trong X , $g(s) = T(t-s)u(s)$ khả vi với mọi $0 < s < t$.

$$\begin{aligned} \text{và} \quad \frac{dg}{ds} &= -A T(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -A T(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Nếu $f \in L^1(0, T : X)$ thì $T(t-s)f(s)$ khả tích, và lấy tích phân hai vế của (1.21) từ 0 đến t , ta có:

$$T(t-s)u(s) \Big|_0^t = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

$$\text{Do đó} \quad u(s) - T(t)x = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

$$\text{Hay} \quad u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad (1.22)$$

Từ định nghĩa trên suy ra nếu $f \in L^1(0, T : X)$ thì với mọi $x \in X$, bài toán giá trị đầu (1.20) có nhiều nhất một nghiệm. Trong trường hợp nó có nghiệm thì nghiệm này được xác định bởi (1.22).

Định nghĩa 1.4.3

Cho A là toán tử sinh của nửa nhóm $_C C_0 T(t)$. Cho $x \in X$ và $f \in L^1(0, T : X)$. Hàm $u \in C([0, T] : X)$ được cho bởi:

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

là một nghiệm yếu (mild solution) của bài toán giá trị đầu (1.20) trên $[0, T]$.

Định lý 1.4.4.

Cho A là toán tử sinh của nửa nhóm $_0C_0T(t)$ Cho $f \in L^1(0, T; X)$ liên tục trên $[0, T]$ và cho

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Bài toán (1.20) có nghiệm mạnh u trên $[0, T[$ với mọi $x \in D(A)$ nếu một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn

i) $v(t)$ khả vi liên tục trên $]0, T[$.

ii) $v(t) \in D(A)$ với $0 < t < T$, và $Av(t)$ liên tục trên $]0, T[$.

Nếu (1.20) có nghiệm u trên $[0, T[$ với một $x \in D(A)$ nào đó thì $v(t)$ sẽ thỏa cả hai điều kiện i) và ii).

Hệ quả 1.4.5. Cho A là toán tử sinh của nửa nhóm $_0C_0T(t)$. Nếu $f(s)$ khả vi liên tục trên $[0, T]$ thì bài toán (1.20) có nghiệm mạnh u trên $[0, T[$, với mọi $x \in D(A)$.

Định nghĩa 1.4.6

Cho $(A(t), D(A(t)))$, $t \in \mathbb{R}$ cho $(A(t), D(A(t)))$, $t \in \mathbb{R}$ là toán tử tuyến tính trên không gian Banach X , cho $s \in \mathbb{R}$ và $x \in D(A(s))$. Một nghiệm (cổ điển) của bài toán Cauchy non – autonomous:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \\ u(s) = x \end{cases}, \text{ với } t, s \in X, t \geq s. \quad (1.23)$$

là một hàm $u(., s, x) = u \in C^1([s, \infty), X)$, sao cho $u(t) \in D(A(t))$, và thỏa mãn bài toán với mọi $t \geq s$.

Bài toán Cauchy (1.23) được gọi là đặt - đúng trên không gian Y_t nếu có một không gian con trù mật $Y_s \subseteq D(A(s))$, $s \in \mathbb{R}$ của X sao cho với $s \in \mathbb{R}$, và $x \in Y_s$, bài toán có duy nhất một nghiệm $t \mapsto u(t, s, x) \in Y_t$. Đồng thời nếu $s_n \rightarrow s$ và $(x_n) \subseteq Y_{s_n}; x_n \rightarrow x \in Y_s$, ta có $\tilde{u}(t, s_n, x_n) \rightarrow \tilde{u}(t, s, x)$. Với

$$\tilde{u}(t, s, x) := \begin{cases} u(t, s, x), & t \geq s \\ x, & t < s \end{cases}.$$

1.5. Hàm hầu tuần hoàn. (almost periodic functions).

1.5.1 Định nghĩa (tiêu chuẩn Bochner).

Một hàm f bị chặn và liên tục được gọi là hầu tuần hoàn (almost Periodic functions) nếu với mỗi dãy số $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, tồn tại dãy con $\{t_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sao cho dãy hàm $\{f(t_{n_k} + \cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

Nếu f là hàm hầu tuần hoàn thì tồn tại giới hạn

$$a(\lambda, f) := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi.$$

Ta chứng minh được rằng tập hợp $\sigma_b(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid a(\lambda, f) \neq 0\}$, tồn tại và được gọi là phổ Bochner của f .

1.6. Phổ, tập giải của ánh xạ tuyến tính liên tục.

Cho X là không gian Banach trên trường $\mathbb{C}$

Kí hiệu $L(X) = L(X, X)$, $Isom X = \{A \in L(X) : A \text{ là song ánh}\}$.

1.6.1 Định lý

i) Nếu $\|A\| < 1$ thì $I - A$ thuộc $Isom X$ và

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n = I + A + A^2 + \dots$$

ii) Nếu $A_0 \in Isom X$ và $A \in L(X)$ thỏa mãn điều kiện $\|A - A_0\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$ thì $A \in Isom X$. Từ

đó suy ra $Isom X$ là tập mở trong $L(X)$.

1.6.2 Định nghĩa

Cho X là không gian Banach trên trường $\mathbb{C}$, và $A \in L(X)$.

i) Số $\lambda \in \mathbb{C}$ gọi là giá trị chính qui của A nếu $A - \lambda I \in Isom X$.

Tập tất cả các giá trị chính qui của A gọi là tập giải của A , kí hiệu là $\rho(A)$.

ii) Tập $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ gọi là phổ của A .

Như vậy $\lambda \in \sigma(A)$ khi và chỉ khi $A - \lambda I$ không là đơn ánh hoặc $A - \lambda I$ không là toàn ánh.

Nếu $A - \lambda I$ không là đơn ánh thì λ được gọi là giá trị riêng của A .

Khi đó $N(A - \lambda I) = \text{Ker}(A - \lambda I)$ gọi là không gian riêng của A .

Mỗi $x \in N(A - \lambda I) \setminus \{0\}$, (hay $Ax = \lambda x, x \neq 0$) gọi là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ .

Định lý 1.6.3. Cho $X \neq \{0\}$ là không gian Banach trên trường $\mathbb{C}$. Khi đó $\sigma(A)$ là tập compact, không rỗng, chứa trong hình tròn đóng tâm O , bán kính $\|A\|$ của $\mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.6.4

Cho $A \in L(X)$, số $r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ gọi là bán kính phổ của A .

Định lý 1.6.5

Bán kính phổ của A được tính bởi công thức $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

Chứng minh những định lý trên chúng ta tham khảo tài liệu:

“Bổ sung về giải tích hàm” của PGS.TS Nguyễn Bích Huy mục 1.1, 1.2, và 1.3 trang 12, 13, 14”.

1.7. Phổ của nửa nhóm và hàm sinh.

Định nghĩa 1.7.1

Cho $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ là toán tử đóng, $s(A) = \sup\{\text{Re } \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ được gọi là biên phổ (spectral bound) của A .

Chú ý rằng $s(A)$ có thể nhận bất kỳ giá trị thực nào bao gồm $-\infty$ (nếu $\sigma(A) = \emptyset$), và $+\infty$.

Nếu A là hàm sinh của nửa nhóm liên tục mạnh $\mathfrak{S} = (T(t))_{t \geq 0}$, thì $s(A)$ luôn luôn bị chặn bởi:

$$\omega_0 =: \omega_0(\mathfrak{S}) := \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R} : \text{có } M_\omega \geq 1 \text{ sao cho } \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \forall t \geq 0 \right\}$$

của nửa nhóm (xem định nghĩa I.5.6 và mệnh đề II.1.13).

Mệnh đề 1.7.2. Cho biên phổ $s(A)$, và ω_0 của nửa nhóm $(T(t))_{t \geq 0}$, ta có:

$$\begin{aligned} -\infty \leq s(A) \leq \omega_0 &:= \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| \\ &= \frac{1}{t_0} \log r(T(t_0)) < \infty. \end{aligned}$$

cho mỗi $t_0 > 0$.

Đặc biệt bán kính phổ của nửa nhóm $(T(t))_{t \geq 0}$, $r(T(t)) = e^{\omega_0 t}$, với mọi $t \geq 0$.

Chứng minh của mệnh đề trên chúng ta tham khảo:

“One-Parameter-Semigroups for Linear -Evolution Equations chương IV mệnh đề 2.2”.

Hệ quả 1.7.3. Cho $(T(t))_{t \geq 0}$ là nửa nhóm liên tục đều với hàm sinh (bị chặn) là A . ta có:

$$s(A) = \omega_0$$

Chứng minh:

Từ định lí phổ ánh xạ cho nửa nhóm liên tục (xem bổ đề I.3.13), ta có:

$$r(T(t)) = e^{s(A)t}$$

Do đó $s(A) = \omega_0$ (mệnh đề 2.2).

Hệ quả 1.7.4. Cho $(T(t))_{t \geq 0}$ là nửa nhóm liên tục mạnh với hàm sinh là A và $\omega_0 = -\infty$, ta có:

$$r(T(t)) = 0, \text{ với mọi } t > 0 \text{ và } \sigma(A) = \phi.$$

1.8. Họ tiến hóa tuần hoàn trên không gian Banach.

Định nghĩa 1.8.1

Cho X là không gian Banach phức, và $L(X)$ là đại số Banach gồm các toán tử tuyến tính bị chặn trên X .

Kí hiệu $\|\cdot\|$ là chuẩn của các véc tơ trong X và các toán tử trong $L(X)$.

Họ $U = \{U(t, s) : t \geq s \geq 0\} \subset L(X)$ được gọi là họ tiến hóa trên $\mathbb{R}_+$ của các toán tử tuyến tính bị chặn trên X nếu và chỉ nếu

(e₁) $U(t, r) = U(t, s)U(s, r)$ với mọi $t \geq s \geq r \geq 0$ và $U(t, t) = I$ với mọi $t \geq 0$. (I là toán tử đồng nhất trong $L(X)$).

(e₂) Ánh xạ $\{(t, s) : t \geq s \geq 0\} \rightarrow X$

$(t, s) \mapsto U(t, s)x$, là liên tục với mỗi $x \in X$.

Một họ tiến hóa là bị chặn lũy thừa nếu tồn tại $\omega \in \mathbb{R}$, và $M_\omega > 0$ sao cho

$$\|U(t, s)\| \leq M_\omega e^{\omega(t-s)} \text{ với mọi } t \geq s \geq 0. \quad (1.24)$$

và được gọi là ổn định lũy thừa nếu (1.24) đúng với số $\omega < 0$.

Nếu họ tiến hóa thỏa mãn điều kiện

(e₃) $U(t, s) = U(t - s, 0)$ với mọi $t \geq s \geq 0$, thì họ

$T = \{U(t, 0) : t \geq 0\} \subset L(X)$ là nửa nhóm liên tục mạnh trên X .

Họ tiến hóa tương ứng U là tuần hoàn chu kỳ q nếu

$$(e_4) \quad U(t + q, s + q) = U(t, s) \text{ với mọi } t \geq s \geq 0.$$

Bổ đề 1.8.2. Cho $T \in L(X)$. Nếu $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n e^{i\mu k} T^k \right\| = M_\mu < \infty, \forall \mu \in \mathbb{R}$, thì $r(T) < 1$.

Chứng minh:

Ta có đồng nhất thức

$$\sum_{k=0}^n e^{i\mu k} T^k (e^{i\mu} T - I) = e^{i\mu(n+1)} T^{n+1} - I. \quad (1.25)$$

Từ (1.25), ta có:

$$\left\| e^{i\mu(n+1)} T^{n+1} \right\| \leq 1 + M_\mu (1 + \|T\|), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.26)$$

Suy ra $r(T) \leq 1$.

Giả sử $1 \in \sigma(T)$. Suy ra tồn tại dãy (x_m) , $\|x_m\| = 1$ sao cho $\lim_{m \rightarrow \infty} (I - T)x_m = 0$, (xem [9], mệnh đề 2.2, p.64).

Từ (1.26) suy ra $T^k(I - T)x_m$ hội tụ đều về 0 khi $m \rightarrow \infty$ cho mỗi $k \in \mathbb{N}$.

Cho $N \in \mathbb{N}$, $N > 2M_0$ và $m \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\left\| T^k(I - T)x_m \right\| \leq \frac{1}{2N}, k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

thì

$$\begin{aligned} M_0 &\geq \left\| x_m + \sum_{k=1}^N \left(x_m + \sum_{j=0}^{k-1} T^j (T - I)x_m \right) \right\| \\ &= \left\| (N + 1)x_m + \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{k-1} T^j (T - I)x_m \right\| \\ &\geq (N + 1) - \frac{N(N + 1)}{4N} > \frac{N}{2} > M_0, \text{ (mâu thuẫn)}. \end{aligned}$$

Suy ra $1 \notin \sigma(T)$.

Mặt khác ta cũng có $e^{i\mu} \notin \sigma(T)$, với $\mu \in \mathbb{R}$. Do đó $r(T) < 1$.

Bổ đề 1.8.3. Một họ U tiến hóa tuần hoàn chu kỳ q là ổn định lũy thừa nếu và chỉ nếu $r(V) < 1$, với $V = U(q, 0) \in L(X)$.

Chứng minh bổ đề 1.5.4 ta tham khảo:

“Bus, e C., Asymptotic stability and Perron condition for periodic evolution families on the half line, Evolution Equations and Semigroups(preprint), <http://ma1serv.mathematik.uni-karlsruhe.de/evolve-1/index.html>.”

Định lý 1.8.4. Cho $U = \{U(t, s) : t \geq s \geq 0\} \subset L(X)$ là họ tiến hóa tuần hoàn chu kỳ q trên không gian Banach X .

$$\text{Nếu } \sup_{t>0} \left\| \int e^{-i\mu\xi} U(t, \xi) f(\xi) d\xi \right\| < \infty, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}, \forall f \in P_q(\mathbb{R}_+, X), \quad (1.27)$$

thì U ổn định lũy thừa.

Chứng minh:

Cho $V = U(q, 0) \in L(X)$, $x \in X, n = 0, 1, \dots$, và $g \in P_q(\mathbb{R}_+, X)$ sao cho

$$g(\xi) = \xi(q - \xi)U(\xi, 0)x, \quad \forall \xi \in [0, q].$$

Từ (1.27), cho $t = (n + 1)q$, ta có:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n \int_{kq}^{(k+1)q} U((n+1)q, \xi) e^{-i\mu\xi} g(\xi) d\xi \right\| < \infty, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}. \quad (1.28)$$

Do U là họ tiến hóa tuần hoàn chu kỳ q nên ta có:

$$U(pq + q, pq + u) = U(q, u), \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall u \in [0, q].$$

Và $U(pq, jq) = U((p - j)q, 0) = V^{p-j}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, p \geq j$.

Bây giờ cho $k = 0, 1, \dots$, ta có:

$$\begin{aligned} & \int_{kq}^{(k+1)q} U((n+1)q, \xi) e^{-i\mu\xi} g(\xi) d\xi \\ &= \int_{kq}^{(k+1)q} U((n+1)q, (k+1)q) U((k+1)q, \xi) e^{-i\mu\xi} g(\xi) d\xi \\ &= V^{n-k} \int_0^q U((k+1)q, u + kq) e^{-i\mu(u+kq)} g(u + kq) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-i\mu kq} V^{n-k} \int_0^q e^{-i\mu u} u(q-u) U(q, u) U(u, 0) x du \\
&= e^{-i\mu kq} \left(\int_0^q e^{-i\mu u} u(q-u) du \right) V^{n-k+1} x \\
&= M(\mu, q) e^{-i\mu(n+1)q} e^{i\mu(n-k+1)q} V^{n-k+1} x.
\end{aligned}$$

với
$$M(\mu, q) = \int_0^q e^{-i\mu u} u(q-u) du \neq 0.$$

Trở lại (1.28) ta thu được

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=0}^{n+1} e^{i\mu j q} V^j \right\| < \infty$$

Áp dụng bổ đề 1.8.2 ta thu được $r(V) < 1$.

Áp dụng bổ đề 1.8.3 suy ra U ổn định lũy thừa.

Chú ý:

Qua chứng minh trên ta thấy chiều ngược lại của định lí 1.8.4 cũng đúng.

CHƯƠNG II

LỜI GIỚI THIỆU VÀ CÁC KẾT QUẢ

2.1. Lời giới thiệu

Cho X là không gian Banach phức, $L(X)$ là đại số Banach gồm các toán tử tuyến tính, bị chặn trên X .

Kí hiệu $\|\cdot\|$ là chuẩn của các véc tơ trong X , và các toán tử trong $L(X)$. $\mathbb{R}_+$ là tập hợp các số thực không âm, J là tập $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{R}_+$.

Không gian Banach gồm các hàm nhận giá trị trên X , bị chặn và liên tục đều trên J kí hiệu là $BUC(J, X)$.

Không gian Banach gồm các hàm nhận giá trị trên X , hầu như tuần hoàn trên J kí hiệu là $AP(J, X)$.

Ta chứng minh được $AP(J, X)$ là không gian con đóng nhỏ nhất của không gian $BUC(J, X)$ chứa các hàm có dạng

$$f_{\mu, x} : J \rightarrow X$$

$$t \mapsto f_{\mu, x}(t) := e^{i\mu t}x, \mu \in \mathbb{R}, x \in X, \text{ (Xem mục [14])}.$$

Tập hợp các hàm nhận giá trị trên X , xác định trên $\mathbb{R}_+$ mà tồn tại $t_f \geq 0$, và $F_f \in AP(\mathbb{R}_+, X)$ sao cho:

$$\begin{cases} f(t) = 0, & t \in [0, t_f] \\ f(t) = F_f(t), & t \geq t_f \end{cases}$$

kí hiệu là $A_0(\mathbb{R}_+, X)$.

$AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ là không gian con đóng nhỏ nhất trong $BUC(\mathbb{R}_+, X)$ chứa được $A_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Không gian con của $BUC(J, X)$ gồm các hàm nhận giá trị trên X , liên tục, tuần hoàn chu kỳ 1, và thỏa mãn $f(0) = 0$ kí hiệu là $P_1^0(J, X)$.

Một hàm đa thức lượng giác nhận giá trị trên X được cho bởi:

$$P : \mathbb{R} \rightarrow X$$

$$t \mapsto P(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\mu_k t} x_k, \quad c_k \in \mathbb{C}, \mu_k \in \mathbb{R}, x_k \in X.$$

Tập hợp các hàm f xác định trên $\mathbb{R}_+$ mà tồn tại $t_f \geq 0$, và một tổng lượng giác nhận giá trị trên X là p_f sao cho:

$$\begin{cases} f(t) = 0, & t \in [0, t_f] \\ f(t) = p_f(t), & t \geq t_f \end{cases}$$

được kí hiệu là $TP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Ta có $TP_0(\mathbb{R}_+, X)$ là tập con của $A_0(\mathbb{R}_+, X)$, và $P_1^0(\mathbb{R}_+, X)$ là bao đóng của $TP_0(\mathbb{R}_+, X)$ trong không gian $BUC(\mathbb{R}_+, X)$.

Cho $T = \{T(t) : t \geq 0\} \subset L(X)$ là nửa nhóm liên tục mạnh trên X , và

$A : D(A) \subset X \rightarrow X$ là hàm sinh của nửa nhóm $T(t)$.

Ta biết rằng bài toán Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = x \end{cases}, \text{ với } t \geq 0, x \in X. \quad (2.1.1)$$

(xem [22, 23, 15] và trong phần tóm tắt các phương trình đạo hàm riêng) có nghiệm yếu đặt đúng là:

$$u(t) = T(t)x, \quad (t \geq 0).$$

Tuy nhiên nếu $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ là hàm khả tích địa phương thì nghiệm yếu của bài toán Cauchy không thuần nhất

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) \\ u(0) = y \end{cases}, \text{ với } t \geq 0, y \in X.$$

có dạng:

$$u_f(t, y) = T(t)y + \int_0^t T(t - \zeta)f(\zeta)d\zeta, \quad t \geq 0.$$

Với bài toán Cauchy đặc biệt

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + e^{i\mu t}x \\ u(0) = 0 \end{cases}, \text{ với } t \geq 0, x \in X, \mu \in \mathbb{R}.$$

thì nghiệm có dạng:

$$u_f(t, 0) = u_{\mu, x}(t) = \int_0^t T(t - \zeta) e^{i\mu \zeta} x d\zeta, t \geq 0.$$

Theo định lí Datko-Neven ([8, 18]) thì nửa nhóm liên tục mạnh $T = \{T(t) : t \geq 0\} \subset L(X)$ là ổn định lũy thừa, tức là tồn tại các hằng số $N > 0$, và $\nu > 0$ sao cho:

$$\|T(t)\| \leq Ne^{-\nu t}, \text{ với mọi } t \geq 0$$

khi và chỉ khi nó bị chặn trên một không gian của $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, hay $C_0(\mathbb{R}_+, X)$ bởi phép biến đổi tích chập. Hay với một cách phát biểu khác nếu χ là không gian $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, hoặc $C_0(\mathbb{R}_+, X)$ thì nửa nhóm liên tục mạnh T là ổn định lũy

thừa khi và chỉ khi với mỗi hàm $f \in \chi$ nghiệm $u_f(., 0) \in \chi$.

Ở đây $C_0(\mathbb{R}_+, X)$ là không gian các hàm nhận giá trị trên X , liên tục và triệt tiêu tại vô cực với chuẩn sup, $L^p(\mathbb{R}_+, X)$ là không gian Lebesgue – Bochner chứa các hàm đo được $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, bằng nhau hầu khắp nơi và thỏa mãn:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty \|f(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Khi X là không gian Hilbert phức, định lí Neerven – Vu ([19, 20, 24]) chỉ ra rằng nửa nhóm liên tục mạnh T trên X là ổn định lũy thừa nếu và chỉ nếu

$$\sup_{\mu \in \mathbb{R}} \sup_{t \geq 0} \|u_{\mu, x}(t)\| = M(x) < \infty, \text{ với mỗi } x \in X. \quad (2.1.2)$$

Mặt khác Neerven và Vu đã chứng minh được nếu (2.1.2) đúng thì giải thức $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$ tồn tại và bị chặn đều trong $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}(\lambda) > 0\}$. Hơn nữa kết quả này cũng đúng cho nửa nhóm xác định trên không gian Banach. Định lí Gearhart – Pruss-Herbst – Howland (xem [10, 11, 12, 13, 21, 25]) cho thấy, nếu giải thức của nửa nhóm trên không gian Hilbert là bị chặn đều trong

$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > 0\}$ thì nó ổn định lũy thừa. Nhiều chi tiết hơn về các kết quả trên chúng ta tham khảo phương trình đạo hàm riêng trong các mục [2,4, 24].

Cho bài toán Cauchy non – autonomous

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \\ u(0) = x \end{cases} \quad (2.1.3)$$

với $t \geq 0, x \in X, A(t)$ là toán tử tuyến tính (có thể không bị chặn). Nghiệm yếu

của bài toán dẫn tới họ tiến hóa trên $\mathbb{R}_+, U = \{U(t, s) : t \geq s \geq 0\} \subset L(X)$, đó là:

(e₁) $U(t, r) = U(t, s)U(s, r)$, với mọi $t \geq s \geq r \geq 0$ và $U(t, t) = I$, với mọi $t \geq 0$, (I là toán tử đồng nhất trong $L(X)$).

(e₂) Ánh xạ $\{(t, s) : t \geq s \geq 0\} \rightarrow X$
 $(t, s) \mapsto U(t, s)x$, là liên tục với mỗi $x \in X$.

Một họ tiến hóa là bị chặn lũy thừa nếu tồn tại $\omega \in \mathbb{R}$, và $M_\omega > 0$ sao cho:

$$\|U(t, s)\| \leq M_\omega e^{\omega(t-s)}, \text{ với mọi } t \geq s \geq 0. \quad (2.1.4)$$

và được gọi là ổn định lũy thừa nếu có số $\omega < 0$, sao cho (2.1.4) đúng.

Nếu họ tiến hóa thỏa mãn điều kiện

(e₃) $U(t, s) = U(t - s, 0)$ với mọi $t \geq s \geq 0$, thì họ
 $T = \{U(t, 0) : t \geq 0\} \subset L(X)$

là nửa nhóm liên tục mạnh trên X .

Trong trường hợp đánh giá (2.1.4) thỏa mãn. Nếu bài toán Cauchy (2.1.3) là tuần hoàn chu kỳ 1, tức là $A(t+1) = A(t)$ với mỗi $t \geq 0$, thì họ tiến hóa tương ứng U cũng tuần hoàn chu kỳ 1, tức là:

(e₄) $U(t+1, s+1) = U(t, s)$, với mọi $t \geq s \geq 0$.

Mỗi họ tiến hóa tuần hoàn chu kỳ 1 là bị chặn lũy thừa, tham khảo ([5], bổ đề 4.1).

Cho hàm khả tích địa phương Bochner $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, nghiệm yếu đặt đúng bài toán Cauchy không thuần nhất

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + f(t), & t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

được cho bởi:

$$v_f(t, x) := U(t, 0)x + \int_0^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau, (t \geq 0).$$

Ta xét họ tiến hóa trên đường thẳng, ta sử dụng lại các kí hiệu như trong trường hợp trên $\mathbb{R}_+$, ngoại trừ các tham số s , và t có thể nhận giá trị bất kỳ trong $\mathbb{R}$.

Định lí Datko – Neerven có thể được mở rộng cho họ tiến hóa trong cả hai trường hợp trên đường thẳng, và trên nửa đường thẳng. xem ([8, định lí 6], [17, định lí 2.2], [7] hay tài liệu chuyên khảo [6]. Nhưng có lẽ định lí Neerven – Vu không thể mở rộng được cho họ tiến hóa tuần hoàn. Tuy vậy vài kết quả yếu hơn được mô tả sau đây cũng vẫn còn đúng.

Ta sử dụng lại khái niệm về nửa nhóm tiến hóa. Chi tiết chúng ta tham khảo [6, 7], và các tài liệu liên quan của chúng.

Cho $U = \{U(t, s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ là họ tiến hóa tuần hoàn chu kỳ 1, $t \geq 0$, và $G \in AP(\mathbb{R}, X)$.

Hàm được cho bởi:

$$s \mapsto (S(t)G)(s) := U(s, s-t)G(s-t) : \mathbb{R} \rightarrow X \quad (2.1.5)$$

thuộc vào $AP(\mathbb{R}, X)$, và họ một tham số $S = \{S(t) : t \geq 0\}$ là một nửa nhóm liên tục mạnh trên $AP(\mathbb{R}, X)$, xem ví dụ [16]. S được gọi là nửa nhóm tiến hóa trên $AP(\mathbb{R}, X)$.

2.2. Các kết quả

Bổ đề 2.2.1. Cho $f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, $\tau \geq 0$ và $U = \{U(t, s) : t \geq s \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$ là họ tiến hóa tuần hoàn chu kỳ 1, gồm các toán tử tuyến tính bị chặn trên X . Khi đó hàm $S(\tau)f$ được cho bởi công thức

$$[S(\tau)f](s) := \begin{cases} U(s, s-\tau)f(s-\tau), & s \geq \tau \\ 0, & 0 \leq s < \tau \end{cases} \quad (2.2.1)$$

thuộc vào không gian $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Chứng minh:

Trước hết ta chứng minh $S(\tau)g \in A_0(\mathbb{R}_+, X)$, với bất kỳ g trong $A_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Thật vậy, vì $g \in A_0(\mathbb{R}_+, X)$ nên tồn tại $t_g \geq 0$, và $F_g \in AP(\mathbb{R}_+, X)$ sao cho:

$$\begin{cases} g(s) = 0, & s \in [0, t_g] \\ g(s) = F_g(s), & s \geq t_g \end{cases}$$

Đặt $t_{S(\tau)g} := \tau + t_g$, và $F_{S(\tau)g} := U(\cdot, \cdot - \tau)F_g(\cdot - \tau)$.

Ta cần chứng minh

$$\begin{cases} [S(\tau)g](s) = 0, & s \in [0, t_{S(\tau)g}] \\ [S(\tau)g](s) = F_{S(\tau)g}(s), & s \geq t_{S(\tau)g} \end{cases}$$

Thật vậy, nếu $s \geq t_{S(\tau)g}$, thì $s - \tau \geq t_g$. Do đó $g(s - \tau) = F_g(s - \tau)$, (vì $g \in A_0(\mathbb{R}_+, X)$).

Mặt khác, vì $s \geq t_{S(\tau)g}$ nên $s \geq \tau$.

Do đó

$$[S(\tau)g](s) = U(s, s - \tau)g(s - \tau) = U(s, s - \tau)F_g(s - \tau) = F_{S(\tau)g}(s).$$

Nếu $s \in [0, t_{S(\tau)g}]$

Trường hợp 1:

Với $s \in [\tau, t_{S(\tau)g}]$. Điều này dẫn đến $0 \leq s - \tau \leq t_g$, và $s \geq \tau$.

Do đó $g(s - \tau) = 0$, (vì $g \in A_0(\mathbb{R}_+, X)$).

và

$$\begin{aligned} [S(\tau)g](s) &= U(s, s - \tau)g(s - \tau) \\ &= U(s, s - \tau)(0) = 0, \text{ (vì } U(s, s - \tau) \in L(X)). \end{aligned}$$

Trường hợp 2:

Với $0 \leq s < \tau$, ta có:

$$[S(\tau)g](s) = 0, \text{ (theo định nghĩa hàm } [S(\tau)g](s)).$$

Từ hai trường hợp trên ta có:

$$[S(\tau)g](s) = 0, \text{ với mọi } s \in [0, t_{S(\tau)g}].$$

$$\text{Vậy} \quad \begin{cases} [S(\tau)g](s) = 0, & s \in [0, t_{S(\tau)g}] \\ [S(\tau)g](s) = F_{S(\tau)g}(s), & s \geq t_{S(\tau)g} \end{cases}$$

$$\text{Hay} \quad S(\tau)g \in A_0(\mathbb{R}_+, X), \quad \forall g \in A_0(\mathbb{R}_+, X).$$

Bây giờ cho $\varepsilon > 0$, tùy ý

Vì $f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, và $\overline{A_0}(\mathbb{R}_+, X) = AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ nên tồn tại $g \in A_0(\mathbb{R}_+, X)$ sao cho:

$$\|f - g\|_{BUC(\mathbb{R}_+, X)} < \varepsilon.$$

Theo chứng minh trên ta có:

$$S(\tau)g \in A_0(\mathbb{R}_+, X),$$

$$\begin{aligned} \text{và} \quad \|S(\tau)f - S(\tau)g\|_{BUC(\mathbb{R}_+, X)} &= \sup_{s \geq \tau} \|U(s, s - \tau)[f(s - \tau) - g(s - \tau)]\| \\ &\leq \sup_{s \geq \tau} (\|U(s, s - \tau)\| \|f(s - \tau) - g(s - \tau)\|). \end{aligned}$$

Vì U tuần hoàn chu kỳ 1 nên U bị chặn lũy thừa, tức là tồn tại $M > 0$, và $\omega \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\|U(s, s - \tau)\| \leq Me^{\omega(s - (s - \tau))} = Me^{\omega\tau}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \|S(\tau)f - S(\tau)g\|_{BUC(\mathbb{R}_+, X)} &\leq Me^{\omega\tau} \sup_{s \geq \tau} \|f(s - \tau) - g(s - \tau)\| \\ &\leq Me^{\omega\tau} \|f - g\|_{BUC(\mathbb{R}_+, X)} \\ &< Me^{\omega\tau} \varepsilon. \end{aligned}$$

Cho $\varepsilon \rightarrow 0$ ta suy ra $S(\tau)g$ hội tụ về $S(\tau)f$.

Vì $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ là tập đóng nên $S(\tau)f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Hoàn thành chứng minh bổ đề 2.2.1 ■

Ta cũng thấy rằng họ $\{S(\tau) : \tau \geq 0\}$ là một nửa nhóm các toán tử tuyến tính, bị chặn trên $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Thật vậy, với $f, g \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\tau \geq 0$.

Nếu $s \geq \tau$, ta có:

$$\begin{aligned}
[S(\tau)(\alpha f + \beta g)](s) &= U(s, s - \tau)(\alpha f + \beta g)(s - \tau) \\
&= U(s, s - \tau)(\alpha f(s - \tau) + \beta g(s - \tau)) \\
&= \alpha U(s, s - \tau)f(s - \tau) + \beta U(s, s - \tau)g(s - \tau) \\
&= \alpha[S(\tau)f](s) + \beta[S(\tau)g](s) \\
&= [\alpha S(\tau)f + \beta S(\tau)g](s).
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
&\|S(\tau)(\alpha f + \beta g) - [\alpha S(\tau)f + \beta S(\tau)g]\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} \\
&= \sup_{s \geq \tau} \left\{ \|S(\tau)(\alpha f + \beta g)(s) - [\alpha S(\tau)f + \beta S(\tau)g](s)\| \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Do đó $S(\tau)(\alpha f + \beta g) - [\alpha S(\tau)f + \beta S(\tau)g] = 0.$

Hay $S(\tau)(\alpha f + \beta g) = \alpha S(\tau)f + \beta S(\tau)g, \quad \forall s \geq \tau.$

Nếu $0 \leq s < \tau$ thì $S(\tau)f](s) = S(\tau)g](s) = [S(\tau)(\alpha f + \beta g)](s) = 0.$

Do đó $S(\tau)(\alpha f + \beta g) = [\alpha S(\tau)f + \beta S(\tau)g].$

Vậy $S(\tau) \in L(AP_0(\mathbb{R}_+, X)), \quad \forall \tau \geq 0.$

Mặt khác

$$[S(0)f](s) = U(s, s)f(s) = I(f(s)) = f(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}_+.$$

(với I là ánh xạ đồng nhất trên X).

$$\|S(0)f - f\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} = \sup_{s \geq 0} \left\{ \|U(s, s)f(s) - f(s)\| \right\} = 0.$$

Do đó $S(0)f - f = 0.$

Điều này tương đương với

$$(S(0) - I)f = 0.$$

Suy ra $S(0) = I.$ (I là ánh xạ đồng nhất trên $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$).

Với $\tau_1, \tau_2 \geq 0, f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, ta kiểm tra $S(\tau_1 + \tau_2) = S(\tau_1).S(\tau_2).$

Từ bổ đề 2.2.1, ta có:

$$S(\tau_1)f, S(\tau_2)f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$$

và

$$\left[S(\tau_1 + \tau_2)f \right](s) = \begin{cases} U(s, s - \tau_1 - \tau_2)f(s - \tau_1 - \tau_2), & s \geq \tau_1 + \tau_2. \\ 0, & 0 \leq s < \tau_1 + \tau_2. \end{cases}$$

Với $s \geq \tau_1 + \tau_2$, ta có : $s \geq \tau_1$ và $s - \tau_1 \geq \tau_2$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó} \quad & \left[(S(\tau_1).S(\tau_2))f \right](s) = \left[S(\tau_1)(S(\tau_2)f) \right](s) \\ & = U(s, s - \tau_1)[S(\tau_2)f](s - \tau_1) \\ & = U(s, s - \tau_1)U(s - \tau_1, s - \tau_1 - \tau_2)f(s - \tau_1 - \tau_2) \\ & = U(s, s - \tau_1 - \tau_2)f(s - \tau_1 - \tau_2), \quad (U \text{ là họ tiền hóa}) \\ & = \left[S(\tau_1 + \tau_2)f \right](s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra} \quad & \left\| S(\tau_1 + \tau_2)f - (S(\tau_1).S(\tau_2))f \right\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} \\ & = \sup_{s \geq \tau_1 + \tau_2} \left\{ \left\| [S(\tau_1 + \tau_2)f](s) - [(S(\tau_1).S(\tau_2))f](s) \right\| \right\} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó} \quad S(\tau_1 + \tau_2)f = (S(\tau_1).S(\tau_2))f$$

$$\text{Hay} \quad (S(\tau_1 + \tau_2) - S(\tau_1).S(\tau_2))f = 0, \quad \forall f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X).$$

$$\text{Suy ra} \quad S(\tau_1 + \tau_2) = S(\tau_1).S(\tau_2).$$

$$\text{Nếu} \quad 0 \leq s < \tau_1 + \tau_2$$

Trường hợp 1:

Với $0 \leq s < \tau_1$, ta có:

$$\begin{aligned} \left[(S(\tau_1).S(\tau_2))f \right](s) & = \left[S(\tau_1)(S(\tau_2)f) \right](s) = 0 \\ & = \left[S(\tau_1 + \tau_2)f \right](s). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra} \quad S(\tau_1 + \tau_2)f = (S(\tau_1).S(\tau_2))f.$$

Điều này dẫn đến

$$(S(\tau_1 + \tau_2) - S(\tau_1).S(\tau_2))(f) = 0, \quad \forall f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X).$$

$$\text{Hay} \quad S(\tau_1 + \tau_2) = S(\tau_1).S(\tau_2).$$

Trường hợp 2:

Với $\tau_1 \leq s < \tau_1 + \tau_2$, ta có: $0 \leq s - \tau_1 < \tau_2$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó} \quad [S(\tau_1).S(\tau_2)](f)(s) &= U(s, s - \tau_1)[S(\tau_2)f](s - \tau_1) \\ &= U(s, s - \tau_1)(0) = 0 \\ &= [S(\tau_1 + \tau_2)f](s). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra} \quad S(\tau_1 + \tau_2)f = (S(\tau_1).S(\tau_2))f$$

$$\text{Hay} \quad S(\tau_1).S(\tau_2) = S(\tau_1 + \tau_2).$$

$$\text{Vậy ta có} \quad S(\tau_1 + \tau_2) = S(\tau_1).S(\tau_2).$$

Suy ra họ $\{S(\tau) : \tau \geq 0\}$ là một nửa nhóm các toán tử tuyến tính, bị chặn trên $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Bổ đề 2.2.2. Cho U là họ tiến hóa tuần hoàn chu kỳ 1 gồm các toán tử tuyến tính bị chặn trên X . Nửa nhóm $S = \{S(t) : t \geq 0\}$ liên kết tới U trên $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, xác định trong (2.2.1) là nửa nhóm liên tục mạnh.

Chứng minh:

Cho $f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ và $\tau \geq 0$, tùy ý.

Từ bổ đề 2.2.1, ta có:

$$S(\tau)f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X).$$

Vì $f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, nên tồn tại $t_f \geq 0$, và $F_f \in AP(\mathbb{R}_+, X)$ sao cho:

$$\begin{cases} f(s) = 0, & s \in [0, t_f] \\ f(s) = F_f(s), & s \geq t_f \end{cases}$$

$$\text{Ta có} \quad \|S(\tau)f - f\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} = \sup_{s \in [0, \infty)} \|[S(\tau)f](s) - f(s)\|$$

$$\leq \sup_{s \in [0, t_f]} \|[S(\tau)f](s) - f(s)\| + \sup_{s \in [t_f, \tau + t_f]} \|[S(\tau)f](s) - f(s)\| + \sup_{s \in [\tau + t_f, \infty)} \|[S(\tau)f](s) - f(s)\|. \text{ Mặt khác}$$

$$\sup_{s \in [0, t_f]} \|[S(\tau)f](s) - f(s)\| = \sup_{s \in [0, t_f]} \|[S(\tau)f](s)\|.$$

Với $s \in [0, t_f]$.

Nếu $\tau > t_f$, thì $s < \tau$. Do đó $[S(\tau)f](s) = 0$.

Suy ra $\sup_{s \in [0, t_f]} \| [S(\tau)f](s) - f(s) \| = \sup_{s \in [0, t_f]} \| [S(\tau)f](s) \| = 0.$

Nếu $\tau \leq t_f$.

Trường hợp $0 \leq s < \tau$, ta có $[S(\tau)f](s) = 0.$

Trường hợp $\tau \leq s \leq t_f$, ta có $0 < s - \tau \leq t_f - \tau \leq t_f$. Do đó $f(s - \tau) = 0.$

Suy ra $[S(\tau)f](s) = U(s, s - \tau)f(s - \tau) = U(s, s - \tau)(0) = 0.$

Do đó $\| [S(\tau)f](s) \| = 0.$

Vậy ta luôn có $\sup_{s \in [0, t_f]} \| [S(\tau)f](s) \| = 0.$

Hay $\sup_{s \in [0, t_f]} \| [S(\tau)f](s) - f(s) \| = \sup_{s \in [0, t_f]} \| [S(\tau)f](s) \| = 0.$

Với $s \in [t_f, \tau + t_f]$

Nếu $\tau \leq t_f$ thì $0 \leq s - \tau \leq t_f$. Do đó $f(s - \tau) = 0.$

Điều này dẫn tới $[S(\tau)f](s) = 0.$

Nếu $\tau > t_f$ thì $[t_f, \tau + t_f] = [t_f, \tau] \cup [\tau, \tau + t_f]$

Trường hợp $s \in [t_f, \tau]$, ta có: $[S(\tau)f](s) = 0.$

Trường hợp $s \in [\tau, \tau + t_f]$, ta có: $0 \leq s - \tau \leq t_f.$

Do đó $f(s - \tau) = 0.$

Suy ra $[S(\tau)f](s) = 0.$

Vậy với $s \in [t_f, \tau + t_f]$, ta có: $[S(\tau)f](s) = 0.$ Điều này dẫn đến:

$$\sup_{s \in [t_f, \tau + t_f]} \| (S(\tau)f)(s) - f(s) \| = \sup_{s \in [t_f, \tau + t_f]} \| f(s) \|.$$

Với $s \in [\tau + t_f, \infty)$, ta có $s \geq t_f$. Do đó $f(s) = F_f(s).$

Suy ra $\sup_{s \in [\tau + t_f, \infty)} \| (S(\tau)f)(s) - f(s) \| = \sup_{s \in [\tau + t_f, \infty)} \| (S(\tau)f)(s) - F_f(s) \|.$

Vậy $\| S(\tau)f - f \|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} \leq \sup_{s \in [t_f, \tau + t_f]} \| f(s) \| + \sup_{s \in [\tau + t_f, \infty)} \| (S(\tau)f)(s) - F_f(s) \|$

$$\leq \sup_{s \in [t_f, \tau + t_f]} \|f(s)\| + \|(S(\tau)F_f - F_f)\|_{AP(\mathbb{R}, X)}.$$

Suy ra

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|S(\tau)f - f\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} \leq \lim_{\tau \rightarrow 0} \sup_{s \in [t_f, \tau + t_f]} \|f(s)\| + \lim_{\tau \rightarrow 0} \|(S(\tau)F_f - F_f)\|_{AP(\mathbb{R}, X)}.$$

vì nửa nhóm S (xác định trong 2.1.5) là nửa nhóm liên tục mạnh, và f là hàm liên tục đều trên $\mathbb{R}_+$, và $f(t_f) = 0$ nên ta có:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|S(\tau)f - f\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} = 0$$

Hay $\lim_{\tau \rightarrow 0} S(\tau)f = f.$

Suy ra nửa nhóm $S = \{S(t) : t \geq 0\}$ liên kết tới U trên $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, xác định trong (2.2.1) là nửa nhóm liên tục mạnh, và được gọi là nửa nhóm tiến hóa liên kết tới U trên không gian $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Hoàn thành chứng minh của bổ đề 2.2.2■

Kết quả chính của luận văn được trình bày trong định lý sau

Định lý 2.2.3. Cho $U = \{U(t, s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ là họ tiến hóa tuần hoàn chu kỳ 1, gồm các toán tử tuyến tính bị chặn trên X . Hai khẳng định sau là tương đương

i) U là ổn định lũy thừa.

ii) $v_f(., 0) \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ cho mỗi $f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Bổ đề sau là chìa khóa để chúng ta chứng minh (i) kéo theo (ii) của định lý 2.2.3

Bổ đề 2.2.4. Cho $U = \{U(t, s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ là họ tiến hóa tuần hoàn chu kỳ 1 các toán tử tuyến tính bị chặn trên X , $S = \{S(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm tiến hóa liên kết tới U trên $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, xác định trong (2.2.1), $(G, D(G))$ là toán tử sinh của S , u và $f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$. Hai khẳng định sau là tương đương

j) $u \in D(G)$, và $Gu = -f$.

jj) $u(t) = \int_0^t U(t, s)f(s)ds$, với mọi $t \geq 0$.

Chứng minh:

(j) kéo theo (jj).

Với mỗi $t \geq 0$, vì $u \in D(G)$ nên theo kết quả d) của định lí 1.2.4, ta có:

$$S(t)u - S(0)u = \int_0^t S(\xi)Gud\xi$$

Điều này tương đương với

$$S(t)u - u = \int_0^t S(\xi)Gud\xi$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } u(t) &= [S(t)u](t) - \left(\int_0^t S(\xi)Gud\xi \right)(t) \\ &= U(t,0)u(0) - \int_0^t U(t,t-\xi)(Gu)(t-\xi)d\xi \\ &= \int_0^t U(t,t-\xi)f(t-\xi)d\xi \end{aligned}$$

Bằng phương pháp đổi biến $\tau = t - \xi$, ta thu được:

$$u(t) = \int_0^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

(jj) kéo theo (j).

Giả sử $u, f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$. Cố định $t > 0$. Ta chứng minh

$$\frac{1}{t}(-S(t)u + u) = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)f d\tau \quad (2.2.2)$$

Nếu $s \geq t$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(-S(t)u + u)(s) &= \frac{1}{t}(-[S(t)u](s) + u(s)) \\ &= \frac{1}{t}[-U(s,s-t)u(s-t) + u(s)] \\ &= \frac{1}{t} \left[\int_0^s U(s,\tau)f(\tau)d\tau - U(s,s-t) \int_0^{s-t} U(s-t,\tau)f(\tau)d\tau \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t} \left[\int_0^s U(s, \tau) f(\tau) d\tau - \int_0^{s-t} U(s, \tau) f(\tau) d\tau \right] \\
&= \frac{1}{t} \int_{s-t}^s U(s, \tau) f(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

Bằng phương pháp đổi biến $\tau = s - r$, ta thu được:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} (-S(t)u + u)(s) &= \frac{1}{t} \int_0^t U(s, s-r) f(s-r) dr \\
&= \frac{1}{t} \left(\int_0^t [S(r)f](s) dr \right) = \frac{1}{t} \left(\int_0^t S(\tau) f d\tau \right)(s).
\end{aligned}$$

Nếu $0 \leq s < t$, ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} (-S(t)u + u)(s) &= \frac{1}{t} ([-S(t)u](s) + u(s)) \\
&= \frac{1}{t} u(s) = \frac{1}{t} \int_0^s U(s, \tau) f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{t} \int_0^s U(s, s-\tau) f(s-\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{t} \left(\int_0^s [S(\tau)f](s) d\tau \right) \\
&= \frac{1}{t} \left(\int_0^s [S(\tau)f](s) d\tau + \int_s^t [S(\tau)f](s) d\tau \right)
\end{aligned}$$

(ta có $[S(\tau)f](s) = 0, \forall s \in [0, \tau)$. Do đó $\int_s^t [S(\tau)f](s) d\tau = 0$).

$$= \frac{1}{t} \left(\int_0^t S(\tau) f d\tau \right)(s)$$

Vì vậy $\frac{1}{t} (-S(t)u + u) = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) f d\tau$

Suy ra
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (-S(t)u + u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) f d\tau$$
$$= S(0)f, \text{ (do kết quả (a) định lí 1.2.4).}$$
$$= If = f.$$

Mặt khác $(G, D(G))$ là hàm sinh của nửa nhóm tiến hóa S trên không gian $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$. Do đó $u \in D(G)$, và $Gu = -f$.

Hoàn thành chứng minh của định lí 2.2.4 ■

Gọi $\sigma(L)$ là phổ của các toán tử tuyến tính L trên X .

$\rho(L) := \mathbb{C} \setminus \sigma(L)$ là tập giải của L .

$r(L) := \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(L) \}$ là bán kính phổ của L .

$s(L) := \sup \{ \operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(L) \}$ là biên phổ của L (spectral bound).

Định lí 2.2.5. Cho $U = \{U(t, s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ là họ tiến hóa tuần hoàn chu kì 1 trên không gian Banach X , $V := U(1, 0)$ là toán tử đơn, và S là nửa nhóm tiến hóa liên kết với U trên không gian $AP(\mathbb{R}, X)$ được cho trong (2.1.5). Bốn khẳng định sau là tương đương.

(i) U là ổn định lũy thừa.

(ii) $r(V) < 1$.

(iii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n e^{i\mu k} V^k \right\| = M_\mu < \infty$, với mọi $\mu \in \mathbb{R}$.

iv) Với mỗi $f \in P_1^0(\mathbb{R}_+, X)$ và với mỗi $\mu \in \mathbb{R}$ hàm $t \mapsto \int_0^t U(t, s) e^{-i\mu s} f(s) ds$ là bị chặn trên

$\mathbb{R}_+$.

Chứng minh:

Áp dụng bổ đề 1.8.3 ta có (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Từ chứng minh của định lí 1.8.4 và định lí 1.8.4 ta có (i) $\Leftrightarrow$ (iii) và (i) $\Leftrightarrow$ (iv).

Bây giờ ta chứng minh định lí 2.2.3

(i) kéo theo (ii).

Giả sử U ổn định lũy thừa.

Gọi S là nửa nhóm tiến hóa liên kết với U trên không gian $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, và $(G, D(G))$ là hàm sinh của nó.

Vì U ổn định lũy thừa nên tồn tại số thực $\omega < 0$, và $M_\varepsilon > 0$ sao cho:

$$\|U(t, s)\| \leq M_\varepsilon e^{\varepsilon(t-s)}, \text{ với mọi } t \geq s.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \|S(\tau)\|_{L(AP_0(\mathbb{R}_+, X))} &= \sup \left\{ \sup_{s \geq \tau} \|U(s, s-\tau)f(s-\tau)\| : \|f\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} = 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sup_{s \geq \tau} \|U(s, s-\tau)\| \cdot \|f(s-\tau)\| : \|f\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} = 1 \right\} \\ &\leq M_\varepsilon e^{\varepsilon\tau}, \quad \forall \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \omega_0(S) &:= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|S(t)\|_{L(AP_0(\mathbb{R}_+, X))}}{t} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|M_\varepsilon e^{\omega t}\|}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln M_\varepsilon}{t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{\omega t}}{t} \\ &\leq \omega < 0. \end{aligned}$$

Theo lí thuyết hàm sinh của nửa nhóm tuyến tính [26, p.4-5], ta có $0 \in \rho(G)$.

Suy ra G là song ánh. Do đó G khả nghịch.

Suy ra với mỗi $f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, tồn tại $u \in D(G) \subseteq AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ sao cho $Gu = -f$.

Theo bổ đề 2.2.4, ta có:

$$u(t) = \int_0^t U(t, s)f(s)ds, \text{ với mọi } t \geq 0.$$

Ta lại có

$$v_f(t, x) := U(t, 0)x + \int_0^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad (t \geq 0).$$

Suy ra $u = v_f(., 0)$.

Vậy $v_f(., 0) \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

(ii) kéo theo (i).

Giả sử $v_f(\cdot, 0) \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, với mỗi $f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Cho $\mu \in \mathbb{R}$, và $f \in P_1^0(\mathbb{R}_+, X)$.

Đặt $g(t) = e^{-i\mu t} f(t)$, $t \geq 0$. Ta chứng minh hàm $g \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Đầu tiên ta chứng minh với mỗi $f \in TP_0(\mathbb{R}_+, X)$ thì $g \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Thật vậy, vì $f \in TP_0(\mathbb{R}_+, X)$ nên tồn tại $t_f \geq 0$, và $p_f(t) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\mu_k t} x_k$, với

$c_k \in \mathbb{C}$, $\mu_k \in R$, $x_k \in X$, sao cho:

$$\begin{cases} f(t) = 0, & t \in [0, t_f] \\ f(t) = p_f(t), & t \geq t_f \end{cases}$$

Đặt $p_g(t) = e^{-i\mu t} p_f(t)$, và $t_g = t_f$, $t \geq 0$.

Nếu $t \in [0, t_f]$, ta có $f(t) = 0$. Do đó $g(t) = e^{-i\mu t} f(t) = 0$.

Nếu $t \geq t_f$, ta có $f(t) = p_f(t)$. Do đó $g(t) = e^{-i\mu t} f(t) = e^{-i\mu t} p_f(t) = p_g(t)$.

Vậy

$$\begin{cases} g(t) = 0, & t \in [0, t_g] \\ g(t) = p_g(t), & t \geq t_g \end{cases}$$

Suy ra $g \in TP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Mặt khác ta lại có $TP_0(\mathbb{R}_+, X) \subset A_0(\mathbb{R}_+, X) \subset AP_0(\mathbb{R}_+, X)$

Do đó $g \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Nếu $f \in P_1^0(\mathbb{R}_+, X) = \overline{TP_0}(\mathbb{R}_+, X)$, thì tồn tại $h \in TP_0(\mathbb{R}_+, X)$ sao cho:

$$\|f - h\|_{BUC(\mathbb{R}_+, X)} < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ta có:

$$\|e^{-i\mu t} f(t) - e^{-i\mu t} h(t)\| = |e^{-i\mu t}| \cdot \|f(t) - h(t)\| \leq \|h - f\|_{BUC(\mathbb{R}_+, X)} < \varepsilon.$$

$$(\text{do } |e^{-i\mu t}| = \cos^2 \mu t + \sin^2 \mu t = 1).$$

Suy ra $t \mapsto g(t) = e^{-i\mu t} f(t)$ thuộc vào $\overline{TP_0}(\mathbb{R}_+, X)$.

Mặt khác $\overline{TP_0}(\mathbb{R}_+, X) \subset \overline{A_0}(\mathbb{R}_+, X) = AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Do đó hàm $t \mapsto g(t) = e^{-i\mu t} f(t)$ thuộc vào $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, với $f \in P_1^0(\mathbb{R}_+, X)$.

Hay $g \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, với $f \in P_1^0(\mathbb{R}_+, X)$.

Vì $e^{-i\mu t} f(t)$ thuộc vào $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ nên nghiệm $v_f(t, 0) = \int_0^t U(t, s) e^{-i\mu s} f(s) ds$

thuộc vào $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$. Tức là hàm $t \mapsto \int_0^t U(t, s) e^{-i\mu s} f(s) ds \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, với

$f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Hơn nữa $AP_0(\mathbb{R}_+, X) \subset BUC(\mathbb{R}_+, X)$, do đó hàm $t \mapsto \int_0^t U(t, s) e^{-i\mu s} f(s) ds$ là bị chặn trên $\mathbb{R}_+$.

Theo định lí 2.2.5 (iv) $\Rightarrow$ (i) ta suy ra U là ổn định lũy thừa.

Chú ý

Từ các điều kiện tương đương (i) và (iv) của định lí 2.2.5 và với kết quả của định lí 2.2.3 chúng ta thấy rằng họ tiến hóa U trong định lí 2.2.3 là ổn định lũy thừa nếu và chỉ nếu với mỗi $f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ nghiệm $v_f(., 0)$ bị chặn trên $\mathbb{R}_+$.

Thật vậy, nếu U là ổn định lũy thừa thì theo định lí 2.2.3 ta suy ra $v_f(., 0) \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, với mỗi $f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$. Tức là nghiệm $v_f(., 0)$ bị chặn trên $\mathbb{R}_+$. Trái lại với mỗi $f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ nghiệm $v_f(., 0)$ bị chặn trên $\mathbb{R}_+$ thì theo chứng minh (ii) $\Rightarrow$ (i) của định lí 2.2.3 ta suy ra U là ổn định lũy thừa.

CHƯƠNG III

ỨNG DỤNG

Một hệ quả trực tiếp của định lý 2.2.3 là định lý về phổ ánh xạ cho nửa nhóm tiến hóa S trên không gian $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$. Kết quả tương tự có thể được tìm thấy trong ([13], định lý 2.2) cho nửa nhóm tiến hóa trên $C_{00}(\mathbb{R}_+, X)$, và trong [14, định lý 5] cho nửa nhóm tiến hóa trên $AAP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Ở đây $C_{00}(\mathbb{R}_+, X)$ là không gian các hàm nhận giá trị trên X , xác định trên $\mathbb{R}_+$ sao cho:

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

$AAP_0(\mathbb{R}_+, X)$ là không gian chứa các hàm h nhận giá trị trên X , xác định trên $\mathbb{R}_+$ sao cho $h(0) = 0$, và tồn tại $f \in C_0(\mathbb{R}_+, X)$, $g \in AP(\mathbb{R}_+, X)$, sao cho:

$$h = f + g.$$

Định lý 3.3.1. Cho U là họ tiến hóa tuần hoàn chu kỳ 1 các toán tử tuyến tính bị chặn trên X . Nửa nhóm tiến hóa S liên kết tới U trên $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ thỏa mãn định lý về phổ ánh xạ, tức là

$$e^{t\sigma(G)} = \sigma(S(t)) \setminus \{0\}, \quad t \geq 0.$$

$$\text{Mặt khác} \quad \sigma(G) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \leq s(G)\}.$$

và

$$\sigma(S(t)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(S(t))\}, \quad \text{với mọi } t > 0.$$

Chứng minh:

Theo bổ đề 2.2.2, S là nửa nhóm liên tục mạnh trên $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$. Do đó theo định lý về phổ của ánh xạ, ta có:

$$e^{t\sigma(G)} = \sigma(S(t)) \setminus \{0\}, \quad t \geq 0.$$

Cho $\lambda \in \rho(G)$, và $\mu \in \mathbb{C}$ sao cho $\operatorname{Re} \mu \geq \operatorname{Re} \lambda$.

$$\text{Đặt } S_\lambda = S_\lambda(t) = \left(e^{-\lambda t} S(t) \right)_{t \geq 0}, \quad U_\lambda = \left(U_\lambda(t, s) \right)_{t \geq s \geq 0} = \left(e^{-\lambda(t-s)} U(t, s) \right)_{t \geq s \geq 0}.$$

Ta chứng minh U_λ là họ tiến hóa tuần hoàn chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}_+$ các toán tử tuyến tính, bị chặn trên X .

Thật vậy, với $x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, ta có:

$$\begin{aligned} U_\lambda(t, s)(\alpha x + \beta y) &= \left(e^{-\lambda(t-s)} U(t, s) \right) (\alpha x + \beta y) \\ &= e^{-\lambda(t-s)} \left(U(t, s)(\alpha x + \beta y) \right) \\ &= e^{-\lambda(t-s)} \left(\alpha U(t, s)x + \beta U(t, s)y \right) \\ &= \alpha e^{-\lambda(t-s)} U(t, s)x + \beta e^{-\lambda(t-s)} U(t, s)y, \\ &= \alpha U_\lambda(t, s)x + \beta U_\lambda(t, s)y, \quad \forall t \geq s \geq 0. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \|U_\lambda(t, s)\| &= \|e^{-\lambda(t-s)} U(t, s)\| \\ &\leq e^{-\operatorname{Re}\lambda(t-s)} \|U(t, s)\| \\ &= \frac{\|U(t, s)\|}{e^{\operatorname{Re}\lambda(t-s)}}. \end{aligned}$$

Vì $U(t, s) \in L(X)$ nên U bị chặn, tức là tồn tại $M > 0$ sao cho:

$$\|U(t, s)\| \leq M, \quad \forall t \geq s \geq 0.$$

Với mỗi $t \geq s \geq 0$, tồn tại $N > 0$, sao cho:

$$\frac{1}{e^{\operatorname{Re}\lambda(t-s)}} \leq N.$$

Từ đó suy ra

$$\|U_\lambda(t, s)\| \leq M.N, \quad \text{với mỗi } t \geq s \geq 0.$$

Vậy $U_\lambda(t, s) \in L(X)$, hay họ $U_\lambda = \left(U_\lambda(t, s) \right)_{t \geq s \geq 0} \subset L(X)$.

Với $t \geq r \geq s \geq 0$, ta có:

$$U_\lambda(t, t) = e^{-\lambda(t-t)} U(t, t) = I, \quad (I \text{ là ánh xạ đồng nhất trên } X).$$

$$\begin{aligned}
U_\lambda(t, r)U_\lambda(r, s) &= e^{-\lambda(t-r)}U(t, r)(e^{-\lambda(r-s)}U(r, s)) \\
&= e^{-\lambda(t-r)}e^{-\lambda(r-s)}U(t, r)U(r, s) \\
&= e^{-\lambda(t-s)}U(t, s) \\
&= U_\lambda(t, s).
\end{aligned}$$

Hơn nữa vì ánh xạ $(t, s) \mapsto U(t, s)x$ là liên tục với mỗi $x \in X$, nên ánh xạ $(t, s) \mapsto e^{-\lambda(t-s)}U(t, s)x$ cũng liên tục với mỗi $x \in X$.

Suy ra ánh xạ $(t, s) \mapsto U_\lambda(t, s)x$ liên tục với mỗi $x \in X$.

Vậy U_λ là họ tiến hóa tuần hoàn các toán tử tuyến tính bị chặn trên X .

Mặt khác

$$\begin{aligned}
U_\lambda(t+1, s+1) &= e^{-\lambda(t+1-(s+1))}U(t+1, s+1) \\
&= e^{-\lambda(t-s)}U(t, s), \quad \forall t \geq s \geq 0.
\end{aligned}$$

Vậy U_λ tuần hoàn chu kì 1.

Tương tự ta cũng kiểm tra được S_λ là nửa nhóm tiến hóa các toán tử tuyến tính, bị chặn trên $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$. Ta gọi S_λ là nửa nhóm tiến hóa cảm sinh bởi họ tiến hóa U_λ trên không gian $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Vì $\lambda \in \rho(G)$ nên $G - \lambda I$ là song ánh.

Suy ra $G - \lambda I$ là toán tử khả nghịch.

Ta lại có $G - \lambda I$ là toán tử sinh của nửa nhóm tiến hóa $S_\lambda = \left(e^{-\lambda t}S(t)\right)_{t \geq 0}$ trên không gian $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, cảm sinh bởi họ tiến hóa $U_\lambda = \left(e^{-\lambda(t-s)}U(t, s)\right)_{t \geq s \geq 0}$.

Thật vậy, với $f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, ta có:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\lambda t}S(t)f - f}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\lambda t} \left(S(t)f - \frac{f}{e^{-\lambda t}} \right)}{t}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(S(t)f - f + f - \frac{f}{e^{-\lambda t}} \right)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(S(t)f - f)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(f - \frac{f}{e^{-\lambda t}} \right)}{t} \\
&= Gf + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f - fe^{\lambda t})}{t} \\
&= Gf - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(e^{\lambda t} - 1)}{t} \\
&= Gf - \lambda f \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^{\lambda t} - 1)}{\lambda t} \\
&= Gf - \lambda f = (G - \lambda I)f.
\end{aligned}$$

(Với I là ánh xạ đồng nhất trên không gian $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$).

Do đó $G - \lambda I$ là toán tử sinh của nửa nhóm tiến hóa $S_\lambda = \left(e^{-\lambda t} S(t) \right)_{t \geq 0}$ trên không gian $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, cảm sinh bởi họ tiến hóa $U_\lambda = \left(e^{-\lambda(t-s)} U(t, s) \right)_{t \geq s \geq 0}$.

Theo chứng minh của định lí 2.2.3, ta có U_λ ổn định lũy thừa. Do đó tồn tại $M_\omega > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega < 0$ sao cho:

$$\|U_\lambda(t, s)\| \leq M_\omega e^{\omega(t-s)}, \text{ với mọi } t \geq s.$$

Điều này tương đương với

$$\|e^{-\lambda(t-s)} U(t, s)\| \leq M_\omega e^{\omega(t-s)}, \text{ với mọi } t \geq s.$$

Hay

$$\frac{\|U(t, s)\|}{e^{(Re\lambda)(t-s)}} \leq M_\omega e^{\omega(t-s)} \text{ với mọi } t \geq s.$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned}
\|U_\mu(t, s)\| &= \|e^{-\mu(t-s)} U(t, s)\| \\
&= e^{(-Re\mu)(t-s)} \|U(t, s)\|
\end{aligned}$$

$$= \frac{\|U(t, s)\|}{e^{(Re\mu)(t-s)}} \\ \leq \frac{\|U(t, s)\|}{e^{(Re\lambda)(t-s)}} \leq M_{\omega} e^{\omega(t-s)}.$$

Suy ra U_{μ} ổn định lũy thừa.

Theo chứng minh của định lý 2.2.3, suy ra $G - \mu I$ khả nghịch.

Hay $\mu \in \rho(G)$.

Do đó $\sigma(G) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \leq s(G)\}$.

Nếu $Re\lambda > s(G)$ thì $\lambda \notin \sigma(G)$. Do đó $\lambda \in \rho(G)$.

Suy luận tương tự như trên ta có U_{λ} ổn định lũy thừa. Vì vậy nửa nhóm tiến hóa

$S_{\lambda}(t) = \left(e^{-\lambda t} S(t)\right)_{t \geq 0}$ là ổn định lũy thừa.

Trường hợp đặc biệt: $r\left(e^{-\lambda t} S(t)\right) < 1$. Điều này dẫn đến

$$r(S(t)) < e^{Re\lambda \cdot t}, \text{ với } t > 0.$$

Do đó $r(S(t)) \leq e^{s(G) \cdot t}, t \geq 0$.

Mặt khác theo định lý phổ bao hàm, ta có:

$$e^{\sigma(G) \cdot t} \subseteq \sigma(S(t)), t \geq 0.$$

Suy ra $\sigma(S(t))$ là một đĩa và thỏa mãn định lý ánh xạ phổ.

Một ứng dụng khác của định lý 2.2.3 là bất đẳng thức Landau – kallman – Rota. Chi tiết về các kết quả này có thể xem “C. Buse, S. S. Dragomir, A Kallman-Rota Inequality for Evolution Semigroups, submitted” và “C. Buse, The spectral mapping theorem for evolution semigroups on the space of asymptotically almost periodic functions defined on the half-line, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2002(2002), No. 70, pp.1-11”.

Kí hiệu Y là một trong các không gian $C_0(\mathbb{R}_+, X)$, $AAP_0(\mathbb{R}_+, X)$, hay $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Định lý 3.3.2. Cho $U = \{U(t, s) : t \geq s \geq 0\}$ là họ tiến hóa tuần hoàn với chu kỳ

l các toán tử tuyến tính bị chặn trên X , và $f \in Y$ thỏa mãn các điều kiện sau

i) $v_f(., 0) = \int_0^{\cdot} U(., s)f(s)ds$ thuộc vào Y .

ii) $\omega_f(.) = \int_0^{\cdot} (.-s)U(., s)f(s)ds$ thuộc vào Y .

Nếu $\sup \left\{ \|U(t, s) : t \geq s \geq 0\| \right\} = M < \infty$ thì

$$\|v_f(., 0)\|_Y^2 \leq 4M^2 \|f\|_Y \cdot \|\omega_f(.)\|_Y.$$

Để chứng minh định lí trên ta sử dụng kết quả sau:

Cho $T = \{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm liên tục mạnh và $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ là hàm sinh của nửa nhóm T . Nếu T ổn định đều, tức là tồn tại hằng số dương M sao cho $\sup_{t \geq 0} \|T(t)\| = M < \infty$, thì

$$\|Ax\|^2 \leq 4M^2 \|A^2x\| \|x\|, \text{ với mọi } x \text{ thuộc } D(A^2).$$

Chứng minh:

Sử dụng kết quả d) của định lí 1.2.4 ta dễ dàng kiểm tra rằng với $x \in D(A^2)$, ta có:

$$T(t)x - x = tAx + \int_0^t (t-s)T(s)A^2x ds$$

Thật vậy, với $x \in D(A^2)$, ta có:

$$\int_0^t (t-s)T(s)A^2x ds = \int_0^t (t-s) \frac{d}{ds} T(s)Ax ds$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần cho tích phân $\int_0^t (t-s) \frac{d}{ds} T(s)Ax ds$, ta thu được:

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s) \frac{d}{ds} T(s)Ax ds &= (t-s)T(s)Ax \Big|_0^t + \int_0^t T(s)Ax ds \\ &= -tT(0)Ax + \int_0^t T(s)Ax ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -tAx + \int_0^t \frac{d}{ds} T(s)x ds \\
&= -tAx + T(s)x \Big|_0^t \\
&= -tAx + T(t)x - x.
\end{aligned}$$

Vậy
$$T(t)x - x = tAx + \int_0^t (t-s)T(s)A^2x ds$$

Do đó
$$Ax = \frac{1}{t} \left(T(t)x - x - \int_0^t (t-s)T(s)A^2x ds \right)$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \left\| \frac{1}{t} \left(T(t)x - x - \int_0^t (t-s)T(s)A^2x ds \right) \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \left(\|T(t)x\| + \|x\| + \left\| \int_0^t (t-s)T(s)A^2x ds \right\| \right) \\
&\leq \frac{1}{t} \left(\|T(t)x\| + \|x\| + \int_0^t (t-s) \|T(s)A^2x\| ds \right) \\
&\leq \frac{1}{t} \left(\|T(t)x\| + \|x\| + \|T(s)\| \|A^2x\| \int_0^t (t-s) ds \right) \\
&\leq \frac{2M}{t} \|x\| + \frac{Mt}{2} \|A^2x\|.
\end{aligned}$$

Ta có thể giả sử $M \geq 1$, (vì $\|T(0)\| = 1$).

Nếu $A^2x = 0$ thì $Ax = 0$, do đó bất đẳng thức cần chứng minh là đúng.

Nếu $A^2x \neq 0$, chọn $t = 2\|x\|^{\frac{1}{2}}\|A^2x\|^{-\frac{1}{2}}$, ta có:

$$\|Ax\| \leq \frac{2M}{2\|x\|^{\frac{1}{2}}\|A^2x\|^{-\frac{1}{2}}} \|x\| + \frac{M}{2} 2\|x\|^{\frac{1}{2}}\|A^2x\|^{-\frac{1}{2}} \|A^2x\|$$

Điều này tương đương với

$$\|Ax\| \leq 2M \|x\|^{\frac{1}{2}} \|A^2x\|^{\frac{1}{2}}$$

Hay

$$\|Ax\|^2 \leq 4M^2 \|A^2x\| \|x\|.$$

(Ngoài ra chúng ta cũng có thể tham khảo chứng minh của kết quả trên trong R.R. Kallman and G. C. Rota, on the inequality $\|f'\| \leq 4\|f\| \cdot \|f''\|$, Inequality II, O.Shiha, Ed., Academic Press, New-York 1970, pp. 187-192).

Chứng minh định lí 3.3.2

Trường hợp $Y = AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Gọi S là nửa nhóm tiến hóa liên kết với U trên không gian $Y = AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, và $(G, D(G))$ là hàm sinh của nó.

Vì $v_f(., 0) = \int_0^{\cdot} U(., s)f(s)ds$ và $f \in AAP_0(\mathbb{R}_+, X)$ nên theo bổ đề 2.2.4, ta có:

$$v_f(., 0) \in D(G) \text{ và } Gv_f(., 0) = -f.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \omega_f(t) &= \int_0^t (t-s)U(t,s)f(s)ds \\ &= \int_0^t \left(\int_s^t dr \right) U(t,s)f(s)ds \\ &= \int_0^t ds \int_s^t U(t,s)f(s)dr \\ &= \int_0^t ds \int_s^t U(t,r)U(r,s)f(s)dr, \quad \forall t \geq r \geq s \geq 0 \\ &= \int_0^t dr \int_0^r U(t,r)U(r,s)f(s)ds, \quad \forall t \geq r \geq s \geq 0 \\ &= \int_0^t U(t,r)dr \int_0^r U(r,s)f(s)ds, \quad \forall t \geq r \geq s \geq 0 \end{aligned}$$

$$= \int_0^t U(t, r) v_f(r, 0) dr, \quad \forall t \geq r \geq s \geq 0.$$

Vì $v_f(., 0) \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ nên theo bổ đề 2.2.4, ta có:

$$\omega_f(.) \in D(G^2), \quad G^2 \omega_f(.) = f.$$

và $G \omega_f(.) = v_f(., 0).$

Ta lại có

$$\begin{aligned} \|S(t)f\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} &= \sup_{s \geq t} \|U(s, s-t)f(s-t)\| \\ &\leq \sup_{s \geq t} (\|U(s, s-t)\| \|f(s-t)\|) \\ &\leq M \|f\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)}. \end{aligned}$$

Suy ra $\|S(t)\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} \leq M, \quad \forall t \geq 0.$

Do đó

$$\sup_{t \geq 0} \|S(t)\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} \leq M < \infty.$$

Sử dụng bất đẳng thức $\|Ax\|^2 \leq 4M^2 \|A^2x\| \|x\|$, với mọi x thuộc $D(A^2)$ bằng cách chọn $A \equiv G$, và $x = \omega_f(.) \in D(G^2)$, ta thu được

$$\|v_f(., 0)\|_Y^2 \leq 4M^2 \|f\|_Y \cdot \|\omega_f(.)\|_Y.$$

Chứng minh của định lý 3.3.2 trong các trường hợp còn lại được suy ra tương tự.

Giả thiết của định lý Neerven – Vu có thể được viết lại như sau

Tồn tại hằng số dương K sao cho:

$$\sup_{t \geq 0} \left\| \int_0^t T(\xi) e^{-i\mu\xi} x d\xi \right\| \leq K \|e^{i\mu\cdot} x\|_{BUC(\mathbb{R}_+, X)}, \quad \text{với mọi } x \in X.$$

thì kết quả sau là hiển nhiên.

Định lý 3.3.3. Cho $U = \{U(t, s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ là họ tiến hóa tuần hoàn chu kỳ 1,

gồm các toán tử tuyến tính bị chặn trên X . Hai khẳng định sau là tương đương

(1). U là ổn định lũy thừa.

(2). Với mỗi $p \in TP_0(\mathbb{R}_+, X)$ nghiệm $v_p(., 0)$ thuộc vào $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, và tồn tại hằng số

K dương sao cho:

$$\|v_p(., 0)\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} \leq K \|p\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)}. \quad (3.3.1)$$

Chứng minh:

(1) kéo theo (2).

Giả sử U ổn định lũy thừa và $p \in TP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Vì $TP_0(\mathbb{R}_+, X) \subset AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ nên $p \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$

Áp dụng định lí 2.2.3 ta có $v_p(., 0)$ thuộc vào $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Do $p \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$, $v_p(., 0) \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ nên tồn tại $M, N > 0$ sao cho

$$\|p\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} \leq M, \quad \|v_p(., 0)\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} \leq N.$$

Chọn $K \geq \frac{N}{M}$, ta có:

$$\begin{aligned} \|v_p(., 0)\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} &\leq N \\ &\leq K.M \\ &\leq K \|p\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)}. \end{aligned}$$

(2) kéo theo (1).

Cho $f \in AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ và $p_n \in TP_0(\mathbb{R}_+, X)$ với (p_n) là dãy hội tụ tới f trong $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$. Tức là

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - f\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} = 0.$$

Từ giả thiết (3.1), ta có:

$$\|v_{p_n}(., 0)\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} \leq K \|p_n\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)}$$

Suy ra $(v_{p_n}(., 0))$ hội tụ trong $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Mặt khác với $t \geq 0$ ta có

$$v_{p_n}(t, 0) = \int_0^t U(t, s) p_n(s) ds,$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\left\| v_{p_n}(t, 0) - v_f(t, 0) \right\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} &= \left\| \int_0^t U(t, s) p_n(s) ds - \int_0^t U(t, s) f(s) ds \right\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} \\
&= \left\| \int_0^t U(t, s) (p_n(s) - f(s)) ds \right\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} \\
&\leq \int_0^t \left\| U(t, s) (p_n(s) - f(s)) \right\| ds \\
&\leq \int_0^t \left\| U(t, s) \right\| \left\| p_n(s) - f(s) \right\| ds \\
&\leq \int_0^t \left\| U(t, s) \right\| \left\| p_n - f \right\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} ds.
\end{aligned}$$

Vì $U(t, s) \subset L(X)$ nên bị chặn. Tức là tồn tại $M > 0$, sao cho:

$$\left\| U(t, s) \right\| \leq M, \quad \forall t \geq s.$$

Do đó

$$\left\| v_{p_n}(t, 0) - v_f(t, 0) \right\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} \leq \int_0^t M \left\| p_n - f \right\|_{AP_0(\mathbb{R}_+, X)} ds. \quad (3.3.2)$$

Cho $n \rightarrow \infty$ trong (3.3.2) ta được $\left(v_{p_n}(t, 0) \right)$ hội tụ về $v_f(t, 0)$, $\forall t \geq 0$. Hay

$\left(v_{p_n}(\cdot, 0) \right)$ hội tụ từng điểm về $v_f(\cdot, 0)$.

Vì vậy $v_f(\cdot, 0)$ thuộc $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Theo định lí 2.2.3 ta suy ra U ổn định lũy thừa.

Hoàn thành chứng minh của định lí 3.3.3 ■

KẾT LUẬN

Luận văn trình bày lại một cách có hệ thống một số kết quả về ổn định lũy thừa của họ tiến hóa tuần hoàn, và mối quan hệ của nó với nghiệm của bài toán Cauchy. Đồng thời tác giả cũng đưa ra một số ứng dụng quan trọng của các kết quả đó.

Tác giả đã trình bày một cách chi tiết hoặc đề nghị phép chứng minh cho các định lí. Các kết quả chính của luận văn bao gồm:

1. Bổ đề về nửa nhóm liên tục mạnh sinh bởi một hàm trong không gian $AP_0(\mathbb{R}_+, X)$ (Bổ đề 2.2.1 và bổ đề 2.2.2).
2. Định lí về mối liên hệ giữa tính chất của nghiệm của bài toán Cauchy với tính ổn định lũy thừa của họ tiến hóa tuần hoàn (định lí 2.2.3, bổ đề 2.2.4, và định lí 2.2.5).
3. Một số ứng dụng của định lí 2.2.3 (Định lí 3.3.1, định lí 3.3.2, và định lí 3.3.3).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A.Abbondandolo and P.Majer, Ordinary differential operators in Hilbert spaces Fredholm pairs, *Math.Z.* 243 (and 2003), 525- 562.
- [2] A.G. Baskakov, semigroups of differential operators in the spectral analysis of linear differential operators, *Funct. Anal. Appl.* 30 (1996), 149- 157.
- [3] A.G. Baskakov, on correct linear differential operators, *Math. Sbornik* 190(1999), 323-348.
- [4] A.G. Baskakov, Spectral analysis of linear differential operators and semigroups of difference operators I, *Diff. Eqns.* 33 (1997), 1305-1312.
- [5] A. Ben – Artzi and I. Gohberg, Dichotomy of systems and invertibility of linear ordinary differential operators, *Oper. Theory Adv . Appl.*56, 1992, 91119.
- [6] C. Buse (2001), “Exponential stability for periodic evolution family of bounded linear operators”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino* Vol. 59, 1 (2001).
- [7] Constantin Buse (2002) “A spectral mapping theorem for evolution semigroups on asymptotically almost periodic functions defined on the half line”, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol, (2002).
- [8] NVM “Exponential stability, exponential expansiveness, and exponential dichotomy of evolution equations on the half-line”, *Frank Rabiger and Roland Schnaubelt Department of Mathematics University of Tübingen D-72076-Tübingen, Germany.*
- [9] NVMinh(2006) “Almost periodic solution of C – Well – Posed evolution equation”, *Math. J. Okayama Univ.* 48 (2006), 145–157.
- [10] Klaus, Jochen Engel, Rainer Nagel (2000), *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer.
- [11] VQP(2001), “ On stability of C_0 - Semigroups”, *Proceedings of The American Mathematical Society* Volume 129, Number 10, Pages 2871–2879, S 0002-9939(01)05614-3.
- [12] A.Pazy, (1973), *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag.
- [13] [17] Nguyen Van Minh, Frank Rabiger and Roland Schnaubelt, Exponential stability, exponential expansiveness, and exponential dichotomy of evolution equations on the half-line, *Integral Equations Operator Theory*, 32,(1998), 332-353.

- [14] [2] C. Buse, The spectral mapping theorem for evolution semigroups on the space of asymptotically almost periodic functions defined on the half-line, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2002(2002), No. 70, pp.1-11.