Phần 1:

KIẾN THỨC CƠ BẢN

§1. VÀNH & MODUL

Trong luận văn này, nếu không nói gì thêm, các vành được xét đều thuộc lớp vành đơn giản nhất: không giao hoán và không nhất thiết chứa đơn vị

Định nghĩa: *Vành là một nhóm cộng Abel R cùng với một phép nhân có tính kết hợp, phân phối hai phía đối với phép cộng.*

Các khái niệm vành con, ideal một phía (trái hoặc phải) được hiểu như bình thường; ideal hai phía gọi tắt là ideal.

Các khái niệm đồng cấu, đẳng cấu và các định lý đẳng cấu được xem là đã biết.

Các modul trên một vành R (hoặc R-modul) được xem là tác động bên phải.

Định nghĩa: *Một R-modul là một nhóm cộng Abel M cùng với một tác động ngoài từ R vào M (tức là một ánh xạ từ $M \times R$ vào M biến cặp (m,r) thành $mr \in M$) sao cho:*

1) $m(a + b) = ma + mb$

2) $(m + n)a = ma + na$

3) $(ma)b = m(ab)$

với mọi $m, n \in M$ *và mọi* $a, b \in R$.

Định nghĩa: *Một R-modul M được gọi là trung thành nếu* $Mr = (0)$ *kéo theo* $r = 0$.

Ta có thể đặc trưng một R-modul trung thành qua khái niệm sau:

Định nghĩa: *Cho M là một R-modul thì ta gọi cái linh hóa của M là:* $A(M) = \{r \in R / Mr = (0)\}$

Khi đó ta có: *R-modul M là trung thành khi và chỉ khi* $A(M) = (0)$.

Mệnh đề (1.1.1): $A(M)$ *là một ideal của R và M là một* $R/A(M)$*-modul trung thành.*

Bây giờ cho M là một R-modul, gọi E(M) là tập tất cả các tự đồng cấu của nhóm cộng M thì E(M) là một vành theo các phép toán tự nhiên.

Với mỗi $a \in R$ ta định nghĩa một ánh xạ $T_a: M \longrightarrow M$ xác định bởi $mT_a = ma$, $\forall m \in M$, do M là một R-modul nên T_a là một tự đồng cấu của nhóm cộng M. Vậy ta có $T_a \in E(M)$.

Xét $\varphi : R \longrightarrow E(M)$ xác định bởi $a\varphi = T_a$ thì φ là một đồng cấu vành và $Ker\varphi = A(M)$ nên ta có:

Mệnh đề (1.1.2): *R/A(M) đẳng cấu với một vành con của E(M).*

Nói riêng, nếu M là một R-modul trung thành thì ta có A(M)=(0). Khi đó có thể xem R như một vành con của vành các tự đồng cấu nhóm cộng của M hay R là một vành các tự đồng cấu nhóm cộng nào đó của M.

Bây giờ ta tìm các phần tử của E(M) giao hoán với mọi T_a khi a chạy khắp R.

Định nghĩa: *Ta gọi cái tâm hóa của R trên M là tập:*

$$C(M) = \{\psi \in E(M) / T_a\psi = \psi T_a,\ \forall a \in R\}$$

Mệnh đề (1.1.3): *C(M) là một vành con của E(M) và chính là vành các tự đồng cấu R-modul của M.*

Định nghĩa: *M được gọi là một R-modul bất khả qui nếu $MR \neq (0)$ và M chỉ có hai modul con là (0) và chính M.*

Kết quả sau là nền tảng cho nhiều phát triển mới trong lý thuyết vành:

Mệnh đề (1.1.4): (bổ đề Schur) *Nếu M là một R-modul bất khả qui thì C(M) là một vành chia.*

(vành chia còn gọi là thể)

Sau đây ta sẽ mô tả bản chất các R-modul bất khả qui.

Mệnh đề (1.1.5): *Nếu M là một R-modul bất khả qui thì M đẳng cấu với R/ρ như một R-modul với ρ là một ideal phải tối đại của R và có tính chất là tồn tại một phần tử $a \in R$ sao cho $x - ax \in \rho$ với mọi $x \in R$. Đảo lại, với mỗi ideal phải tối đại ρ của R thỏa tính chất trên thì R/ρ là một R-modul bất khả qui.*

Định nghĩa: *Một ideal phải ρ của R thỏa các tính chất nêu trong mệnh đề (1.1.5) được gọi là một ideal phải tối đại chính qui của R.*

Nếu R có đơn vị thì mọi ideal phải của nó đều chính qui vì đơn vị (trái) của R đóng vai trò của a. Từ định nghĩa này, ta có:

M là một R-modul bất khả qui khi và chỉ khi M đẳng cấu với R/ρ như một R-modul với ρ là một ideal phải tối đại chính qui của R.

§2. CĂN JACOBSON

Định nghĩa: *Căn Jacobson của R, ký hiệu J(R), là tập hợp tất cả các phần tử của R linh hóa mọi R-modul bất khả qui.*

Nếu R không có modul bất khả qui thì ta đặt J(R) = R.

Nhận xét

1) Trong luận văn này chúng ta chỉ xét các căn Jacobson của R và gọi tắt là căn của R.

2) Vì $J(R) = \cap A(M)$ với phần giao lấy trên mọi R-modul bất khả qui M, mà các A(M) đều là ideal hai phía của R nên J(R) cũng là một ideal hai phía của R.

3) Để thật chính xác ta cần nói rõ J(R) là căn phải của R vì nó được định nghĩa dựa vào các R-modul phải. Ta cũng có thể định nghĩa tương tự cho căn trái của R. Tuy nhiên hai khái niệm này thực ra là trùng nhau, vì vậy không cần nhấn mạnh thuật ngữ trái hoặc phải.

Sau đây là một số đặc trưng khác của căn Jacobson:

Định nghĩa: *Cho ρ là một ideal phải của R thì ta định nghĩa:*

$$(\rho:R) = \{x \in R \,/\, Rx = \rho\}$$

Khi ρ là một ideal phải tối đại chính qui của R và nếu đặt $M=R/\rho$ thì $A(M) = (\rho:R)$ và là ideal hai phía lớn nhất của R chứa trong ρ. Vậy ta có:

Mệnh đề (1.2.1): *$J(R) = \cap(\rho:R)$ với ρ chạy qua mọi ideal phải tối đại chính qui của R và $(\rho:R)$ là ideal hai phía lớn nhất của R chứa trong ρ.*

Ngoài ra ta còn có:

Mệnh đề (1.2.2): *$J(R) = \cap\rho$ với ρ chạy qua mọi ideal phải tối đại chính qui của R.*

Cuối cùng là một đặc trưng trên các phần tử của J(R):

Định nghĩa:

1) Một phần tử $a \in R$ được gọi là tựa chính qui phải nếu tồn tại một phần tử $a' \in R$ sao cho $a+a'+aa' = 0$. Ta gọi a' là tựa nghịch đảo phải của a.

2) Ta nói một ideal phải của R là tựa chính qui phải nếu mọi phần tử của nóđều là tựa chính qui phải.

Từ khái niệm này, ta có:

Mệnh đề (1.2.3): *J(R) là một ideal phải tựa chính qui phải của R và chứa mọi ideal phải tựa chính qui phải của R*

[hay: J(R) là ideal phải tựa chính qui phải tối đại duy nhất của R]

Nhận xét:

1) Nếu $a \in J(R)$ thì luôn tồn tại a' và cũng có $a' \in J(R)$.

2) Nếu R có đơn vị 1 thì phần tử $a \in R$ là tựa chính qui phải khi và chỉ khi 1+a khả nghịch phải trong R.

3) Ta cũng có thể định nghĩa tương tự cho phần tử tựa chính qui trái trong R.

4) Nếu một phần tử $a \in R$ đồng thời là tựa chính qui trái và phải thì các tựa nghịch đảo trái và phải của a là trùng nhau.

Trong một số trương hợp, một ideal phải có thể được chứng minh là tựa chính qui bằng cách chỉ rõ các tựa nghịch đảo phải của các phần tử trong nó.

Định nghĩa:

1) Một phần tử $a \in R$ được gọi là lũy linh nếu $a^n = 0$ với một số tự nhiên n nào đó.

2) Một ideal phải (trái, hai phía) ρ của R là nil nếu mọi phần tử của nó đều lũy linh.

3) Một ideal phải (trái, hai phía) ρ của R là lũy linh nếu tồn tại số tự nhiên m sao cho $a_1a_2...a_m = 0$ với mọi $a_1, a_2, ... ,a_m \in \rho$.

Nhận xét:

1) Nếu I, J là hai ideal phải (trái, hai phía) của R, ta ký hiệu IJ là nhóm con cộng của R sinh bởi tất cả các tích ab với $a \in I$, $b \in J$. Khi đó IJ là một ideal phải (trái, hai phía) của R.

Bằng qui nạp ta cũng định nghĩa $I^1=I$ và $I^n = I^{n-1}I$ với mọi n>1. Khi đó ta có:

Một ideal phải ρ của R là lũy linh khi và chỉ khi $\rho^m = (0)$ với một số tự nhiên m nào đó.

2) Trong khi mọi ideal phải lũy linh đều là nil thì có những nil ideal không nhất thiết là lũy linh.

3) Giả sử $a^m = 0$ và đặt $b = -a + a^2 - a^3 + ... + (-1)^{m-1} a^{m-1}$ thì bằng phép tính đơn giản ta suy ra a+b+ab = 0.Vậy mọi phần tử lũy linh trong R đều là tựa chính qui phải nên ta có:

Mọi nil ideal phải trong R đều là tựa chính qui phải.

Do đó theo mệnh đề (1.2.3) ta cũng có:

Mệnh đề(1.2.4): *Mọi nil ideal phải hoặc trái của R đều chứa trong J(R).*

Bây giờ ta xét một lớp vành đặc biệt

Định nghĩa: *Một vành R được gọi là nửa đơn nếu J(R) = (0)*

Mệnh đề sau nói lên lợi ích thực sự của căn Jacobson:

Mệnh đề(1.2.5): *Với mọi vành R thì R/J(R) là một vành nửa đơn.*

[tức là J(R/J(R)) = (0) với mọi vành R]

Về các bất biến của căn Jacobson ta cũng có:

Mệnh đề(1.2.6): *Nếu A là một ideal của R thì* $J(A) = A \cap J(R)$.

Hệ quả: *Nếu R nửa đơn thì mọi ideal của R cũng vậy.*

Chú ý: Kết quả trên là sai nếu ta chỉ giả thiết A là ideal một phía.

Bây giờ nếu R là một vành và ký hiệu R_m là vành tất cả các ma trận cấp m×m với các hệ tử thuộc R thì ta có:

Mệnh đề(1.2.7): $J(R_m) = J(R)_m$.

§3. VÀNH ARTIN NỬA ĐƠN

Định nghĩa: *Một vành được gọi là Artin phải nếu mọi tập không rỗng các ideal phải đều có chứa phần tử tối tiểu.*

Ta thường bỏ qua chữ "phải" và nói gọn là vành Artin. Các vành Artin còn có thể được định nghĩa tương đương thông qua các dây chuyền giảm.

Một vành R là Artin khi và chỉ khi mọi dây chuyền giảm các ideal phải của R: $\rho_1 \supset \rho_2 \supset ... \supset \rho_m \supset ...$ *đều phải dừng.[Tức là kể từ một lúc nào đó ta có mọi* ρ_i *đều bằng nhau]*

Với các vành Artin thì căn của nó rất đặt biệt:

Mệnh đề (1.3.1): *Nếu R là một vành Artin thì J(R) là một ideal lũy linh.*

Hệ quả: *Nếu R là một vành Artin thì mọi nil ideal (phải, trái hoặc hai phía) của R đều lũy linh.*

Định nghĩa: *Một phần tử $e \neq 0$ trong R được gọi là phần tử lũy đẳng nếu ta có $e^2 = e$.*

Mệnh đề (1.3.2): *Cho R là một vành không có ideal lũy linh khác (0) và giả sử $\rho \neq (0)$ là một ideal phải tối tiểu của R, khi đó ta có $\rho = eR$ với e là một phần tử lũy đẳng khác 0 của R.*

Ta đã biết trong một vành Artin nếu một ideal phải gồm toàn phần tử lũy linh thì chính nó cũng lũy linh [hệ quả của mệnh đề (1.3.1)].Còn điều ngược lại, đối với một ideal phải có chứa một phần tử không lũy linh thì sao? Đối với vấn đề này, ta có:

Mệnh đề (1.3.3): *Cho R là một vành và giả sử với một $a \in R$ nào đó mà ta có $a^2 - a$ lũy linh. Khi đó, hoặc a lũy linh, hoặc có một đa thức với hệ số nguyên q(x) sao cho $e = aq(a)$ là lũy đẳng khác 0.*

Mệnh đề (1.3.4): *Nếu R là một vành Artin và $\rho \neq (0)$ là một ideal phải không lũy linh của R thì ρ có chứa một lũy đẳng khác 0.*

Trường hợp đặc biệt khi xét vành eRe với e là một lũy đẳng thì ta có:

Mệnh đề (1.3.5): *Cho e là một lũy đẳng trong một vành R tùy ý thì ta có $J(eRe) = eJ(R)e$.*

Mệnh đề (1.3.6): *Cho R là một vành không có ideal lũy linh khác (0) và giả sử e là một lũy đẳng trong R. Khi đó, eR là một ideal phải tối tiểu của R khi và chỉ khi eRe là một vành chia.*

Thay từ "phải" thành từ "trái" trong mệnh đề trên rồi kết hợp hai kết quả, ta có hệ quả:

Hệ quả: *Cho R là một vành không có ideal lũy linh khác (0) và giả sử e là một lũy đẳng trong R. Khi đó, eR là một ideal phải tối tiểu của R khi và chỉ khi Re là một ideal trái tối tiểu của R.*

Ta chuyển sang nghiên cứu các vành có căn đặc biệt, cụ thể là (0), mà trước hết là các vành Artin nửa đơn.

Trước tiên, ta khẳng định các vành như vậy thực sự tồn tại. Kết quả sau là một định lý cổ điển quan trọng của Maschke.

Định nghĩa: *Cho F là một trường, G là một nhóm hữu hạn cấp o(G). Ta gọi đại số nhóm của G trên F, kí hiệu F(G), là $\{\Sigma \alpha_i g_i \,/\, \alpha_i \in F, g_i \in G\}$ với các phần tử của nhóm xem như độc lập tuyến tính trên F, phép cộng* *theo cách tự nhiên và phép nhân sử dụng luật phân phối và phép tính $g_i g_j$ theo phép nhân trong G.*

Từ định nghĩa trên ta có:

Mệnh đề (1.3.7): (định lý Maschke) *Cho G là một nhóm hữu hạn cấp o(G) và F là một trường có đặc số 0 hoặc đặc số p với $p \nmid o(G)$. Khi đó, F(G) là nửa đơn.*

Chú ý: Ta lưu ý rằng F(G) không là nửa đơn nếu đặc số của F là ước của o(G).

Trở lại với các vành Artin nửa đơn, mệnh đề (1.3.2) khẳng định rằng một ideal phải tối tiểu trong một vành không có nil ideal khác (0) thì được sinh bởi một lũy đẳng. Thực ra, điều kiện tối tiểu là không cần thiết cho trường hợp các vành Artin nửa đơn. Đó là khẳng định của mệnh đề sau:

Mệnh đề (1.3.8): *Cho R là một vành Artin nửa đơn và $\rho \neq (0)$ là một ideal phải của R. Khi đó $\rho = eR$ với một lũy đẳng e nào đó trong R.*

Từ mệnh đề này ta có:

Hệ quả 1: *Cho R là một vành Artin nửa đơn và $A \neq (0)$ là một ideal của R thì A = eR = Re với e là một lũy đẳng nào đó thuộc tâm của R.*

Hệ quả 2: *Mọi vành Artin nửa đơn đều có đơn vị hai phía.*

Điều này khẳng định tính nửa đơn kéo theo sự tồn tại đơn vị trong một vành Artin.

Từ các kết quả này ta chứng minh được:

Mệnh đề (1.3.9): *Một ideal của một vành Artin nửa đơn cũng là một vành Artin nửa đơn.*

Để nghiên cứu cấu trúc của các vành Artin nửa đơn ta cần:

Định nghĩa: *Một vành R là vành đơn nếu $R^2 \neq (0)$ và R* không có ideal nào khác (0) và bản thân R.

Nhận xét:

1) Điều kiện $R^2 \neq (0)$ trong định nghĩa để loại trừ khả năng tầm thường khi R là một nhóm cộng có p phần tử, p nguyên tố, trong đó tích của hai phần tử bất kỳ là 0.

2) Nếu R có đơn vị thì dễ chứng minh tính đơn sẽ suy ra tính nửa đơn.

3) Có những ví dụ về những vành đơn có căn riêng (không tầm thường).

4) Một vành Artin đơn thì phải là nửa đơn.

5) Có những vành đơn không chứa ước của 0 và thực sự không là một vành chia.

6) Mọi ideal tối tiểu A ≠ (0) trong một vành Artin nửa đơn R đều là vành Artin đơn.

Từ những nhận xét trên ta có thể chứng minh mệnh đề sau:

Mệnh đề (1.3.10): (định lý Wedderburn) *Mọi vành Artin nửa đơn đều là tổng trực tiếp của một số hữu hạn các vành Artin đơn.*

Hơn nữa, nếu R là một vành Artin nửa đơn và $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ *với các* A_i *đều đơn thì các* A_i *sẽ chạy qua mọi ideal tối tiểu của R.*

§4. VÀNH NGUYÊN THỦY

Ta bắt đầu mục này với một khái niệm cơ bản trong lý thuyết vành. Loại vành đặc biệt mà ta giới thiệu ở đây đóng vai trò đối với các vành nửa đơn tổng quát tương tự như vai trò của các vành đơn trong trường hợp vành Artin nửa đơn.

Định nghĩa: *Một vành R được gọi là vành nguyên thủy nếu nó có một modul bất khả qui trung thành.*

Nhân xét:

1) Một vành như thế đúng ra phải nói là vành nguyên thủy bên phải vì mọi modul được xét đều là modul phải. Ta có thể định nghĩa tương tự cho vành nguyên thủy bên trái và nói chung hai khái niệm đó là khác nhau.

2) Nếu M là một R-modul bất khả qui và A(M) ={r ∈ R / Mr = (0)} thì R/A(M) là một vành nguyên thủy [theo mệnh đề (1.1.1)].

3) Nếu ρ là một ideal phải tối đại chính qui của R và đặt M = R/ρ thì A(M) = (ρ:R) nên R/(ρ:R) là một vành nguyên thủy.

Ngoài ra ta còn có:

Mệnh đề (1.4.1): *Một vành R là vành nguyên thủy khi và chỉ khi trong R tồn tại một ideal phải tối đại chính qui ρ sao cho (ρ:R) = (0). Khi đó R còn là nửa đơn và nếu thêm R giao hoán thì nó là một trường.*

Trước đây ta đã biết tồn tại các vành đơn có căn riêng của nó. Những dễ chứng minh rằng một vành đơn đồng thời cũng nửa đơn thì phải là một vành nguyên thủy.

Bây giờ, cho R là một vành nguyên thủy và giả sử M là một modul bất khả qui trung thành của R. Nếu đặt C(M) = Δ là cái tâm hóa của R trên M thì theo bổ đề Schur, Δ là một vành chia. Ta có thể xem M là một không gian vectơ phải trên Δ trong đó, với m∈M, α∈Δ thì mα là tác động của α, xem như một phần tử của E(M), lên m.

Định nghĩa: *R được gọi là tác động dày đặc lên M (hay R dày đặc trên M) nếu với mọi n và mọi $v_1, \ldots, v_n$ độc lập tuyến tính trên Δ và mọi n phần tử $w_1, \ldots, w_n$ thì tồn tại một $r \in R$ sao cho $w_i = v_i r$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.*

Nhận xét:

Nếu M hữu hạn chiều trên Δ và R tác động vừa trung thành, vừa dày đặc trên M thì R đẳng cấu với $Hom_\Delta(M,M) = \Delta_n$ là vành các ma trận $n \times n$ trên Δ với $n = \dim_\Delta M$. Vậy, tính dày đặc là sự tổng quát hóa của vành tất cả các phép biến đổi tuyến tính.

Kết quả cơ bản mà từ đó toàn bộ lý thuyết cấu trúc của các vành được phát triển là định lý dày đặc sau đây của Jacobson và Chevalley:

Mệnh đề (1.4.2): (định lý dày đặc) *Cho R là một vành nguyên thủy và M là R-modul bất khả qui trung thành. Nếu $\Delta = C(M)$ thì R là một vành dày đặc các biến đổi tuyến tính của M trên Δ.*

Định lý dày đặc cho phép ta có nhiều kết luận về các vành nguyên thủy và liên hệ chúng với các vành ma trận.

Mệnh đề (1.4.3): *Nếu R là một vành nguyên thủy thì tồn tại một vành chia Δ sao cho, hoặc R đẳng cấu với Δ_n là vành tất cả các ma trận $n \times n$ trên Δ, hoặc với mọi số tự nhiên m, tồn tại một vành con S_m của R có ảnh đồng cấu là Δ_m.*

Ta mở rộng một khái niệm quen thuộc từ từ lý thuyết vành giao hoán sang các vành không giao hoán. Lớp các vành được định nghĩa sau đây chứa mọi vành nguyên thủy.

Định nghĩa: *Vành R được gọi là một vành nguyên tố nếu $aRb = (0)$ (với $a, b \in R$) thì $a = 0$ hay $b = 0$.*

Sau đây là một số đặc trưng của vành nguyên tố:

Mệnh đề (1.4.4): *Một vành R là nguyên tố khi và chỉ khi:*

1) Cái linh hóa phải của một ideal phải khác (0) trong R chính là (0).

2) Cái linh hóa trái của một ideal trái khác (0) trong R chính là (0).

3) Nếu A, B là các ideal của R và $AB = (0)$ thì hoặc $A = (0)$ hoặc $B = (0)$.

Mối liên hệ giữa các vành nguyên thủy và nguyên tố được cho bởi mệnh đề sau:

Mệnh đề (1.4.5): *Mọi vành nguyên thủy đều là nguyên tố.*

Từ mệnh đề (1.4.4) nhanh chóng suy ra tâm của một vành nguyên tố là một miền nguyên – nó có thể bằng (0) – nên ta có:

Mệnh đề (1.4.6): *Một phần tử khác 0 trong tâm của một vành nguyên tố R thì không thể là ước của 0 trong R. Nói riêng, tâm của một vành nguyên tố là một miền nguyên. Và do đó tâm của một vành nguyên thủy là miền nguyên.*

Đảo lại: cho một miền nguyên $I \neq (0)$ thì tồn tại một vành nguyên thủy có tâm chính là I.

Trong phần cuối của mục này ta tập trung vào một định lý rất nổi tiếng của Wedderburn:

Mệnh đề (1.4.7): (định lý Wedderburn-Artin) *Cho R là một vành Artin đơn. Khi đó R đẳng cấu với D_n, vành tất cả các ma trận $n \times n$ trên vành chia D. Hơn nữa, n là duy nhất và D cũng duy nhất sai khác một đẳng cấu. Ngược lại, với mọi vành chia D thì D_n là một vành Artin đơn.*

Định lý Wedderburn có nhiều ứng dụng trong nhiều trường hợp đặc biệt của các vành Artin. Trước hết mệnh đề (1.3.10) khẳng định rằng mọi vành Artin nửa đơn là tổng trực tiếp của một số hữu hạn các vành Artin đơn. Kết hợp với mệnh đề (1.4.7) ta được một định lý xác định cấu trúc các vành Artin nửa đơn:

Mệnh đề (1.4.8): *Nếu R là một vành Artin nửa đơn thì:*
$R \approx \Delta^{(1)}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \Delta^{(k)}_{n_k}$ với $\Delta^{(i)}$ là các vành chia và $\Delta^{(i)}_{n_i}$ là vành tất cả các ma trận $n_i \times n_i$ trên $\Delta^{(i)}$.

Có những hoàn cảnh nào mà ta có thể nói nhiều hơn nữa, trong đó ta có thể xác định các vành chia Δ một cách rõ ràng hơn? Một trường hợp như thế là đối với các đại số đơn hữu hạn chiều trên một trường đóng đại số. Để đạt được điều này ta cần:

Định nghĩa: *Cho A là một đại số trên một trường F, $a \in A$ được gọi là đại số trên F nếu tồn tại một đa thức $p(x) \in F[x]$, $p(x) \neq 0$ sao cho $p(a)=0$. A được gọi là một đại số đại số trên F nếu mọi $a \in A$ đều là đại số trên F.*

Nhận xét: Nếu A hữu hạn chiều trên F thì nó là đại số trên F.

Bổ đề (1.4.9): *Cho F là một trường đóng đại số. Nếu D là một đại số chia đại số trên F thì ta có D = F.*

Với bổ đề này kết hợp với các mệnh đề (1.4.7) và (1.4.8) ta được một dạng rất đẹp cho các đại số nửa đơn hữu hạn chiều trên các trường đóng đại số:

Mệnh đề (1.4.10): *Cho F là một trường đóng đại số và A là một đại số nửa đơn hữu hạn chiều trên F. Khi đó $A \approx F_{n_1} \oplus \ldots \oplus F_{n_k}$.*

Hiển nhiên rằng tâm của một tổng trực tiếp là tổng trực tiếp của các tâm. Ta cũng có tâm của F_{n_i} là một chiều trên F (vì chính nó là

FI_{n_i} với I_{n_i} là ma trận đơn vị $n_i \times n_i$). Vậy k = dim $_F$Z. Nói cách khác, ta có:

Hệ quả 1: *Nếu A như trong mệnh đề (1.4.10) thì số các thành phần tổng trực tiếp của A bằng số chiều của tâm của A trên F.*

Một hệ quả trực tiếp khác của mệnh đề (1.4.10) là cấu trúc của các đại số nhóm.

Hệ quả 2: *Cho G là một nhóm hữu hạn cấp o(G) và F là một trường đóng đại số có đặc số 0 hay đặc số p$\nmid$ o(G). Khi đó F(G)* $\approx F_{n_1} \oplus \ldots \oplus F_{n_k}$.

§5. VÀNH NỬA ĐƠN

Trong mục trước ta đã mô tả khá rõ các vành nguyên thủy, bây giờ ta sẽ cố buộc chặt cấu trúc của các vành nửa đơn với cấu trúc của các vành nguyên thủy. Để làm điều đó trước hết ta sẽ tổng quát hóa khái niệm tổng trực tiếp:

Tích trực tiếp (hoặc tổng trực tiếp hoàn toàn) của các vành R_γ, γ thuộc vào một tập chỉ số I là tập:

$$\prod_{\gamma\in I} R_\gamma = \{f: I \longrightarrow \bigcup_{\gamma\in I} R_\gamma \ / \ f(\gamma) \in R, \forall \gamma \in I\}$$

với cấu trúc vành cho bởi các phép toán:

$$(f+g)(\gamma) = f(\gamma) + g(\gamma) \text{ và } (fg)(\gamma) = f(\gamma)g(\gamma)$$

Ta đặt π_γ là phép chiếu chính tắc của $\prod_{\gamma\in I} R_\gamma$ lên R_γ.

Định nghĩa: *Một vành R được gọi là một tổng trực tiếp con của các vành* $\{R_\gamma\}_{\gamma \in I}$ *nếu tồn tại một đơn cấu* φ *:*

$$\varphi : R \longrightarrow \prod_{\gamma\in I} R_\gamma \ \text{ sao cho } R\varphi\pi_\gamma = R_\gamma \ \ \forall \gamma \in I$$

Kết quả sao được suy ngay từ định nghĩa:

Mệnh đề (1.5.1): *Cho R là một vành tùy ý và* $\varphi_\gamma : R \longrightarrow R_\gamma$ *là các toàn cấu của R lên các vành* R_γ*. Đặt* $U_\gamma = Ker\ \varphi_\gamma$*, khi đó R là một tổng trực tiếp con của các vành* R_γ *khi và chỉ khi* $\bigcap_\gamma U_\gamma = (0)$.

Sau đây là vài ví dụ về các biểu diễn thành các tổng trực tiếp con:

Định nghĩa: *Một vành R được gọi là bất khả qui trực tiếp con nếu giao của tất cả các ideal khác (0) của nó cũng khác (0).*

Điều này nói rằng R không có một biểu diễn không tầm thường thành một tổng trực tiếp con.

Mệnh đề (1.5.2): *Mọi vành đều biểu diễn được thành một tổng trực tiếp con của các vành bất khả qui trực tiếp con.*

Mệnh đề (1.5.3): *Cho R là một vành không có nil ideal khác (0). Khi đó R là một tổng trực tiếp con của các vành nguyên tố R_α.*

Thực ra mỗi vành nguyên tố R_α còn có thêm tính chất là: tồn tại một phần tử không lũy linh a_α trong R_α sao cho với mọi ideal $U \neq (0)$ trong R_α thì tồn tại số tự nhiên n(U) để cho $a_\alpha^{n(U)} \in U$. Tức là, các lũy thừa của a_α rơi vào mọi ideal khac (0) của R_α.

Dựa vào khái niệm tổng trực tiếp con ta có thể mô tả cấu trúc của các vành nửa đơn:

Mệnh đề (1.5.4): *R là một vành nửa đơn khi và chỉ khi nó đẳng cấu với một tổng trực tiếp con của các vành nguyên thủy.*

Vì các vành nguyên thủy giao hoán là trường nên ta cũng có:

Hệ quả: *Một vành nửa đơn giao hoán là một tổng trực tiếp con của các trường*

MỘT SỐ NHẬN ĐỊNH VỀ CÁC KẾT QUẢ TRÊN

Ta có thể dựa vào các kiến thức trên để vạch ra một hướng giải quyêt một số vấn đề về các vành:

– Đầu tiên chứng minh định lý cho các vành chia, điều này có thể dẫn đến các vấn đề về số học trong lý thuyết trường.

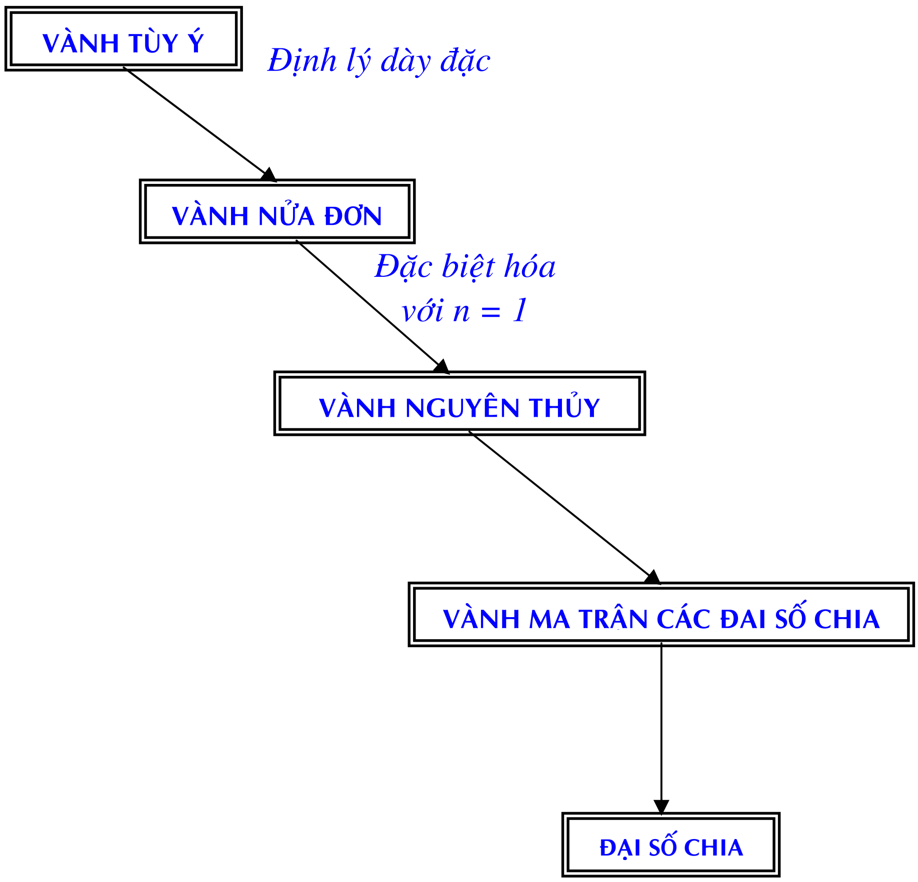
– Bước thứ hai là chuyển sang các vành nguyên thủy dựa vào các kết quả đối với các vành ma trận và mệnh đề (1.4.3).

– Tiếp theo là nối kết lại để được kết quả cho các vành nửa đơn, dựa vào mệnh đề (1.5.4)

Sơ đồ sau đây biểu diễn mối quan hệ giữa một số các lớp vành

Lấy thương theo căn

Biểu diễn thành tổng trực tiếp con



Phần 2:

ĐỊNH LÝ JACOBSON
(về điều kiện giao hoán)
VÀ MỘT HƯỚNG TIẾP TỤC MỞ RỘNG

Trong phần này của luận văn, ta sẽ xét điều kiện giao hoán của một vành, tính chất này được bảo toàn qua phép lấy tổng trực tiếp con.

Cụ thể là ta khẳng định tính giao hoán của một vành dựa vào một số điều kiện cho trước.

Sau đây là một số kết quả đã được công nhận.

§1. ĐỊNH LÝ JACOBSON

Bổ đề (2.1.1): *Cho D là một vành chia có đặc số $p\neq 0$ và Z là tâm của D. Giả sử có một phần tử $a\in D$, $a\notin Z$ sao cho $a^{p^n}=a$ với một số nguyên $n\geq 1$ nào đó. Khi đó tồn tại phần tử $x\in D$ để cho $xax^{-1}=a^i\neq a$ với i là một số nguyên nào đó.*

Từ bổ đề ta có thể chứng minh một định lý của Wedderburn:

Mệnh đề(2.1.2): *Mọi vành chia hữu hạn đều là trường.*

Hệ quả(2.1.3): *Cho D là một vành chia có đặc số $p\neq 0$ và $G\subset D$ là một nhóm con nhân hữu hạn của D thì G là một nhóm Abel (nên là nhóm cyclic).*

Bổ đề(2.1.4): *Cho D là một vành chia sao cho với mọi $a\in D$ đều tồn tại một số nguyên $n(a) > 1$ để cho $a^{n(a)} = a$. Khi đó D là một trường.*

Chứng minh:

Ta có $2\in D$ và $2^m=2$ với $m > 1$ nên D có đặc số nguyên tố $p\neq 0$. Nếu D không giao hoán thì tồn tại $a\in D$ và $a\notin Z$ với Z là tâm của D.

Gọi P là trường nguyên tố của Z, vì $a^{n(a)} = a$ nên a là phần tử đại số trên P. Từ đó P(a) là một trường hữu hạn có p^k phần tử và ta có $a^{p^k}=a$.

Đến đây, ta thấy mọi điều kiện của bổ đề (2.1.1) đều được thỏa mãn đối với a nên tồn tại phần tử $b\in D$ để cho $bab^{-1} = a^i\neq a$.

Quan hệ này cùng với sự kiện a và b đều có cấp hữu hạn dẫn đến a và b sinh ra một nhóm con nhân hữu hạn G trong D, vậy theo hệ quả (2.1.3) thì G giao hoán.

Do $a\in G$, $b\in G$ và $ab\neq ba$ thì điều này là mâu thuẩn, bổ đề được chứng minh ■

Bây giờ ta chứng minh định lý Jacobson:

Mệnh đề(2.1.5): (định lý Jacobson) *Cho R là một vành sao cho với mỗi phần tử $a \in D$ đều tồn tại một số nguyên $n(a) > 1$, phụ thuộc a, để cho $a^{n(a)} = a$ thì R giao hoán.*

Chứng minh:

Trước hết ta chứng minh R là vành nửa đơn:

[Chứng minh: nếu ux = u với $x \in J(R)$ thì u = 0:

$$\begin{aligned} x \in J(R) &\Rightarrow (-x) \in J(R) \\ &\Rightarrow \exists\, x': (-x) + x' - xx' = 0 \\ &\Rightarrow 0 = u(-x + x' - xx') = -ux + ux' - uxx' \\ &\qquad = -u + ux' - ux' \ = -u \\ &\Rightarrow u = 0] \end{aligned}$$

Với mọi $a \in J(R)$: $a^{n(a)} = a \Rightarrow a.\ a^{n(a)-1} = a$ với $a^{n(a)-1} \in J(R)$ do đó theo chứng minh trên ta có a = 0. Vậy J(R) = (0) nên ta có R là vành nửa đơn.

Do R là vành nửa đơn nên theo mệnh đề (1.5.3) R là một tổng trực tiếp con của các vành nguyên thủy R_α . Mỗi R_α là một ảnh đồng cấu của R nên R_α thừa hưởng điều kiện $a^{n(a)} = a$, hơn nữa mỗi vành con và ảnh đồng cấu của R_α cũng thỏa điều kiện đó.

R_α là vành nguyên thủy nên theo mệnh đề (1.4.3) hoặc $R_\alpha \approx D_n$ hoặc mọi D_m (D là vành chia) đều là ảnh đồng cấu của một vành con của R_α.

Nếu R_α không là một vành chia D thì tồn tại một D_k (k > 1) thừa hưởng điều kiện của giả thiết. Điều này vô lý vì phần tử

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 \end{pmatrix} = e_{12} \in D_k$$

thỏa điều kiện $a^2 = 0$ nên $a^n = 0 \neq a$ với mọi n > 1 là điều mâu thuẩn.

Vậy R_α phải là một vành chia nên theo bổ đề (2.1.4) R_α giao hoán. Vì R là một tổng trực tiếp con của các vành giao hoán R_α nên R cũng giao hoán■

§2. MỘT VÀI KẾT QUẢ VỀ MỞ RỘNG ĐỊNH LÝ JACOBSON

Định lý Jacobson tuy cho được một điều kiện của tính giao hoán nhưng cũng còn một nhược điểm là có quá ít vành giao hoán thỏa giả thiết của nó. Đố là lý do mà ta phải tìm cách mở rộng định lý này.

Định nghĩa: *Trong một vành R tùy ý, ta gọi:*

1) Một giao hoán tử cấp 2 của hai phần tử x, y là: $[x, y] = xy - yx$.

2) Một giao hoán tử cấp n (n >2) của n phần tử được định nghĩa bằng qui nạp: $[x_1,x_2,...,x_n] = [[x_1,x_2,...,x_{n-1}],x_n]$.

Nhận xét:

1) Với mọi $x \in R$, $y \in R$ ta có: x giao hoán với y $\Leftrightarrow [x, y] = 0$

2) Với mọi $n \geq 2$ thì giao hoán tử cấp n của n phần tử có tính cộng tính theo từng biến, tức là với mọi i $(1 \leq i \leq n)$:

$$[x_1,...,x_{i-1}, x_i+x_j,x_{i+1},...,x_n] = [x_1,...,x_{i-1}, x_i, x_{i+1},...,x_n] + [x_1,...,x_{i-1}, x_j, x_{i+1},...,x_n]$$

3) Nếu λ giao hoán với mọi x_k $(1 \leq k \leq n)$ thì:

$$[x_1,...,x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1},...,x_n] = \lambda[x_1,...,x_{i-1}, x_i, x_{i+1},...,x_n]$$

Từ khái niệm trên, ta có:

Mệnh đề (2.2.1): (định lý Jacobson-Herstein) *Cho R là một vành sao cho với mọi x, y $\in$ R đều tồn tại số nguyên $n(x, y) = n > 1$ (n phụ thuộc x và y) để cho $[x, y]^{n(x, y)} = [x, y]$ thì R giao hoán.*

Trước hết ta chứng minh định lý này trong trường hợp R là một vành chia.

Bổ đề (2.2.2): *Nếu D là một vành chia sao cho với mọi x, y $\in$ D đều tồn tại số nguyên $n(x, y) = n > 1$ (n phụ thuộc x và y) để cho $[x, y]^{n(x, y)} = [x, y]$ thì D giao hoán.*

Chứng minh:

Giả sử D là một vành chia thỏa giả thiết mà D không giao hoán thì tồn tại $a, b \in D$ sao cho $c = [a, b] \neq 0$.

Theo giả thiết thì tồn tại m để $c^m = c$.

Nếu $\lambda \neq 0$, $\lambda \in Z$ (Z là tâm của D) thì ta có $\lambda c = \lambda[a, b] = [\lambda a,b]$ do đó theo giả thiết có số tự nhiên $n > 1$ thỏa : $(\lambda c)^n = \lambda c$.

Nếu đặt $q = (m-1)(n-1) + 1$ thì ta có $(\lambda c)^q = \lambda c$ và $c^q = c$.
Vậy: $\lambda c = \lambda^q c^q = \lambda^q c \Rightarrow (\lambda^q - \lambda)c = 0$.
Do D là một vành chia và $c \neq 0$ nên suy ra $\lambda^q = \lambda$.

Đến đây ta đã chứng minh được: với mọi $\lambda \in Z$ đều tồn tại $q > 1$ để cho $\lambda^q = \lambda$, nên Z là một trường có đặc số $p \neq 0$. Gọi P là trường nguyên tố của Z.

Có thể chọn a, b $\in$ Z sáo cho chẳng những $c = [a, b] \neq 0$ mà còn có $c \notin Z$ vì nếu không thì mọi giao hoán tử cấp hai trong D đều thuộc Z. Từ đó thì $c \in Z$ và $ac = a(ab - ba) = a(ab) - (ab)a = [a, ab] \in Z$ nên suy ra $a \in Z$, mâu thuẩn với điều kiện $c = [a, b] \neq 0$.

Vậy, ta có thể giả sử $c =[a, b] \notin Z$.

Theo giả thiết thì $c^m = c$ nên c là phần tử đại số trên P $\Rightarrow$ có số nguyên $k > 0$ để $c^{p^k} = c$. Đến đây ta thấy mọi giả thiết của bổ đề (2.1.1) đều được thỏa mãn với c nên tồn tại phần tử $x \in D$ để cho $xcx^{-1} = c^i \neq c \Rightarrow xc = c^i x$.

Đặt $d= xc - cx$, ta có $d \neq 0$ và theo giả thiết thì tồn tại số nguyên $t > 1$ để $d^t = d$ hay d có cấp hữu hạn trong nhóm nhân D^* của D. Ta lại có: $dc = (xc - cx)c = (c^i x - cx)c = c^i xc - c\, c^i x = c^i(xc - cx) = c^i d$ do đó $dcd^{-1} = c^i \neq c \Rightarrow dc \neq cd$.

Với điều kiện này và c, d đều có cấp hữu hạn trong nhóm nhân D^* ta suy ra nhóm con nhân sinh bởi c và d hữu hạn nên giao hoán theo hệ quả (2.1.3). Điều này mâu thuẩn với $dc \neq cd$, do đó bổ đề được chứng minh■

Đến đây ta có thể áp dụng bổ đề để chứng minh mệnh đề (2.21)

Chứng minh mệnh đề (2.2.1):

Giả sử R là một vành có tính chất :

$\forall$ x, y $\in$ R: $\exists\, n = n(x, y) : [x, y]^{n(x, y)} = [x, y]$ ta chứng minh R là vành giao hoán. Xét các trường hợp sau:

1) Nếu R là một <u>vành chia</u> thì theo bổ đề (2.2.2) R giao hoán.

2) Nếu R là một <u>vành nguyên thủy</u> thì theo mệnh đề (1.4.3) hoặc R là một vành chia D, hoặc có $k > 1$ để D_k là ảnh đồng cấu của một vành con của R.

Nếu trường hợp thứ hai xảy ra thì D_k cũng kế thừa tính chất nêu trong giả thiết của R vì tính chất này bảo toàn qua phép lấy vành con và ảnh đồng cấu. Khi đó trong D_k xét các phần tử x và y với x, y như sau: $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & 0 \\ . & . & . \\ 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix} = e_{11}$ và $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = e_{12}$, ta có

$[x, y] = xy - xy = e_{12} = y$ và $y^2 = 0$ nên $[x, y]^2 = y^2 = 0 \neq [x, y]$
$\Rightarrow [x, y]^n \neq [x, y]$ với mọi $n > 1$, điều này mâu thuẩn với điều kiện D_k thỏa giả thiết. Do đó R phải là một vành chia nên R giao hoán.

3) Nếu R là một <u>vành nửa đơn</u> thì theo mệnh đề (1.5.4), R đẳng cấu với một tổng trực tiếp con các vành nguyên thủy R_α. Mỗi vành nguyên thủy R_α là ảnh đồng cấu của R nên kế thừa điều kiện của giả thiết, vây theo 2) R_α giao hoán. Từ đó R cũng giao hoán vì tính giao hoán được bảo toàn qua một đồng cấu và phép lấy vành con.

4) Nếu R là một <u>vành tùy ý</u> thì ta xét vành nửa đơn R/J(R) cũng thỏa giả thiết nên theo 3) R/J(R) giao hoán. Do đó với mọi $x, y \in R$ thì $xy - yx \in J(R)$.

Do $xy - yx = [x, y] \in J(R)$ và $[x, y]^n = [x, y]$ với $n > 1$ nên $[x, y] = 0$ (theo tính chất: $x \in J(R)$, $ux = u \Rightarrow u = 0$)

Vậy với mọi $x, y \in R$ ta đều có $[x, y] = 0$ nên R giao hoán■

Bây giờ ta xét một mở rộng của định lý này cho trường hợp giao hoán tử của n phần tử trong R ($n > 1$).

<u>Mệnh đề (2.2.3):</u> *Nếu R là một vành không chứa nil ideal khác (0) (hoặc R nửa đơn) sao cho:*

(1) Có một số nguyên $n > 1$ nào đó mà với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ thì tồn tại một số nguyên $m > 1$ (m phụ thuộc $x_1, x_2, \dots, x_n$) thỏa $[x_1, x_2, \dots, x_n]^m = [x_1, x_2, \dots, x_n]$

thì khi đó R là một vành giao hoán.

Trước khi chứng minh mệmh đề này ta cần hai bổ đề:

<u>Bổ đề (2.2.4):</u> *Nếu R là một vành chia thỏa điều kiện (1) thì ta có:*

(2) $[x_1, x_2, \dots, x_n] = 0$ với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$.

(trong trường hợp này ta nói $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ là một đồng nhất thức trên R)

Chứng minh:

Giả sử tồn tại $x_1, x_2,..., x_n \in R$ sao cho $a = [x_1, x_2,..., x_n] \neq 0$ khi đó theo giả thiết, tồn tại $m > 1$ để $a^m = a$.

Gọi Z là tâm của R thì $\forall\lambda\in Z$ ta có $\lambda a = \lambda[x_1, x_2,..., x_n] = [\lambda x_1, x_2,..., x_n]$ cũng là một giao hoán tử cấp n trong R nên $\exists\ k > 1$ để cho $(\lambda a)^k = \lambda a$. Nếu đặt $q = (m-1)(k-1)+1$ thì ta suy ra $a^q = a$ và $(\lambda a)^q = \lambda a$. Từ đó ta được $\lambda a = (\lambda a)^q = \lambda^q a^q = \lambda^q a \Rightarrow (\lambda^q-\lambda)a = 0$. Vì R là một vành chia và $a \neq 0$ nên ta được $\lambda^q-\lambda = 0$ với mọi $\lambda \in R$.

Vậy, với $2\in Z$ thì $\exists\ q >1$ để $2^q = 2$ nên trường Z (hoặc vành chia R) có đặc số $p \neq 0$. Gọi P là trường nguyên tố của Z.

Có thể chọn $x_1, x_2,...,x_n \in R$ sao cho $a = [x_1, x_2,...,x_n] \notin Z$ vì nếu không thì mọi giao hoán tử cấp n trong R đều thuộc Z, khi đó xét $a = [x_1, x_2,...,x_n] \neq 0$ và nếu đặt $b=[x_1, x_2,...,x_{n-1}]$ thì :

$$[b, bx_n] = b(bx_n)-(bx_n)b = b(bx_n- x_nb) = b[b, x_n]$$

với $[b, bx_n] =[x_1, x_2,...,x_{n-1},bx_n]$ và $[b, x_n] = a$ đều là giao hoán tử cấp n trong R nên thuộc Z. Do đó $[b, bx_n] = ba \in Z$ và $a \neq 0$ nên ta được $b \in Z$ (vì R là vành chia). Từ đó ta suy ra $a = [b, x_n] = 0$, mâu thuẩn với giả thiết $a \neq 0$

Vậy, có thể giả sử tồn tại $x_1, x_2,...,x_n\in R$ sao cho $a =[x_1,x_2,...,x_n]\notin Z$. Ta lại có $a^m = a$ với $m > 1$ nên a là phần tử đại số trên P, do đó P(a) là một mở rộng đại số, nên cũng là mở rộng hữu hạn, của P. Từ đó P(a) có cấp p^t với một $t \geq 1$nào đó. Nói cách khác, tồn tại $t \geq 1$ để cho $a^{p^t} = a$. Từ đó, a thỏa các điều kiện của bổ đề (2.1.1) nên tồn tại $x\in R$ để $xax^{-1} = a^i \neq a \Leftrightarrow xa = a^ix \neq ax$, ta có $c = [a, x] = ax-xa \neq 0$.

Ta lại có $ca = (ax-xa)a = a(xa)-(xa)a = a(a^ix)-(a^ix)a = a^i(ax-xa) = a^ic$ nên $cac^{-1} = a^i \neq a \Rightarrow ca \neq ac$.

Mặt khác ta còn có $a = [x_1, x_2,...,x_n]$ và $c = [a, x] = [x_1, x_2,...,x_n,x]= [[x_1, x_2],x_3,...,x_n]$ đều là giao hoán tử cấp n trong R nên có cấp hữu hạn trong nhóm nhân R^* của R.

Với các điều kiện trên thì nhóm con sinh bởi a và c trong R^* cũng có cấp hữu hạn nên theo hệ quả (2.1.3) là nhóm Abel, mâu thuẩn với tính chất $ca \neq ac$. Bổ đề đã được chứng minh■

Bổ đề (2.2.5): *Nếu R là một vành tùy ý thỏa điều kiện (1) thì ta có:*

(2) $[x_1, x_2,..., x_n] = 0$ với mọi $x_1, x_2,..., x_n \in R$.

Chứng minh:

Xét các trường hợp:

1) Nếu R là một vành chia thì bổ đề (2.2.4) đã được chứng minh.

2) Nếu R là một vành nguyên thủy và thỏa (1) thì khi đó hoặc R là một vành chia, nên khẳng định (2) đúng cho R, hoặc $\exists$ k > 1 để D_k là ảnh đồng cấu của một vành con nào đó của R.

Nếu khả năng thứ hai xảy ra thì do tính chất (1) được bảo toàn qua phép lấy ảnh con và ảnh đồng cấu nên (1) cũng đúng cho D_k. Khi đó trong D_k ta xét các phần tử:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = e_{21} \text{ và } x_2 = \dots\dots = x_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = e_{11}$$

thì ta có $[x_1, x_2,...,x_n] = x_1 \neq 0$ và $[x_1, x_2,...,x_n]^2 = 0$ nên: $[x_1, x_2,...,x_n]^m \neq [x_1, x_2,...,x_n]$, với mọi m > 1, mâu thuẩn với điều kiên D_k thỏa tính chất (1).

Vậy R phải là một vành chia nên (2) cũng đúng cho R.

3) Nếu R là một vành nửa đơn thì R đẳng cấu với một tổng trực tiếp con của các vành nguyên thủy R_α . Theo phần chứng minh trên, khẳng định (2) đã đúng cho mỗi R_α, hơn nữa tính chất (2) bảo toàn qua phép lấy tổng trực tiếp (vì các phép toán cộng và nhân thực hiện trên từng thành phần), phép lấy vành con và ảnh đồng cấu. Do đó (2) cũng đúng cho R.

4) Nếu R là một vành tùy ý thì R/J(R) là vành nửa đơn nên (2) đúng cho R/J(R). Do đó với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in R$ ta có $[x_1, x_2, ..., x_n] \in J(R)$. Theo giả thiết thì $[x_1, x_2, ..., x_n]^m = [x_1, x_2, ..., x_n]$, m > 1. Từ đó ta suy ra $[x_1, x_2, ..., x_n] = 0$ (theo tính chất: $x \in J(R)$, $ux = u \Rightarrow u = 0$)

Vậy ta đã chứng minh khẳng định trong bổ đề (2.2.4) cũng đúng cho một vành R tùy ý■

Từ các bổ đề (2.2.4), (2.2.5) ta có thể chứng minh mệnh đề (2.2.3).

Chứng minh mệnh đề (2.2.3):

Trước hết ta xét trường hợp R không chứa nil ideal khác (0).Theo bổ đề (2.2.5) thì ta đã có $[x_1, x_2, ..., x_n]$ là một đồng nhất thức trên R.

Do R không chứa nil ideal khác (0) nên theo mệmh đề (1.5.3), R là một tổng trực tiếp con của các vành nguyên tố R_α. Do tính giao hoán bảo toàn qua phép lấy tổng trực tiếp và vành con nên ta chỉ cần chứng minh R_α giao hoán, với mọi α.

Nói cách khác, ta có thể giả sử R là một vành nguyên tố và $[x_1, x_2, ..., x_n]$ là một đồng nhất thức trên R với $n > 1$.

Nếu $n > 2$ ta sẽ chứng minh $[x_1, x_2, ..., x_{n-1}]$ cũng là một đồng nhất thức trên R.

Thực vậy, cho $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in R$ tùy ý, do

$$[x_1, x_2, ..., x_n] = [[x_1, x_2, ..., x_{n-1}], x_n] = 0 \text{ với mọi } x_n \in R$$

nên ta có $[x_1, x_2, ..., x_{n-1}] \in Z = Z(R)$. Do đó mọi giao hoán tử cấp $n-1$ trong R đều thuộc Z.

Bây giờ, giả sử tồn tại $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in R$ sao cho $a = [x_1, x_2, ..., x_{n-1}] \neq 0$ và nếu đặt $b = [x_1, x_2, ..., x_{n-2}]$ thì ta có:

$$c = [b, bx_{n-1}] = b[b, x_{n-1}] = b[x_1, x_2, ..., x_{n-1}] = ba$$

Vì $a = [x_1, x_2, ..., x_{n-1}] \neq 0$, $c = [x_1, x_2, ..., x_{n-2}, bx_{n-1}]$ đều là giao hoán tử cấp $n-1$ trong R nên thuộc Z, vậy ta có $c = ba$ với $a, c \in Z$, $a \neq 0$.

Với đẳng thức này ta suy ra: $a(bx_{n-1}) = (ab)x_{n-1} = (ba)x_{n-1} = cx_{n-1} =$

$$= x_{n-1}c = x_{n-1}(ba) = (x_{n-1}b)a = a(x_{n-1}b)$$

hay tương đương $a(bx_{n-1} - x_{n-1}b) = a[b, x_{n-1}] = 0$. Vì $a \neq 0$ và R là một vành nguyên tố nên không có phần tử nào thuộc tâm của R là ước thực sự của 0. Vậy từ đẳng thức trên ta phải có $[b, x_{n-1}] = 0$ tức là $[x_1, x_2, ..., x_{n-1}] = 0$, mâu thuẩn với điều kiện $a \neq 0$.

Vậy ta đã chứng minh được rằng nếu $[x_1, x_2, ..., x_n]$ là một đồng nhất thức cho R thì $[x_1, x_2, ..., x_{n-1}]$ cũng là một đồng nhất thức cho R. Tiếp tục quá trình trên cuối cùng ta được $[x_1, x_2]$ phải là một đồng nhất thức cho R hay $[x_1, x_2] = 0$ với mọi $x_1, x_2 \in R$ nên R giao hoán■

Sau đây ta cần một số định nghĩa và bổ đề liên quan đến các mở rộng trường.

Định nghĩa: Cho K là một mở rộng đại số của một trường F. Phần tử a thuộc K gọi là tách được trên F nếu đa thức tối tiểu của nó trên F không có nghiệm bội.

Nhận xét: Một đa thức p(x) có nghiệm bội khi và chỉ khi p(x) và $\frac{dp(x)}{d(x)}$ có một nhân tử chung, do đó một đa thức bất khả qui có nghiệm bội thì phải có $\frac{dp(x)}{d(x)}$ là đa thức 0. Từ đó ta có:

1) Nếu F có đặc số 0 thì điều này suy ra p(x) là một đa thức hằng, khi đó mọi phần tử trong K đều tách được trên Z.

2) Nếu F có đặc số p thì $\frac{dp(x)}{d(x)} = 0$ suy ra $p(x) = g(x^p)$ với g là một đa thức nào đó. Khi đó nếu $a \in K$ thì tồn tại một số nguyên k sao cho a^{p^k} tách được trên F. Tuy nhiên, trong trường hợp này hoàn toàn có khả năng là cũng có $a^{p^k} \in F$. Khi đó ta có:

Định nghĩa: Cho K là một mở rộng đại số của một trường F. Giả sử một phần tử $a \in K$ sao cho tồn tại một số nguyên $k \geq 0$ để $a^{p^k} \in F$ thì ta nói a là hoàn toàn không tách được trên F.

Một mở rộng đại số K của F được gọi là mở rộng tách được (tương ứng: hoàn toàn không tách được) trên F nếu mọi phần tử của nó đều tách đươc (tương ứng: hoàn toàn không tách được) trên F.

Nhận xét: Người ta đã chứng minh được:

Tập các phần tử trong K hoàn toàn không tách được trên F lập thành một trường con của K. Kết quả tương tự cũng đúng cho tập các phần tử tách được trên F.

Bổ đề (2.2.6): *Cho K là một trường mở rộng của trường F, $K \neq F$ và giả sử với mọi $a \in K$ đều tồn tại một số nguyên $n(a) > 0$ để cho $a^{n(a)} \in F$. Khi đó:*

1) Hoặc là K hoàn toàn không tách được trên F.

2) Hoặc là K có đặc số nguyên tố và là đại số trên trường nguyên tố P của nó.

Chứng minh:

Nếu K là hoàn toàn không tách được trên F thì không có gì để chứng minh.

Giả sử K không là hoàn toàn không tách được trên F thì tồn tại một phần tử $a \in K$, $a \notin F$ là tách được trên F. Do $a^n \in F$ nên a là đại số và tách được trên F nên trường F(a) nhúng được vào một mở rộng chuẩn tắc hữu hạn L của F. Tính chuẩn tắc của L cho ta một tự đẳng cấu φ của L cố định F sao cho $b = \varphi(a) \neq a$.

Ta lại có $b^n = \varphi(a)^n = \varphi(a^n) = a^n$ vì $a^n \in F$, từ đó $b = \nu a$ với $\nu \neq 1 \in L$ là một căn bậc n của đơn vị.

Tương tự, vì $\varphi(a+1) = b+1$ và $(a+1)^m \in F$ nên tồn tại một phần tử $\mu \in L$ sao cho $\mu^m = 1$ và $b+1 = \mu(a+1)$ hay $\nu a+1 = \mu(a+1)$.

Ta lại có $\mu \neq \nu$ vì nếu không thì $b+1 = \nu(a+1) = \nu a + \nu = b+\nu$ mâu thuẩn với điều kiện $\nu \neq 1$.

Giải lại theo a ta được $a = \dfrac{1-\mu}{\nu-\mu}$.

Do μ và ν đều là căn của đơn vị nên đều đại số trên trường nguyên tố P và do đó a đại số trên P.

Ta cần chứng minh P có đặc số $p \neq 0$.

Đặt L_o là mở rộng chuẩn tắc hữu hạn của P chứa a. Các lý luận trên cho a cũng áp dụng được cho a+i với mọi số nguyên i (vì nếu a tách được trên F thì a+i cũng vậy). Từ đó ta có $a + i = \dfrac{i-\mu_i}{\nu_i-\mu_i}$ trong đó ν_i, μ_i đều là căn của đơn vị và thuộc L_o. Do đó nếu P có đặc số 0 thì các phần tử a+i là phân biệt và khi đó L_o là một mở rộng hữu hạn của trường hữu tỉ lại có một số vô hạn các căn của đơn vị phân biệt là điều vô lý. Vậy P phải có đặc số $p \neq 0$.

Bây giờ nếu $f \in F$ thì a+f cũng tách được trên F nên a+f là đại số trên P. Nhưng a là đại số trên P nên suy ra f cũng đại số trên P. Vậy F đại số trên P. Nhưng K là đại số trên F nên từ đó K đại số trên P. Bổ đề đã được chứng minh.

<u>Bổ đề (2.2.7):</u> (định lý Jacobson-Noether) *Nếu D là một đại số chia không giao hoán và là đại số trên tâm Z của nó thì tồn tại một phần tử thuộc D, không thuộc Z, là tách được trên Z.*

Chứng minh:

Nếu D có đặc số 0 thì mọi phần tử của D đều tách được trên Z, do đó ta xét một vành chia D có đặc số $p \neq 0$.

Nếu khẳng định của bổ đề là sai thì D là hoàn toàn không tách được trên Z, tức là với mọi $x \in D$ thì $x^{p^{n(x)}} \in Z$ với một $n(x) \geq 0$ nào đó. Vậy thì tồn tại $a \in D$, $a \notin Z$ sao cho $a^p \in Z$.

Gọi δ là ánh xạ trên D xác định bởi $x\delta = xa - ax$ thì do D có đặc số $p \neq 0$ nên ta có $x\delta^p = xa^p - a^p x = 0$ vì $a^p \in Z$.

Ta lại có $a \notin Z$ nên $\delta \neq 0$, vậy nếu $y\delta \neq 0$ thì tồn tại một số $k > 1$ sao cho $y\delta^k = 0$ nhưng $y\delta^{k-1} \neq 0$.

Đặt $x = y\delta^{k-1}$ thì do $k > 1$ ta có $x = w\delta = wa - aw$.

Từ $x\delta = 0$ ta suy ra $xa - ax = 0$, do D là một vành chia nên ta viết được $x = au$ và x giao hoán với a nên u cũng vậy.

Do đó $au = wa - aw$ và ta suy ra:

$a = (wa - aw)u^{-1} = (wu^{-1})a - a(wu^{-1}) = ca - ac$ với $c = wu^{-1}$, từ đây ta được $c = 1 + aca^{-1}$.

Nhưng với một t nào đó ta lại có $c^{p^t} \in Z$ nên:

$c^{p^t} = (1 + aca^{-1})^{p^t} = 1 + (aca^{-1})^{p^t} = 1 + ac^{p^t}a^{-1} = 1 + c^{p^t}$ vì $c^{p^t} \in Z$. Từ đây dẫn đến mâu thuẩn là $1 = 0$. Bổ đề đã được chứng minh■

Từ hai kết quả trên thì Herstein đã chứng minh được một định lý mở rộng khác cho định lý Jcobson [mện đề (2.1.5)]

Mệnh đề (2.2.8): *Cho R là một vành có tâm Z và nếu với mọi $a \in R$ thì tồn tại một số nguyên $n(a) > 0$ để cho $a^{n(a)} \in Z$. Khi đó nếu R không có nil ideal thì nó giao hoán.*

(Hay tương đương: ideal các giao hoán tử của R phải là nil)

Chứng minh:

Trước hết ta chứng minh kết quả cho một vành chia.

Nếu R là một vành chia thì do $a^{n(a)} \in Z$ với mọi $a \in R$ nên R đại số trên Z. Theo bổ đề (2.2.7) thì, hoặc R giao hoán, hoặc tồn tại một phần tử $a \notin Z$ tách được trên Z. Nếu khả năng sau xảy ra thì trường Z(a) không là hoàn toàn không tách được trên Z và thỏa các giả thiết của bổ đề (2.2.6) nên ta suy ra Z(a), và do đó Z, là đại sso trên trường nguyên tố P với đặc số $p \neq 0$.

Vậy nếu $x \in R$ thì vì x đại số trên Z nên cũng đại số trên P. Điều này cho thấy P(x) là một trường hữu hạn. Từ đó $x^{m(x)} = x$ với $m(x) > 1$ nào đó. Vậy theo định lý Jacobson [mệnh đề (2.1.5)] thì R giao hoán.

Bây giờ ta xét trường hợp R là một vành nguyên thủy. Khi đó, hoặc R là một vành chia D, hoặc với một $k > 1$ nào đó thì D_k là ảnh đồng cấu của một vành con của R. Với khả năng sau, trong D_k ta xét phần tử x:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = e_{11}$$

thì ta có $x^m = x$ với mọi m với x không thuộc tâm của D_k, mâu thuẫn với điều kiện D_k kế thừa tính chất nêu trong giả thiết cho R. Vậy R phải là một vành chia nên nó giao hoán theo chứng minh trên.

Trong phần còn lại của phép chứng minh lẽ ra ta phải chứng minh cho trường hợp R là vành nửa đơn, nhưng nhằm đạt được một kết quả sâu hơn ta sẽ chuyển sang một hướng khác.

Bây giờ giả sử R là một vành không có nil ideal khác (0) và thỏa điều kiện với mọi $a \in R$ thì tồn tại $n(a) > 0$ thỏa $a^{n(a)} \in Z$.

Theo mệnh đề (1.5.3) và chú thích sau đó thì ta có thể biểu diễn R thành một tổng trực tiếp con các vành nguyên tố R_α và có tính chất: *Với mỗi R_α đều tồn tại một phần tử không lũy linh $x_\alpha \in R_\alpha$ sao cho với mọi ideal khác (0) $U_\alpha \subset R_\alpha$ thì $x_\alpha^{m(U)} \in U_\alpha$ với $m(U) > 0$ nào đó.*

Vì là ảnh đồng cấu của R nên R_α thỏa giả thiết $a^{n(a)} \in Z$. Vậy để chứng minh mệnh đề ta chỉ cần chứng minh cho R_α.

Nói cách khác, ta có thể giả sử R là một vành nguyên tố thỏa điều kiện $a^{n(a)} \in Z$ và có thêm tính chất là tồn tại một phần tử không lũy linh $b \in R$ sao cho với mọi ideal $U \neq (0)$ trong R thì $b^{m(U)} \in U$.

Do $b^{n(b)} = c \in Z$ cũng không lũy linh và các lũy thừa của nó di chuyển quanh các ideal khác (0) của R nên ta có thể giả thiết ngay chính $b \in Z$. Mặt khác, vì R là vành nguyên tố nên không có phần tử nào thuộc Z là ước của 0 trong R.

Đặt $R = \{(r, z)/\ r \in R, z \neq 0, z \in Z\}$ và trong R ta định nghĩa quan hệ xác định bởi : $(r_1, z_1) \approx (r_2, z_2)$ nếu $r_1z_2 = r_2z_1$ thì đây là một quan hệ tương đương. Đặt R^* là tập các lớp tương đương và ký hiệu [r,z] là lớp tương đương của (r, z), ta định nghĩa các phép toán cộng và nhân trong R^* như sau:

$$[r_1, z_1] + [r_2, z_2] = [r_1z_2 + r_2z_1, r_1r_2]$$

$$[r_1, z_1][r_2, z_2] = [r_1r_2, z_1z_2]$$

Do các phần tử của Z không là ước của 0 trong R nên các phép toán này được định nghĩa tốt và R^* là một vành. Hơn nữa ánh xạ biến r $\in$ R thành $[r, z] \in R^*$ là một phép nhúng R vào R^*. Sau cùng, tâm của R^* là $Z^* = \{(r, z)/ r \in Z\}$ và suy ra ngay Z^* là một trường.

Ngoài ra, nếu $[r, z]\in R^*$ thì $[r, z]^{n(r)} = [r^{n(r)}, z]^{n(r)} \in Z^*$ nên R^* cũng kế thừa tính chất trong giả thiết cho R. Tuy nhiên R^* lại là một vành đơn vì nếu $U^* \neq (0)$ là một ideal của R^* và đặt $U = \{r \in R/[r, z]\in U^*, z \in Z\}$ thì $U \neq (0)$ là một ideal của R nên $b^{m(U)} \in U$. Mà $0 \neq b^{m(U)} \in Z$ (vì b không lũy linh và $b \in Z$) nên từ đó ta suy ra U^* chứa một phần tử khác 0 của Z^*. Mặt khác, vì Z^* là một trường nên ta được $Z^* = R^*$. Vậy ta đã chứng minh được R^* là một vành đơn.

Là một vành đơn và có đơn vị nên R^* là vành nguyên thủy và do đó phải giao hoán theo chứng minh trên. Mệnh đề đã được chứng minh.

<u>Nhận xét:</u>

Mệnh đề này thực sự là một mở rộng của định lý Jacobson [mệnh đề (2.1.5)] vì nếu R là một vành thỏa $x^{n(x)} = x$, $n(x) > 1$ thì R không có chứa phần tử lũy linh khác 0 nên cũng không có nil ideal khác (0).

Mặt khác, nếu e là một phần tử lũy đẳng trong R thì với mọi $x\in R$, bằng phép tính đơn giản ta có: $(xe - exe)^2 = 0 = (ex - exe)^2$ và suy ra $xe - exe = ex - exe = 0$ (vì R không chứa phần tử lũy linh khác 0). Từ đó thì $xe = ex$. Vậy mọi lũy đẳng trong R đều thuộc tâm.

Do đó, nếu $a^{n(a)} = a$, $n(a) > 1$ thì $e = a^{n(a)-1}$ là một lũy đẳng và theo chứng minh trên ta suy ra $a^{n(a)-1} \in Z$.

Vậy các giả thiết của mệnh đề (2.2.8) đều được thỏa mãn nên R giao hoán.

Tiếp theo, ta xét thêm một trường hợp mở rộng hơn nữa của mệnh đề vừa rồi, các phần chứng minh đã được trình bày trong luận văn thạc sĩ khoa học của Phan Trường Linh – tp Hồ Chí Minh 2001.

<u>Mệnh đề (2.2.9)</u>: *Cho R là một vành nửa đơn thỏa điều kiện:*

(1) $\forall x, y \in R$, $\exists m = m(x,y)$, $\exists n = n(x,y)$ $(m, n > 0)$ để cho $[x^m, y^n]=0$ thì R giao hoán.

Ta cần nhắc lại một khái niệm và sẽ dùng hai bổ đề sau để chứng minh mệnh đề (2.2.9):

Định nghĩa: *Cho R là một vành tùy ý, phần tử $x \in R$ được gọi là tựa chính qui phải nếu tồn tại một phần tử $x' \in R$ sao cho $x + x' + xx' = 0$. Khi đó x' được gọi là tựa nghịch đảo phải của x.*

Bổ đề (2.2.10): *Cho R là một vành có đơn vị 1 và thỏa điều kiện (1). Nếu $x, y \in R$ sao cho x và $(1 + x')y$ đều là tựa chính qui thì tồn tại một $k = k(x, y) > 0$ để cho:*

$$(2) \qquad [x, y^k][(1+x')y]'(1+x')[x, y^k] = 0$$

trong đó $[x, y^k]$ là giao hoán tử cấp hai của các phần tử x và y^k.

Bổ đề (2.2.11): *Nếu D là một vành chia thỏa điều kiện (1) thì với mọi x, y thuộc D đều tồn tại một số nguyên $k = k(x, y) > 0$ để cho $[x, y^k] = 0$.*

Với các bổ đề vừa thiết lập ta đã có thể chứng minh mệnh đề (2.2.9).

Chứng minh mệnh đề (2.2.9):

1) Nếu R là một vành chia thỏa điều kiện (1), khi đó với $a, b \in R$ tùy ý ta xét vành con R_1 sinh bởi a và b.

Theo bổ đề (2.2.11) thì với mọi $x \in R_1$($R_1 \subset R$ là một vành chia) đều tồn tại các số nguyên $m, n > 0$ để cho $[a, x^m]=0$ và $[b, x^n]=0$. Nếu lấy k là bội chung nhỏ nhất của m và n thì $k > 0$và x^k giao hoán được với cả a và b. Vậy $x^k \in Z(R_1)$.

Mặt khác, do R là vành chia nên R_1 không có phần tử lũy linh khác 0 và do đó cũng không chứa nil ideal khác (0). Đến đây ta thấy các điều kiện của mệnh đề (2.2.8) đều được thỏa mãn cho R_1 nên R_1 giao hoán. Tức là ta có ab = ba, suy ra R giao hoán.

2) Nếu R là một vành nguyên thủy thì theo mệnh đề (1.4.3), hoặc R là một vành chia D, hoặc có một $k > 1$ để D_k là ảnh đồng cấu của một vành con nào đó của R.

Nếu trường hợp thứ hai xảy ra thì dễ thấy D_k cũng kế thừa tính chất nêu trong giả thiết cho R vì tính chất này bảo toàn qua phép lấy vành con và ảnh đồng cấu. Khi đó, trong D_k ta xét các phần tử:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = e_{11} \text{ và } y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = e_{11} + e_{12}$$

thì với mọi m, n > o ta có $x^m = x$, $y^n = y$ nên $[x^m, y^n] = [x, y] = e_{12} \neq 0$, mâu thuẩn với điều kiện D_k thỏa giả thiết. Vậy R phải là một vành chia nên R giao hoán.

3) Nếu R là một vành nửa đơn thì theo mệnh đề (1.5.3), R đẳng cấu với một tổng trực tiếp con của các vành nguyên thủy R_α. Mà mỗi vành nguyên thủy R_α là ảnh đồng cấu của R nên kế thừa điều kiện của giả thiết, vậy theo 2) nó phải giao hoán. Từ đó suy ra R cũng giao hoán và mệnh đề đã được chứng minh■

§3. MỘT HƯỚNG TIẾP TỤC MỞ RỘNG CỦA ĐỊNH LÝ JACOBSON

Giả sử trong vành R nửa đơn, không giao hoán có $f(x_1, x_2,..., x_n)$ là một đồng nhất thức đa thức, giả sử có các số nguyên $k_1, k_2, ..., k_n$ (lớn hơn 0, phụ thuộc $x_1, x_2, ..., x_n$) thỏa điều kiện $f(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}) = 0$ thì liệu có thể có $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ hay không?

Trong trong luận văn thạc sĩ khoa học của Phan Trường Linh – tp Hồ Chí Minh 2001 tác giả đã giải quyết cho trường hợp $f(x_1, x_2) = [x_1,x_2]$, trong luận văn này mục đích của chúng tôi là xét trường hợp $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1,x_2], x_3]$

Mệnh đề (2.3.1): *Nếu R là vành nửa đơn có đặc số $p \neq 0$ và thỏa điều kiện : (1) $\forall x, y, z \in R$, $\exists m = m(x, y, z) > 0$, $n = n(x, y, z) > 0$, $l = l(x, y, z) > 0$: $[[x^m, y^n], z^l] = 0$ thì R là vành giao hoán.*

Chứng minh:

1) Xét trường hợp R là một vành chia:

Chọn z = y, theo giả thiết ta luôn tìm được m, n thỏa $[[x^m, y^n], y^n] = 0$.
Ta chứng minh công thức sau :

$$[x^m, \underbrace{y^n, y^n, \dots, y^n}] = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i y^{in} x^m y^{(k-i)n}$$

k lần y^n, $k > 1$

Khi k = 2:

$$\begin{aligned}[[x^m,y^n],y^n] &= (x^my^n - y^nx^m)y^n - y^n(x^my^n - y^nx^m) \\ &= x^my^{2n} - y^nx^my^n - y^nx^my^n + y^{2n}x^m \\ &= x^my^{2n} - 2y^nx^my^n + y^{2n}x^m\end{aligned}$$

Giả sử công thức đã đúng với k, ta chứng minh công thức đúng với k+1:

$$[[x^m, \underbrace{y^n, y^n,..., y^n}_{\text{k lần } y^n}],y^n] = [x^m, y^n, y^n,..., y^n]y^n - y^n[x^m, y^n, y^n,..., y^n]$$

$$=(x^my^{kn} - C_k^1\, y^nx^my^{(k-1)n} +... +(-1)^{i-1} C_k^{i-1}\, y^{(i-1)n}x^my^{(k-i+1)n} +(-1)^i C_k^i\, y^{in}x^my^{(k-i)n}$$
$$+...+(-1)^ky^{kn}x^m)y^n - y^n(x^my^{kn} - C_k^1\, y^nx^my^{(k-1)n} +... +(-1)^{i-1} C_k^{i-1}\, y^{(i-1)n}x^my^{(k-i+1)n}$$
$$+(-1)^i C_k^i\, y^{in}x^my^{(k-i)n} +...+(-1)^ky^{kn}x^m)$$

$$= C_{k+1}^0\, x^my^{(k+1)n} + ... +(-1)^i C_{k+1}^i y^{in}x^my^{(k-i+1)n} + ... + (-1)^{k+1}y^{(k+1)n}x^m.$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i C_k^i y^{in} x^m y^{(k-i)n}$$

Ta đã chứng minh xong công thức.

- Nếu đặc số p = 2 thì:

$[[x^m,y^n],y^n] = x^my^{2n} - 2y^nx^my^n + y^{2n}x^m = x^my^{2n} - y^{2n}x^m = [x^m, y^{2n}]$ mà $[[x^m, y^n], y^n] = 0$ nên $[x^m, y^{2n}] = 0$

Trước khi xét trường hợp p > 2 ta chứng minh một kết quả phụ như sau: "nếu p là số nguyên tố thì $C_p^i \,\vdots\, p$ (với $1 \le i \le p-1$)"

Giả sử p là số nguyên tố, ta có :

$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} = p\frac{(p-1)!}{i!(p-i)!} \quad (\text{với } 1 \le i \le p-1)$$

Vì C_p^i là số tự nhiên nên $p(p-1)! \,\vdots\, i!(p-1)!$

Vì p là số nguyên tố nên ƯCLN(p, i!(p–1)!) = 1

Do đó $(p-1)! \,\vdots\, i!(p-1)!$ nên $C_p^i \,\vdots\, p$ (với $1 \le i \le p-1$)

- Nếu đặc số p > 2 thì vì p nguyên tố nên $C_p^i \,\vdots\, p$ (với $1 \le i \le p-1$) và p lẻ.

Do đó: $$[x^m, \underbrace{y^n, y^n,..., y^n}_{\text{p lần } y^n}] = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i y^{in} x^m y^{(p-i)n} = x^my^{np} - y^{np}x^m$$

$\Rightarrow [x^m, y^{np}] = 0.$

Vậy, ta luôn có $[x^m, y^{np}] = 0$ nên theo mệnh đề (2.2.9) R là vành giao hoán.

2) Xét trường hợp R là một vành nguyên thủy: theo mệnh đề (1.4.3), hoặc R là một vành chia D, hoặc có một k > 1 để D_k là ảnh đồng cấu của một vành con nào đó của R.

Nếu trường hợp thứ hai xảy ra thì dễ thấy D_k cũng kế thừa tính chất nêu trong giả thiết cho R vì tính chất này bảo toàn qua phép lấy vành con và ảnh đồng cấu. Khi đó, trong D_k ta xét các phần tử:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = e_{11} \text{ và } y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = e_{11} + e_{12}$$

thì với mọi m, n > o ta có $x^m = x$; $y^n = y$ nên $[[x^m, y^n], y^n] = [[x, y], y] = -e_{12} \neq 0$ mâu thuẫn với điều kiện D_k thỏa giả thiết. Vậy R phải là một vành chia nên R giao hoán.

3) Xét trường hợp R là một vành nửa đơn: theo mệnh đề (1.5.4), R đẳng cấu với một tổng trực tiếp con của các vành nguyên thủy R_α. Mà mỗi vành nguyên thủy R_α là ảnh đồng cấu của R nên kế thừa điều kiện của giả thiết, vậy theo 2) nó phải giao hoán. Từ đó suy ra R cũng giao hoán và mệnh đề đã được chứng minh■

Mệnh đề (2.3.2): *Nếu R là vành nửa đơn có đặc số p = 0 và thỏa điều kiện : (1)* $\forall x, y, z \in R, \exists m = m(x, y, z) > 0, n = n(x, y, z) > 0, l = l(x, y, z) > 0: [[x^m, y^n], z^l] = 0$ *thì R là vành giao hoán.*

Ta nhắc lại một khái niệm và sẽ dùng hai bổ đề sau để chứng minh mệnh đề (2.3.2):

Định nghĩa: *Cho R là một vành tùy ý, ánh xạ d: R ——>R (R xem là nhóm cộng) gọi là toán tử vi phân nếu d(ab) = d(a)b + ad(b) với mọi a, b* $\in$ *R.*

Nếu R là đại số trên trường F thì d có thêm tính chất: $d(\alpha x) = \alpha d(x)$ với mọi $x \in R$, mọi $\alpha \in F$.

Bổ đề (2.3.3): *Cho R là một vành có đặc số 0, d là toán tử vi phân trên R. Nếu* $d^2(z) = 0$ *thì* $d^k(z) = k!d(z)^k$ *với* $z \in R$, $k \geq 1$.

Chứng minh:

• Khi k =1 : $d^1(z) = 1!d(z)^1$.

• Giả sử đã có $d^k(z) = k!d(z)^k$ ta chứng minh $d^{k+1}(z) = (k+1)!d(z)^{k+1}$

Ta có: $d^{k+1}(z) = d(d^k(z)) = d(k!d(z)^k) = k!d(d(z)^k)$

Tính $A = d(d(z)^k)$:

$$
\begin{aligned}
A &= d(d(z)^{k-1}.d(z)) \\
&= d(d(z)^{k-1}).d(z) + d(z)^{k-1}.d(d(z)) \\
&= d(d(z)^{k-1}).d(z) + d(z)^{k-1}.\ d^2(z) \\
&= d\left(\frac{d^{k-1}(z)}{(k-1)!}\right).d(z) + 2d(z)^{k-1}.\ d(z)^2
\end{aligned}
$$

(vì $d^{k-1}(z) = (k-1)!d(z)^{k-1}$ theo giả thiết qui nap)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(k-1)!}d(d^{k-1}(z)).d(z) + 2d(z)^{k+1} \\
&= \frac{1}{(k-1)!}d^k(z).\ d(z) + d(z)^{k+1}
\end{aligned}
$$

(vì $2d(z)^{k+1} = d(z)^{k-1}.\ d^2(z) = d(z)^{k-1}.0 = 0$ nên $d(z)^{k+1} = 2d(z)^{k+1} = 0$)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(k-1)!}k!d(z)^k.\ d(z) + d(z)^{k+1} \\
&= k\ d(z)^{k+1} + d(z)^{k+1} \\
&= (k+1)\ d(z)^{k+1}
\end{aligned}
$$

Do đó: $d^{k+1}(z) = k!A = k!\ (k+1)\ d(z)^{k+1} = (k+1)!d(z)^{k+1}$, ta chứng minh xong mệnh đề.

Bổ đề (2.3.4): *Cho R là một vành có đặc số 0, nếu R thỏa điều kiện : (1) $\forall$ x, y, z $\in$ R, $\exists$ m = m(x, y, z) > 0, n = n(x, y, z) > 0, l = l(x, y, z)> 0: $[[x^m, y^n], z^l] = 0$ thì tồn tại các số nguyên a, b sao cho $[x^a, y^b]$ lũy linh.*

Chứng minh:

Xét ba phần tử x, y, y theo điều kiện (1) ta có các số nguyên m, n sao cho $[[x^m, y^n], y^n] = 0$.

Xét ba phần tử x^{2r}, y, y theo điều kiện (1) ta có các số nguyên m, t sao cho $[[x^{2mr}, y^t], y^t] = 0$.

Xét toán tử $d(u) = uy^{tn} - y^{tn}u = [u, y^{tn}]$ta có d là toán tử vi phân, thật vậy:

$d(uv) = [uv, y^{tn}] = uvy^{tn} - y^{tn}uv$

$$d(u)v + ud(v) = [u, y^{tn}]v + u[v, y^{tn}] = (uy^{tn} - y^{tn}u)v + u(vy^{tn} - y^{tn}v) = \\ = uy^{tn}v - y^{tn}uv + uvy^{tn} - uy^{tn}v = uvy^{tn} - y^{tn}uv$$

$\Rightarrow d(uv) = d(u)v + ud(v)$

Với $u = x^m$, ta tính $d^2(u)$:

$d^2(u) = d(d(u)) = d([u, y^{tn}]) = [[u, y^{tn}], y^{tn}] = [[x^m, y^{tn}], y^{tn}]$ theo trên ta có $d^2(u) = 0$.

Theo bổ đề (2.3.3) ta có $d^{2r}(u) = (2r)!d(u)^{2r}$. Vì $d^2(u) = 0$ nên $d^{2r}(u) = 0$ do đó $(2r)!d(u)^{2r+} = 0 \Rightarrow d(u)^{2r} = 0$ (do vành có đặc số 0)

$$\Rightarrow [u, y^{tn}]^{2r} = 0 \Rightarrow [x^m, y^{tn}]^{2r} = 0$$

$$\Rightarrow [x^m, y^{tn}] \text{ là phần tử lũy linh.}$$

Ta đã chứng minh xong bổ đề. Bây giờ ta chứng minh mệnh đề (2.3.2)

Chứng minh mệnh đề (2.3.2):

Theo bổ đề (2.3.4) trong vành R nửa đơn với mọi phần tử x, y bao giờ cũng tìm được các số nguyên m, n sao cho $[x^m, y^n]$ là phần tử lũy linh. Vì R là vành nửa đơn nên $[x^m, y^n] = 0$, do đó theo mệnh đề (2.2.9) R là vành giao hoán■

Với hai mệnh đề (2.3.1), (2.3.2) ta đã chứng minh được:

Nếu R là vành nửa đơn thỏa điều kiện:
$\forall x, y, z \in R, \exists m = m(x, y, z) > 0, n = n(x, y, z) > 0, l = l(x, y, z) > 0 : [[x^m, y^n], z^l] = 0$ *thì R là vành giao hoán.*

và do đó mục đích mà chúng tôi đặt ra ban đầu đã đạt được:

KẾT LUẬN

---♦♦♦---

Trong luận văn này chúng tôi đã nêu một vài mở rộng cho một định lý rất nổi tiếng của Jacobson về điều kiện để một vành trở thành một vành giao hoán.

Phần 1: luận văn trình bày các khái niệm cơ bản về vành, modul, các lớp vành đặc biệt và quan hệ giữa các lớp vành.

Phần 2: luận văn trình bày định lý Jacobson, một vài kết quả về mở rộng định lý Jacobson. Các kết quả này là được tìm thấy do Herstein, ngoài ra luận văn cũng dựa trên các kết quả đã được nêu trong luận văn thạc sĩ khoa học của Phan Trường Linh – tp Hồ Chí Minh 2001. Dựa trên các kết quả đó luận văn đã nêu ra một hướng tiếp tục mở rộng định lý Jacobson.

Lẽ ra kết luận cuối cùng nên vương tới trường hợp R là một vành không có nil ideal khác (0), nhưng do thời gian hạn hẹp và khả năng có hạn nên chúng tôi đã không thực hiện được và xin hẹn một dịp khác.

Luận văn chắc vẫn còn thiếu sót, mong quý thầy cô và các bạn đồng học sẵn lòng góp ý để chúng tôi có dịp học hỏi thêm. Xin chân thành cảm ơn.

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 11 năm 2001

ĐINH QUỐC HUY

(Học viên Cao học khóa 9/1998

Trường Đại Học Sư Phạm – tp HCM)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1) I.N. Herstein, NONCOMMUTATIVE RINGS,
The Mathematical Association of America, 1968.
2) S. Lang, ĐẠI SỐ,
Nhà xuất bản Đại học và trung học chuyên nghiệp – 1978.
3) Ngô Thúc Lanh, ĐẠI SỐ (giáo trình sau đại học),
Nhà xuất bản Giáo dục – 1985.
4) Phan Trường Linh, Luận văn thạc sĩ khoa học chuyên ngành đại số và lý thuyết số– tp Hồ Chí Minh 2001.

---📖📖📖---